灰度变换与空间滤波

本章提要

- 空域图像增强 – 灰度变换

- 空域图像增强 – 直方图处理

- 卷积和空域滤波

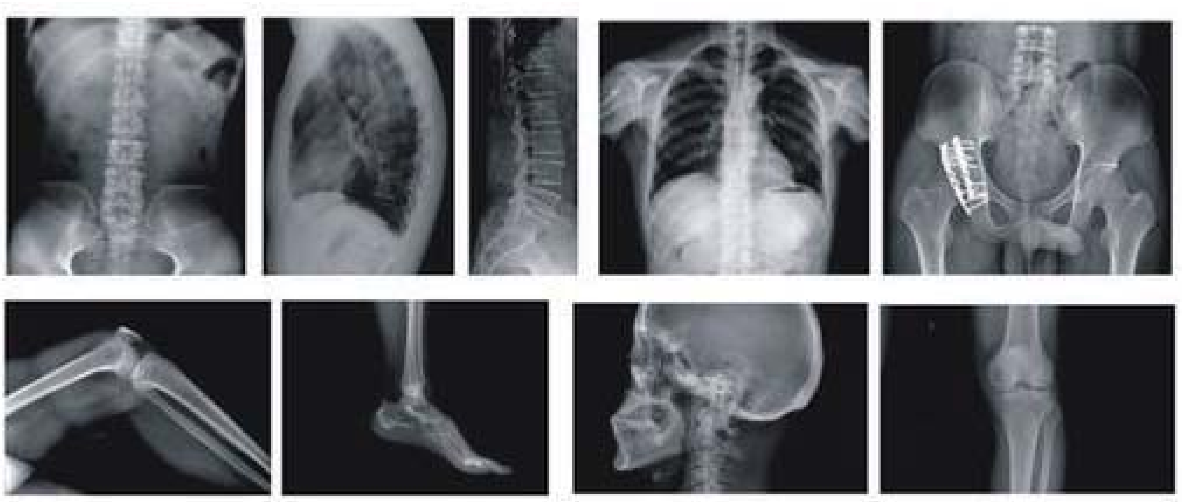
空间域图像增强

- 空间域图像增强背景知识
- 基本灰度变换
- 直方图处理

背景知识

- 增强的首要目标是处理图像，使其比原始图像更适合于特定应用

面向问题



X成像技术不适用于处理月球发回的照片

背景知识

- 两大类方法:
  - 空间域方法：图像平面本身，对图像的像素直接处理;

离散

  - 频域方法：修改图像的频谱例如傅里叶变换为基础;

连续

背景知识

- 空间域方法是直接对像素操作的过程

$$g(x, y) = T(f(x, y))$$

输出图像

原始图像

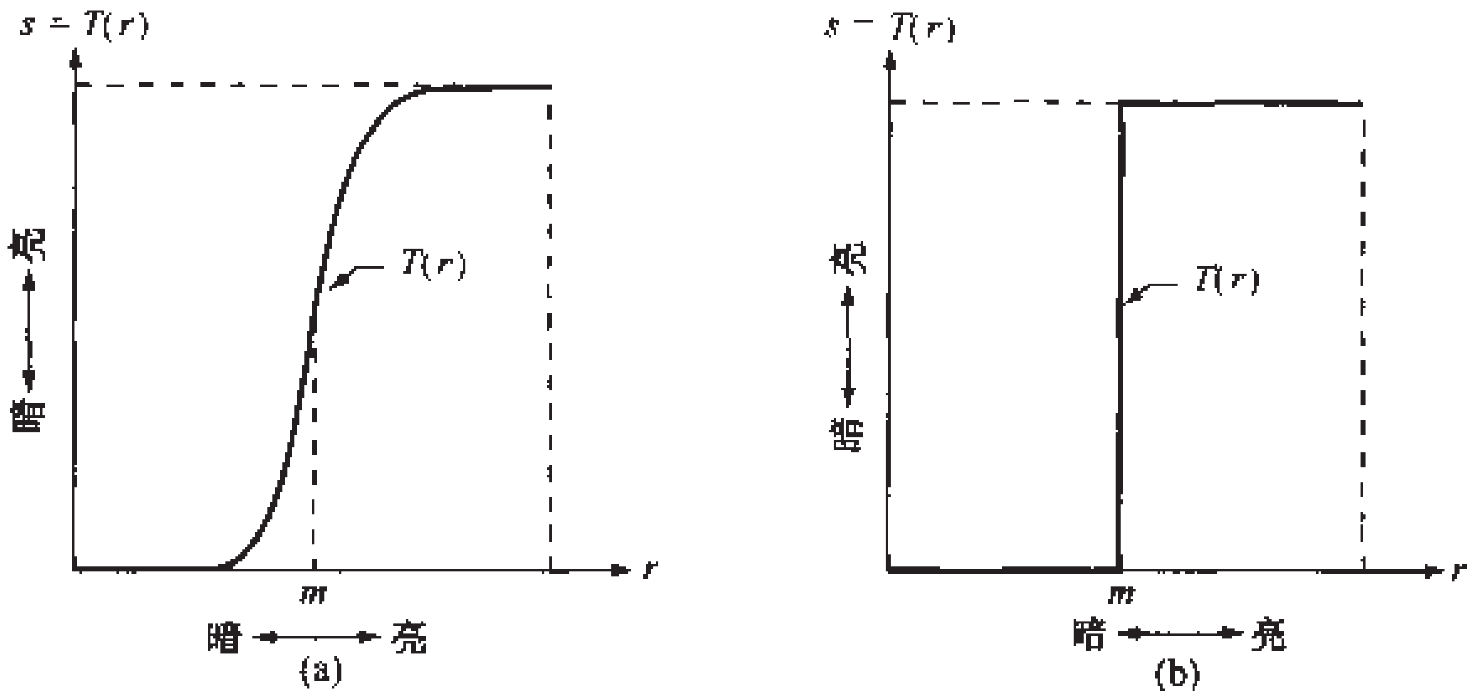
操作算子，定义在
(x, y) 的邻域

背景知识

邻域就是f（x，y）

- 当邻域为本身时，T操作变成灰度级变换函数（也叫做强度映射）

$$s = T(r)$$

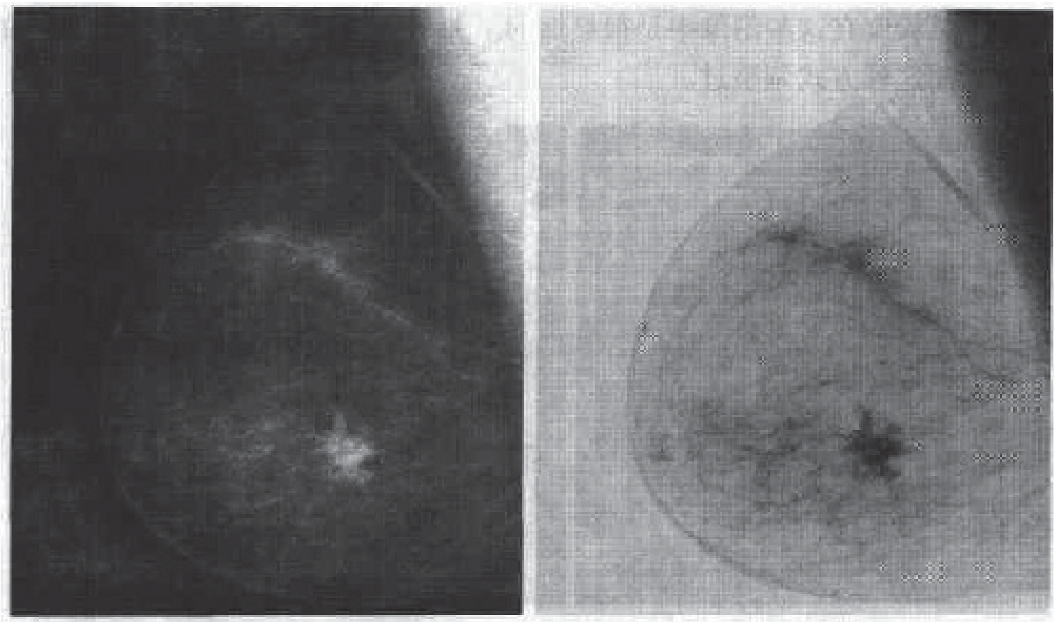


空间域图像增强

- 像素间的基本关系
- 空间域图像增强背景知识
- 基本灰度变换
- 直方图处理

图像反转

- 公式： $S = L - 1 - r \qquad L = 2^b$



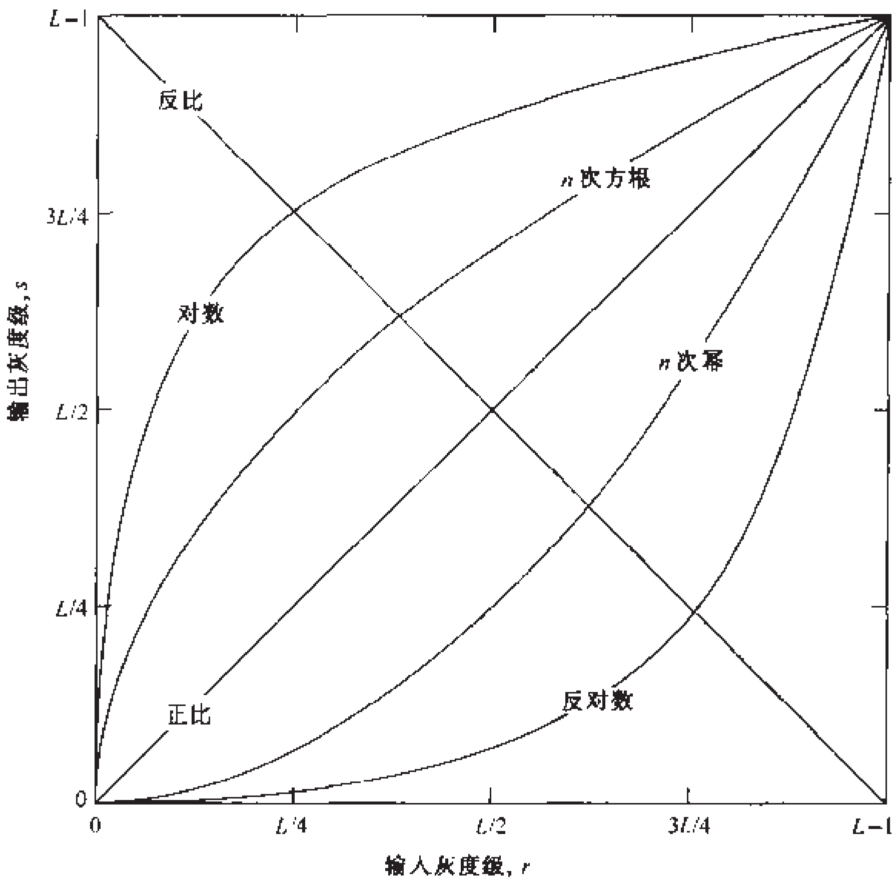
反转前　　反转后

反转后可以看到有一小块病变。

尽管两幅图像本质上内容一样，但是分析图像的难易变了

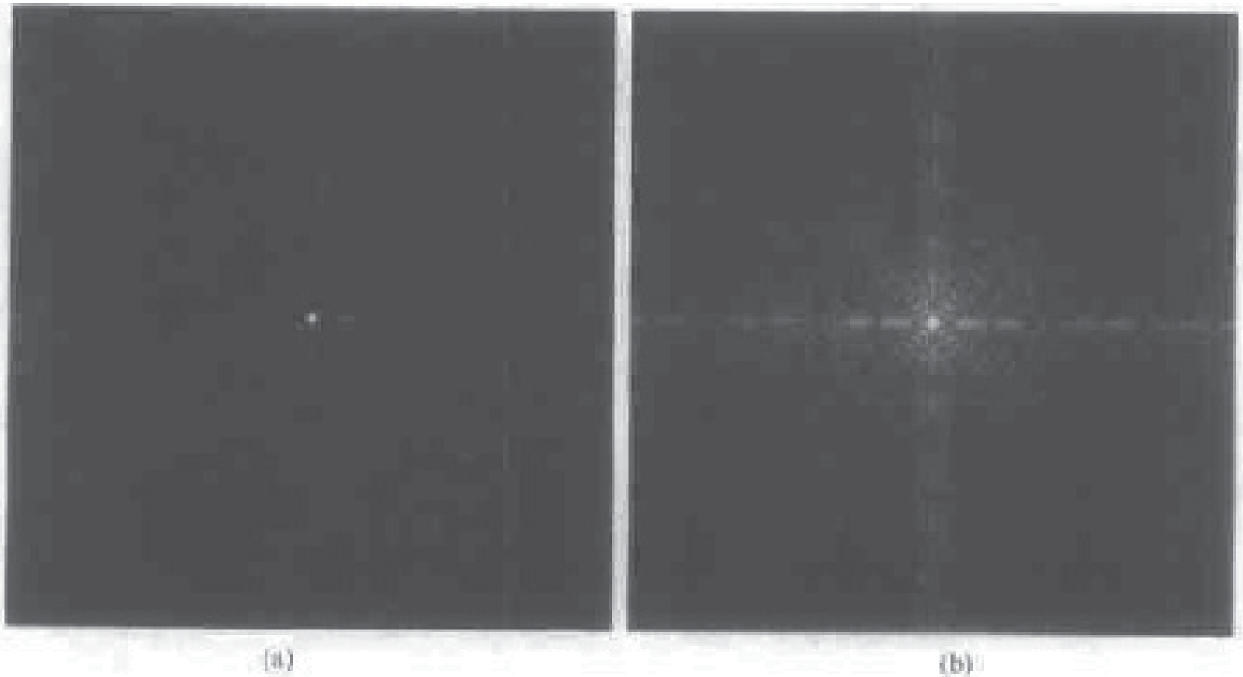
对数变换

- 公式 $s = c\log(1+r)$



对数变换

- 公式 $s = c\log(1+r)$

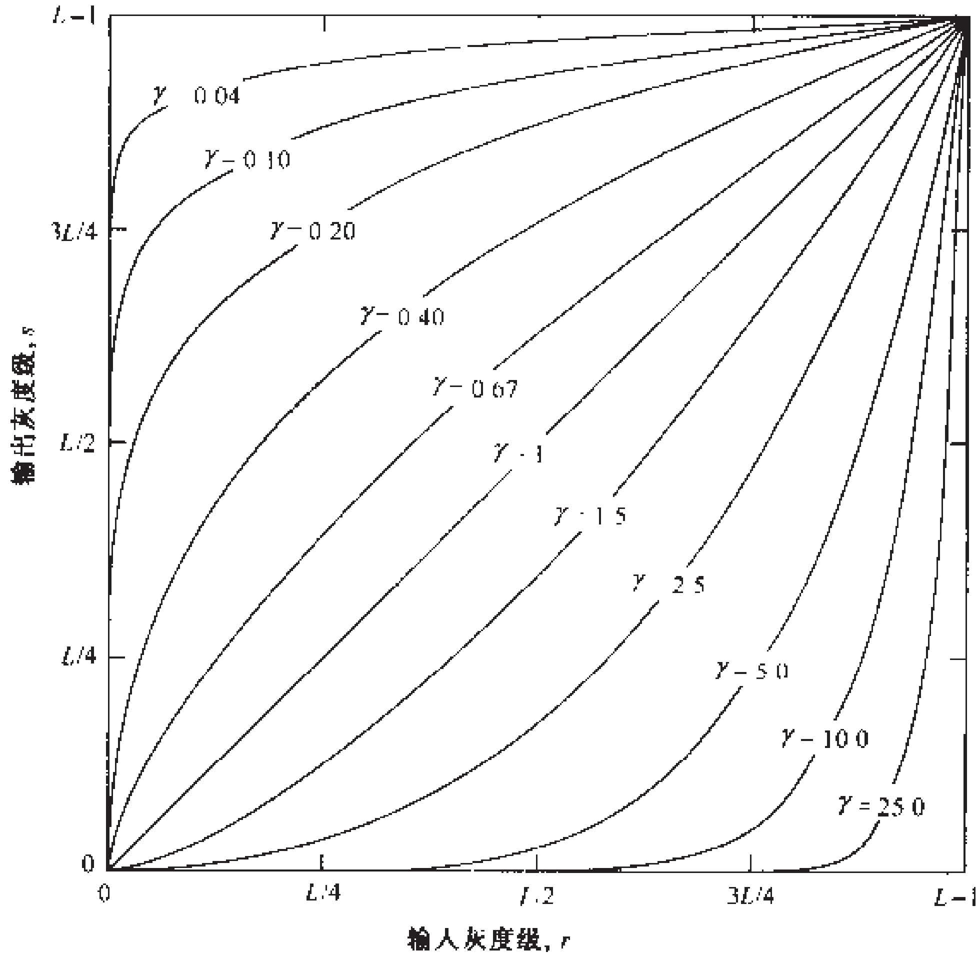


变换前　　变换后，C=1

变换后，看到了图像更多的细节

幂次变换

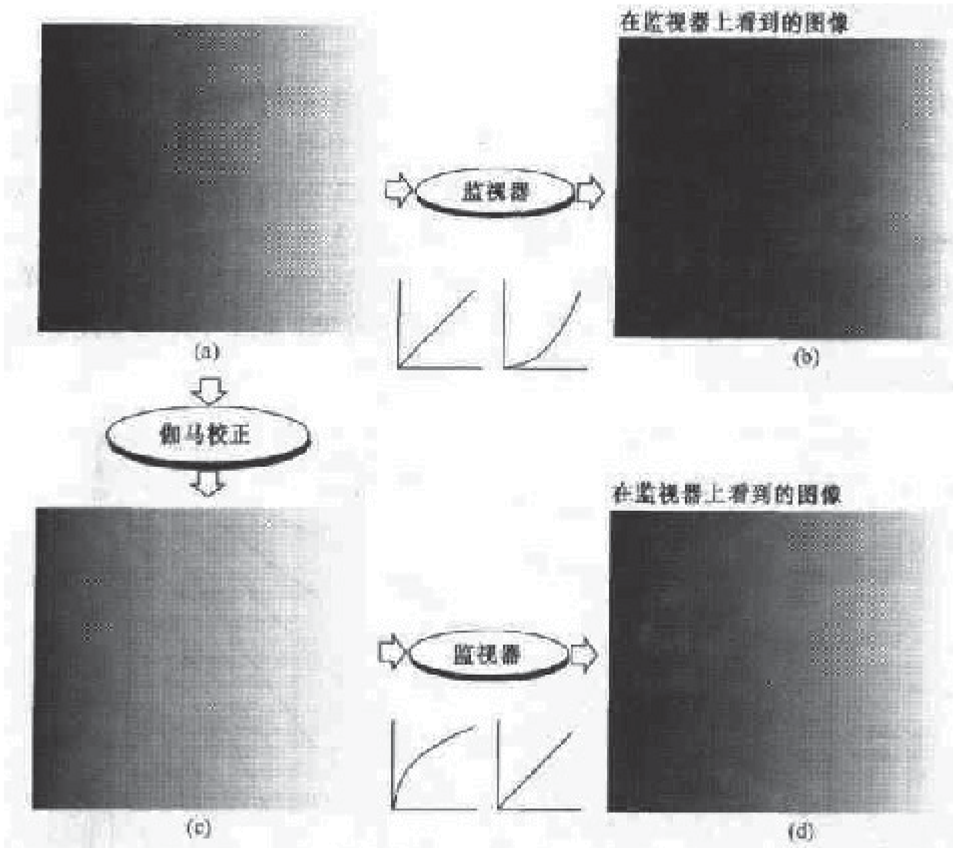
- 公式 $$s = cr^{\gamma}$$



由于伽马参数对最后效果至关重要，因为幂次变换也称为伽马变换

幂次变换

- 公式 $s = cr^{\gamma}$



$\gamma = 2.5$

经伽马变换后，图像变得更接近真实值

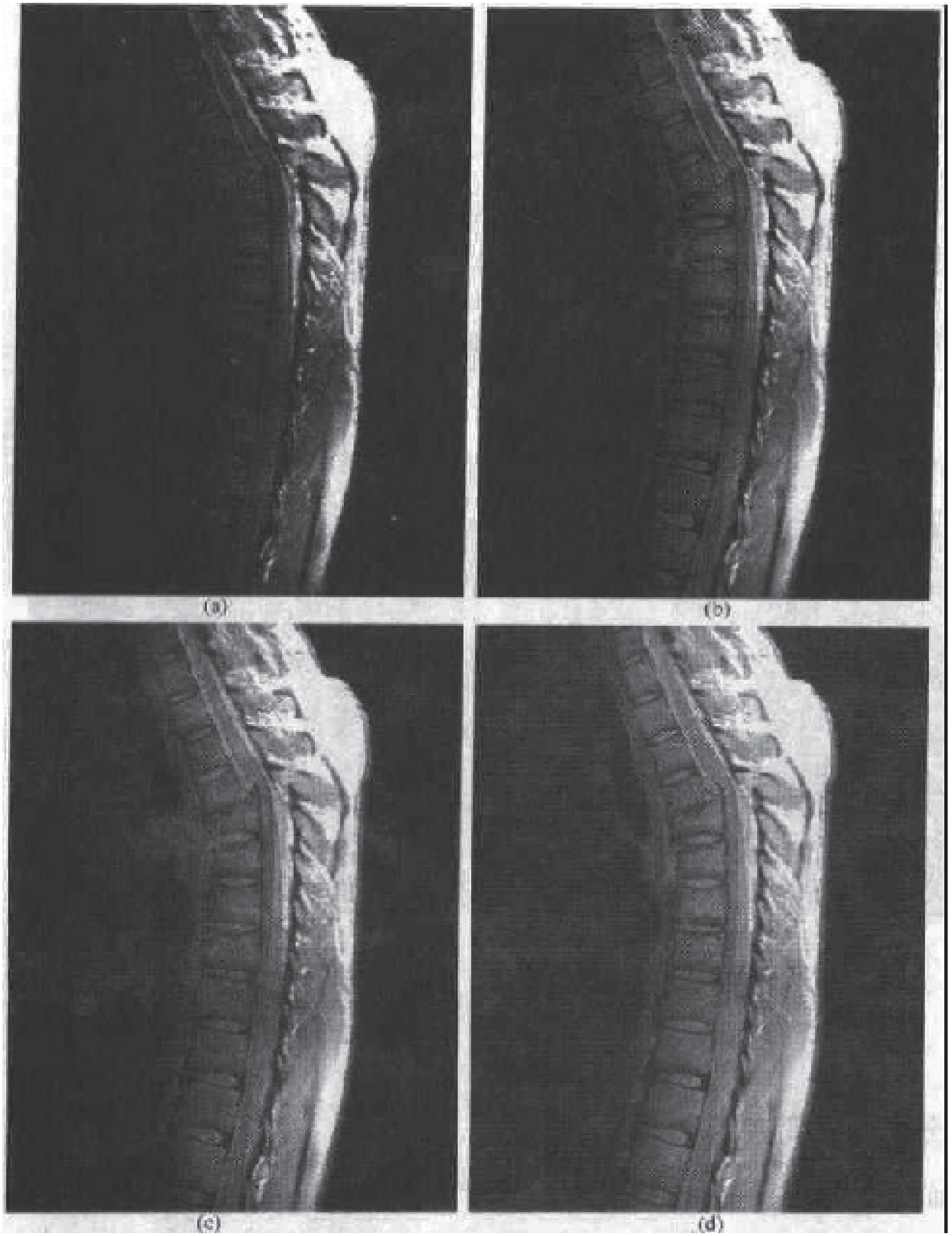


图 3.8 (a)人的脊椎骨折的核磁共振图像,(b)~(d)应用式(3.2.3)并且 $c=1,\gamma$ 分别等于0.6,0.4,0.3时变换的结果(这个例子的原图像由Vanderbilt大学医学中心放射学和辐射学系的David R. Pickens博士提供)

伽马参数分别取

0.6, 0.4, 0.3

伽马变换可用于增强对比度

思考

- 如果你不想拉伸整个图像的对比度，你只想拉伸某些灰度级上的对比度，怎么办?

分段线性函数

- 最简单的分段线性函数就是对比拉伸变换

考虑采用分段变换函数

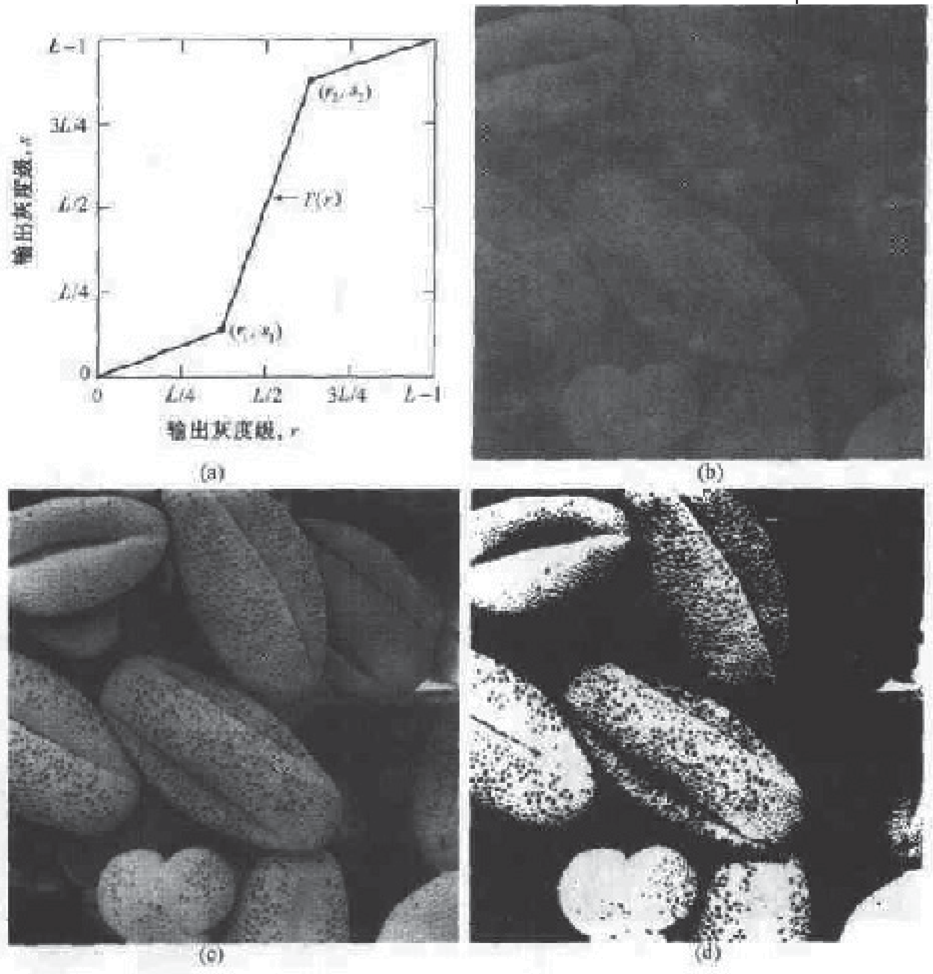


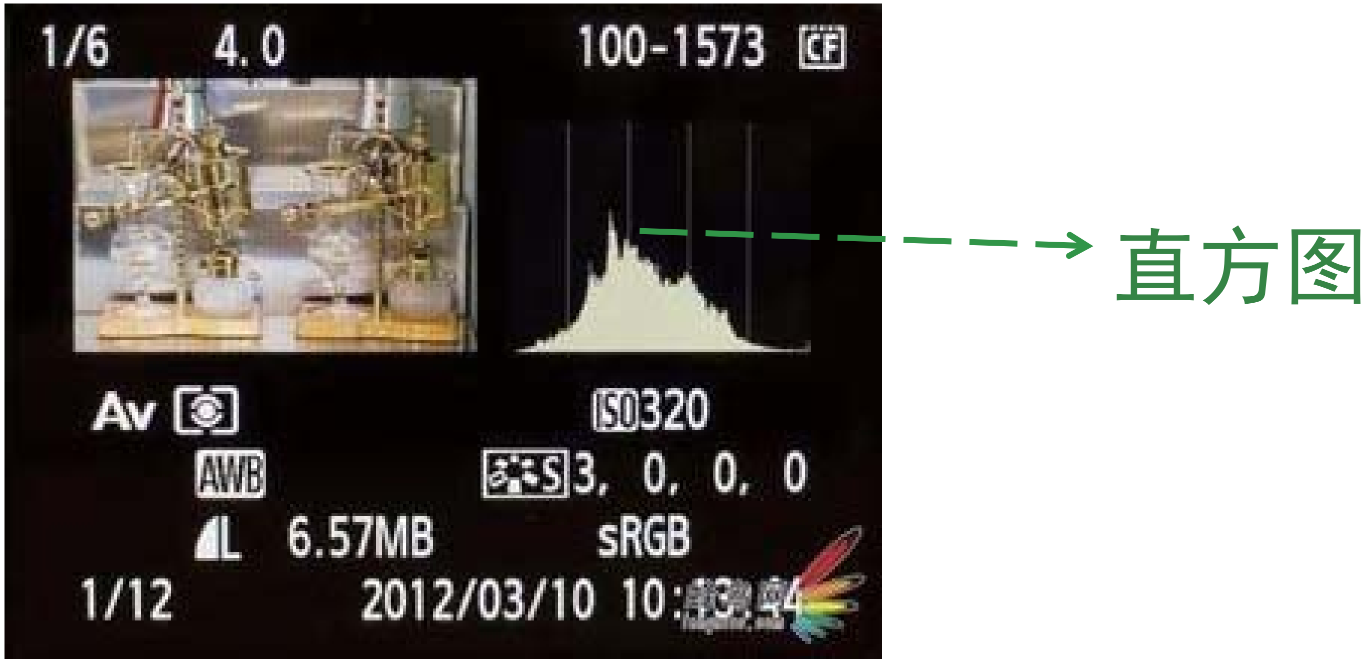
图 3.10　对比度拉伸。(a)变换函数的形式，(b)低对比度图像，(c)对比度拉伸的结果，(d)门限化的结果(原图像由澳大利亚国立大学生物科学研究院Roger Heady博士提供)

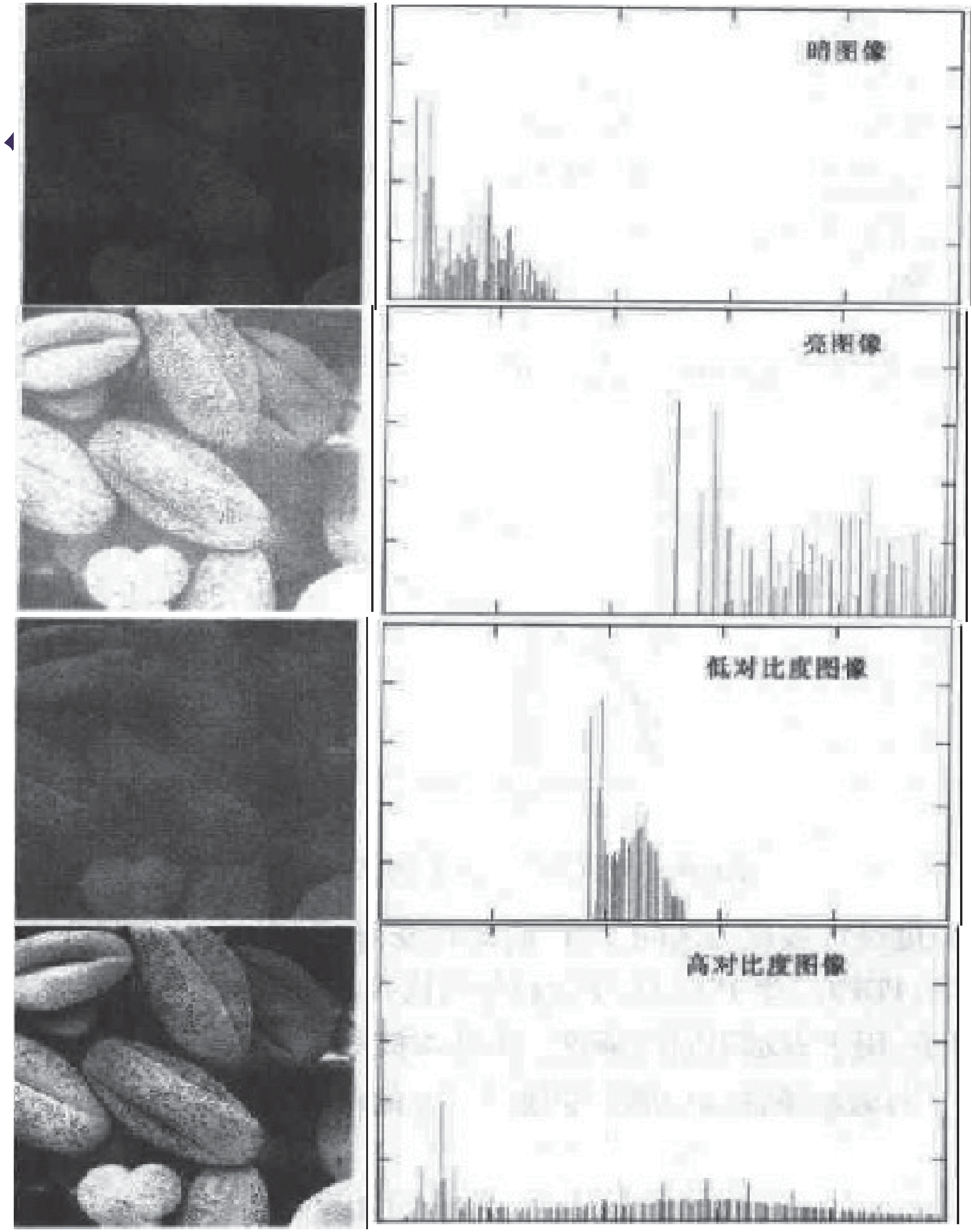
空间域图像增强

- 像素间的基本关系
- 空间域图像增强背景知识
- 基本灰度变换
- 直方图处理

灰度直方图

- 图像中每种灰度级的像素个数
- 灰度直方图的横坐标是灰度级，纵坐标表示该灰度级出现的频率。





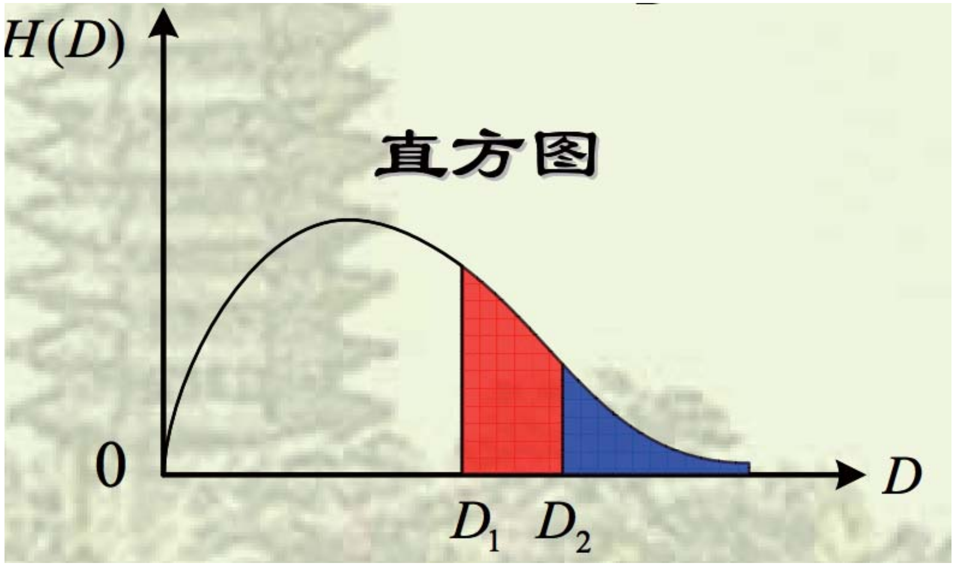
(a) (b)

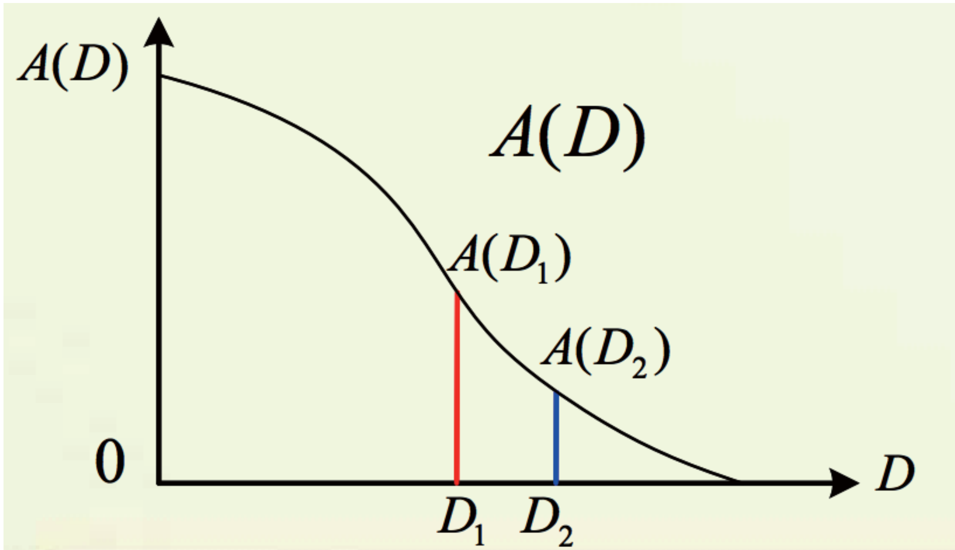
不同的直方图下，图像效果的直观感受

阈值面积函数A(D)

- 连续图像中具有灰度级D的所有轮廓线所包围的面积

$$A(D) = \int_D^\infty H(p)dp$$

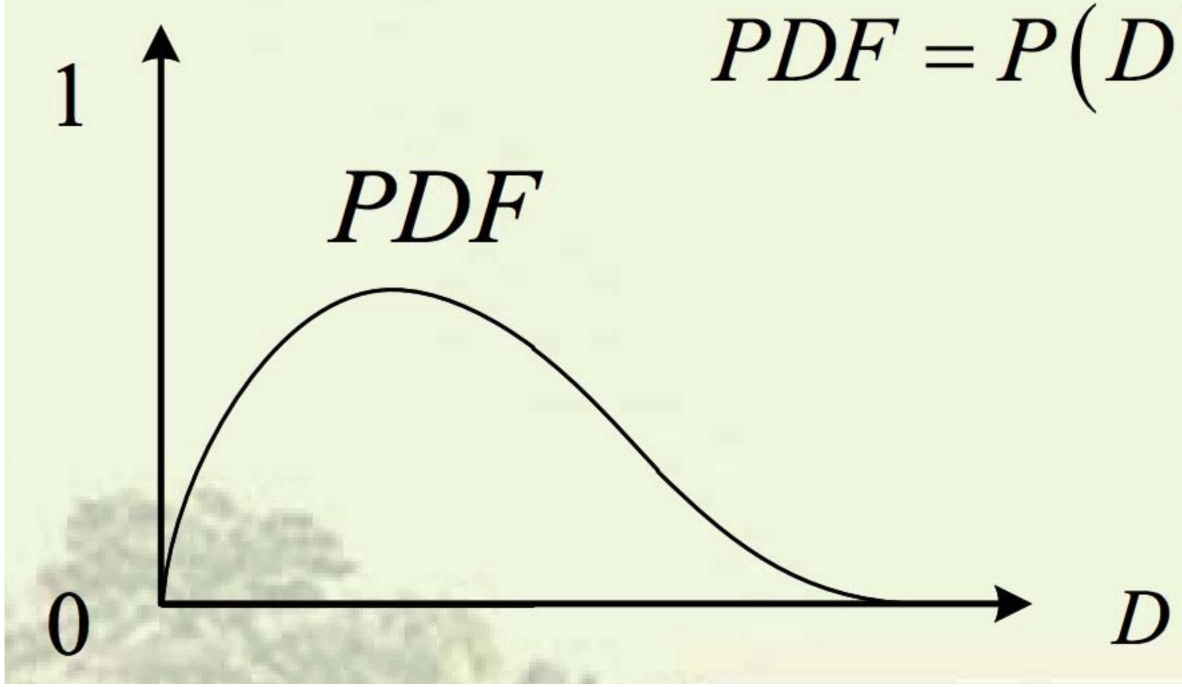




概率密度函数（PDF）

- 归一化到单位面积的直方图

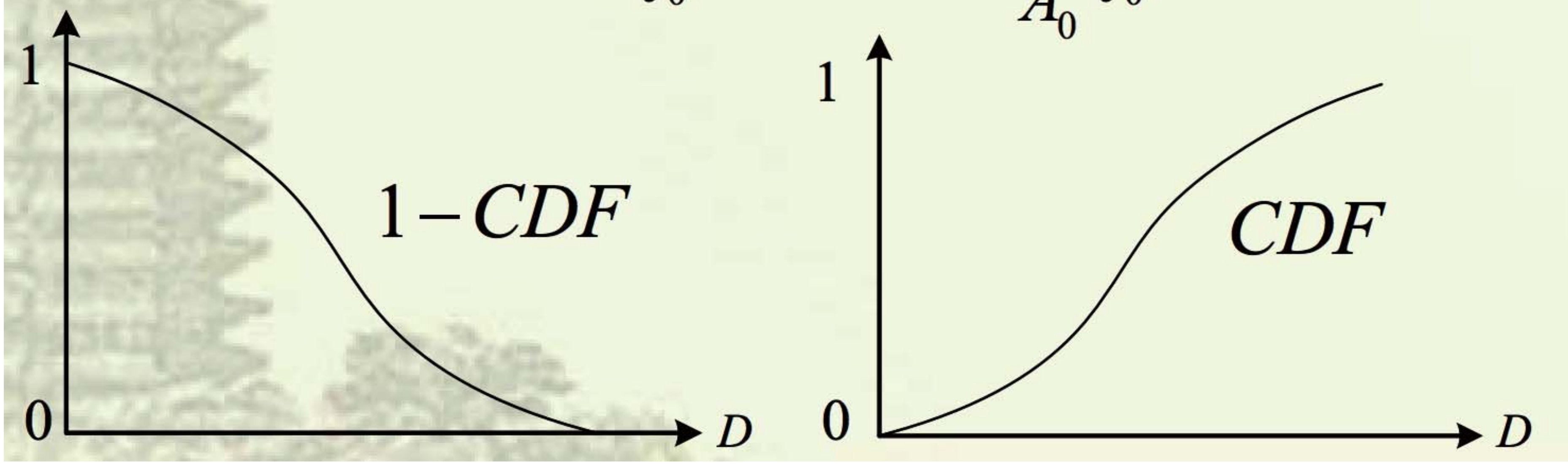
$$PDF = P(D) = \frac{1}{A_0} H(D)$$



累计分布函数（CDF）

- 概率密度函数面积归一化的阈值面积函数

$$CDF = P(D) = \int_0^D p(u)\,du = \frac{1}{A_0}\int_0^D H(u)\,du$$



定义

- 严格数学定义

$$\mathrm{H(D)} = \lim_{\Delta \mathrm{D} \to 0} \frac{\mathrm{A(D)} - \mathrm{A(D} + \Delta \mathrm{D})}{\mathrm{D} - (\mathrm{D} + \Delta \mathrm{D})} = \lim_{\Delta \mathrm{D} \to 0} \frac{\mathrm{A(D)} - \mathrm{A(D} + \Delta \mathrm{D})}{-\Delta \mathrm{D}} = \boxed{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dD}} \mathrm{A(D)}}$$

- 数字图像时，简化为

$$H(D) = A(D) - A(D+1)$$

实现

- 图像具有L（比如L=256）级灰度，大小为M*N的灰度图像f(x,y)的灰度直方图hist[0…L-1]的算法

1.初始化hist[k]=0; k=0,…,L-1

2.统计hist[f(x,y)]++; x=0,…,M-1, y =0,…,N-1

3.归一化hist[f(x,y)]/(M*N)

应用一

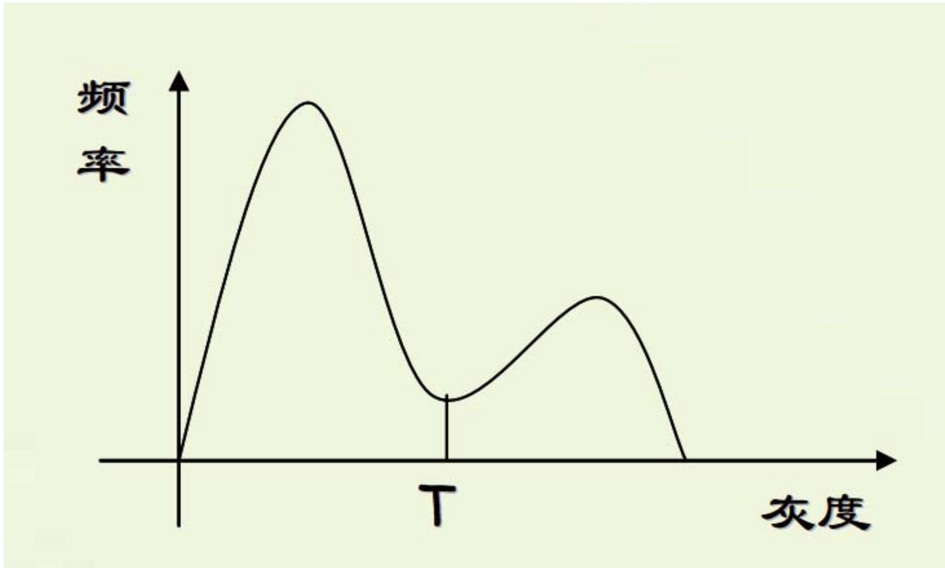
- 图像快速检测?

可以利用灰度直方图来判断一幅图像是否合理的利用了全部被允许的灰度级范围，从而及早发现数字化中出现的问题

应用二

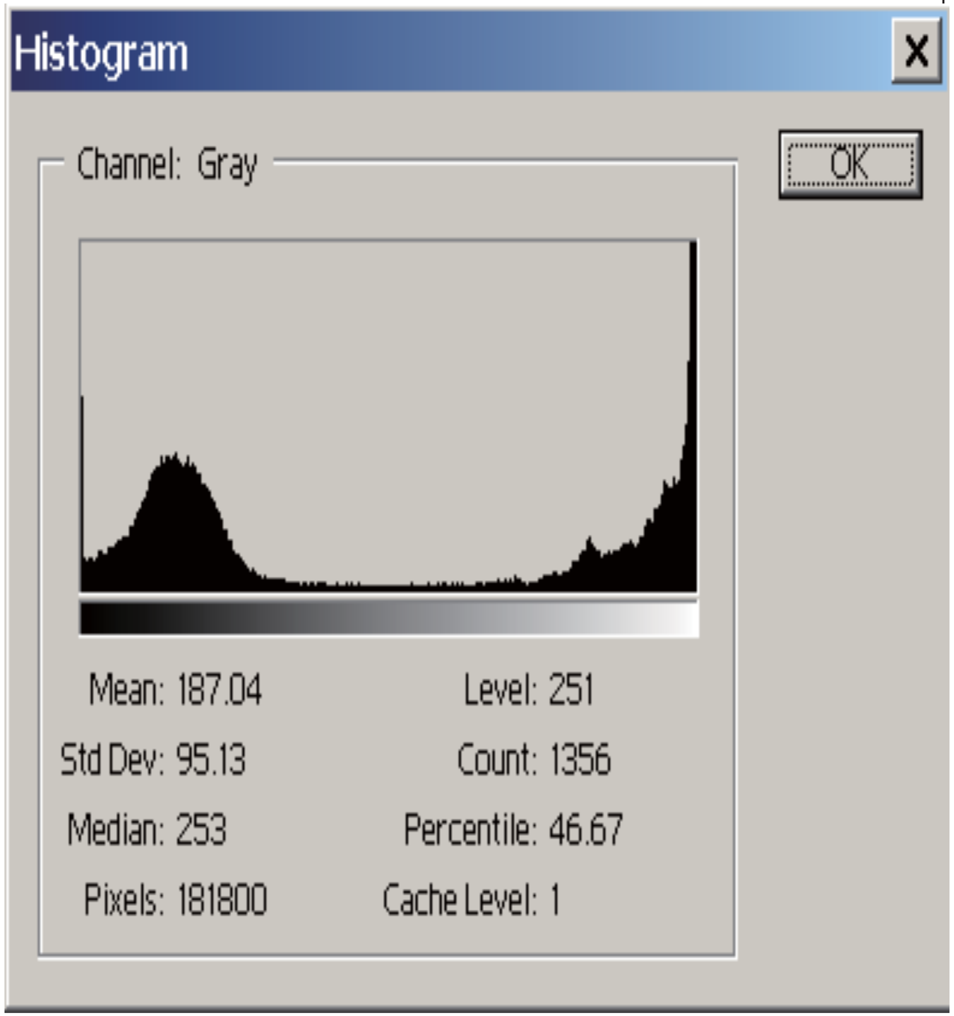
- 分割前景背景

双峰直方图



以直方图两峰之间的谷地T为阈值来确定边界，可把图像分为前景背景两部分

例子

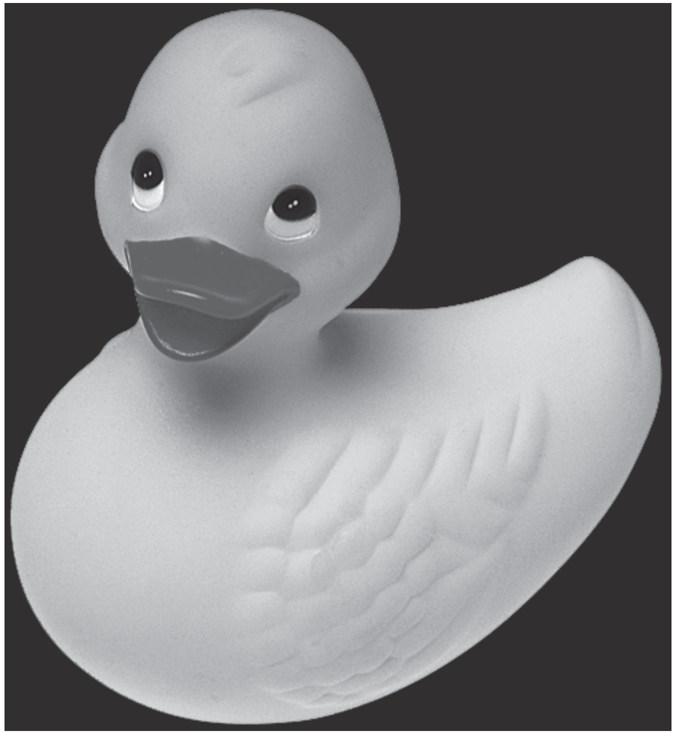

Histogram
OK
Channel: Gray
Mean: 187.04
Std Dev: 95.13
Median: 253
Pixels: 181800
Level: 251
Count: 1356
Percentile: 46.67
Cache Level: 1

细节

- 灰度级从115变化到144时，像素为1850，仅占图像总面积的1%。
- 因此把阈值取在115与144之间，比如130
- 如果阈值对应于直方图的谷，阈值从T增加到T+ ΔT，图像变化很小

应用三

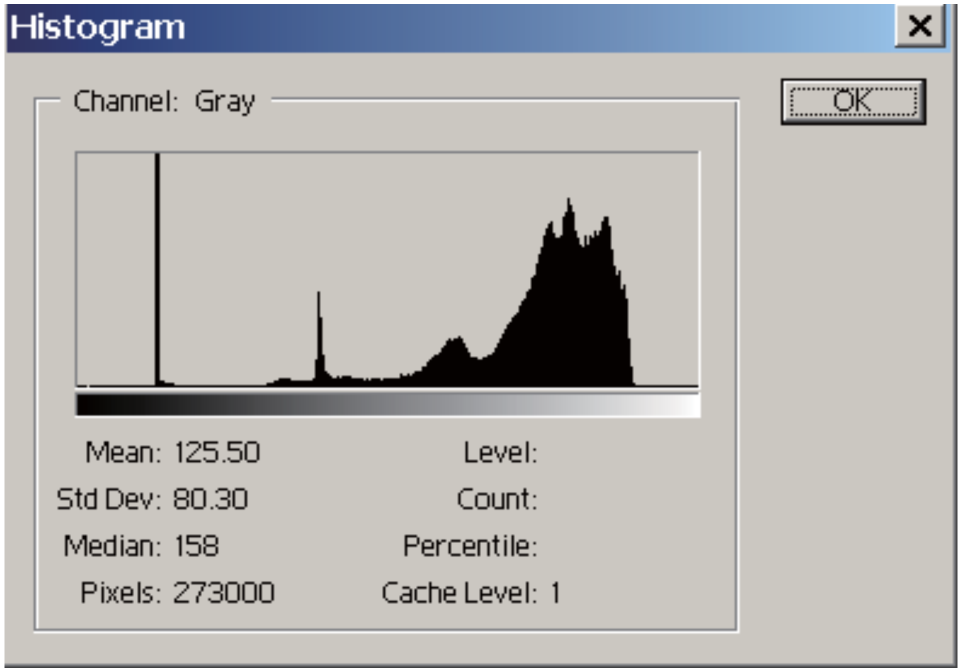
- 面积计算



请计算鸭子占整个图像的面积比例？

观察

- 图像背景灰度大体均匀一致，且背景与物体对比度很强



公式:

$$\int_{D_1}^{\infty} H(D)dD = \text{物体的面积}$$

结果

- 从灰度54到255级

$$\int_{54}^{255} H(D)dD = 163001$$

- 总像素数500像素*546像素=273000
- 约占图像总面积的60%

其它应用

- 光密度：反映图像面积和密度组合的统计量

- 计算公式

$$\mathbf{IOD} = \int_0^a\int_0^b \mathbf{D(x,y)dxdy}$$

x是图象横坐标，**MAX(x) = a;**

y是图象纵坐标，**MAX(y) = b;**

推导

- 两种计算方式

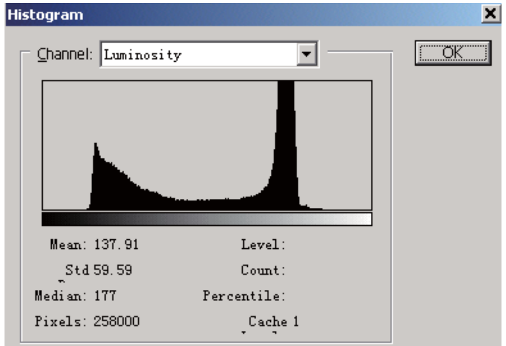
$$IOD = \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NS} D(i, j)$$

$$IOD = \sum_{k=0}^{255} kH(k)$$

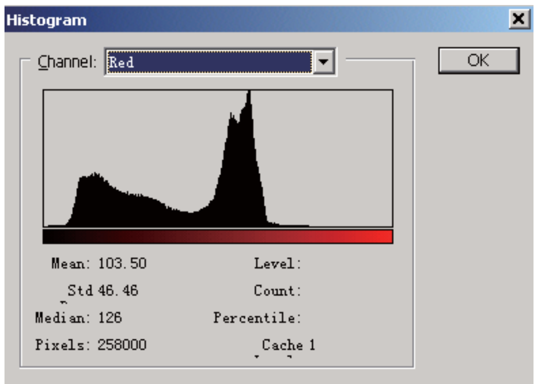
IOD可以通过灰度直方图算出来，节省了计算开销

其它直方图

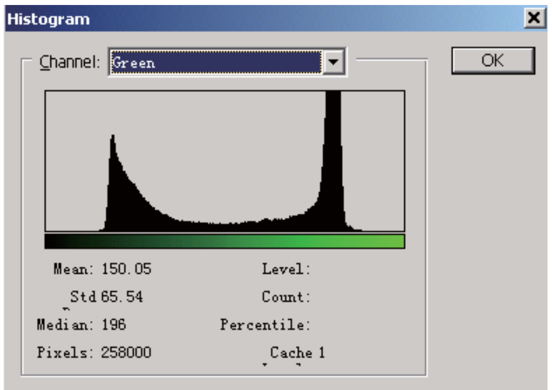
彩色图像



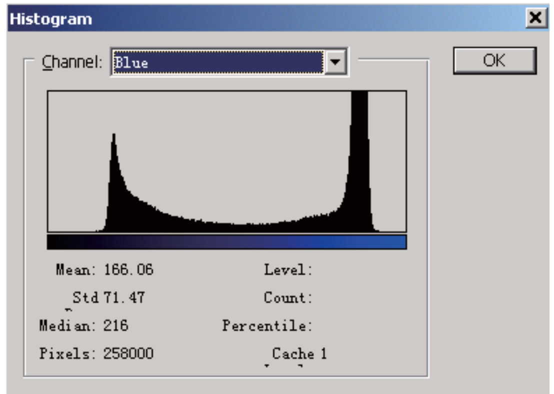
Histogram
Channel: Luminosity
OK
Mean: 137.91
Std 59.59
Median: 177
Pixels: 258000
Level:
Count:
Percentile:
Cache 1



Histogram
Channel: Red
OK
Mean: 103.50
Std 46.46
Median: 126
Pixels: 258000
Level:
Count:
Percentile:
Cache 1



Histogram
Channel: Green
OK
Mean: 150.05
Std 65.54
Median: 196
Pixels: 258000
Level:
Count:
Percentile:
Cache 1



Histogram
Channel: Blue
OK
Mean: 166.06
Std 71.47
Median: 216
Pixels: 258000
Level:
Count:
Percentile:
Cache 1

其它直方图

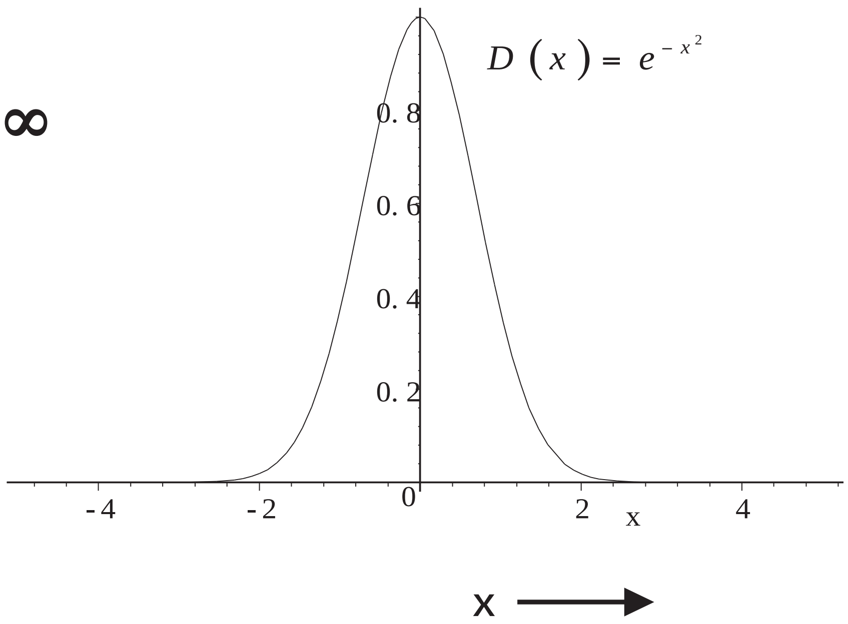
- 二维直方图
  - 红蓝直方图
  - 其他二维直方图
    - 灰度-区域均值
    - 灰度-区域形状
    - 灰度-梯度

准确的说法：共生矩阵，例如：H_r=m, H_b=n 像素对的个数

连续图像的直方图计算

- 给定一个高斯分布信号，如何计算它的直方图?

$$D(x) = e^{-x^2} \qquad -\infty \le x \le \infty$$



步骤

- 计算出面积函数

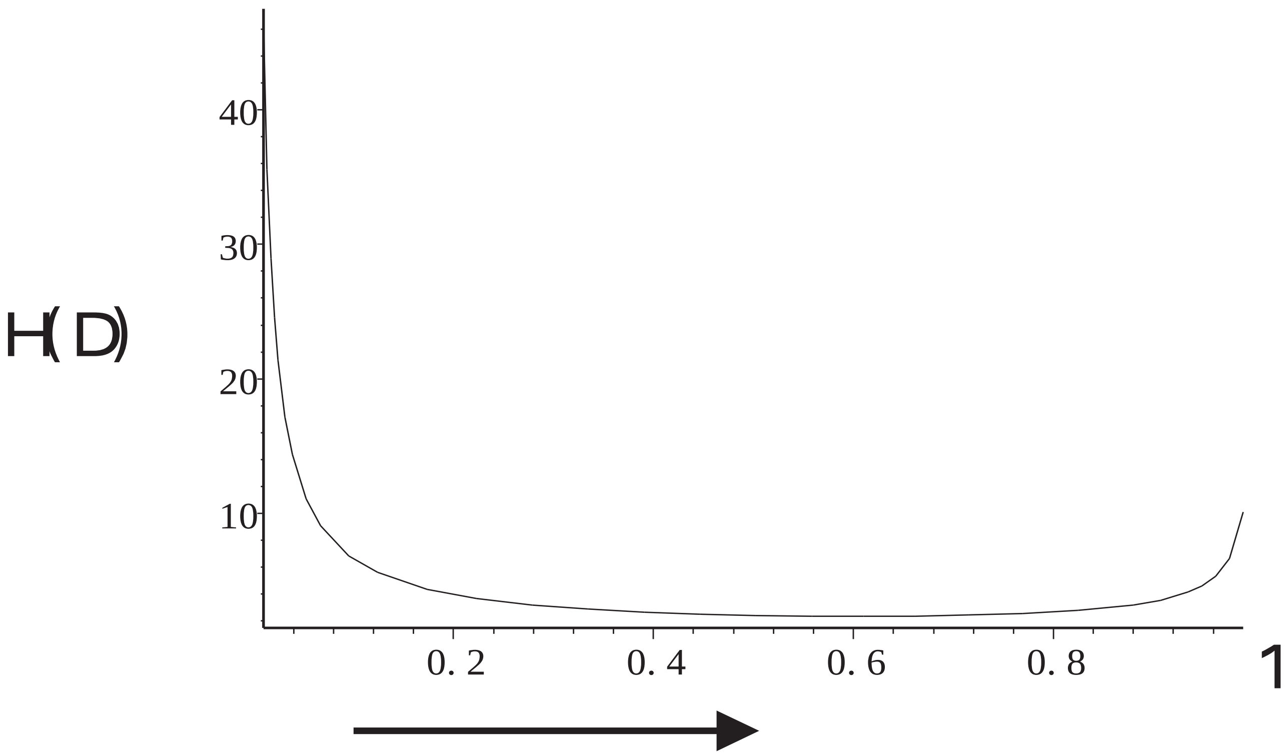
$$x(D) = 2\sqrt{-\ln(D)}$$

- 求导得到直方图

$$H(D) = -\frac{d}{dD}x(D) = 1\Big/ D\sqrt{-\ln(D)}$$

输出

- 求得的直方图



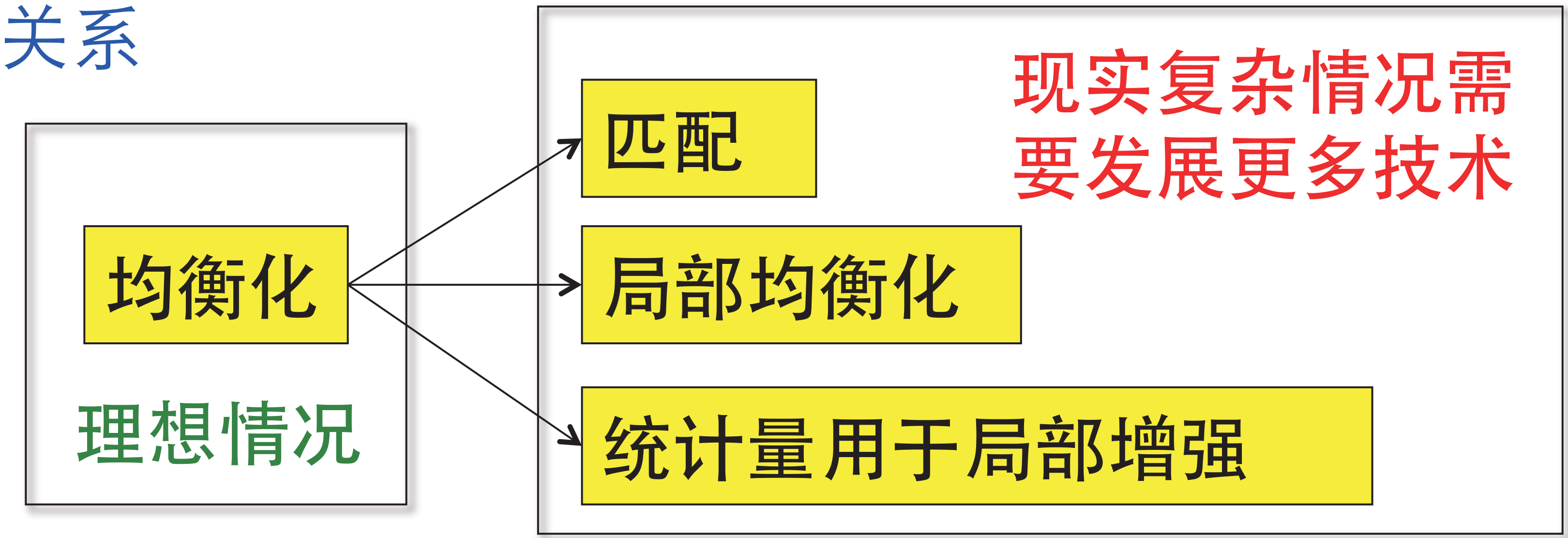
空间域图像增强

- 直方图处理（进阶，稍难）
- 用算术/逻辑操作增强（较简单）

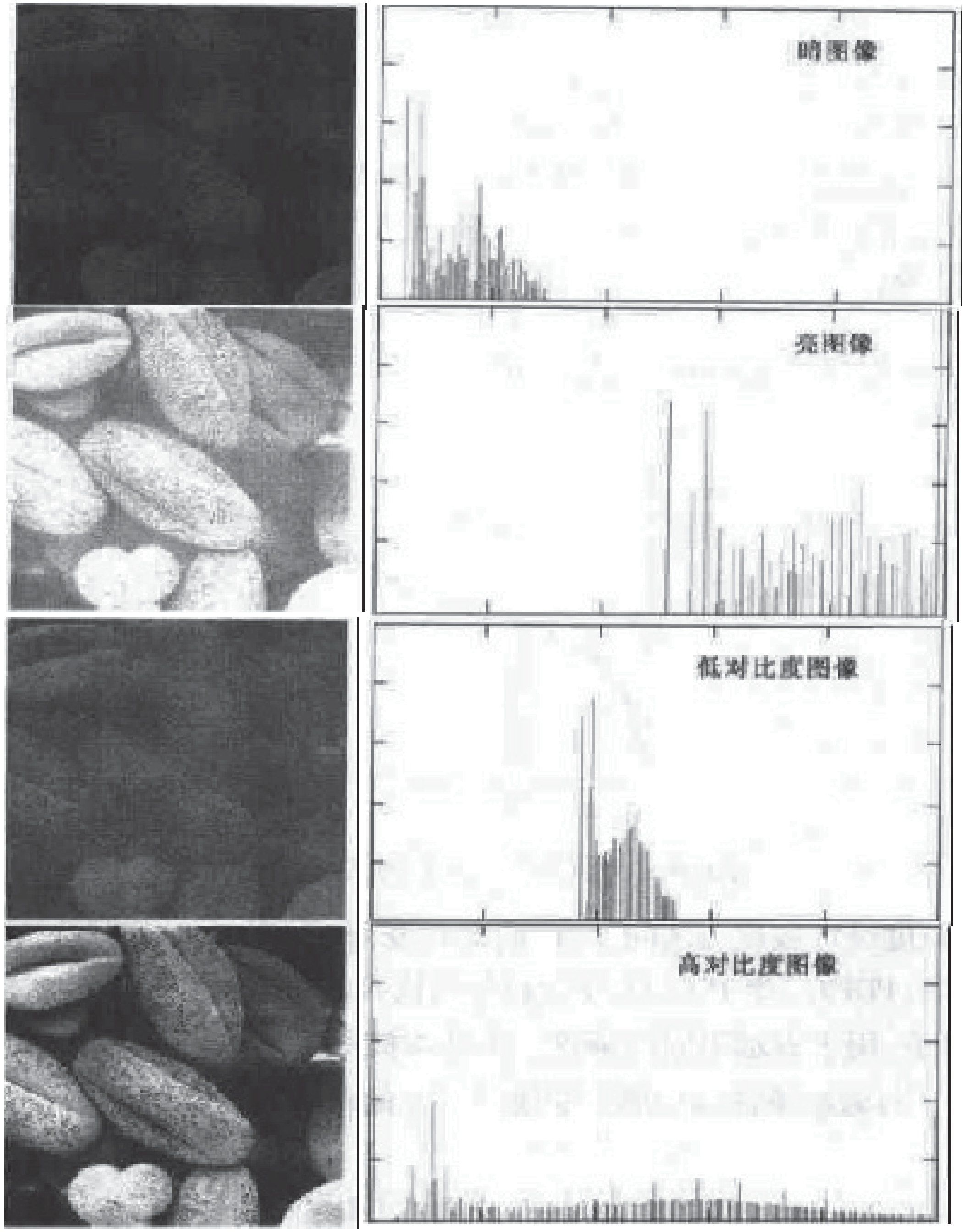
直方图处理

- 直方图均衡化
- 直方图匹配
- 局部直方图均衡化
- 直方图统计量用于局部图像增强

逻辑关系



回顾



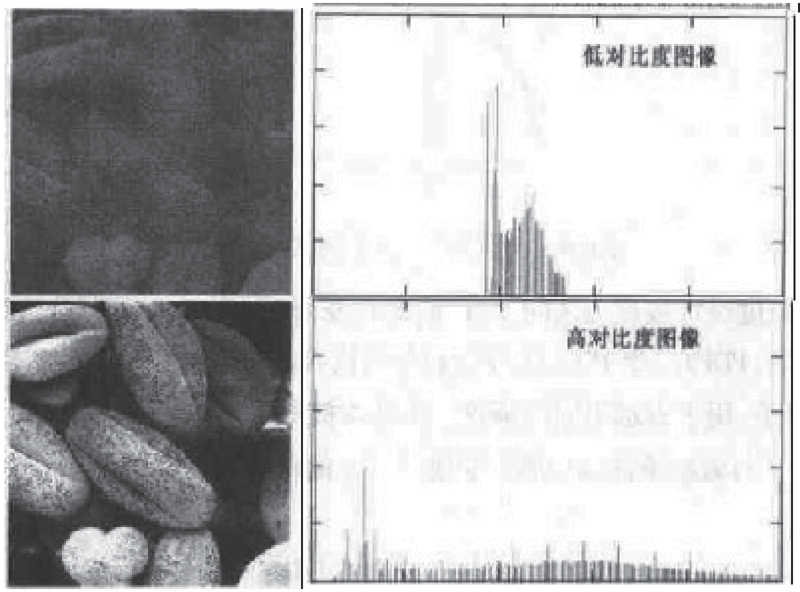
(a) (b)

不同的直方图，图像效果的直观感受不同

什么样的的直方图有利于图像增强呢？

直方图均衡化

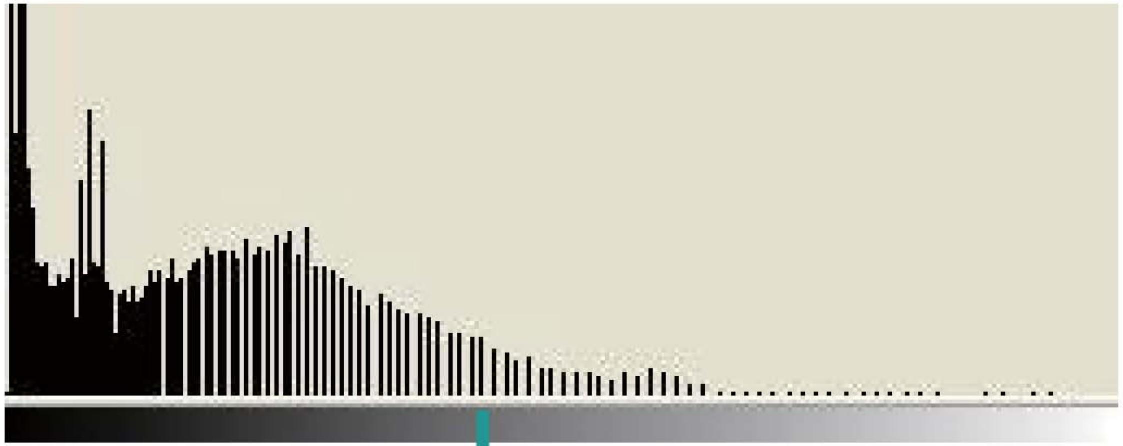
直方图呈均匀分布时，对比度会有明显增强。通过灰度变换函数，将原图像直方图的分布均衡化，这一过程称为直方图均衡化。



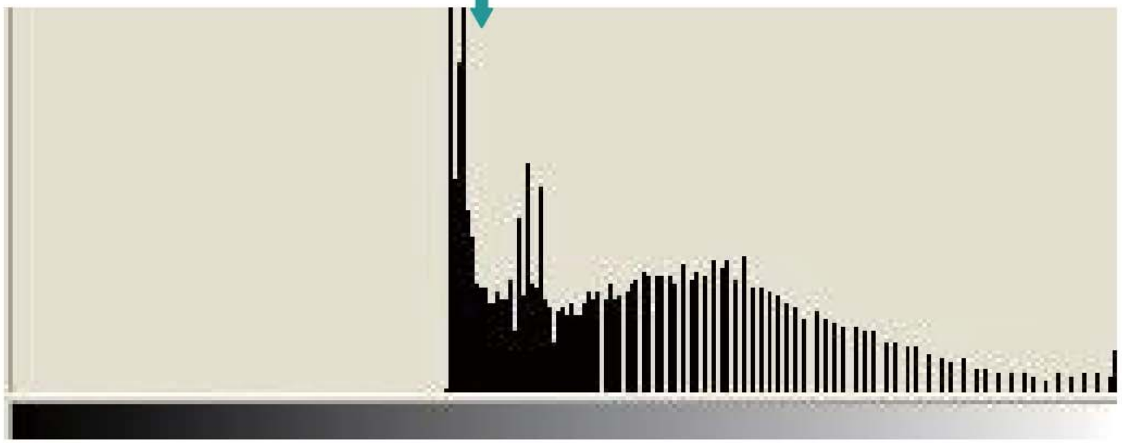
(a) (b)

如何找到相应的灰度变换函数呢?

简单的例子

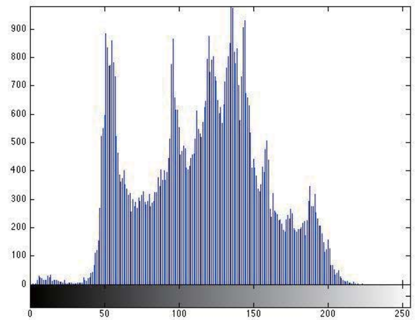


$$D_B = D_A + 1000$$



稍复杂一点的例子

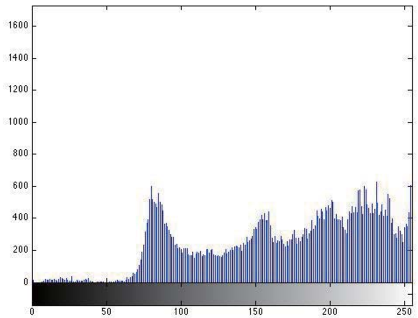
原图



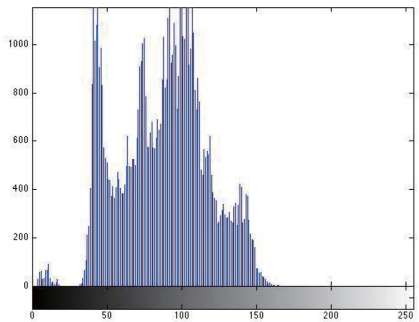
线性运算：

$$D_B = T(D_A)$$
$$= a \times D_A + b$$

$D_B = 1.5 \times D_A$



$D_B = 0.8 \times D_A$

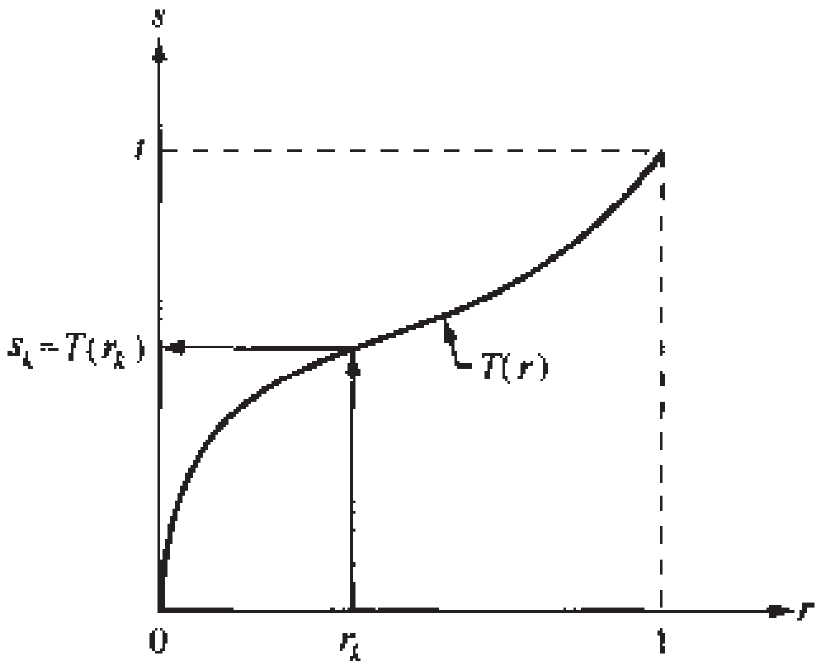


灰度变换函数与直方图

假设有一幅输入图像A，经过灰度变换函数(GST)，产生了输出图像B

讨论一种简单情况：单调灰度变换函数

单调函数



- 考虑连续函数并让变量r代表待增强图像的灰度级。假设r被归一化到区间[0,1]。
- 灰度变换函数

$$s = T(r), 0 \leq r \leq 1$$

重要性质：存在反函数

$$r = T^{-1}(s), 0 \leq s \leq 1$$

(a) $T(r)$在区间 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 中为单值且单调递增

(b) 当 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 时，$0 \leqslant T(r) \leqslant 1$

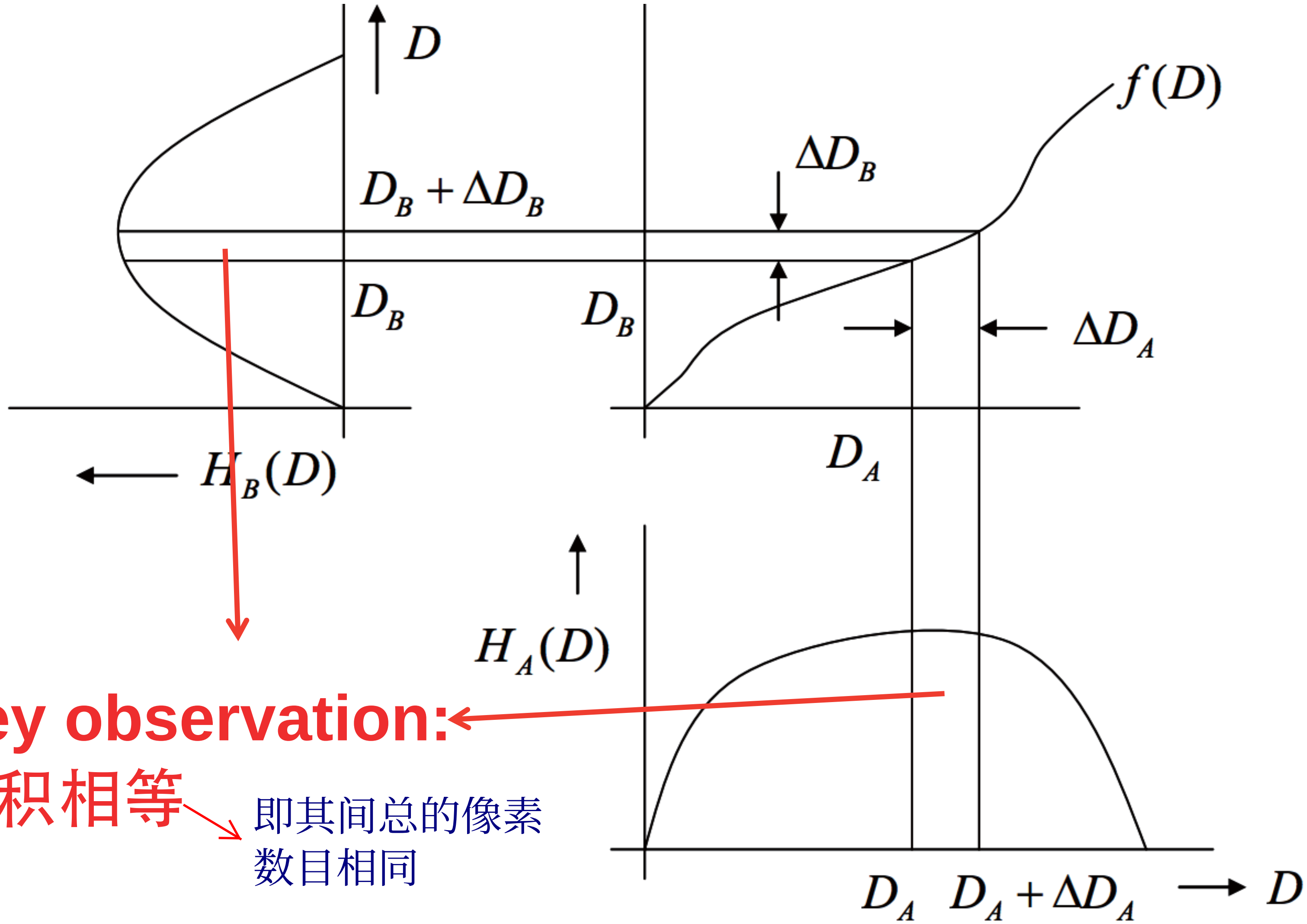
说明：

1）r和s被归一化

2）r越大—》s越大

直观示意图

怎么求$H_B(D)$的直方图?



Key observation:

面积相等

即其间总的像素数目相同

推导

注：D_B=f(D_A), H_A(D_A)=H_B(D_B),
故有以上的key observation

- 第一步

$$\int_{D_B}^{D_B+\Delta D_B} H_B(D)dD = \int_{D_A}^{D_A+\Delta D_A} H_A(D)dD$$

由于面积相等

$$H_B(D_B)\Delta D_B = H_A(D_A)\Delta D_A$$

把积分近似掉

$$H_B(D_B) = \frac{H_A(D_A)}{\Delta D_B / \Delta D_A}$$

改写

推导

- 第二步：得到通项公式

注意：D_B = f (D_A)

$$H_B(D_B) = \frac{H_A(D_A)}{dD_B / dD_A} = \frac{H_A\left[f^{-1}(D_B)\right]}{f'\left[f^{-1}(D_B)\right]} \quad \text{where } f' = \frac{df}{dD}$$

Key: $$\frac{H_A(D_A)}{dD_B / dD_A} = \frac{H_A(D_A)}{\left(d / dD_A\right) f(D_A)}$$ 以及利用反函数

小测试

线性运算

假定线性灰度变换模型

$$D_B = T(D_A) = a \times D_A + b$$

计算$H_A(D)$经线性运算后的直方图$H_B(D)$:

$$D_A = f^{-1}(D_B) = {(D_B - b)}\big/{a}$$

$$H_B(D) = \frac{1}{a} H_A\left(\frac{D-b}{a}\right)$$

(D-b)/a

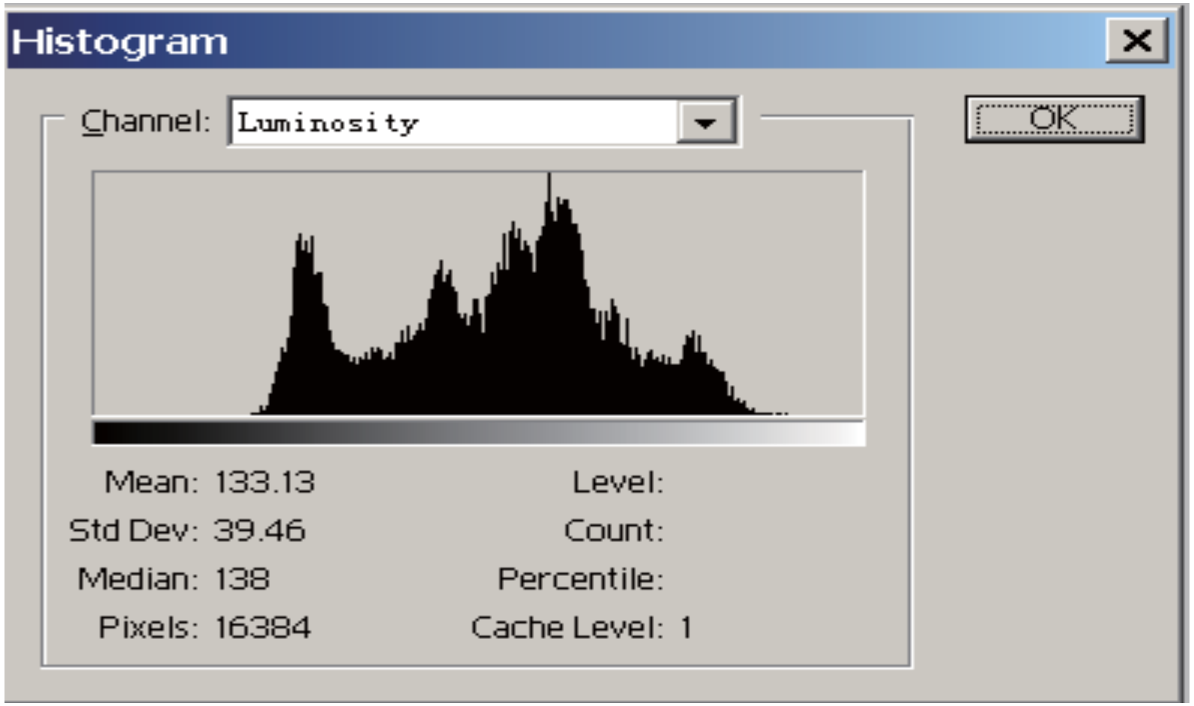
=Ha(f^(-1)(D))/f'

a

问题1：给定H_A(D)和灰度变换f(D)，求H_B(D)

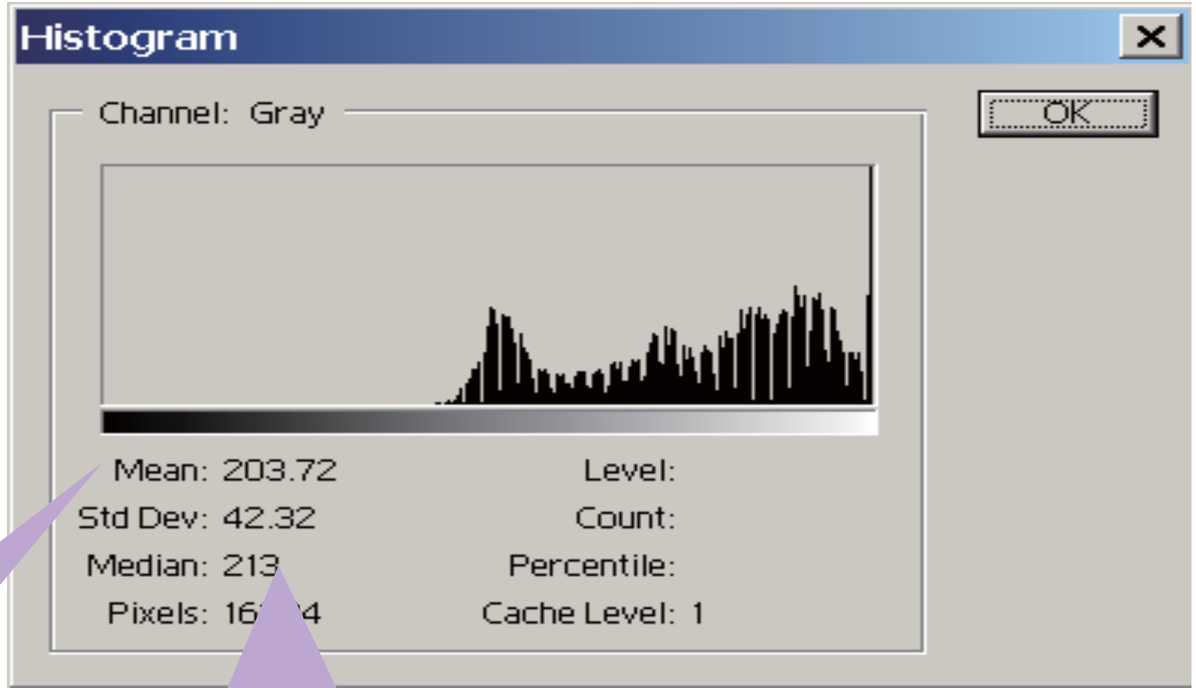
举例

$$D_B = 1.2 \times D_A + 50$$



举例

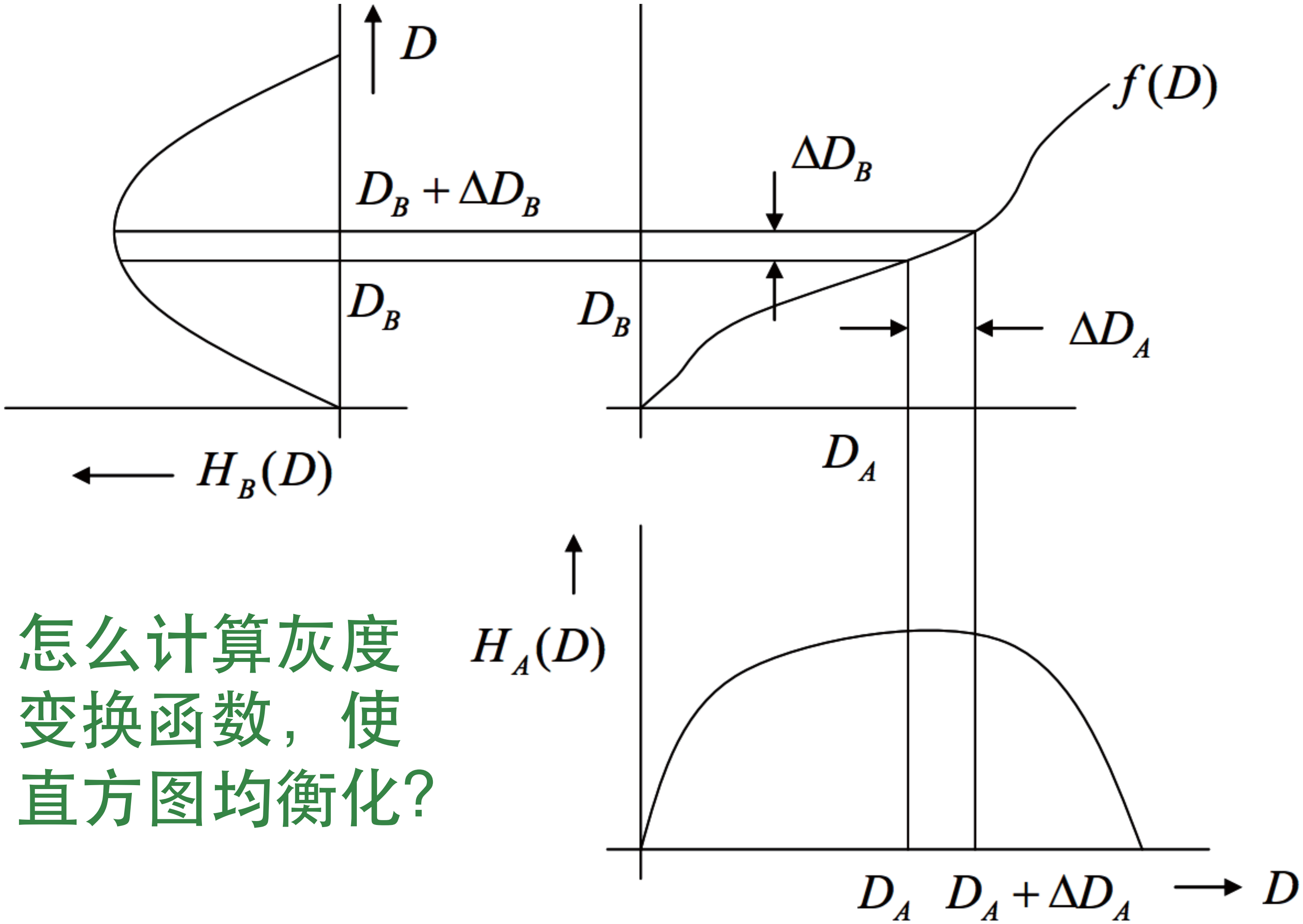
$$D_B = 1.2 \times D_A + 50$$



均值：
203.72=1.2*133.13+50

中值：213≈1.2*138+50

直方图均衡化



怎么计算灰度变换函数，使直方图均衡化?

问题2：给定H_A(D)和H_B(D)，求f(D)

主要思路

请写出直方图均衡化的灰度变换函数?

- 关键步骤

$$\int_0^{D_B} H_B(D)dD = \int_0^{D_A} H_A(D)dD$$

相等，得f (D_A)

因为D_B是均匀分布

$$\int_0^{D_B} H_B(D)dD = \frac{D_B}{L} \times A_0 = \frac{f(D_A)}{L} \times A_0$$

A0是总像素个数　　L是灰度级个数

结论

连续形式

$$f(D_A) = \frac{L}{A_0}\int_0^{D_A} H_A(D)dD$$

1）H_A（D)连续情况下，可以得到均匀分布的 H_B(D)

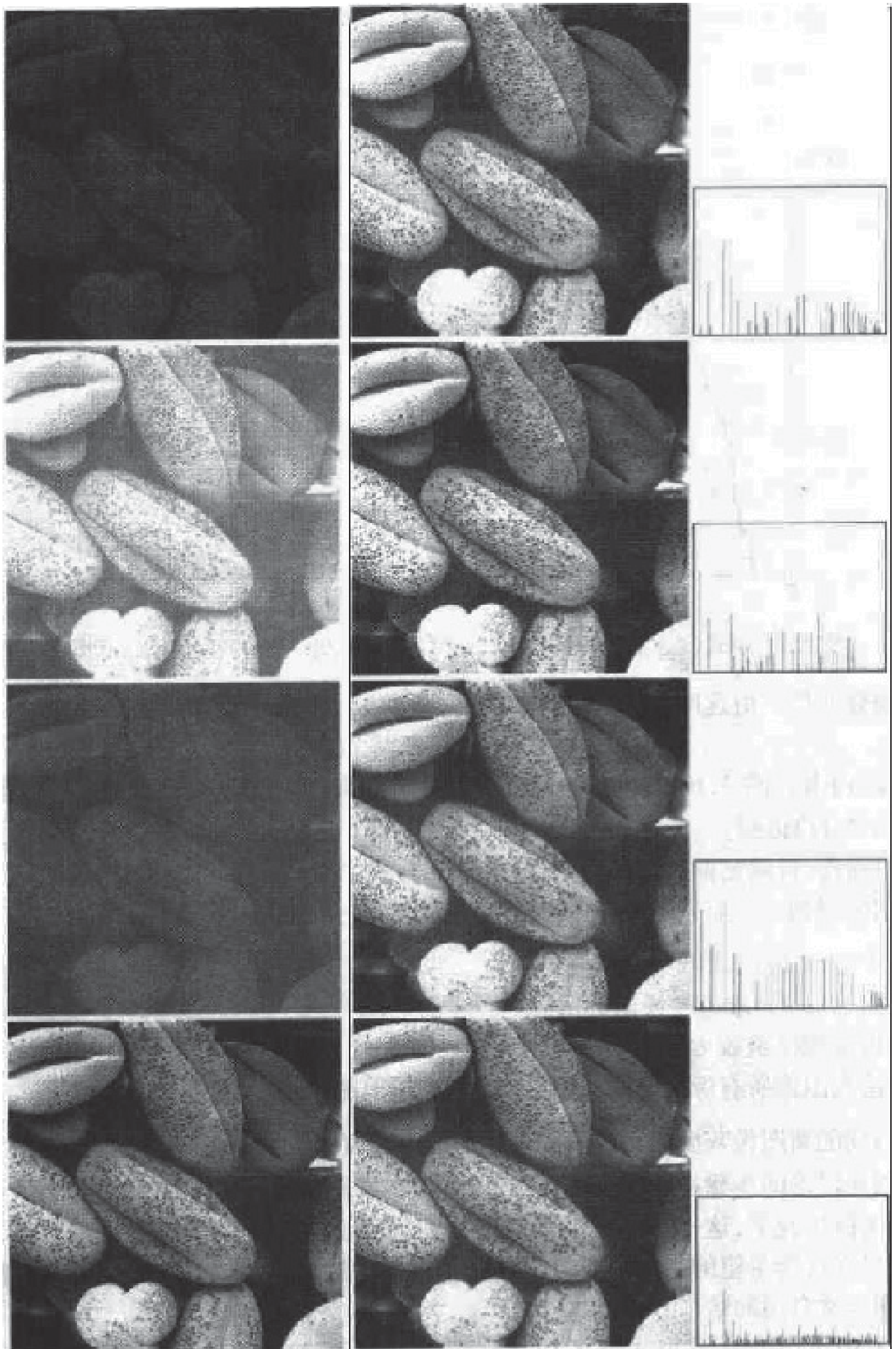
2）在离散情况下，只有离散的H_A (D)统计，因此不完全均匀

离散形式

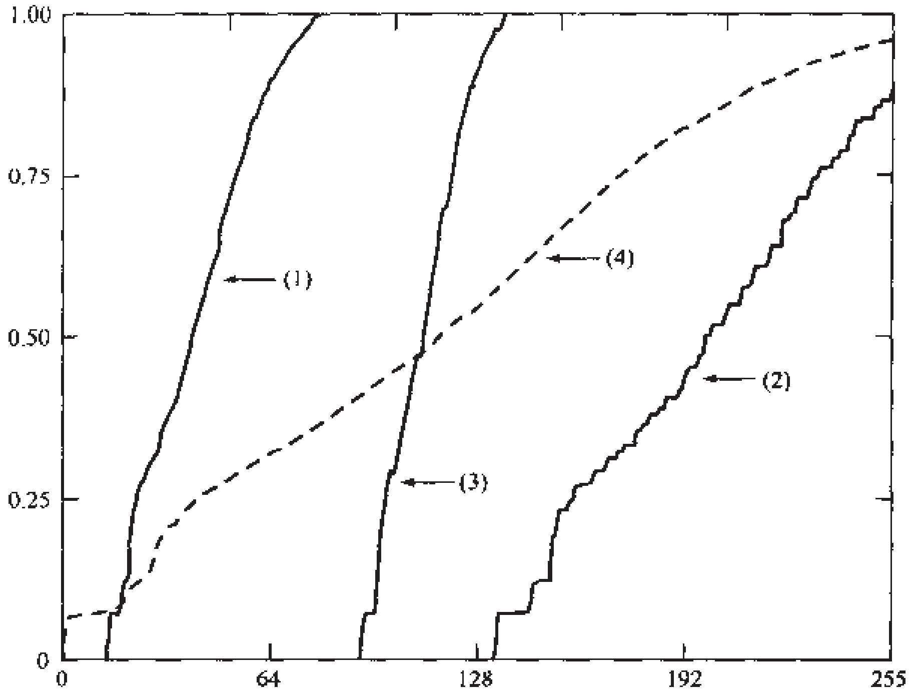
$$f(D_A) = \frac{L}{A_0}\sum_{u=0}^{D_A} H_A(u)$$

注意：H_A(u)取频率还是像素个数？

灰度变换函数



(a) (b) (c)



更明显的例子

均衡化前

均衡化后

图像明显得
到了增强

讨论

- 直方图均衡化一大好处：不需要更多的参数，完全“自动化”

- 离散形式下，直方图均衡化的概率密度函数是否完全均匀？ ✖

- 直方图均衡化会有失效的时候吗？ ✔

作业1

- 实现直方图均衡化 $f(D_A) = \frac{L}{A_0} \sum_{u=0}^{D_A} H_A(u)$
- 要求
  - 三个部分（图像、代码、文档）
  - 语言：**Matlab**

直方图匹配（规定化）

- 有一些应用用均匀直方图的基本增强并不是好方法，尤其是有时可以指定希望处理的图像所具有的直方图形状。
- 这种用于产生处理后有特殊直方图的图像的方法，叫做直方图匹配或直方图规定化处理。

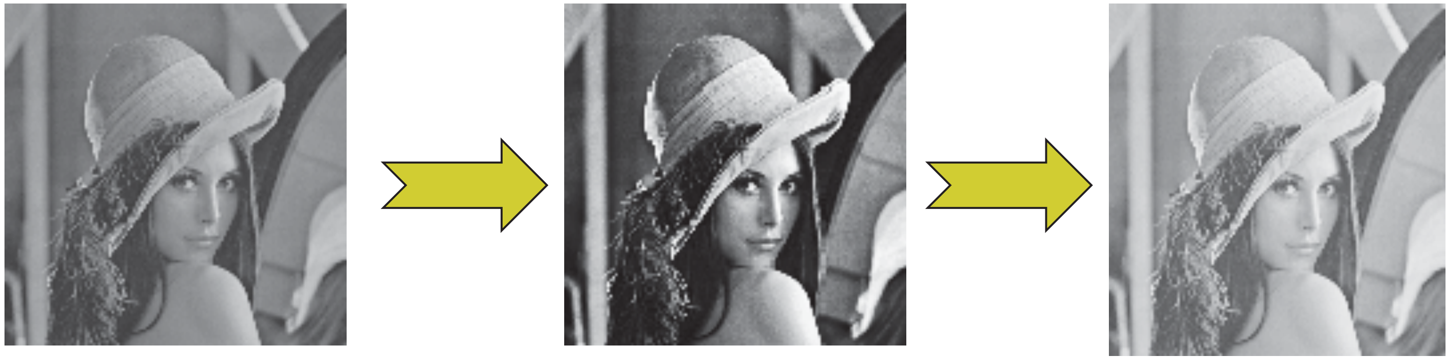
输入

灰度变换函数GST

输出

输出直方图分布不要求均匀，要求为某个特定分布

- Key idea：以均衡化直方图图像为桥



A 均衡化图像B C

先把A转化成均衡化图像B

再把B转化成图像C（why）

根据单调灰度变换函数存在反函数

主要的公式

- 步骤：

$$f(D_A) = \frac{L}{A_0}\sum_{u=0}^{D_A} H_A(u)$$

把A转化成均衡化图像B

$$g(D_C) = \frac{L}{A_0}\sum_{u=0}^{D_C} H_C(u)$$

把C转化成均衡化图像B

解决从D_A—》D_C

$$D_C = g^{-1}(\frac{L}{A_0}\sum_{u=0}^{D_A} H_A(u))$$

利用反函数

D_A —》D_B（Table)

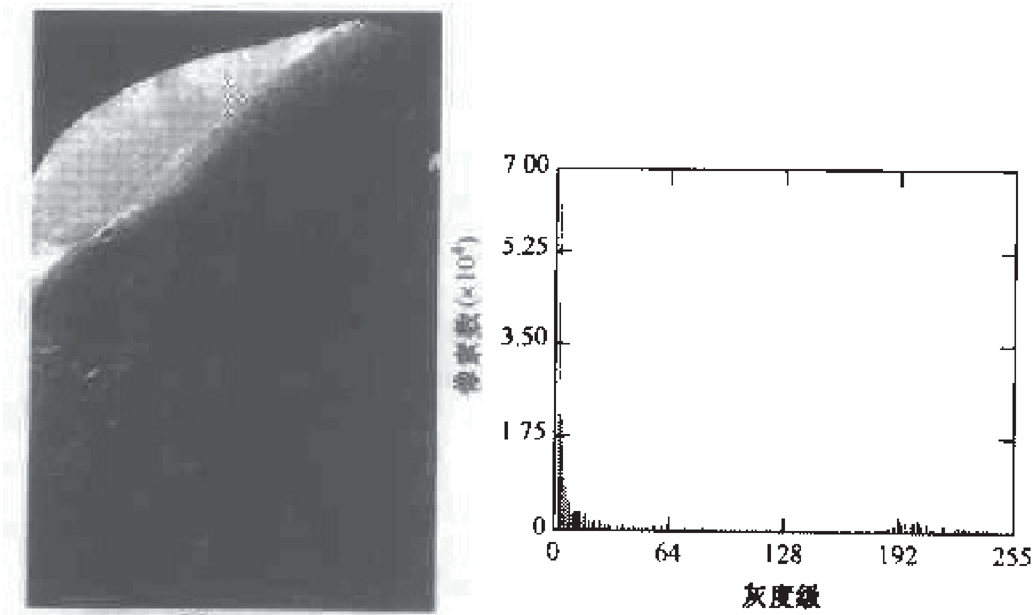
D_C = g^-1(D_B) —》查表得对应D_A'

D_C = g^-1(D_A')

注：
1）利用均衡直方图作为中间桥梁，D_B=f(D_A)
2）H_C是已知的待匹配直方图
3）利用以上公式（2）-g得到D_C和D_B之间的映射表

直方图均衡化与直方图匹配

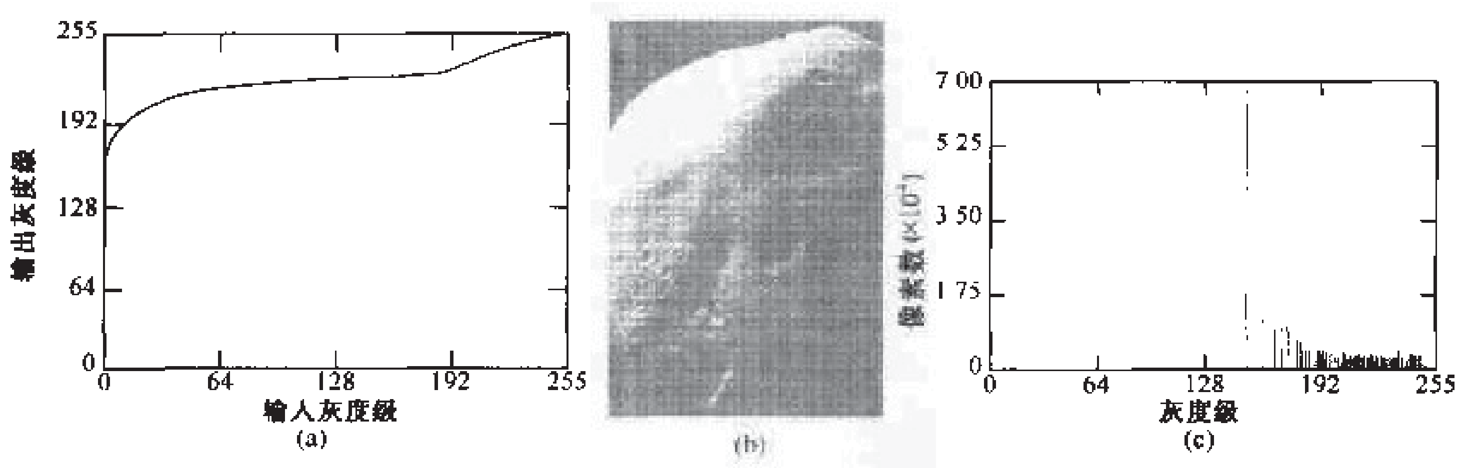
- 火星的卫星图像



(a) (b)

直方图均衡化与直方图匹配

- 均衡化效果

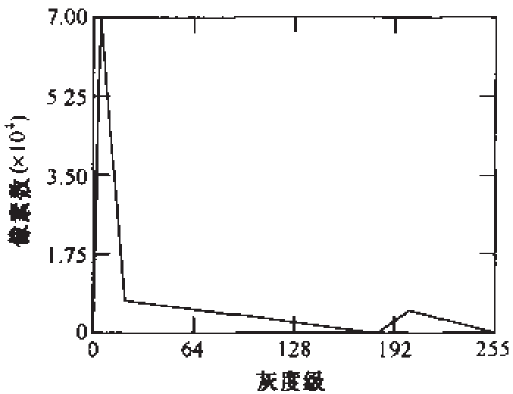


只是“漂白”了，并没有增加太多信息

直方图均衡化与直方图匹配

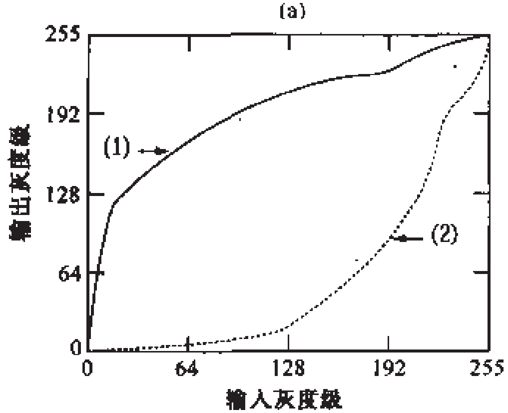
- 直方图匹配效果

更靠近原图像，但增加了更多细节

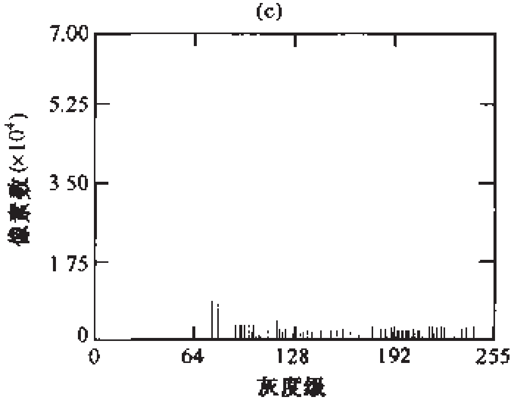


(a)


(c)



(b)



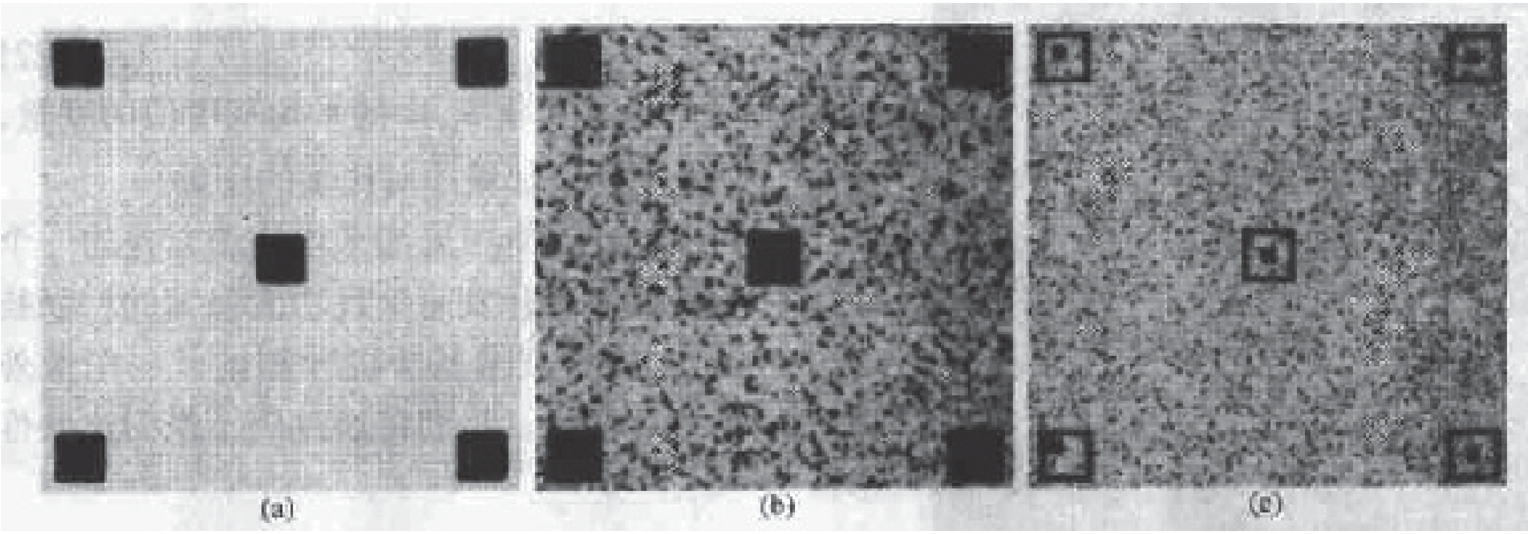
(d)

如何确定需要规定的直方图?

与具体问题相关。一旦规定好，就有技术可以处理

局部增强

- 如果我不希望对整体图像增强，只希望对局部进行增强怎么办？这类技术就叫做局部增强。



原始图像　　全局直方图增强　　局部直方图增强，取7X7的领域

NOTE：局部直方图均衡化只是局部增强的一种技术；

在图像增强中使用直方图统计学

- 回顾均值、方差

归一化

灰度平均值 $$m=\sum_{i=0}^{L-1} r_i p(r_i)$$

n阶矩 $$\mu_n(r)=\sum_{i=0}^{L-1}(r_i-m)^n p(r_i)$$

反应了灰度值的散度

2阶矩最常用，也称为方差 $$\mu_2(r)=\sum_{i=0}^{L-1}(r_i-m)^2 p(r_i)$$

思考

$\mu_0(r),\mu_1(r)$

等于什么？

在图像增强中使用直方图统计学

- 均值和方差常用于局部增强
- 局部均值和局部方差

$$m_{s_{xy}} = \sum_{(s,t)\in S_{xy}} r_{s,t}\, p(r_{s,t})$$

$$\delta^2_{s_{xy}} = \sum_{(s,t)\in S_{xy}} [r_{s,t} - m_{s_{xy}}]^2 p(r_{s,t})$$

S_{xy} 表示像素(x,y)的近邻集合

在图像增强中使用直方图统计学

- 考虑如下灰度变换函数

$$g(x,y)=\begin{cases} E\cdot f(x,y) & \text{如果 } m_{s_{xy}} \leqslant k_0 M_G \text{ 且 } k_1 D_G \leqslant \sigma_{s_{xy}} \leqslant k_2 D_G \\ f(x,y) & \text{其他} \end{cases}$$

此处，如前所述的，E，k_0，k_1 和 k_2 是特定的参数；M_G 是输入图像的全局平均值；D_G 是全局标准差。

注：原图像对于灰度变化较平坦区域的表达较差，增强图像有所改进

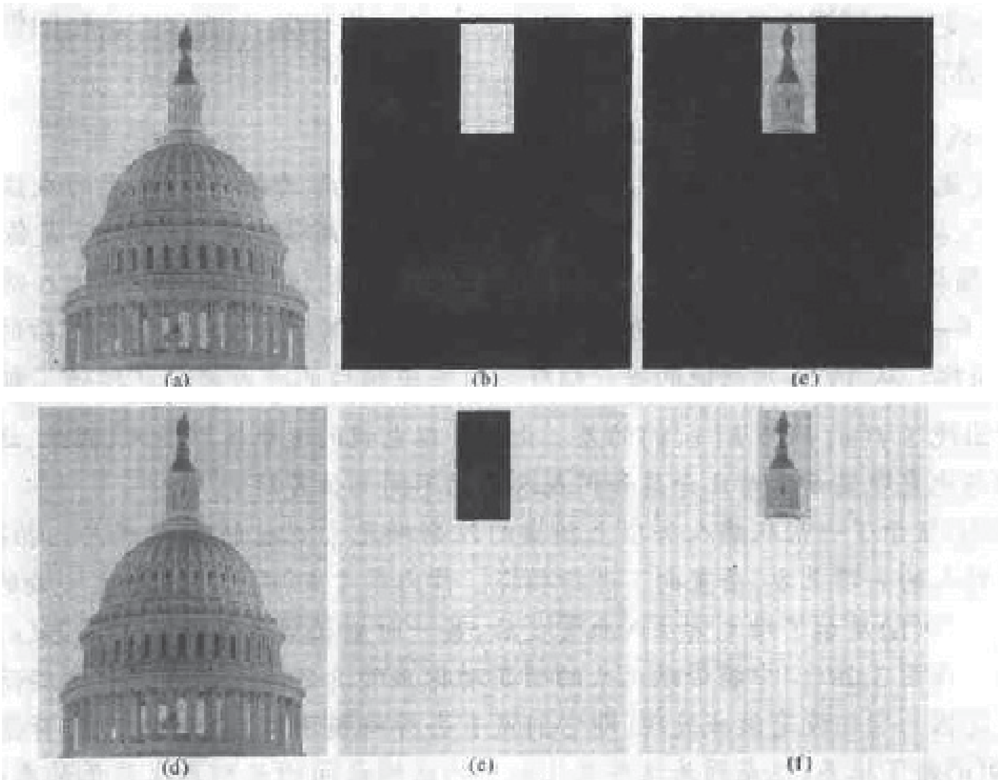
找到了划痕轨迹！

空间域图像增强

- 直方图处理（进阶）
- 用算术/逻辑操作增强

算术/逻辑操作增强

- 算术/逻辑操作主要以像素对像素为基础在两幅或多幅图像间进行。



"与"操作

"或"操作

算术/逻辑操作增强

- 四大类
  - 加法
  - 减法
  - 乘法
  - 除法

$$C(x,y)=A(x,y)+B(x,y)$$

$$C(x,y)=A(x,y)-B(x,y)$$

$$C(x,y)=A(x,y)\times B(x,y)$$

$$C(x,y)=A(x,y)\div B(x,y)$$

图像加法处理

- 小例子

+

=

图像加法处理

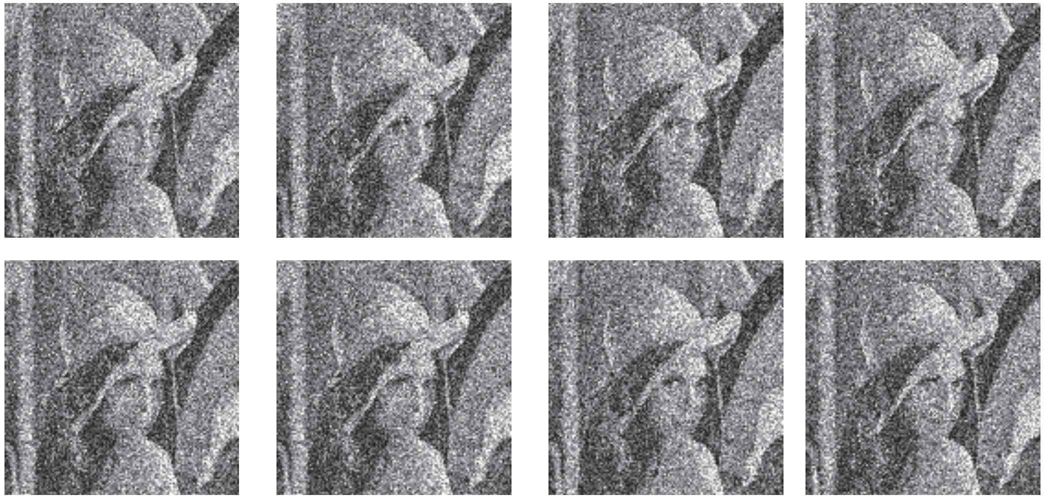
- 多次曝光：将不同时间曝光照片进行叠加，得到一张具有特殊效果的照片

图像加法处理

- 加法运算常用于减少图像中的随机噪声

怎么理解？

图像加法处理



8张随机噪声图像

怎么证明?

加法处理后

噪声明显减少，图像得到增强

推导

- 定理：对M幅加性噪声图像进行平均，可以使图像的平方信噪比提高M倍。
- 证明： $D_i(x,y)=S(x,y)+N_i(x,y)$ where $E\{N_i(x,y)\}=0$

信噪比 $P(x,y)=\dfrac{S^2(x,y)}{E\{N^2(x,y)\}}$ $\dfrac{\text{信号}}{\text{噪声}}$

$$\overline{D}(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left[S(x,y)+N_i(x,y)\right]$$

$$\overline{P}(x,y)=\frac{S^2(x,y)}{E\left\{\dfrac{1}{M^2}\left[\sum_{i=1}^{M}N_i(x,y)\right]^2\right\}}$$

推导续

- 由于

$$E\left\{\left[N_1(x,y)+N_2(x,y)\right]^2\right\}=E\left\{N_1^2(x,y)+N_2^2(x,y)\right\}+2E\left\{N_1(x,y)\right\}\varepsilon\left\{N_2(x,y)\right\}$$

- 注意到N1和N2独立，因此

$$E\left\{\left[N_1(x,y)+N_2(x,y)\right]^2\right\}=E\left\{N_1^2(x,y)\right\}+E\left\{N_2^2(x,y)\right\}$$

- 代入，有

$$\overline{P}(x,y)=\frac{M^2S^2(x,y)}{\sum_{i=1}^{M}N_i^2(x,y)}=\frac{M^2S^2(x,y)}{MN^2(x,y)}=MP(x,y)$$

图像减法处理

- 操作定义

$$g(x,y) = f(x,y) - h(x,y)$$

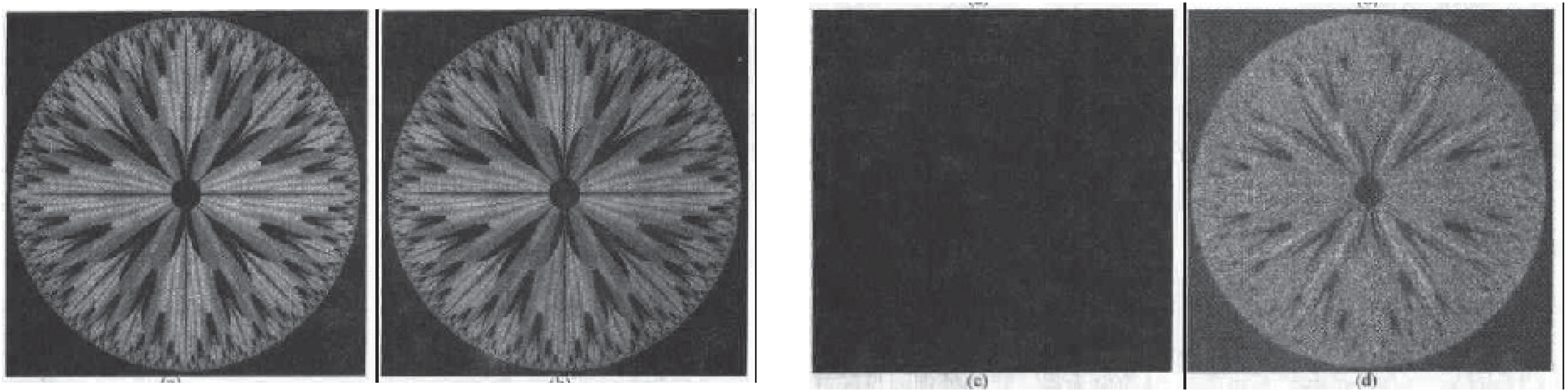
减法怎么让图像增强呢？

图像减法处理

- 操作定义

$$g(x,y) = f(x,y) - h(x,y)$$

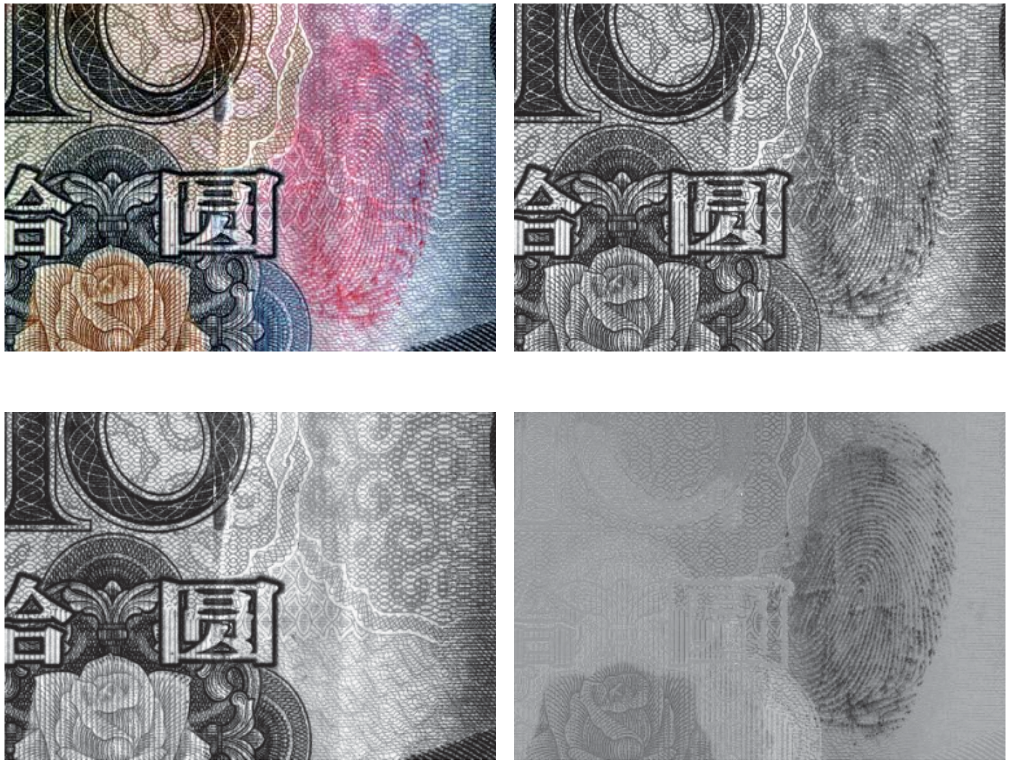
做差再做下直方图均衡化



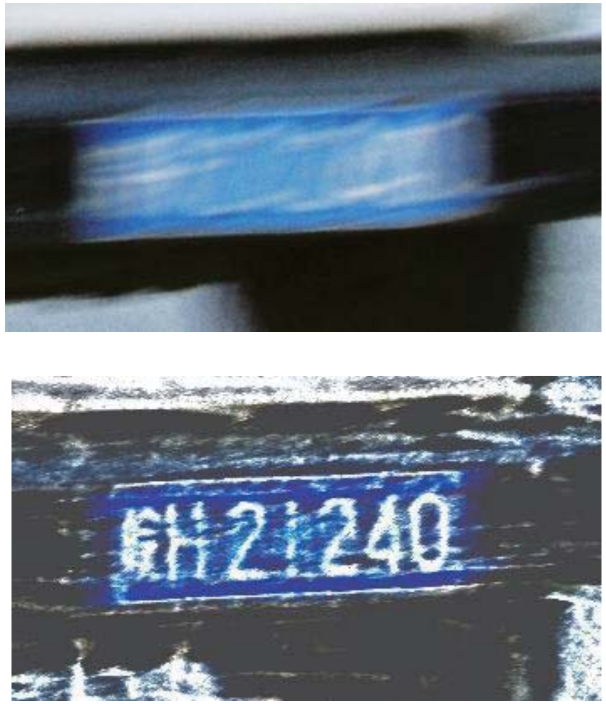
图像差别的细节被观察到

应用二

- 指纹抽取

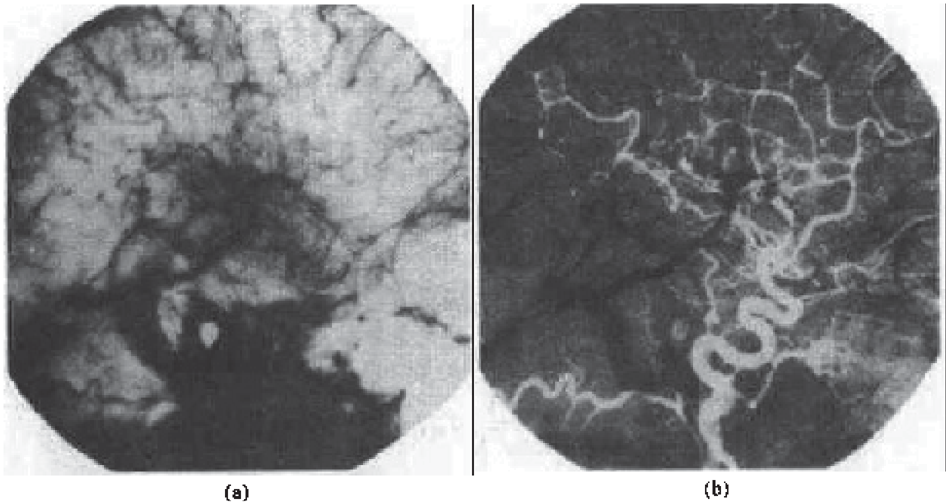


- 车牌号码检测



应用三：掩膜式X光成像法

- 考量不同介质注入病人血管后的反应



未注入介质的图像作为掩膜图像（参考图像）使用

注入碘介质后，减去掩膜图像后的血管X光成像

减法操作后取值范围存在负数，比如-255到255，而数字图像只能存正数，怎么办?

- 主要两种办法，都可以称为规范化方法
  - 直接规范化到[0,255]

$$y = (x + 255)/2$$

  - 更精细地规划化到[0,255]

min—》0
max—》255

$$y = (x - min)/(max - min) * 255$$

min和max分别为做差图像的最小，最大像素
当min=-255，max=255时，两个方法效果一样；

图像乘法与除法处理

- 乘法：通常用来进行掩模运算
- 除法：通常可以用来归一化

虽然乘法和除法在某些特别应用上会很有用，但总体用的比较少。

加法运算和直方图

- 在某些特殊情况下，加法运算后的图像直方图可以通过被加图像的直方图推导得到。
- 基本假设：输出图像的二维直方图是输入图像直方图的积。

$$H_{AB}\left(D_A, D_B\right) = H_A\left(D_A\right) H_B\left(D_B\right)$$

这个情况下，也认为两幅图像不相关

计算公式

- 主要步骤

Hab(D-Db,Db)dDb

$$H(D)=\int_{D_A+D_B=D} H_{AB}(D_A,D_B)dD_B$$

$$H(D)=\int_{D_A+D_B=D} H_A(D_A)H_B(D_B)dD_B$$

- 因为 $D_A = D_C - D_B$
- 所以

$$H(D)=\int_{-\infty}^{\infty} H_A(D_C - D_B)H_B(D_B)dD_B$$

这个计算公式就是著名的卷积运算