

傅里叶变换前瞻

——从信号的角度

傅里叶变换就是傅里叶级数当周期趋向于无穷大的形式。

完结撒花。。。

Outline

① 线性时不变系统

② 傅里叶级数

③ 傅里叶变换

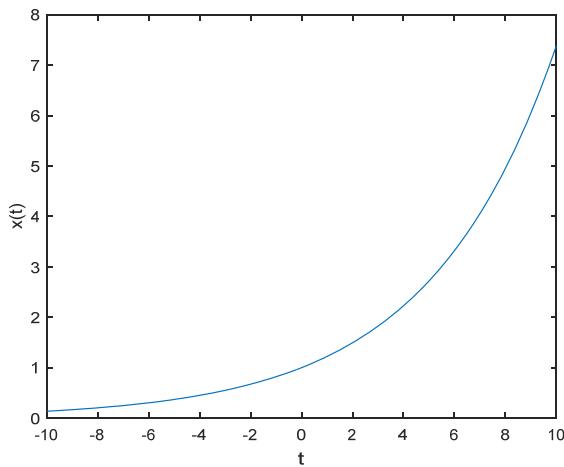
线性时不变系统

- 信号的表示
- LTI系统
- 信号通过LTI系统

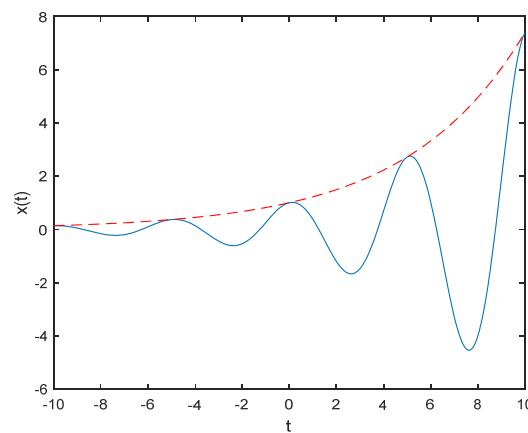
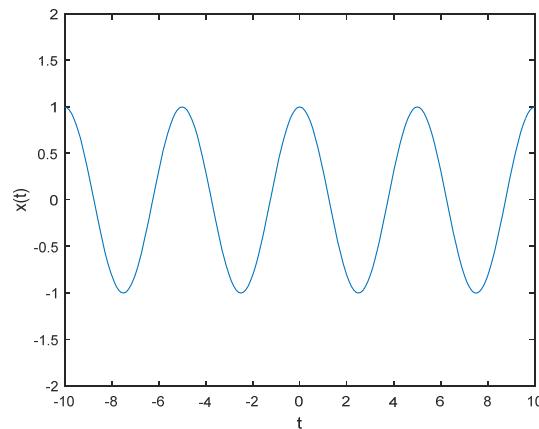
如何表示一个信号

- 用函数

$$x(t) = Ce^{at} \quad (C, a \text{为实数})$$



$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

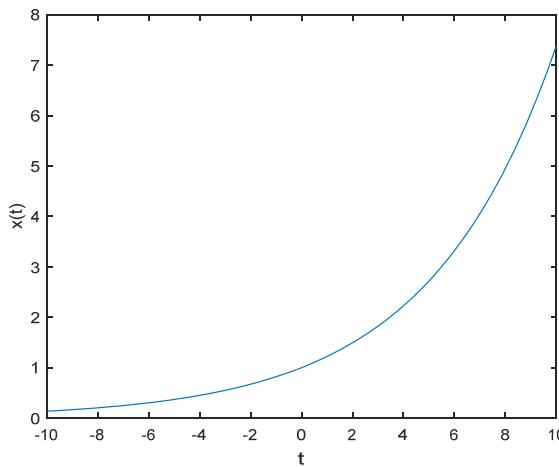


$$x(t) = Ce^{at} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

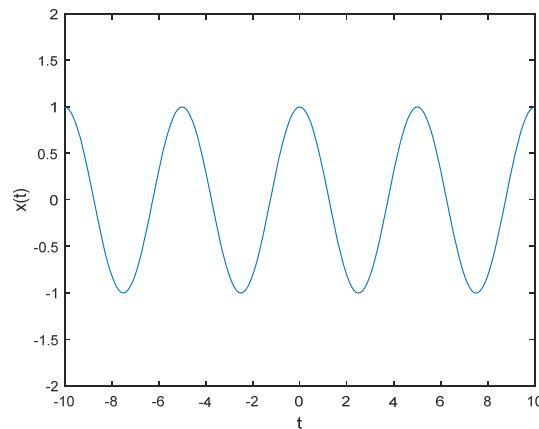
如何表示一个信号

- 用函数

$$x(t) = Ce^{at} \quad (C, a \text{ 为实数})$$



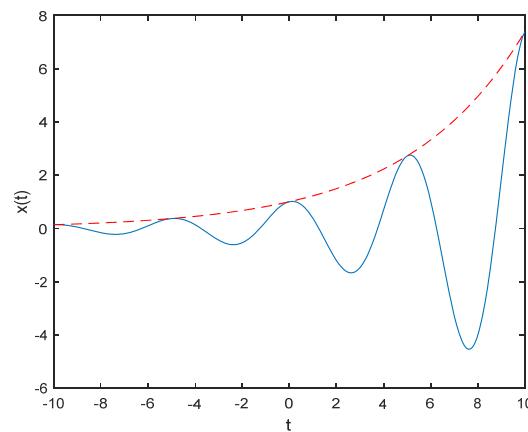
$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$



$$x(t) = \exp(j\omega_0 t) \quad \text{复指数信号}$$

欧拉公式

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$



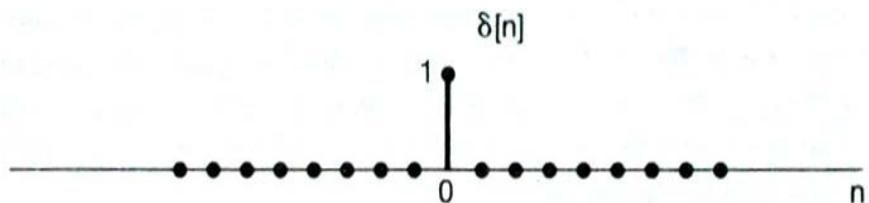
$$x(t) = Ce^{at} \cdot \cos(\omega_0 t)$$

如何表示一个信号

- 用函数
- 一个基本信号：单位冲激信号
 - 用单位冲激信号表示其他信号

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



如何表示一个信号

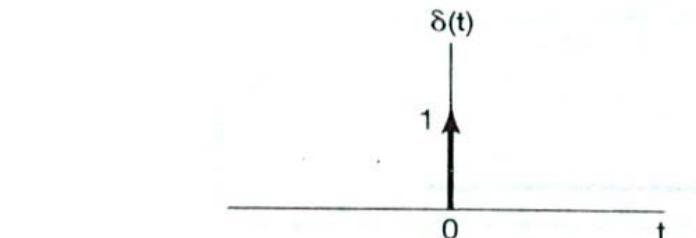
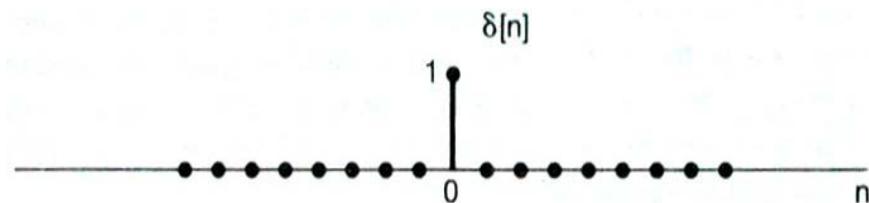
- 用函数
- 一个基本信号：单位冲激信号
 - 用单位冲激信号表示其他信号

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

- 连续的情形

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

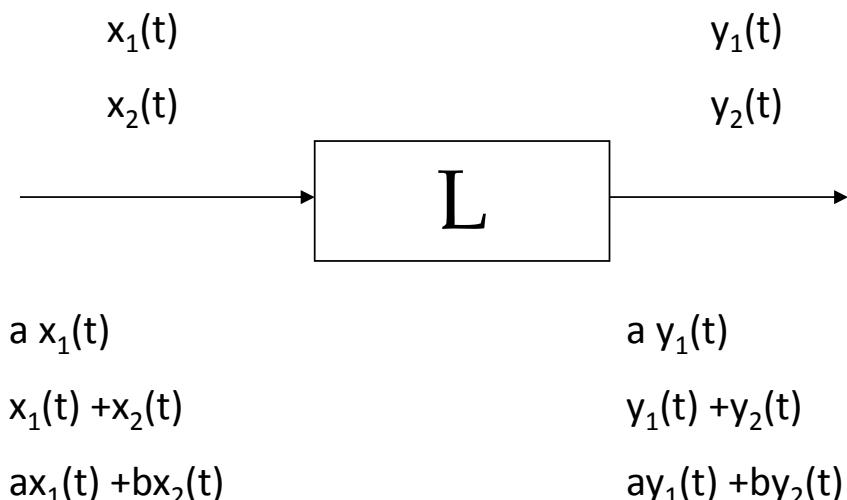
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

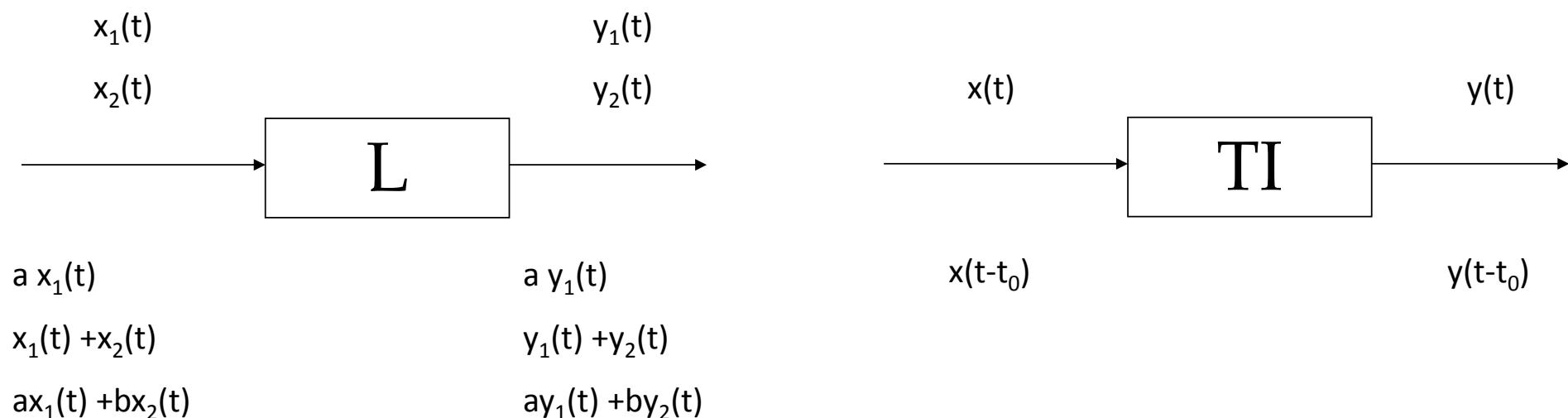
LTI系统 (Linear Time-Invariant System)

- 线性



LTI系统 (Linear Time-Invariant System)

- 线性
- 时不变性



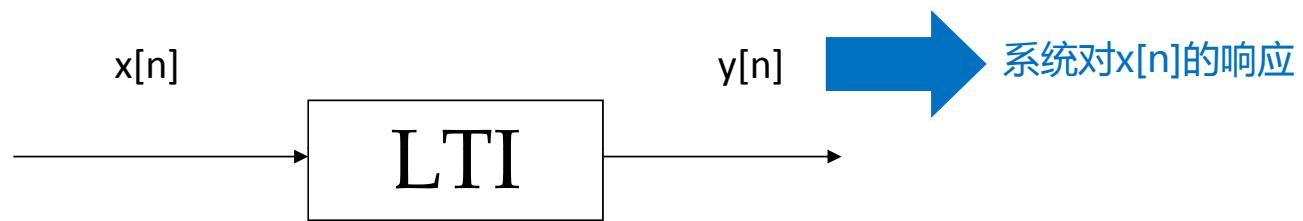
LTI系统 (Linear Time-Invariant System)

- 线性
- 时不变性
- 线性时不变



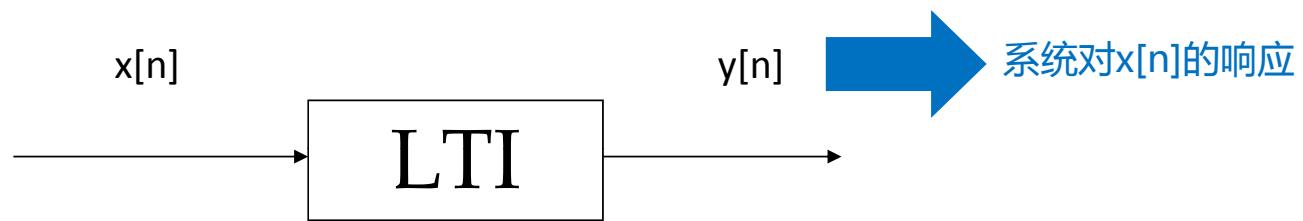
$$ax(t) + bx(t-t_0) \quad ay(t) + by(t-t_0)$$

当信号通过LTI系统…



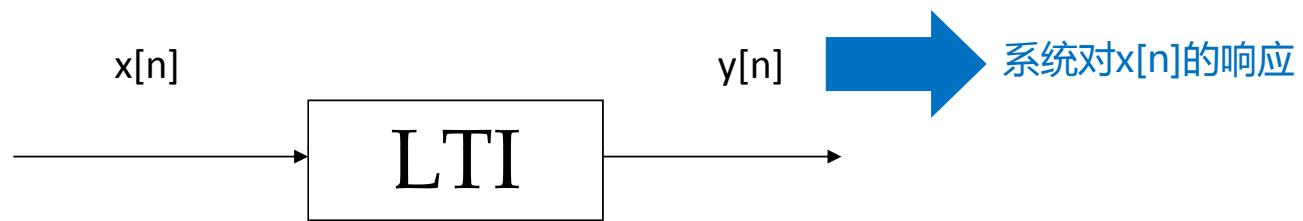
- 当 $x[n]=\delta[n]$ 时，输出的 $y[n]$ 叫做系统的单位冲激响应
- 通常，用符号 $h[n]$ 表示系统的单位冲激响应

当信号通过LTI系统…



- 当 $x[n]=\delta[n]$ 时，输出的 $y[n]$ 叫做系统的单位冲激响应
- 通常，用符号 $h[n]$ 表示系统的单位冲激响应
- 如果 $x[n]$ 更复杂一点？

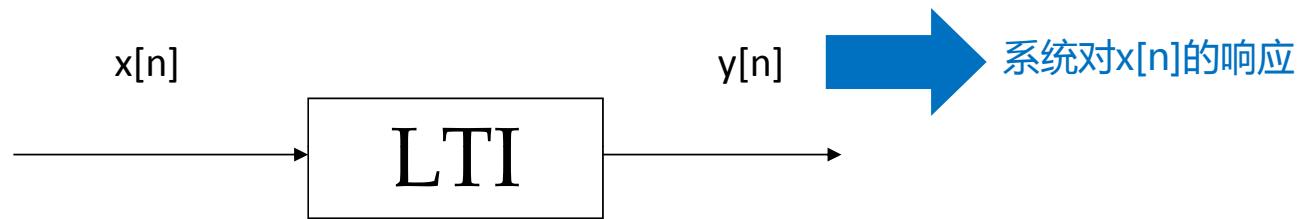
当信号通过LTI系统…



- 当 $x[n]=\delta[n]$ 时，输出的 $y[n]$ 叫做系统的单位冲激响应
- 通常，用符号 $h[n]$ 表示系统的单位冲激响应
- 如果 $x[n]$ 更复杂一点？

$$\begin{aligned}\delta[n] &\longrightarrow h[n] \\ \delta[n-k] &\longrightarrow h[n-k] \\ x[k]\delta[n-k] &\longrightarrow x[k] h[n-k]\end{aligned}$$

当信号通过LTI系统…



- 当 $x[n]=\delta[n]$ 时，输出的 $y[n]$ 叫做系统的单位冲激响应
- 通常，用符号 $h[n]$ 表示系统的单位冲激响应
- 如果 $x[n]$ 更复杂一点？

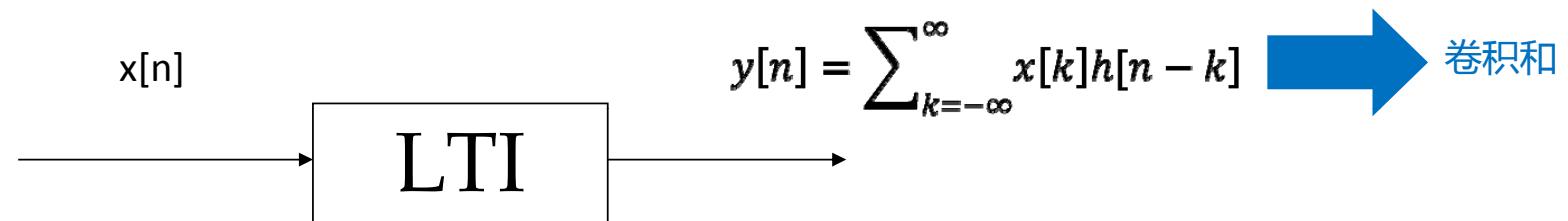
$$\delta[n] \longrightarrow h[n]$$

$$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$$

$$x[k]\delta[n-k] \longrightarrow x[k] h[n-k]$$

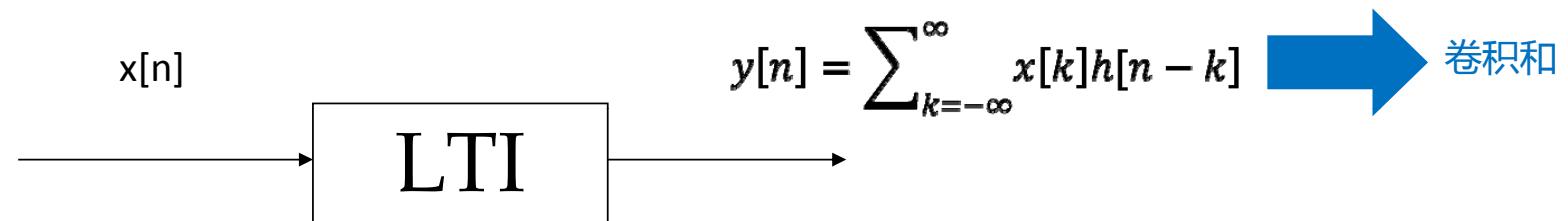
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

当信号通过LTI系统…

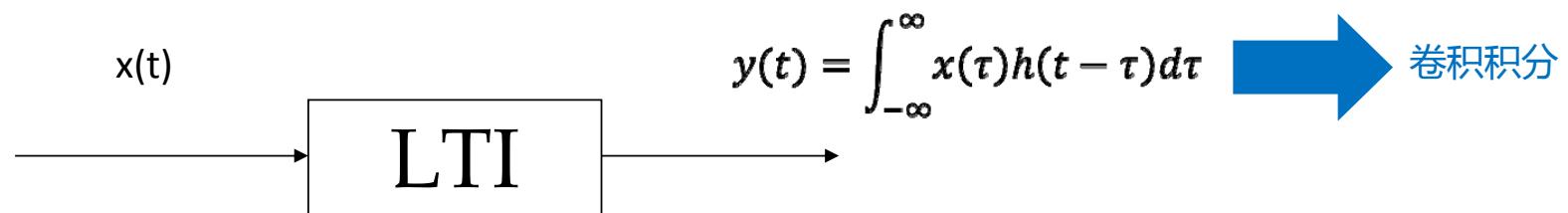


- 连续的情形

当信号通过LTI系统…



- 连续的情形



现在我们来谈谈信号的展开

- 信号的展开
- 信号的傅里叶级数

信号展开…似曾相识？

- 任何一个函数可以分解为一个奇函数和偶函数之和
- 二维平面的任何曲线运动可以分解为两个正交方向上的直线运动
- 三维空间的任何曲线运动可以分解为三个正交方向上的直线运动

- 泰勒展开

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n$$

-将复杂的函数表示成幂级数的线性叠加

-复杂的函数可以用多项式来表示了啊啊！

那些年，我们展开过的函数

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

在它们的基础上可以进一步导出欧拉公式

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

以及上帝创造的等式—

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

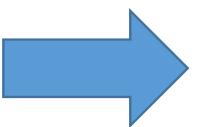
信号展开…似曾相识？

- 任何一个函数可以分解为一个奇函数和偶函数之和
- 二维平面的任何曲线运动可以分解为两个正交方向上的直线运动
- 三维空间的任何曲线运动可以分解为三个正交方向上的直线运动
- 泰勒展开
$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n$$
 - 将复杂的函数表示成幂级数的线性叠加
 - 复杂的函数可以用多项式来表示了啊啊！
- 有没有其他的式子（级数）可以用来对信号展开？

当一个复指数信号通过LTI系统…



$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau & \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{st}e^{-s\tau}h(\tau)d\tau \\&= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\end{aligned}$$

令 $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ $= H(s)e^{st}$  这说明了什么？

说明了LTI系统对复指数信号的响应仍然是复指数信号。

当一个复指数信号通过LTI系统…



- 只不过改变了幅度/相位而已
- 这样的信号称为系统的特征函数， $H(s)$ 则称为特征值
- 是不是和矩阵的特征向量、特征值有些相似？

$$\mathbf{A}\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$$

当若干个复指数信号的线性组合通过LTI系统…

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \quad \xrightarrow{\text{LTI}} \quad y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

- 那么输出也是若干个复指数信号的线性组合
- 于是，问题来了——

一个信号可以表示成若干个复指数信号的线性组合吗？？

类比…

- 一个向量如何表示为若干个向量的线性组合？

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 想办法搞到该向量所在空间的一组正交基 简称：搞基。。

- 什么是正交？

- 定义在 (t_1, t_2) 区间的两个函数 $f_1(t), f_2(t)$ ，满足 $\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2^*(t)dt = 0$

- 正交的完备性

频率  • 三角函数集 $\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), n = 1, 2, \dots\}$

• 复指数函数集 $\{e^{jk\omega t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 都定义在区间 $(t_0, t_0 + T)$ ($T = 2\pi/\omega$)

序率  • Walsh函数集

.....

用正交基表示信号

- 三角函数集 $\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), n = 1, 2, \dots\}$
- 复指数函数集 $\{e^{jn\omega t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 都定义在区间 $(t_0, t_0 + T)$ ($T = 2\pi/\omega$)
- 选用三角函数集来表示信号

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

- 选用复指数函数集

这是什么？

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega t}$$

傅里叶级数

- 如何求系数？

• 两边同乘以 $e^{-jn\omega_0 t}$

• 两边同时在一个周期内积分

• 交换等式右边积分与求和符号

• 于是乎

• 结果是

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(k-n)\omega_0 t} dt$$

$$\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt}_{\begin{array}{l} \text{当 } k=n \text{ 时, 为 } T; \\ \text{否则为 } 0 \end{array}}$$

$$\int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} a_n T, & k = n \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

用正交基表示信号

- 我们换一种表达方式 连续的频率

- 令 $X(j\omega) = \int_T x(t)e^{-j\omega t} dt$

- 那么 $a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$

- 于是 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

- 将T换掉 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

离答案越来越近了…

- 如果是非周期信号怎么办？

- 做周期延拓
- 然后让周期 $T \rightarrow \infty$
- 于是我们得到

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_T x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

这是什么？

T → 无穷，则 $\omega_0 \rightarrow dw$

离散Fourier Transform

- 设信号长度是N，那么N就是它的周期
- 稍微变一下式子

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

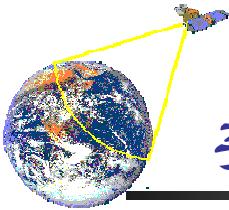
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{j\omega})e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Summary

- 信号的展开需要寻找信号空间的一组完备正交基
- 为什么要用周期复指数完备集对信号进行分解
 - LTI系统
- 新的完备正交基 ?



数字图像处理与分析

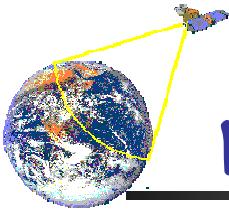
■ 图像的频域变换

- 图像频域变换的意义
- 频域变换的理论基础
 - ✓ 线性系统、卷积与相关
 - ✓ 正交变换及其特征
 - ✓ 离散图像的正交变换

- 傅立叶变换定义与特征
- 傅里叶变换的应用

■ 其他变换

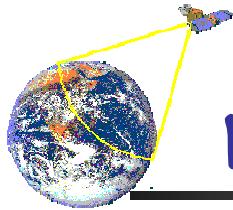
- 离散余弦变换，沃尔什变换——哈达玛变换，哈尔变换，霍特林变换（主成分变换），小波变换



图像的频域变换

■ 图像频域变换的意义

- 利用频率成分和图像外表之间的对应关系，一些在空间域表述困难的增强任务，在频率域中变得非常普通
- 图像的变换过程可类比于数学上去相关处理，在空域相互交叉难以描述的特征，在频域往往得到更为直观的表达、分离甚至集中
- 图像的滤波在频率域更为直观，它可以解释空间域滤波难以解释的某些性质
- 理论上可以在频率域指定滤波器，通过反变换，以其空域响应作为构建空间域滤波器的指导
- 一旦通过频率域试验选择了空间滤波，具体实施可在空间域进行



图像的频域变换——理论基础

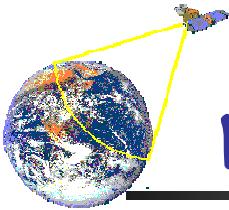
■ 线性系统

➤ 系统的定义：

接受一个输入，并产生相应输出的任何实体。

系统的输入是一个或两个变量的函数，输出是相同变量的另一个函数。





图像的频域变换——理论基础

■ 线性系统

➤ 线性系统的定义：

对于某特定系统，有：

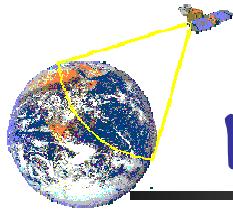
$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

该系统是线性的当且仅当：

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

从而有： $a \cdot x_1(t) \rightarrow a \cdot y_1(t)$



图像的频域变换——理论基础

■ 线性系统

➤ 线性系统移不变性的定义：

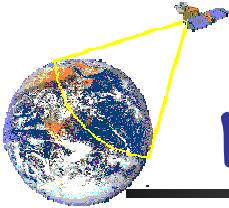
对于某线性系统，有：

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

当输入信号沿时间轴平移T，有：

$$x(t - T) \rightarrow y(t - T)$$

则称该线性系统具有移不变性



图像的频域变换——理论基础

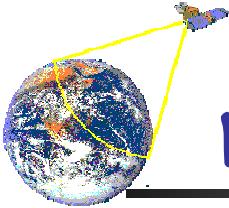
➤ 卷积的定义

✓ 对于一个线性系统的输入 $f(t)$ 和输出 $y(t)$, 其间必定存在关系:

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

✓ $h(t)$ 称为线性系统的单位冲激响应函数, 其含义为: 当线性系统输入 $f(t)$ 为单位脉冲函数时,
线性系统的输出响应

✓ 上式称之为卷积积分



图像的频域变换——理论基础

➤ 离散一维卷积

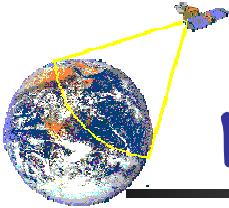
$$y(i) = f(i) * h(i) = \sum_j f(j)h(i-j)$$

➤ 二维卷积的定义

$$y(x, y) = f * h = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(i, j)h(x-i, y-j) di dj$$

➤ 离散二维卷积

$$y(x, y) = f * h = \sum_i \sum_j f(i, j)h(x-i, y-j)$$



图像的频域变换——理论基础

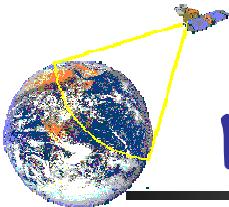
■ 相关的定义

➤ 任意两个信号的相关函数定义为：

$$R_{fg}(t) = f(t) \bullet g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t + \tau)d\tau$$

➤ 相关与卷积的关系：

$$R_{fg}(t) = f(t) \bullet g(t) = f(-t) * g(t)$$



图像的频域变换——理论基础

■ 正交变换

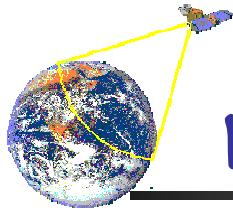
➤ 连续函数集合的正交性

正交函数集合 $U = \{u_0(t), u_1(t), \dots\}$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u_m(t) u_n(t) dt = \begin{cases} C & \text{if } m = n \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

当 $C = 1$ 时，称集合为归一化**正交函数**集合，即每一个向量为单位向量

其物理意义为多维空间坐标的基轴方向互相正交



图像的频域变换——理论基础

► 正交函数集合的完备性

- 若 $f(x)$ 是定义在 t_0 和 t_0+T 区间的实值信号，平方可积。可以表示为：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$$

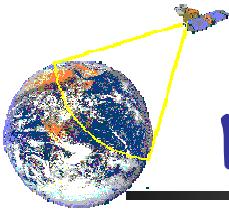
对任意小的 $\varepsilon > 0$ ，存在充分大的 N ，用 N 个有限展开式估计 $f(x)$ 时：

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n u_n(x)$$

可有：

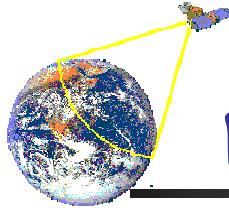
$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(x) - \hat{f}(x)|^2 dx < \varepsilon$$

则称函数 U 集合是完备的。



图像的频域变换——理论基础

- 正交函数集合完备性的物理意义
 - ✓ 任何数量的奇函数累加仍为奇函数
 - ✓ 任何数量的偶函数累加仍为偶函数
- 因此. 为了能用累加展开式来表示一个任意函数，就要求这个函数集合中既有奇函数又有偶函数

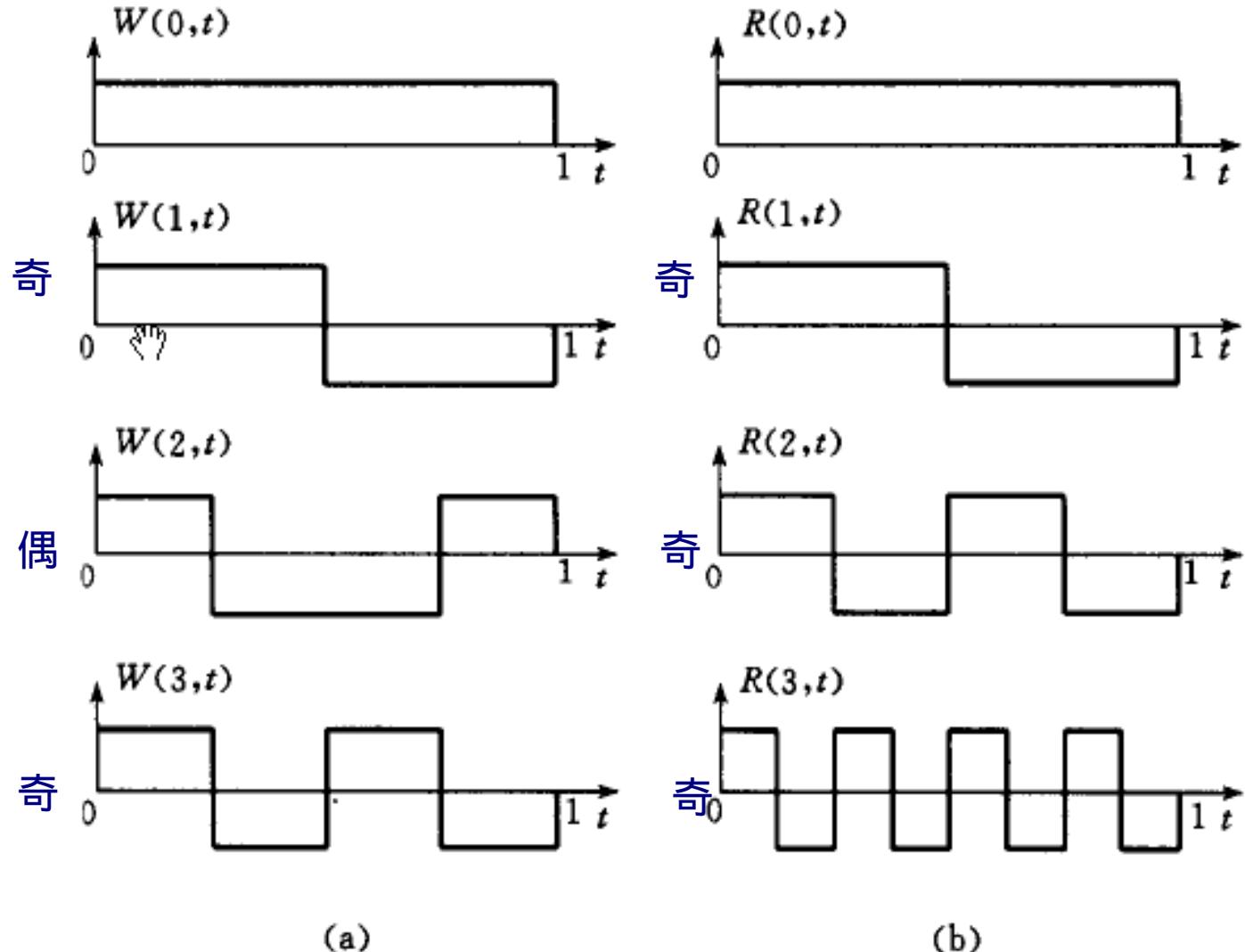


图像的频域变换——理论基础

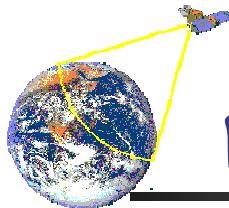
▶ 正交函数完备集性质图例

(a) 完备

(b) 不完备



视 $1/2$ 为零点， $f(-x)=f(x)$ -» 偶函数
 $f(-x)=-f(x)$ -» 奇函数



图像的频域变换——理论基础

► 正交函数的离散情况

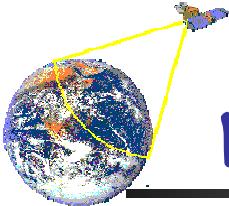
N 个正交向量

注 : a_{ji} 相当于函数 a_i 在离散点取值
 a_i 是离散函数

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \begin{cases} C & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

当 $C=1$ 时，称归一化正交



图像的频域变换——理论基础

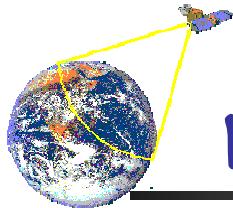
► 正交函数的离散情况

N 个正交向量矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

必满足：

$$A^T A = AA^T = I$$



图像的频域变换——理论基础

► 正交变换

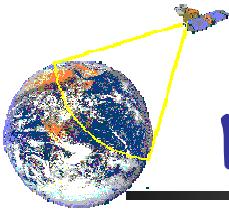
对于n维向量 f , 用上述正交矩阵进行运算:

$$g = Af \quad \text{相当于求n个基向量的权重}$$

若要恢复 f , 则

$$f = A^{-1}g = A^T g \quad \text{基向量线性组合表示f}$$

以上过程称为正交变换。



图像的频域变换——理论基础

►一般范式—酉变换(unitary transform)

若A为复数矩阵，正交的条件为：

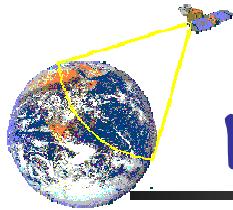
$$A^{-1} = A^{*T}$$

其中 A^* 为A的复数共轭矩阵，满足这个条件的矩阵为**酉矩阵(unitary matrix)**。对于任意向量f的运算称为**酉变换**：

$$\mathbf{g} = Af \quad g(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k, n) f(n)$$

$$f = A^{*T} \mathbf{g} \quad f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^*(k, n) g(k)$$

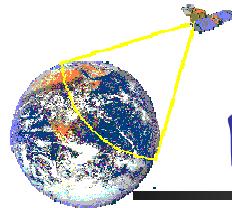
a*(k,n) - 第k个基信号
g(k) - 第k个信号的权重
表示权重之间的变换
注：这里的a*(k,n)是经A共
轭转置的分量



图像的频域变换——理论基础

► 酉变换、正交变换与信号分析

- ✓ 正交变换是酉变换的特例
- ✓ 它们都可以用于信号分析
- ✓ 用于信号分析的基函数集合和正交矩阵都应满足正交性和完备性



图像的频域变换——理论基础

二维酉变换

- $N \times N$ 二维函数可以类似于一维用正交序列展开和恢复

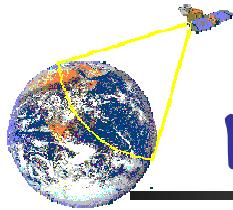
$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) a_{u,v}(x, y) \quad 0 \leq u, v < N$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) a_{u,v}^*(x, y) \quad 0 \leq x, y < N$$

第(u,v)个基图像，共NxN个

正变换核

反变换核



图像的频域变换——理论基础

变换核的可分离性

$$a_{u,v}(x, y) = a_u(x)b_v(y) \Rightarrow a(u, x)b(v, y)$$

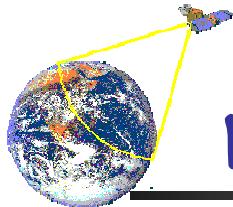
其中 $\{a_u(x), u=0, 1, \dots, N-1\}$,

$\{b_v(y), v=0, 1, \dots, N-1\}$

为一维完备正交基向量的集合。用矩阵表示：

$$A = \{a(u, x)\}, \quad B = \{b(v, y)\}$$

通常选择 $A = B$ 。



图像的频域变换——理论基础

二维酉变换

$A=B$ 时，二维酉变换正变换表示为

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{n-1} a(u, x) f(x, y) a(v, y)$$

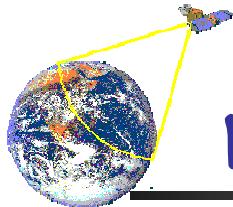
用矩阵表示：

$$F = A f A^T$$

类似的，对于 $M \times N$ 的二维函数 $f(x, y)$

$$F = A_M f_{MN} A_N^T$$

$$f = A_M^* F_{MN} A_N^{*T}$$



图像的频域变换——理论基础

基图像

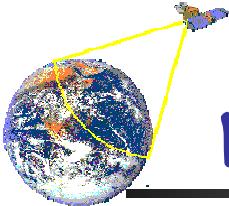
对反变换

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) a_{u,v}^*(x, y) \quad 0 \leq x, y < N$$

$a_{u,v}^*(x, y)$ —— 可看成是基图像

$F(u, v)$ —— 权因子 或 (u, v) 处的谱

图像 $f(x, y)$ 可以用 N^2 个基图像的加权和来表示



图像的频域变换——理论基础

酉变换的性质

1. 酉矩阵是正交阵

$$AA^{*T} = A^{*T}A = I_{N \times N}$$

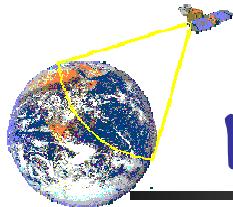
2. A 为酉阵，则 A^{-1} 和 A^T 都是酉阵

3. 酉变换是能量保持的变换

对于一维酉变换 $F=Af$ ，有 $\|F\|=\|f\|$

二维情况下，则有：

$$\sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)|^2 = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} |f(x, y)|^2$$



图像的频域变换——理论基础

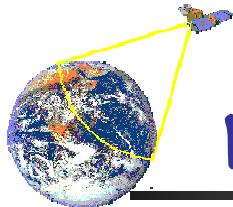
酉变换的性质(2)

4. 酉变换能量的紧缩

正交酉变换往往趋于将信号能量压缩到相对少的变换系数中，由于总能量保持不变，因此许多变换系数将包含很少的能量

稀疏表示-sparse representation

K - L 变换可以达到最大的能量紧缩。



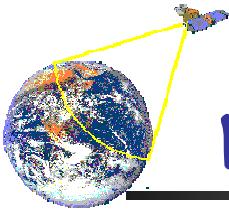
图像的频域变换——理论基础

酉变换的性质(3)

5. 酉变换去相关

当输入向量元素间高度相关时，变换系数趋向于去相关，这意味着协方差矩阵的非对角项和对角项相比趋于变小。

K - L变换可以达到完全的去相关



图像的频域变换——理论基础

酉变换的性质 (4)

6. 均值和方差

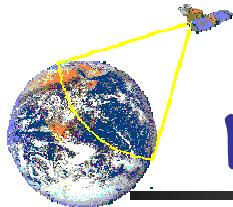
设 $f(x, y)$ 的均值和协方差为 μ_f 和 Σ_f

则 $F(u, v)$ 的均值为：

$$\mu_F = E(Af) = AE(f) = A\mu_f$$

则 $F(u, v)$ 的协方差为：

$$\begin{aligned}\Sigma_F &= E \left\{ (F - \mu_F)(F - \mu_F)^{*T} \right\} \\ &= AE \left\{ (f - \mu_f)(f - \mu_f)^{*T} \right\} \text{ A*^t} \\ &= A\Sigma_f A^{*T}\end{aligned}$$

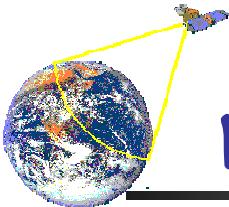


图像的频域变换——理论基础

酉变换的性质(5)

7. 其他性质：

- (1) A 为酉阵，则其行列式值 $|A|=1$
- (2) 若 a 为向量，则作酉变换后向量模保持不变： $b=Aa$ ，则 $|b|=|a|$



图像的频域变换——理论基础

例：给定正交矩阵A和图像U，

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

求：图像U经变换A后的变换图像V。

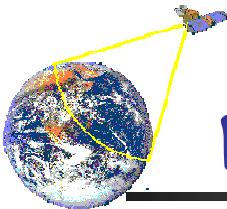
可有：

$$[V] = [A][U][A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

这里应是转置

反变换为：

$$[U] = [A^T][V][A^T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$



图像的频域变换——理论基础

变换 A 的基图像 A^{*T} 为 A 的各列向量的外积（向量积）

$$A_{00}^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad -1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

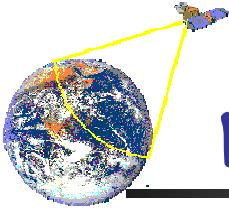
$$A_{11}^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} [0 \quad -1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{01}^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \quad -1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{10}^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \quad -1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

注：

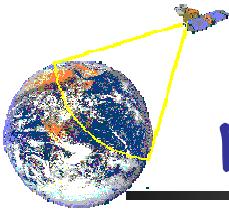
1. 二维酉变换可分离
2. X和Y方向的一维酉变换矩阵为 A
3. 以X和Y的基向量为列向量构成 A
4. 对于二维酉变换，基向量为 2×2 ，由 A 的列向量外积构成



图像的频域变换——理论基础

■ 小结

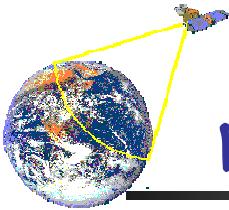
- 线性系统
- 线性系统移不变性的定义
- 连续函数集合的正交性和完备性
- 一维正交变换和酉变换
- 二维酉变换
- 基图像
- 酉变换的性质



图像的频域变换—离散图像的正交变换

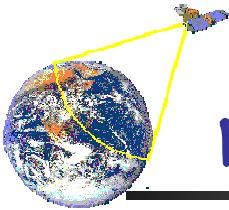
■ 什么是图像变换

- 将图像看成是线性叠加系统
- 图像在空域上具有很强的相关性
- 图像变换是将图像从空域变换到其它域如频域的数学变换
- 借助于正交变换的特性可使在空域上的复杂计算转换到频域后得到简化
- 借助于频域特性的分析，将更有利获得图像的各种特性和进行特殊处理



图像的频域变换—离散图像的正交变换

- 可进行图像变换的基本条件
 - 满足正交、完备两个条件的函数集合或矩阵才能用于图像的分析
 - 常用的几种变换：傅里叶变换、WALSH变换、哈达玛变换、Haar变换、SLANT变换、K-L变换以及特定条件下的CONSINE变换、SINE变换等，都满足正交性和完备性两个条件



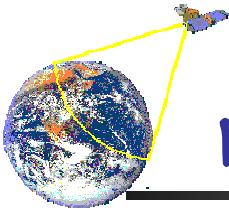
图像的频域变换——离散图像的正交变换

■ 离散图像的正交变换

- 离散图像的正交变换为图像信号在一组二维离散完备正交基上的展开,这种正交基展示具有无损重构的性质,以及图像能量的集中和图像信号元素的去相关性能,在图像处理中具有重要的作用。
- 若离散图像 $f(m, n)$ 及其在离散完备正交基 $\{a(u, v; m, n)\}$ 上的展开系数为 $g(u, v)$,即

$$g(u, v) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) a(u, v; m, n)$$

$$f(m, n) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u, v) a^*(u, v; m, n)$$



图像的频域变换——离散图像的正交变换

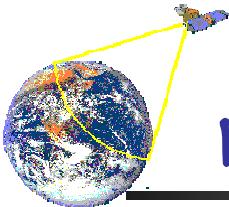
■ 离散图像正交变换的特性

1. 二维离散完备正交基 $\{a(u, v; m, n)\}$ 的正交性

满足

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a(u, v; m, n) a^*(u', v'; m, n) = \delta(u - u', v - v') .$$

正交性保证变换后图像的紧缩性，图像的去相关性和保证任何被截断的级数展开将使均方误差和为最小。



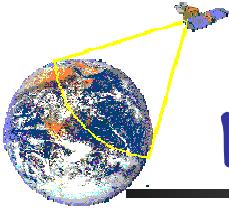
图像的频域变换——离散图像的正交变换

2. 二维离散完备正交基 $\{a(u, v; m, n)\}$ 的完备性

满足

$$\sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} a(u, v; m, n) a^*(u, v; m', n') = \delta(m - m', n - n')$$

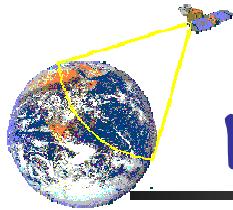
完备性保证变换后图像无失真的重构，即保证了当包括了全部系数时，重构误差将为零。



图像的频域变换——傅立叶变换

■ 傅立叶变换（Fourier）

- 约瑟夫 傅立叶（Joseph Fourier） - 法国数学家、物理学家，1807年提出傅立叶系列
- 傅立叶变换是最早研究与应用的酉变换
- 60年代出现快速傅立叶变换
- 傅立叶变换域也称为频域



图像的频域变换——傅立叶变换

- 基本数学概念

➤ 调谐信号 (欧拉公式):

$$f(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

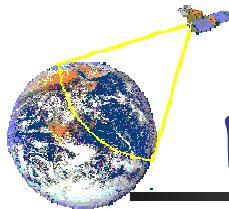
其中 $j^2 = -1$

➤ 傅立叶积分:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$\xrightarrow{2\pi f = w}$

其中 t 代表时间, f 代表频率



图像的频域变换——傅立叶变换

傅立叶变换的定义(一维)

$f(x)$ 为连续可积函数，其傅立叶变换定义为：

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

其反变换为：

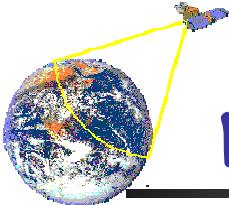
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

1/2*pai

通常 $f(x)$ 的傅里叶变换为复数，可有通用表示式为：

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

$R(u)$, $I(u)$ 分别称为傅里叶变换 $F(u)$ 的实部和虚部



图像的频域变换——傅立叶变换

傅立叶变换的定义(一维)

可进一步写为指数形式:

$$F(u) = |F(u)| e^{j\phi(u)}$$

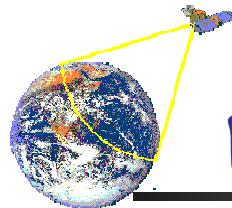
其中:

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

称之为 $f(x)$ 的幅度谱、振幅谱或傅里叶谱

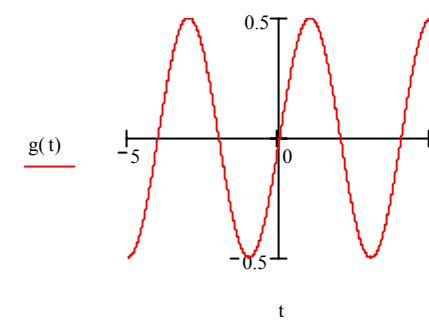
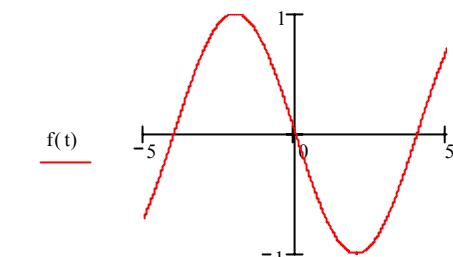
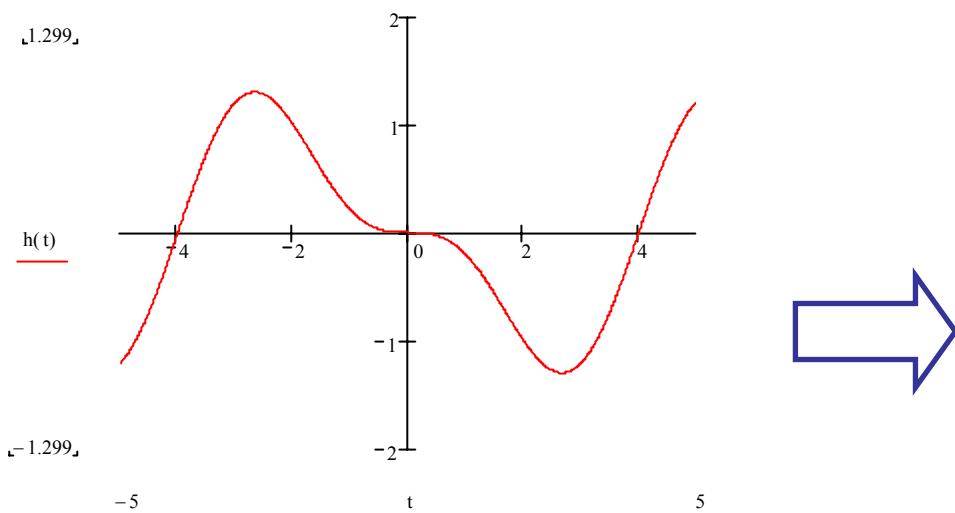
$$\phi(u) = \arctan[I(u) / R(u)]$$

称之为 $f(x)$ 的相位谱、相位角

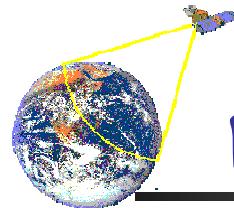


图像的频域变换——傅立叶变换

变换分析的直观说明

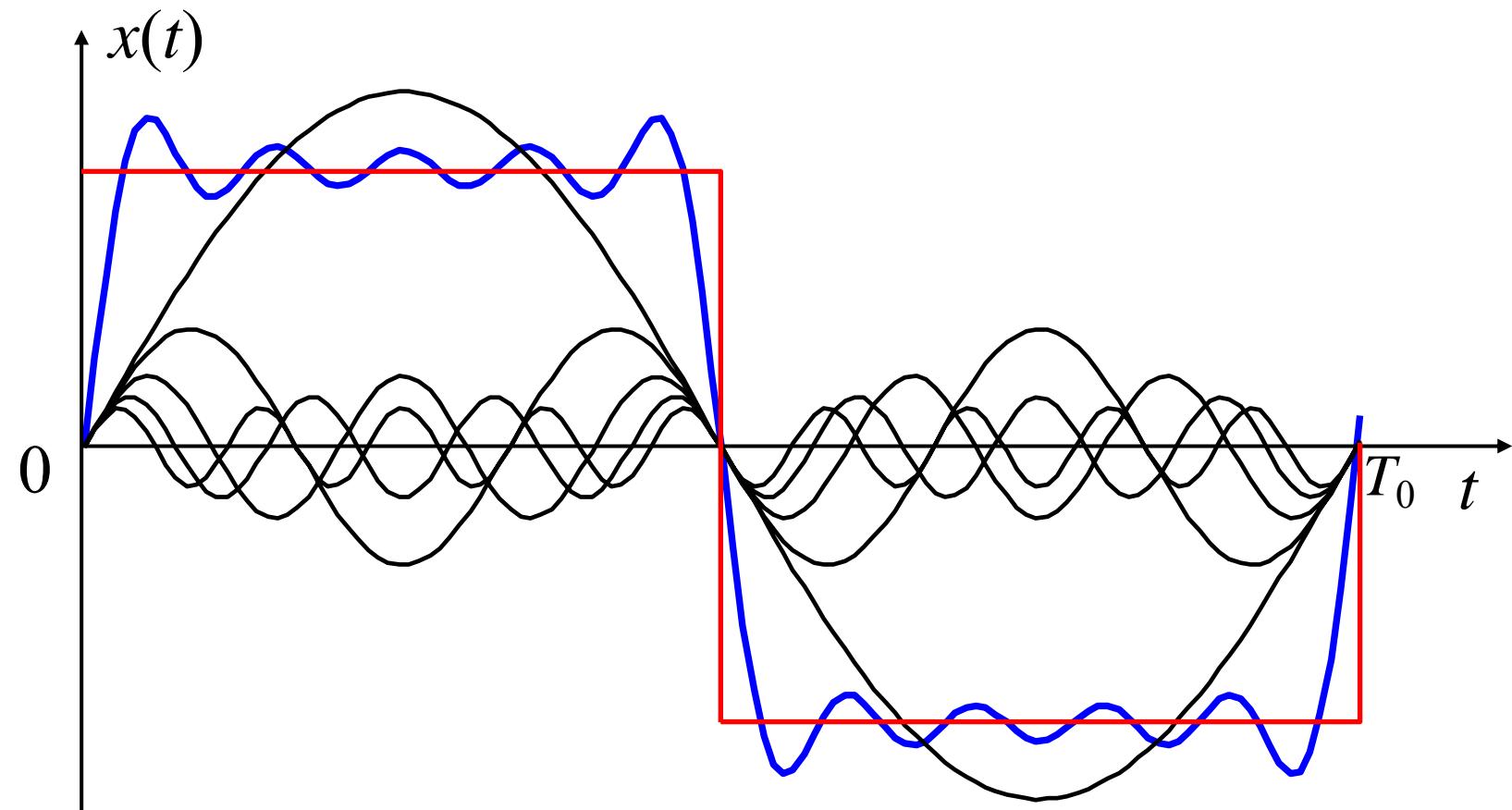


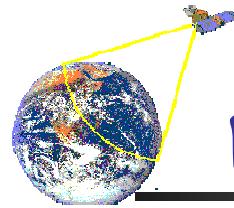
把一个信号的波形分解为许多不同频率正弦波之和。



图像的频域变换——傅立叶变换

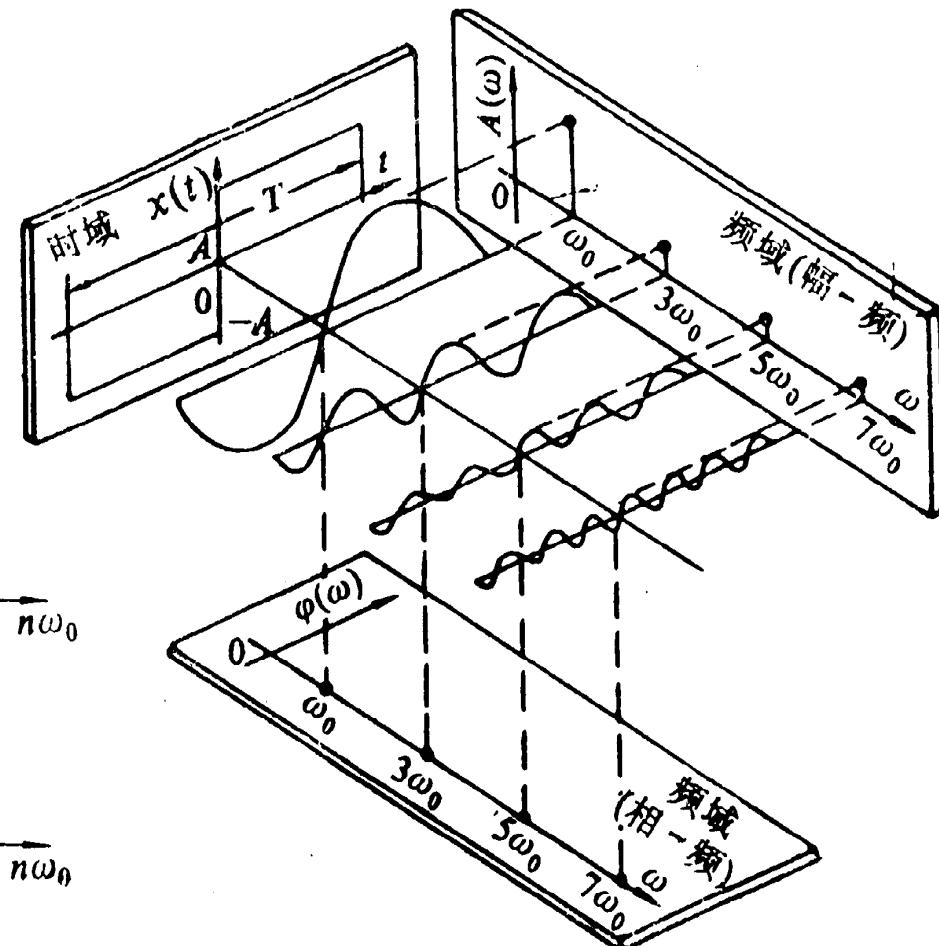
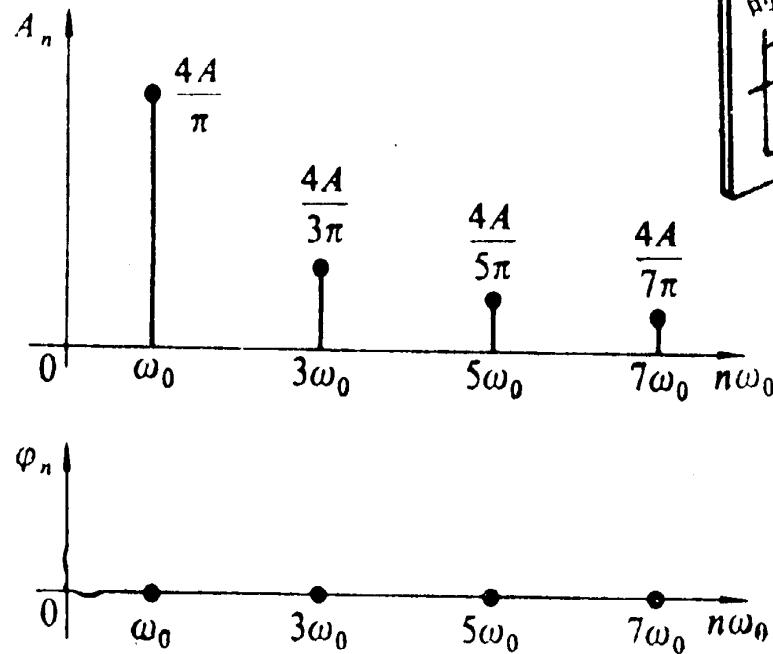
变换分析的直观说明——方波信号的分解

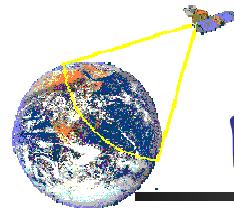




图像的频域变换——傅立叶变换

方波信号的时、频域描述

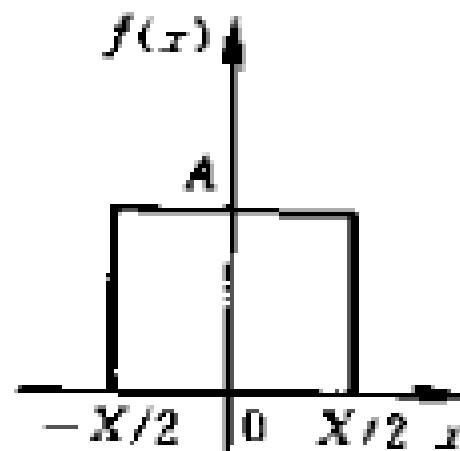




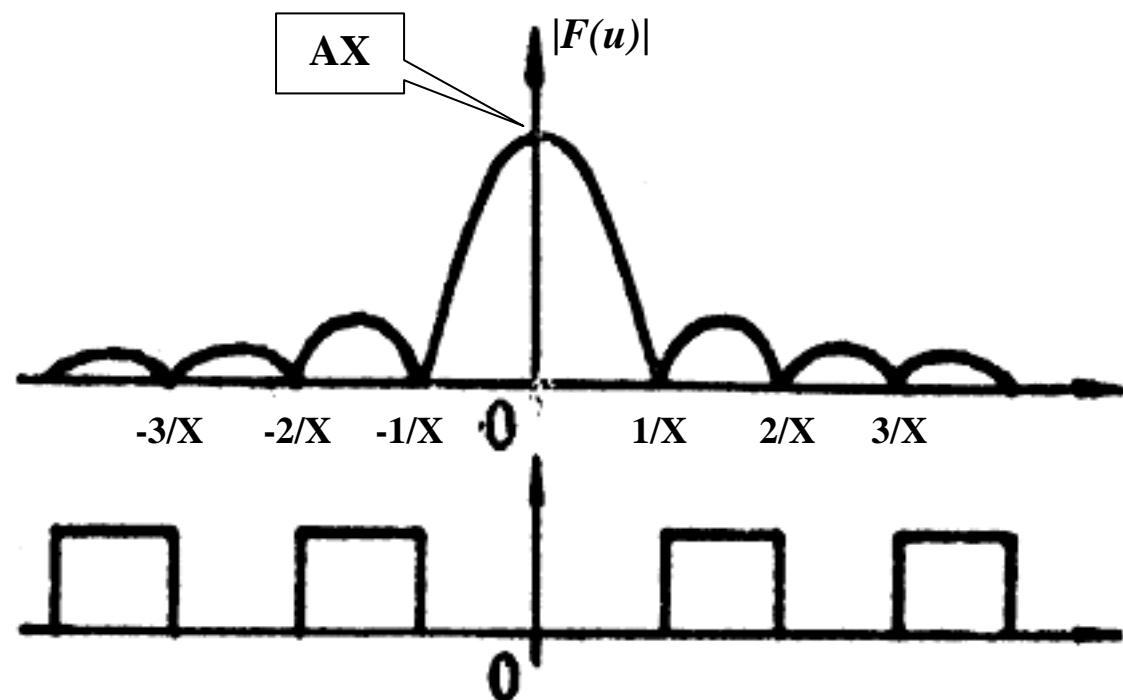
图像的频域变换——傅立叶变换

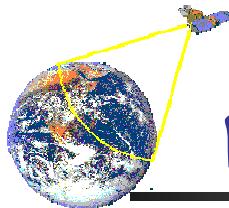
一维傅立叶变换举例

方波信号:



经过傅立叶变换后:

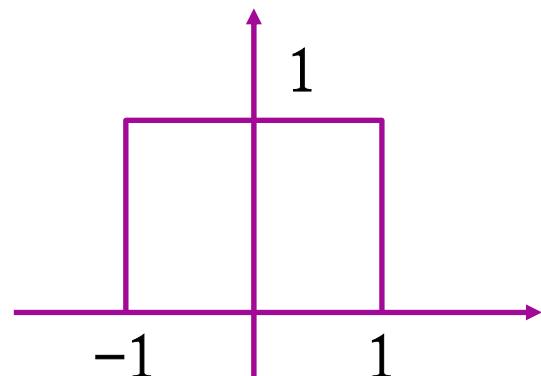




图像的频域变换——傅立叶变换

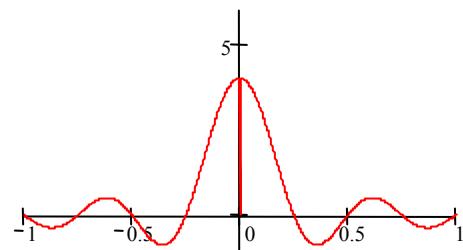
几种特殊函数的傅里叶变换

矩形函数:

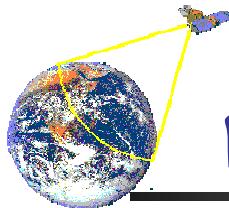


$$h(t) = \begin{cases} A, & |t| < T_0 \\ \frac{A}{2}, & |t| = T_0 \\ 0, & |t| > T_0 \end{cases}$$

矩形函数的富里叶变换:



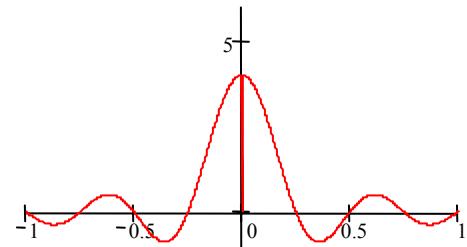
$$H(f) = 2AT_0 \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{2\pi T_0 f}$$



图像的频域变换——傅立叶变换

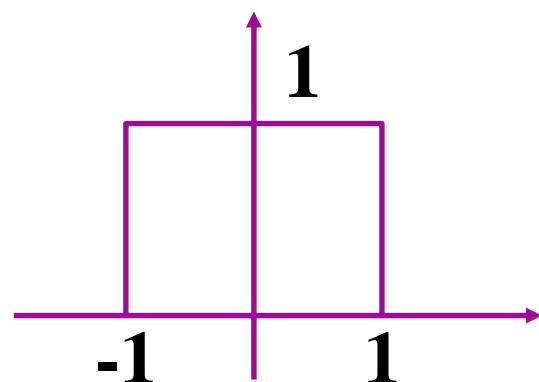
几种特殊函数的富里叶变换

$\sin(x)/x$ 类函数：（称之为sinc函数）

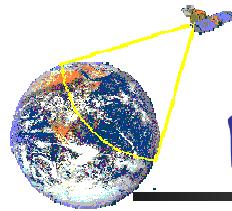


$$h(t) = 2Af_0 \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t}$$

$\sin(x)/x$ 类函数的富里叶变换：



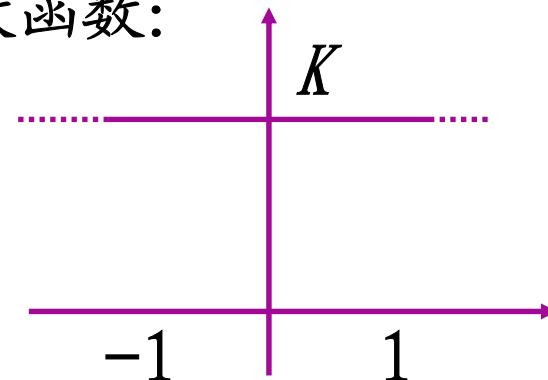
$$H(f) = \begin{cases} A, & |f| < f_0 \\ \frac{A}{2}, & |f| = f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$



图像的频域变换——傅立叶变换

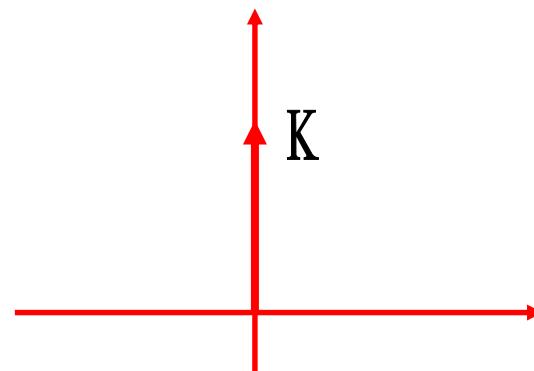
几种特殊函数的富里叶变换

常数函数:

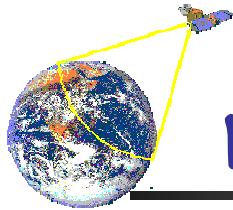


$$h(t) = K$$

常数函数的富里叶变换:



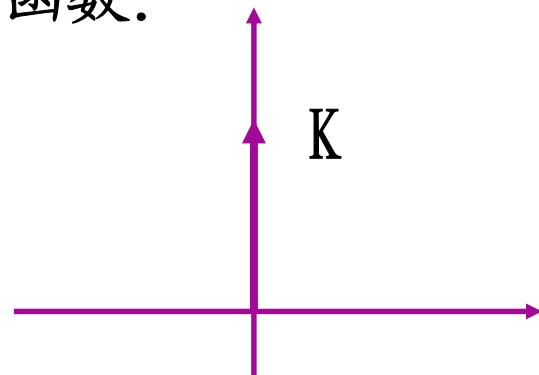
$$H(f) = K\delta(f)$$



图像的频域变换——傅立叶变换

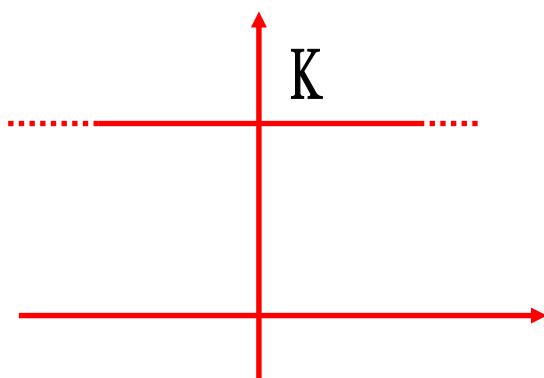
几种特殊函数的富里叶变换

脉冲函数：

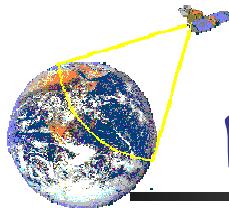


$$h(t) = K\delta(t)$$

脉冲函数的富里叶变换：



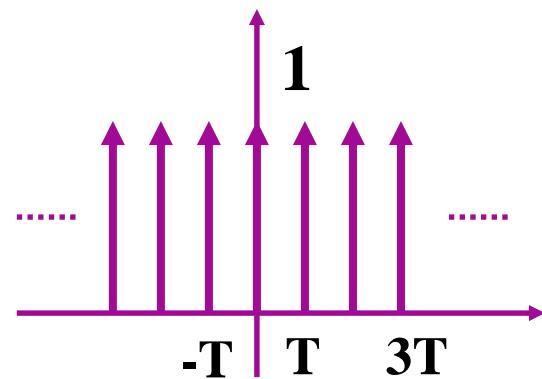
$$H(f) = K$$



图像的频域变换——傅立叶变换

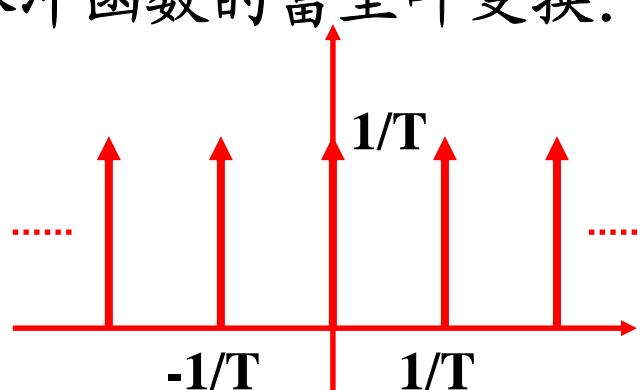
几种特殊函数的富里叶变换

脉冲函数：

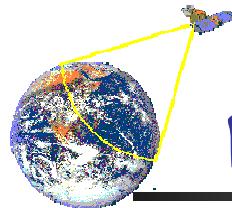


$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

脉冲函数的富里叶变换：



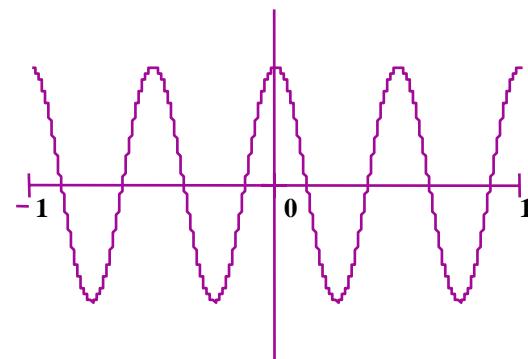
$$H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$



图像的频域变换——傅立叶变换

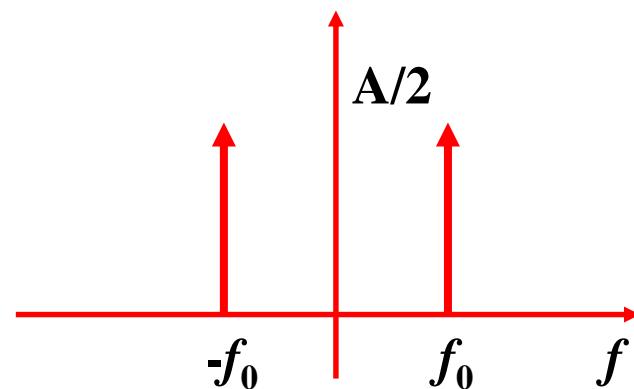
几种特殊函数的富里叶变换

余弦函数：



$$h(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

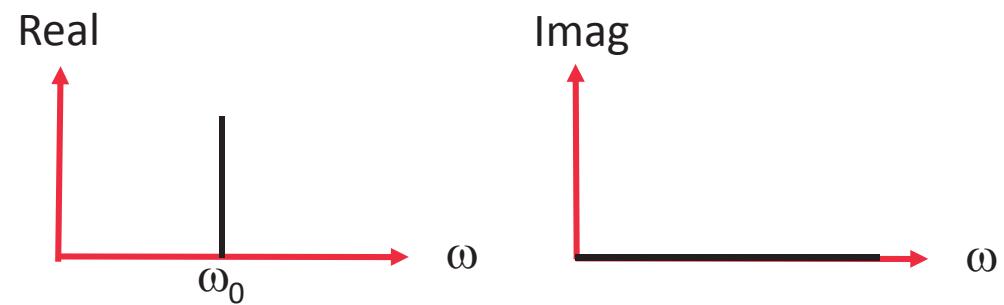
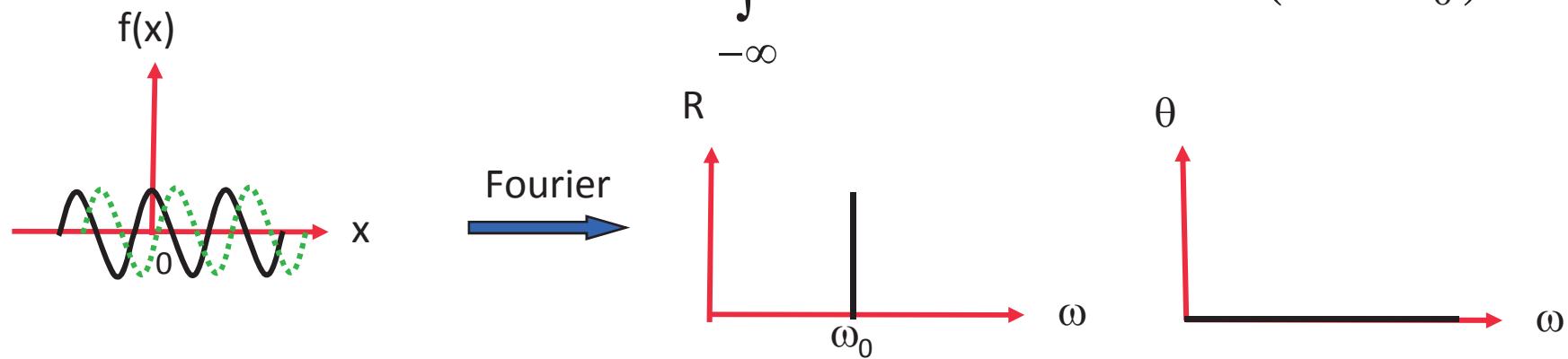
脉冲函数的富里叶变换：



$$H(f) = \frac{A}{2} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$$

傅立叶变换计算举例： $f(x) = e^{i2\pi\omega_0 x}$

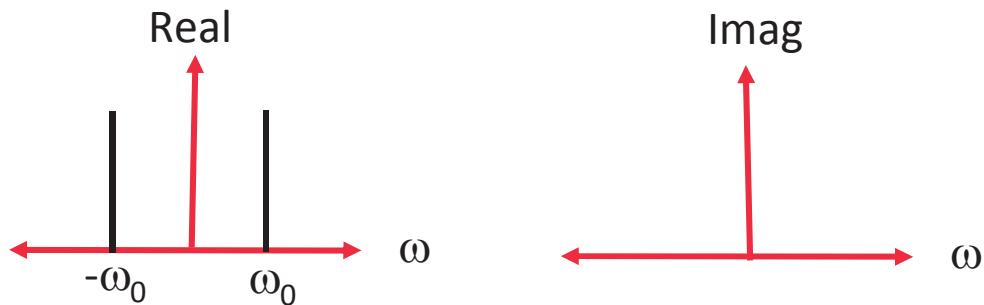
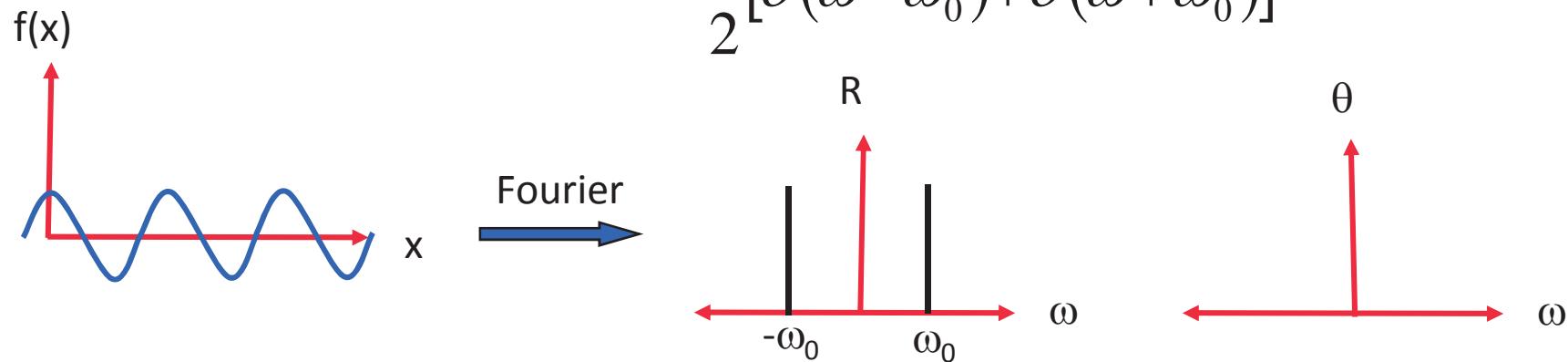
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\omega_0 x} e^{-i2\pi\omega x} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(\omega - \omega_0)x} dx = \delta(\omega - \omega_0)$$



The Cosine Function:

$$f(x) = \cos(2\pi\omega_0 x)$$

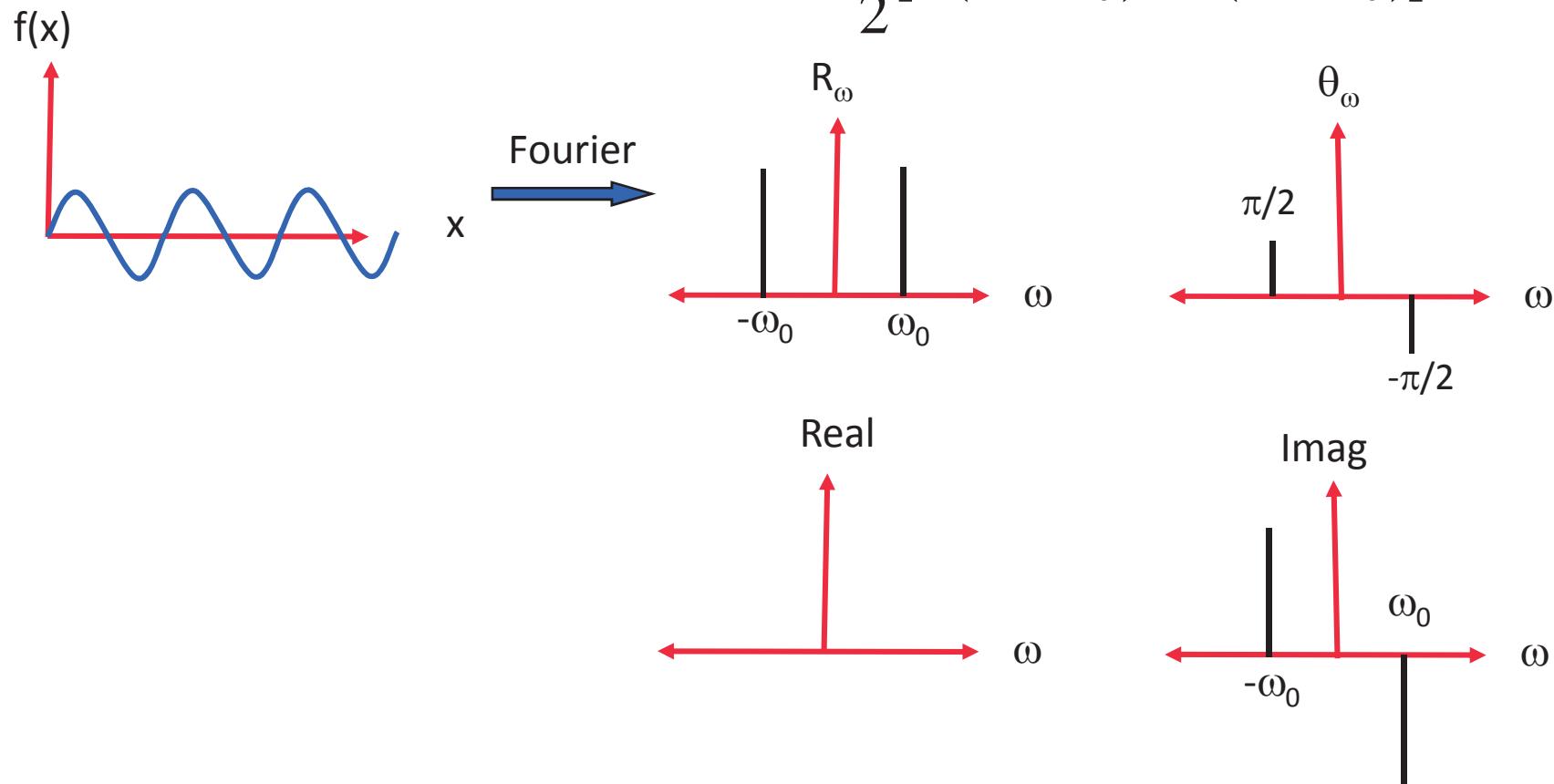
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{i2\pi\omega_0 x} + e^{-i2\pi\omega_0 x}) \cdot e^{-i2\pi\omega x} dx = \\ &= \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$



The Sine Function:

$$f(x) = \sin(2\pi\omega_0 x)$$

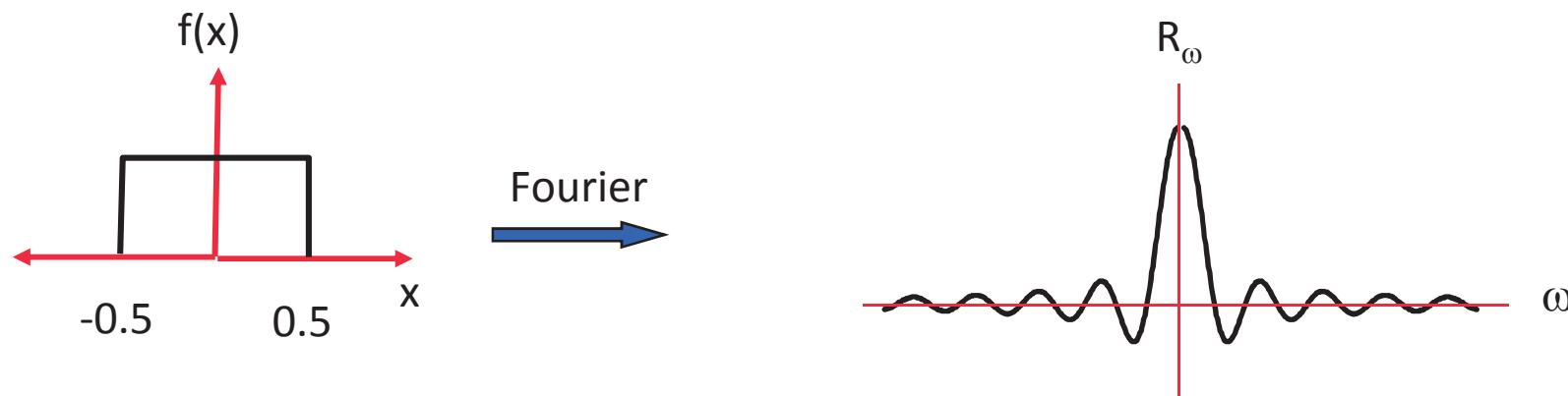
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2} (e^{-i2\pi\omega_0 x} - e^{i2\pi\omega_0 x}) \cdot e^{-i2\pi\omega x} dx = \\ &= \frac{i}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$



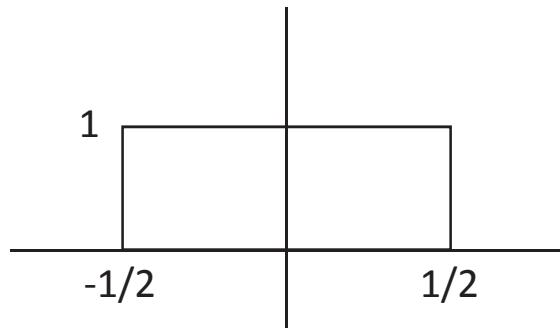
The Window Function (rect):

$$\text{rect}_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{-i2\pi\omega x} dx = \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega} = \text{sinc}(\pi\omega)$$

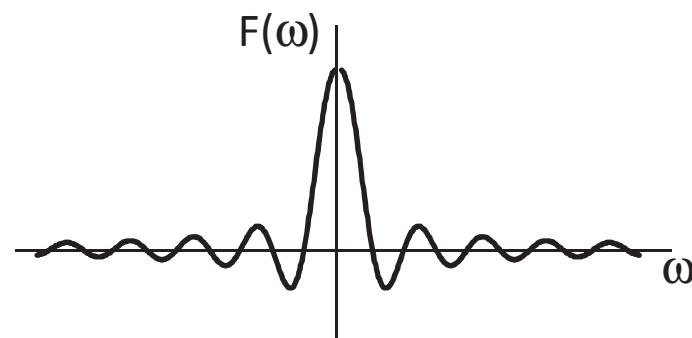


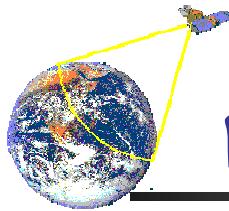
Proof:



$$f(x) = \text{rect}_{1/2}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \omega x} dx \\ &= \frac{1}{-2\pi i \omega} [e^{-2\pi i \omega x}]_{-1/2}^{1/2} \\ &= \frac{1}{-2\pi i \omega} [e^{-\pi i \omega} - e^{\pi i \omega}] \\ &= \frac{1}{-2\pi i \omega} [\cancel{\cos(\pi \omega)} - \cancel{i \sin(\pi \omega)} - \cancel{\cos(\pi \omega)} - \cancel{i \sin(\pi \omega)}] \\ &= \frac{\sin(\pi \omega)}{\pi \omega} = \boxed{\text{SINC } (\omega)} \end{aligned}$$

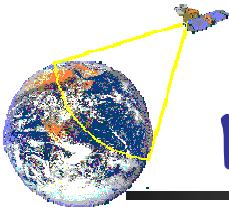




图像的频域变换——傅立叶变换

几种特殊函数的富里叶变换

实域	频域
实 函 数	实部为偶函数 虚部为奇函数
虚 函 数	实部为奇函数 虚部为偶函数
实部为偶函数 虚部为奇函数	实 函 数
实部为奇函数 虚部为偶函数	虚 函 数
实 的 偶函数	实 的 偶函数
实 的 奇函数	虚 的 奇函数
虚 的 偶函数	虚 的 偶函数
虚 的 奇函数	实 的 奇函数
偶 函 数	偶 函 数
奇 函 数	奇 函 数



图像的频域变换——傅立叶变换

一维离散傅立叶变换(DFT)

一维离散傅立叶变换公式为：

- 1. 频率的最小分辨率为 $2\pi/N$
- 2. $F(u)$ 计算的是第 u 个频率间隔上的频谱（包括幅度和相位）

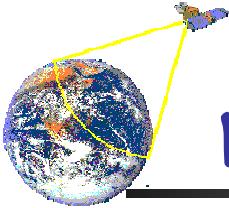
$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi u x}{N}} \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

逆变换为：

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j \frac{2\pi u x}{N}} \quad x = 0, 1, \dots, N-1$$

逆变换的另一种表达形式：

$$f(x) = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} F^*(u) e^{-j \frac{2\pi u x}{N}} \right]^*$$



图像的频域变换——傅立叶变换

二维傅立叶变换

二维傅立叶变换由一维傅立叶变换推广而来：

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

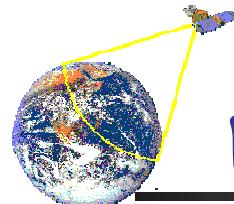
逆变换：

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv$$

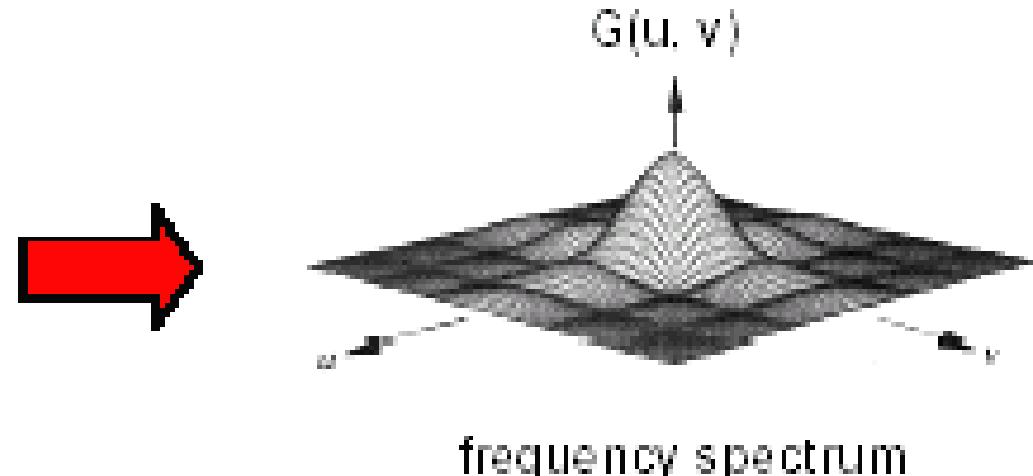
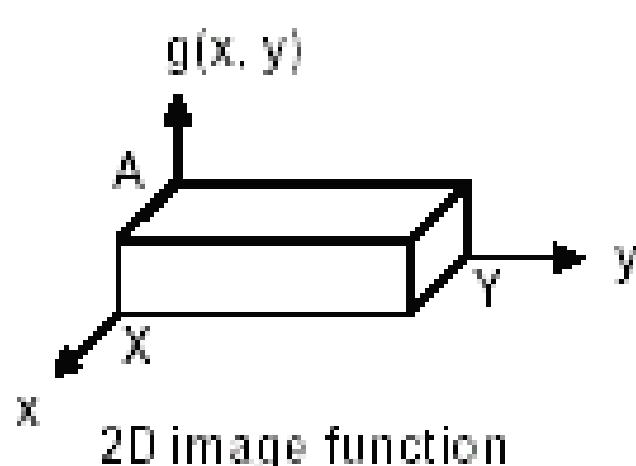
$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$$

幅度谱： $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$

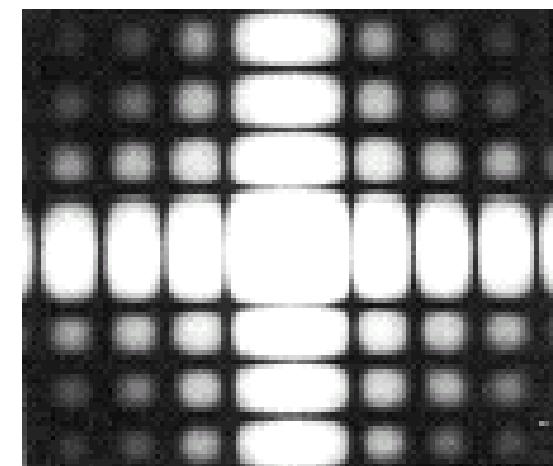
相位谱： $\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$



图像的频域变换——傅立叶变换

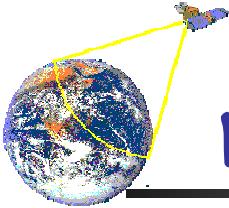


Note that large spectral amplitudes occur in directions vertical to prominent edges of the image function



图像的二维傅立叶变换图例

frequency spectrum as an intensity function



图像的频域变换——傅立叶变换

二维离散傅立叶变换 (DFT)

对于二维傅立叶变换，其离散形式为：

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

逆变换为：

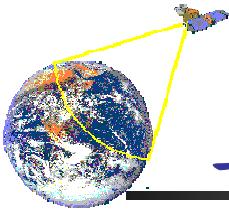
$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

幅频谱、相位谱：

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{j\varphi(u, v)} = R(u, v) + jI(u, v)$$

$$|F(u, v)| = \left[R^2(u, v) + I^2(u, v) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)}$$



二维离散傅立叶变换的性质

1. 线性性质（加法定理）：

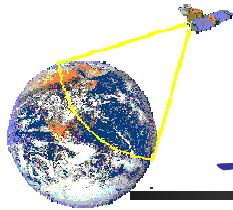
$$a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y) \Leftrightarrow a_1 F_1(u, v) + a_2 F_2(u, v)$$

傅立叶变换是线性系统、函数和的傅立叶变换等于各函数傅里叶变换的和

2. 比例性质（相似性定理）：

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad f(x,y) \rightarrow F(u,v)$$

比例特性表明：信号在时域中压缩 ($k > 1$, 变化速度加快) 等效于在频域扩展 (频带加宽)；反之亦然



二维离散傅立叶变换的性质

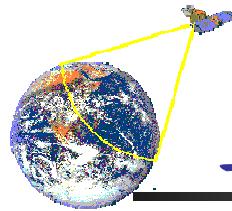
3. 可分离性:

因二维傅氏变换的
基函数是可分离的

$$F(u, v) = F_x \{F_y[f(x, y)]\} = F_y \{F_x[f(x, y)]\}$$

$$f(x, y) = F_u^{-1} \{F_v^{-1}[F(u, v)]\} = F_v^{-1} \{F_u^{-1}[F(u, v)]\}$$

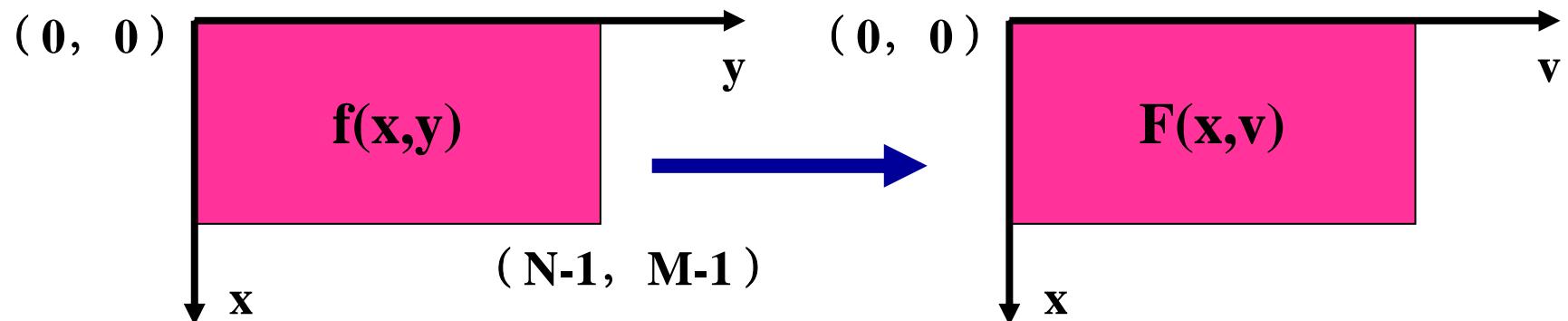
二维DFT可分离为两次一维DFT



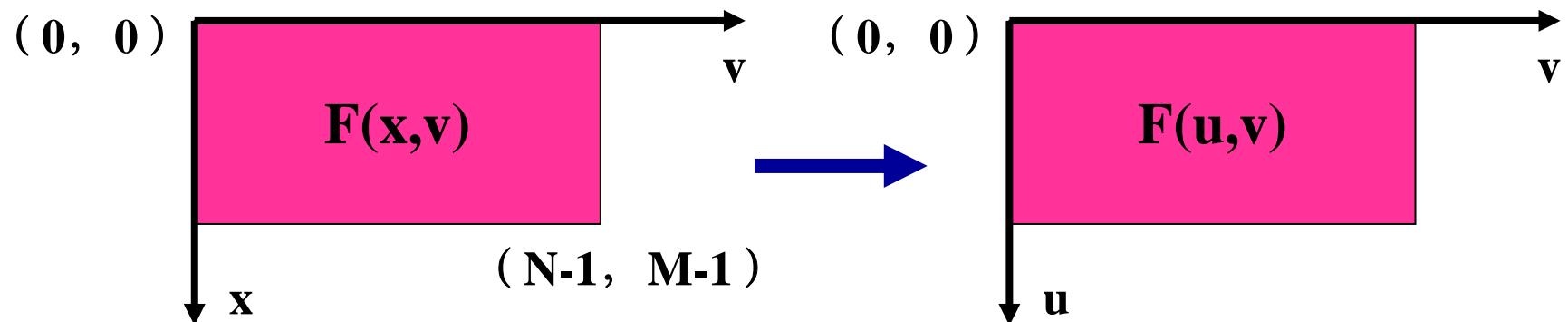
二维离散傅立叶变换的性质

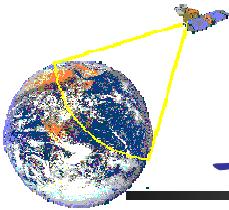
二维DFT的分离计算

➤ 先对行做变换:



➤ 再对列进行变换:





二维离散傅立叶变换的性质

4. 空间位移(位移定理):

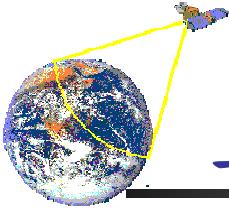
$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N}$$

函数自变量的位移的傅立叶变换产生一个复系数，等效于频谱函数的相位谱改变，而幅度谱不变

5. 频率位移:

$$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x + v_0y)/N} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

函数的频率位移的相当于傅立叶变换的坐标原点平移，而幅度谱和相位谱不变



二维离散傅立叶变换的性质

6. 周期性:

可以认为离散函数 $f(x)$
是周期为N的函数

$$F(u, v) = F(u+aN, v+bN), \quad f(x, y) = f(x+aN, y+bN)$$

离散傅立叶变换DFT和它的逆变换是以N为周期的函数

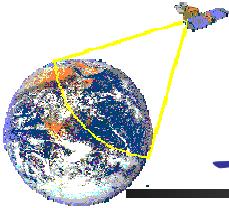
7. 共轭对称性:

实函数或物理可实现的函数 $f(x)$ ，
其傅立叶变换 $|F(u)|$ 以y轴对称

若 $f(x,y)$ 为实函数， $F(u,v)$ 为其傅立叶变换，则

$$F(u, v) \Leftrightarrow F^*(-u, -v)$$

图像的傅立叶变换结果是以原点为中心的共轭对称函数



二维离散傅立叶变换的性质

8. 旋转不变性:

1. $f(x,y) \rightarrow F(u,v)$
2. $f(x,y)$ 旋转 $\rightarrow F(u,v)$ 旋转

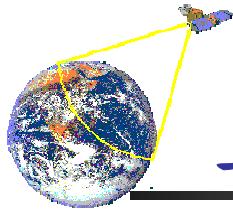
$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\rho, \varphi + \theta_0)$$

对图像的旋转变换和傅立叶变换的顺序是可交换的

9. 平均值:

$$F(0,0) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \bar{f}(x, y)$$

离散函数的均值等于该函数傅立叶变换在 $(0, 0)$ 点的值



二维离散傅立叶变换的性质

10. 卷积定理：空域中的卷积等价于频域中的相乘

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) H(u, v)$$

$$f(x, y) h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

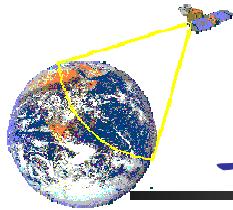
11. 相关定理：空域中 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 的相关等价于频域中 $F(u, v)$ 与 $G(u, v)$ 的共轭相乘

互相关： $f(x, y) \bullet g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) G^*(u, v)$

$$f(x, y) g^*(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \bullet G(u, v)$$

自相关： $f(x, y) \bullet f(x, y) \Leftrightarrow |F(u, v)|^2 \xrightarrow{\text{Sum_u_v}} \sum_u |F(u, v)|^2$

$$|f(x, y)|^2 \Leftrightarrow F(u, v) \bullet F(u, v)$$



二维离散傅立叶变换的性质

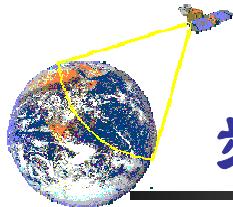
12. 拉普拉斯函数:

$$\nabla^2 f(x, y) = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2$$

其傅立叶变换为:

$$F\{\nabla^2 f(x, y)\} = -4\pi^2(u^2 + v^2) F(u, v)$$

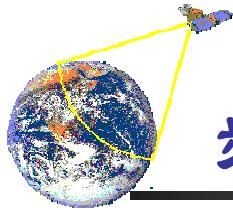
这个定理将在图像的边界提取中用到



频域变换——傅立叶变换

■ 二维离散傅立叶变换的显示与计算

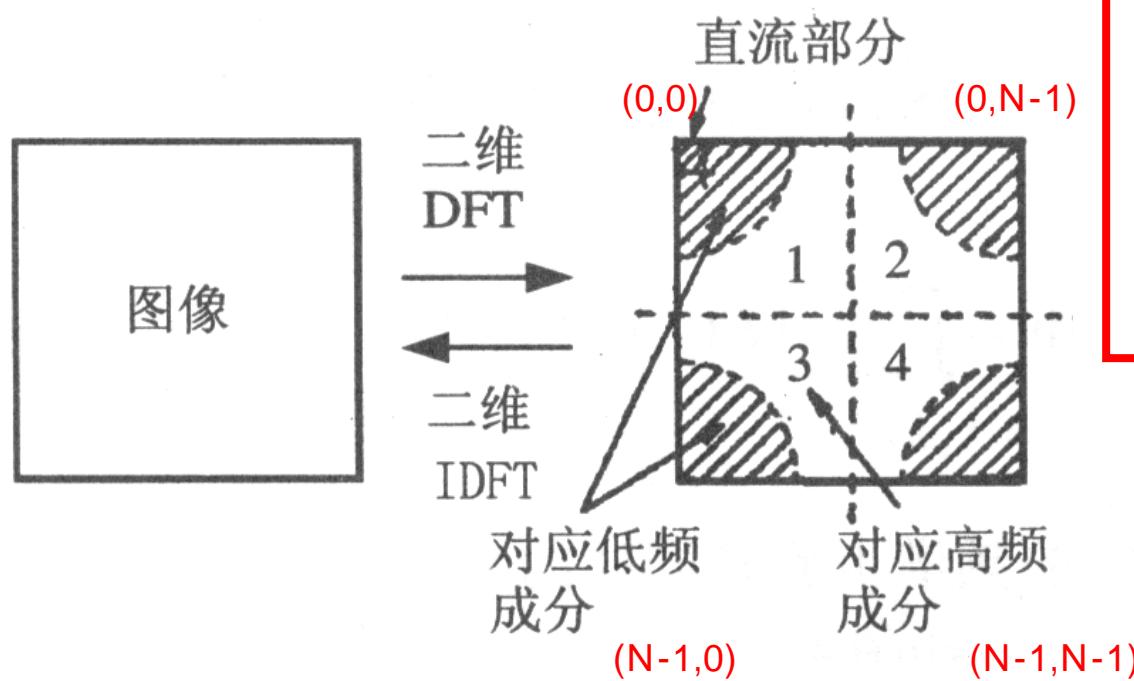
- 离散傅立叶变换的显示
- 离散傅立叶变换的幅度与相位
- 离散傅立叶变换的计算
- 快速傅里叶变换（FFT）原理



频域变换——傅立叶变换

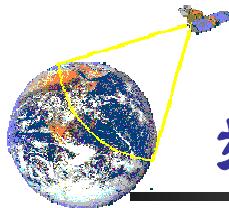
➤ 二维离散傅立叶变换的显示

- 按照标准的傅里叶变换公式，其幅度谱的强度分布具有下列特性：



注意：

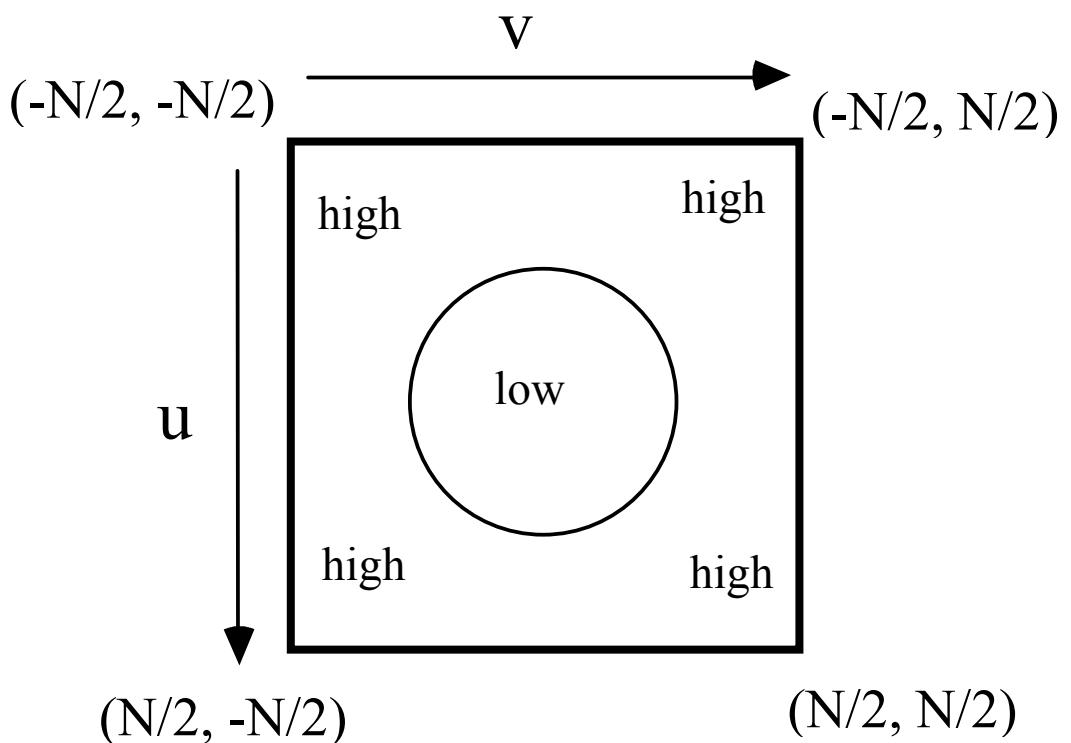
- 傅立叶变换具有共轭对称性，幅度谱相同，相位谱共轭对称
 $|F(u,v)| = |F(N-1-u,N-1-v)|$
- 图中的阴影部分相当于幅度谱低频成分

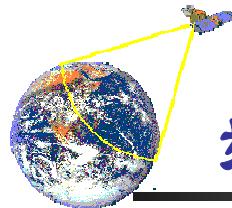


频域变换——傅立叶变换

► 二维离散傅立叶变换的显示

- ✓ 在光学傅立叶变换中，人们已习惯于变化领域中的低谱部分位于中央
- ✓ 使频域的频谱分布中间低、周围高，有利于对频谱的解释和进行各种计算与分析

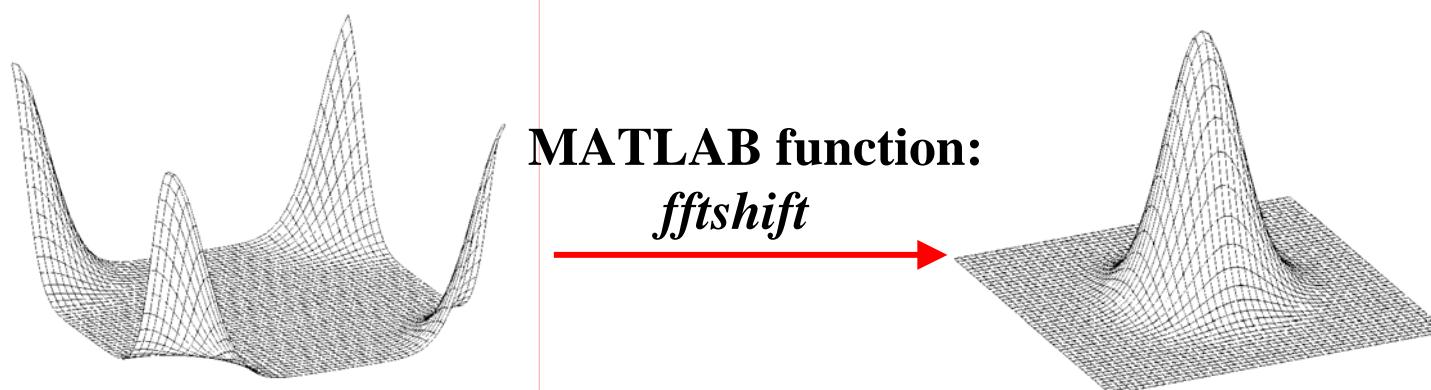
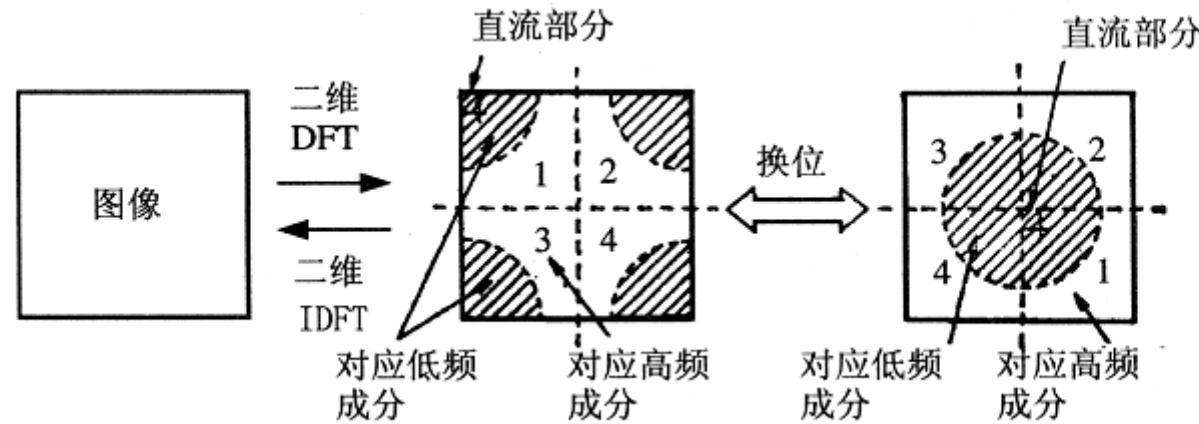


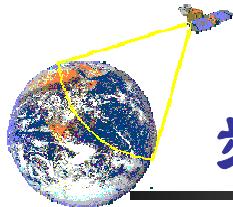


频域变换——傅立叶变换

▶ 二维离散傅立叶变换的显示

- 为此，借助于傅里叶变换的周期性与频率位移性质，对此，通常对频域进行换位以使频谱分布符合上述要求——**图像中心化**





频域变换——傅立叶变换

➤ 二维离散傅立叶变换的显示

✓ 使频域的中心位移 $u_0 = v_0 = N/2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) \exp(-j2\pi(xN/2+yN/2)/N) \\ = f(x,y) \exp(-j2\pi(x+y)) = f(x,y)(-1)^{x+y} \end{aligned}$$

$$f(x,y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2})$$

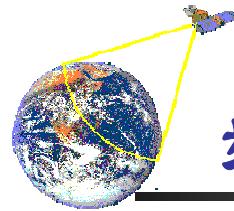
✓ 相当于对原始图像 $f(x,y)$ 乘以 $(-1)^{m+n}$, 再进行傅里叶变换

$$F'(u,v) = F\{f(x,y)(-1)^{x+y}\}$$

✓ 对应于 $F'(u,v)$ 的反变换不等于 $f(x,y)$:

$$f(x,y) = F^{-1}\{F'(u,v)\} \times (-1)^{x+y}$$

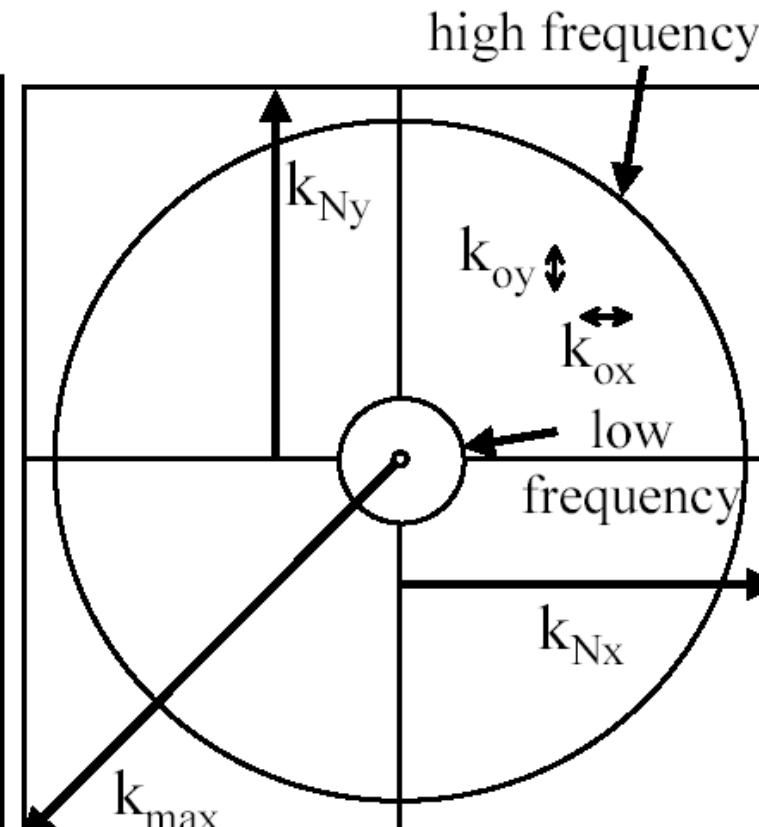
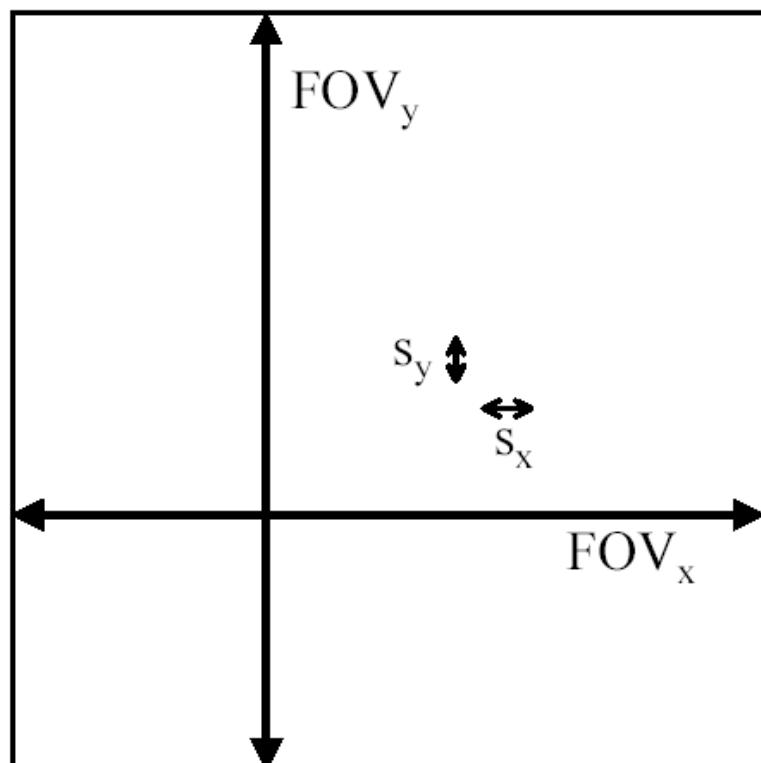
✓ 图像的傅里叶变换显示图例



频域变换——傅立叶变换

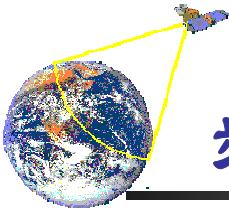
► 二维傅立叶变换域分布特性

Fourier Transform



Image

Fourier
Transform

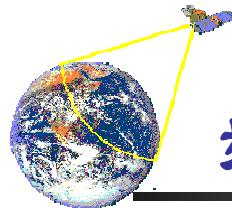


频域变换——傅立叶变换

➤ 离散傅立叶变换的幅度与相位

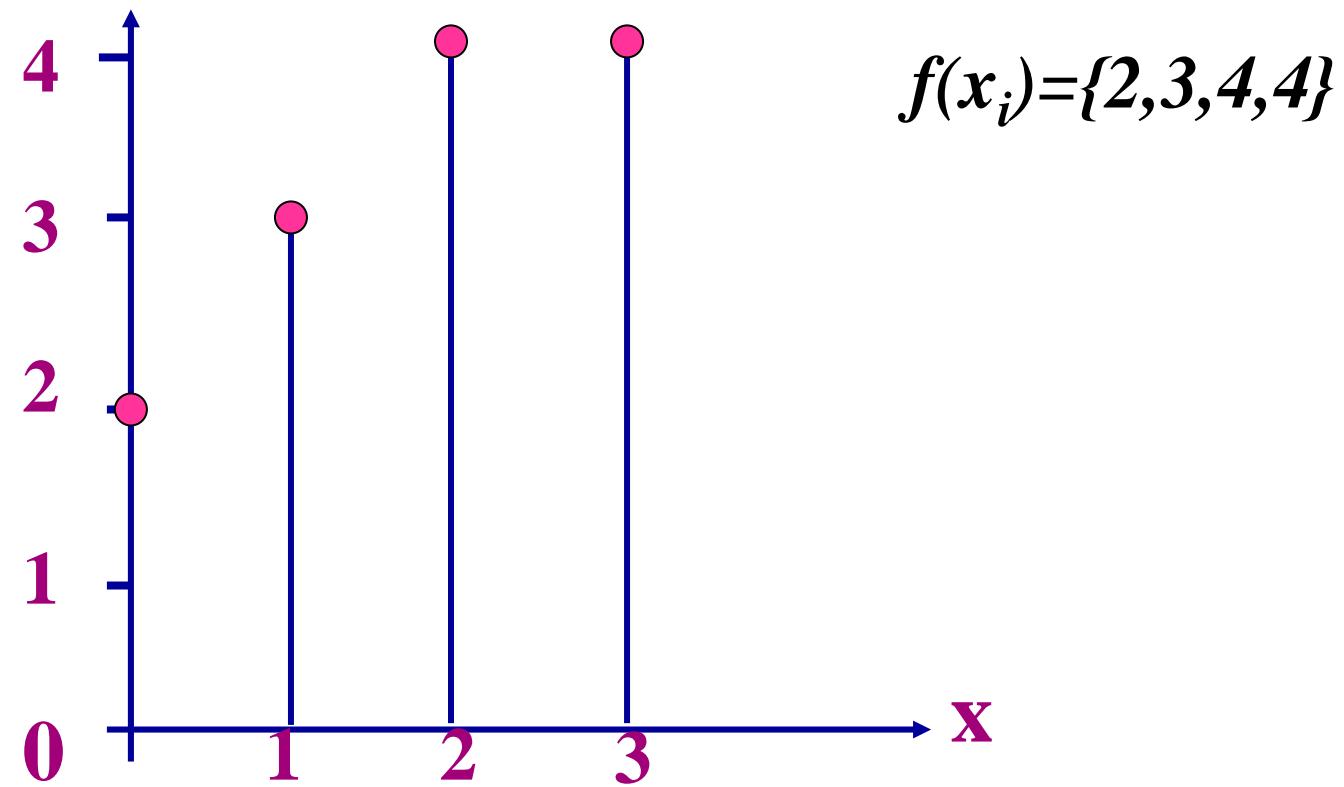
- ✓ 图像信号的傅里叶变换包含幅度与相位两部分
- ✓ 幅度谱具有较明显的信号结构特征和易于解释
- ✓ 实验证明，幅度本身只包含有图像本身含有的周期结构，并不表示其在何处
- ✓ 相位谱类似随机图案，一般难以进行解释
- ✓ 物体在空间的移动，相当于频域的相位移动，相位谱具有同样重要的意义

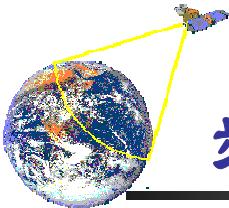
单凭幅度或相位信息，均不足以恢复原图像



频域变换——傅立叶变换

► 二维离散傅立叶变换的计算举例





频域变换——傅立叶变换

► 二维离散傅立叶变换的计算举例

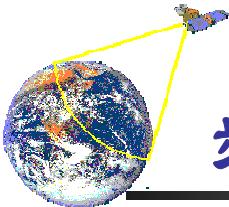
$$\begin{aligned} F(0) &= 1/4 \sum f(x) \exp[0] \\ &= 1/4[f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] \\ &= 1/4(2 + 3 + 4 + 4) \\ &= 3.25 \end{aligned}$$

$$F(u)=\text{sum}(f(x)\exp(-j2*\pi*u*x/N))/N$$

$$\begin{aligned} F(1) &= 1/4 \sum f(x) \exp[-j2\pi x/4] \\ &= 1/4(2e^0 + 3e^{-j2\pi/4} + 4e^{-j2\pi 2/4} + 4e^{-j2\pi 3/4}) \\ &= 1/4(-2 + j) \end{aligned}$$

$$F(2) = -1/4(1 + j0)$$

$$F(3) = -1/4(2 + j)$$



频域变换——快速傅立叶变换

- 快速傅里叶变换（FFT）原理

- FFT算法——基本思想

- 1) 将变换公式分解为奇数项和偶数项之和

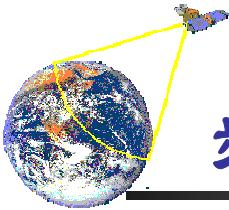
令: $W_N^{ux} = \exp(-j \frac{2\pi ux}{N})$

DFT可表为:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi ux}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux} \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

令: $N=2M$

$$F(u) = \frac{1}{2M} \sum_{x=0}^{2M-1} f(x) W_{2M}^{ux} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_{2M}^{u(2x)} + \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_{2M}^{u(2x+1)} \right]$$



频域变换——快速傅立叶变换

- 快速傅里叶变换（FFT）原理

- FFT算法——基本思想

由于: $W_{2M}^{2ux} = W_M^{ux}$ ($= \exp[-j\pi ux / M]$)

可得到:

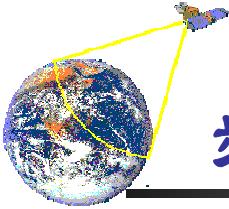
$$F(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x)W_M^{ux} + \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)W_M^{ux}W_{2M}^u \right] = \frac{1}{2} [F_{even}(u) + F_{odd}(u)W_{2M}^u]$$

注意：相同的频率相加减
 $u=0,1,2,\dots,M-1$

进一步分析: $W_M^{u+M} = W_M^u$ & $W_{2M}^{u+M} = -W_{2M}^u$

还可以得到:

$$F(u+M) = \frac{1}{2} [F_{even}(u) - F_{odd}(u)W_{2M}^u], \quad u=0,1,2,\dots,M-1$$



频域变换——快速傅立叶变换

■ 快速傅里叶变换（FFT）原理

➢ FFT算法——基本思想

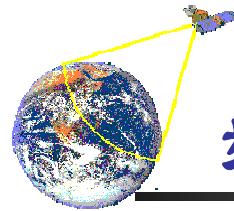
1) 将变换公式分解为奇数项和偶数项之和

最后得到：

$$\begin{aligned} F(u)|_{0 \dots N-1} &= F(u)|_{0 \dots M-1} + F(u+M)|_{0 \dots M-1} \\ &= \frac{1}{2}[F_e(u) + w_N^u F_o(u)] + \frac{1}{2}[F_e(u) - w_N^u F_o(u)] \end{aligned}$$

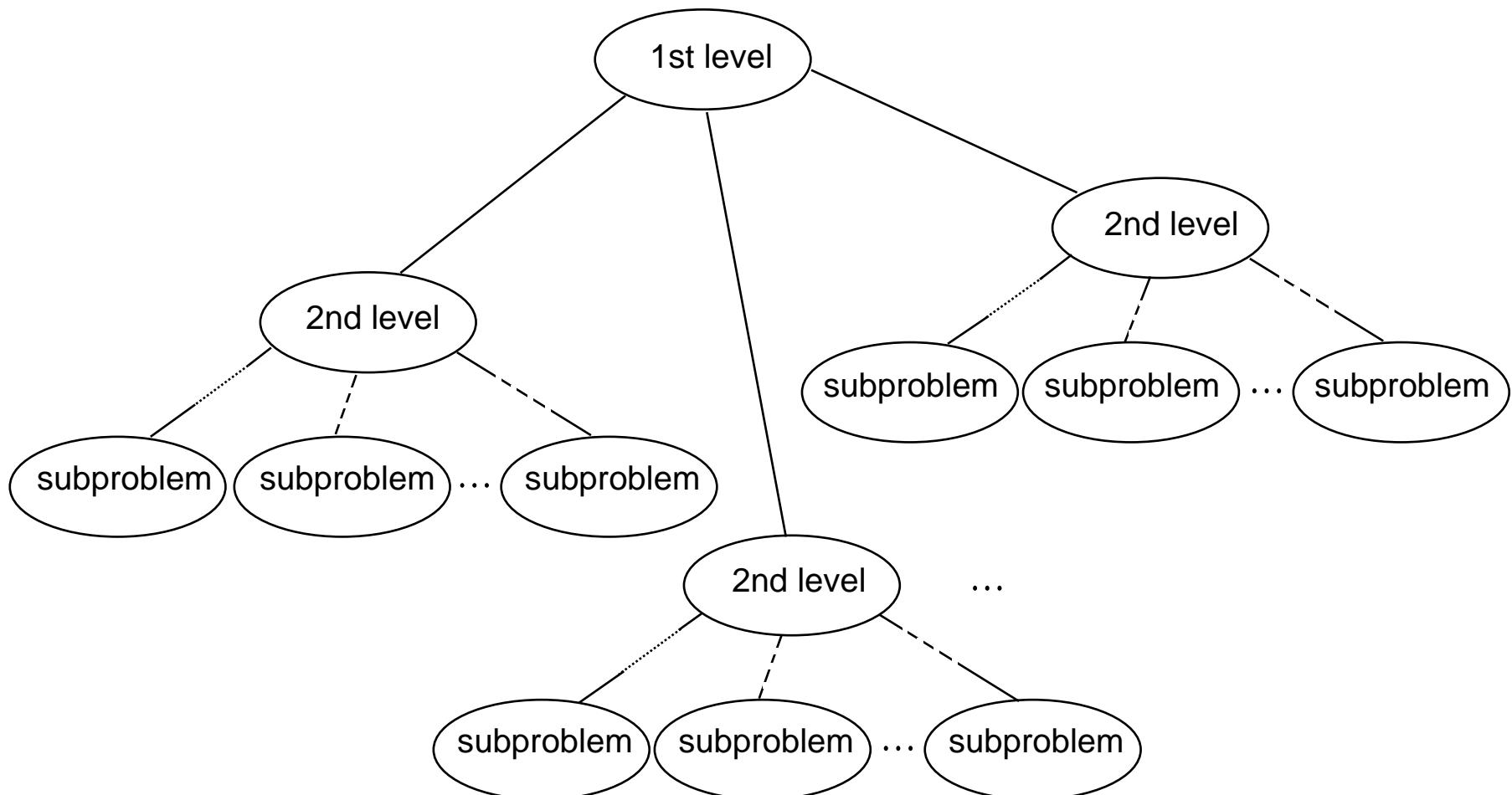
2) 不断地将原函数分为奇数项和偶数项之和，最终得到需要的结果

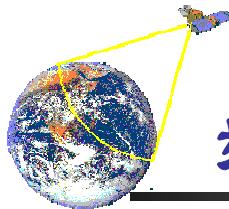
FFT是将复杂的运算变成重复两个数相加（减）的简单运算



频域变换——快速傅立叶变换

■ Divide-and-Conquer Technique





频域变换——快速傅立叶变换

■ 快速傅里叶变换（FFT）原理

例：设对一个函数进行快速Fourier变换，函数序列为：

$$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$$

分成偶数、奇数部分：

$$f_0, f_2, f_4, f_6$$

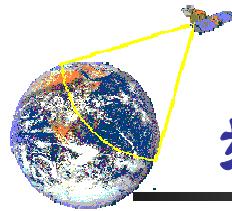


$$f_0, f_4 \quad | \quad f_2, f_6$$

$$f_1, f_3, f_5, f_7$$

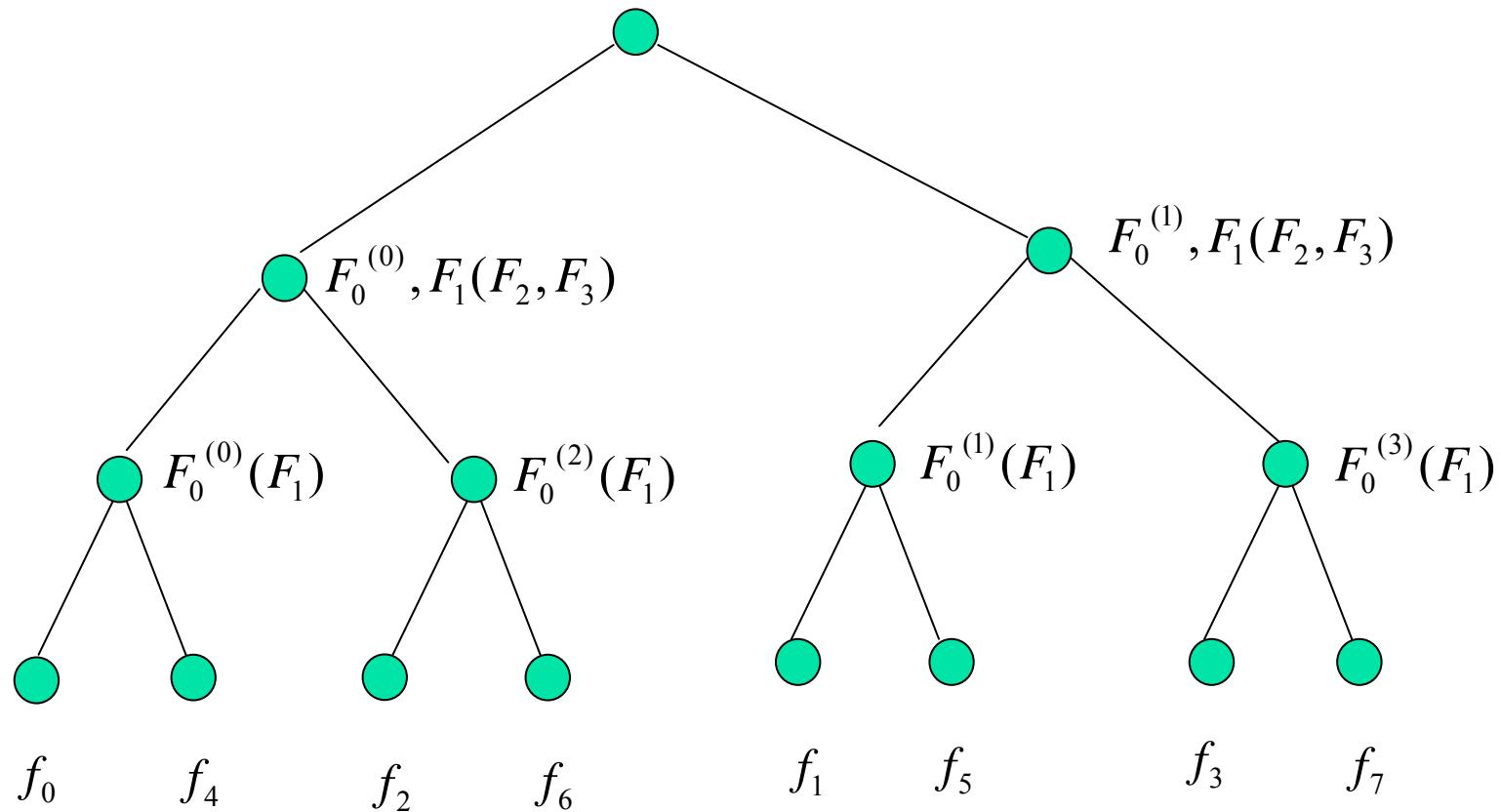


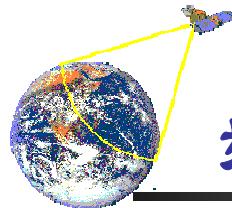
$$f_1, f_5 \quad | \quad f_3, f_7$$



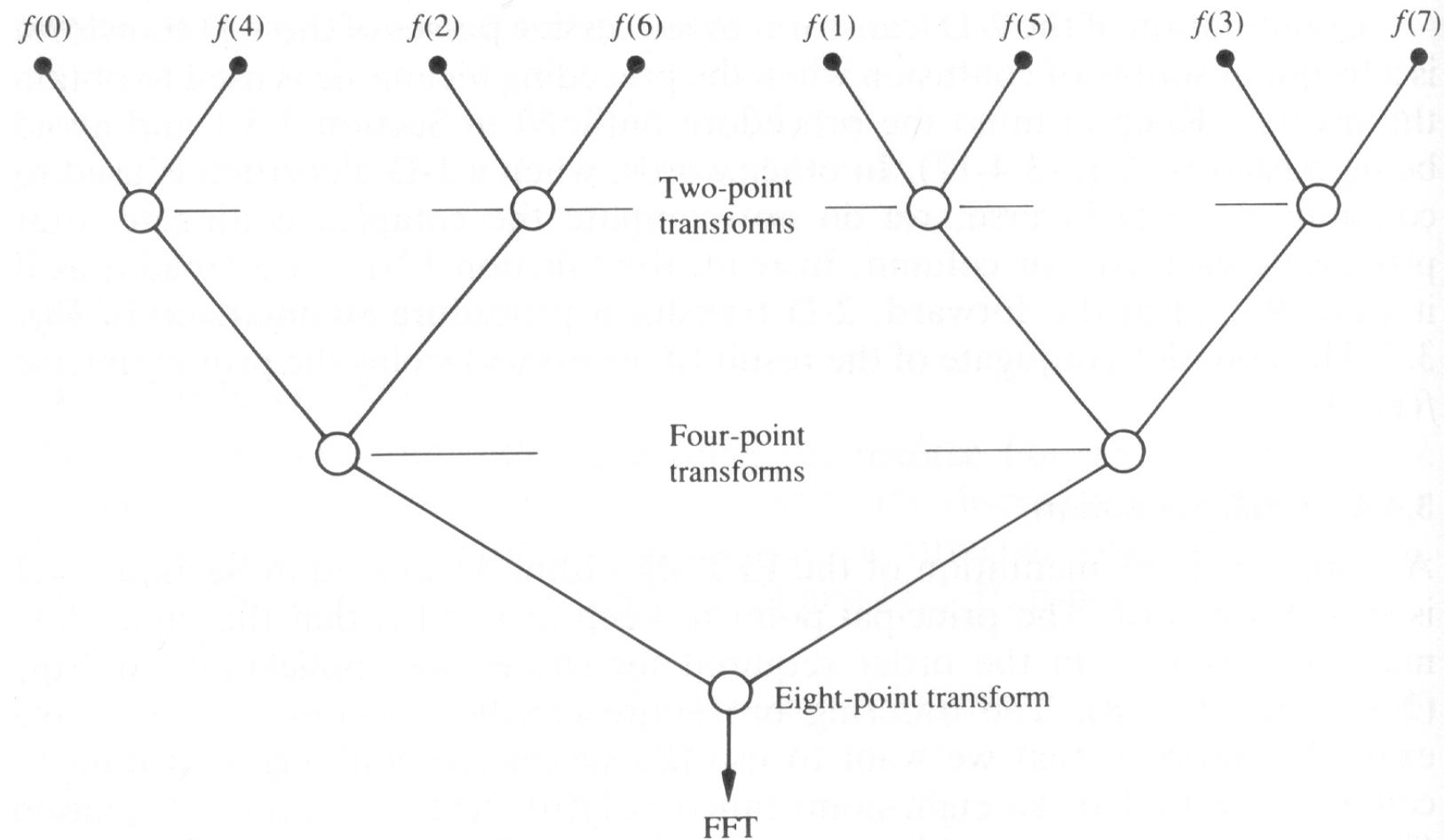
频域变换——快速傅立叶变换

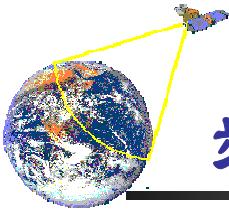
$F_0, F_1, F_2, F_3, (F_4, F_5, F_6, F_7)$





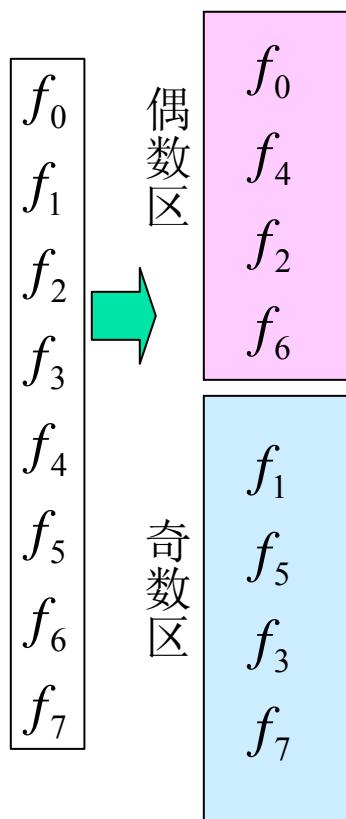
频域变换——快速傅立叶变换





频域变换——快速傅立叶变换

1项 → 2项



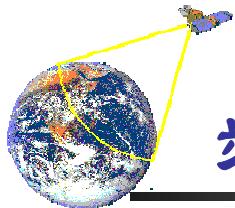
$$F^{(0)}(0) = \frac{1}{2} \cdot [f_0 + w_2^0 f_4]$$
$$F^{(0)}(1) = \frac{1}{2} \cdot [f_0 - w_2^0 f_4]$$
$$F^{(2)}(0) = \frac{1}{2} \cdot [f_2 + w_2^0 f_6]$$
$$F^{(2)}(1) = \frac{1}{2} \cdot [f_2 - w_2^0 f_6]$$

2项 → 4项

$$F^{(0)}(0) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(0) + w_4^0 F^{(2)}(0)]$$
$$F^{(0)}(1) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(1) + w_4^1 F^{(2)}(1)]$$
$$F^{(0)}(2) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(0) - w_4^0 F^{(2)}(0)]$$
$$F^{(0)}(3) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(1) - w_4^1 F^{(2)}(1)]$$

$$F^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \cdot [f_1 + w_2^0 f_5]$$
$$F^{(1)}(1) = \frac{1}{2} \cdot [f_1 - w_2^0 f_5]$$
$$F^{(3)}(0) = \frac{1}{2} \cdot [f_3 + w_2^0 f_7]$$
$$F^{(3)}(1) = \frac{1}{2} \cdot [f_3 - w_2^0 f_7]$$

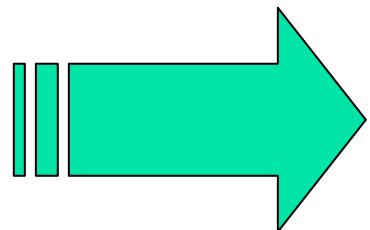
$$F^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(1)}(0) + w_4^0 F^{(3)}(0)]$$
$$F^{(1)}(1) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(1)}(1) + w_4^1 F^{(3)}(1)]$$
$$F^{(1)}(2) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(1)}(0) - w_4^0 F^{(3)}(0)]$$
$$F^{(1)}(3) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(1)}(1) - w_4^1 F^{(3)}(1)]$$



频域变换——快速傅立叶变换

4项 → 8项

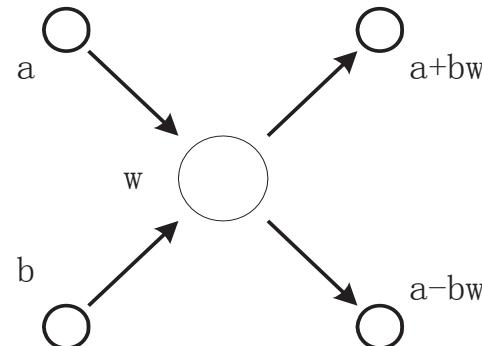
f_0
 f_1
 f_2
 f_3
 f_4
 f_5
 f_6
 f_7



$$F(0) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(0) + w_8^0 F^{(1)}(0)]$$
$$F(1) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(1) + w_8^1 F^{(1)}(1)]$$
$$F(2) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(2) + w_8^2 F^{(1)}(2)]$$
$$F(3) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(3) + w_8^3 F^{(1)}(3)]$$
$$F(4) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(0) - w_8^0 F^{(1)}(0)]$$
$$F(5) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(1) - w_8^1 F^{(1)}(1)]$$
$$F(6) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(2) - w_8^2 F^{(1)}(2)]$$
$$F(7) = \frac{1}{2} \cdot [F^{(0)}(3) - w_8^3 F^{(1)}(3)]$$

快速离散傅立叶变换

- 蝶形图

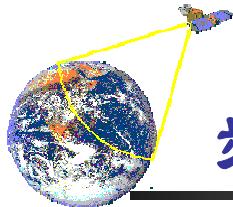


- 显然计算一次蝶形需1次乘法和2次加（减）法。

对于 $N = 2^m$ 点的DFT，每轮有 $N/2$ 个蝶形，

总共有 $\frac{N}{2} \times m = \frac{N}{2} \times \log_2 N$ 个蝶形。

总共有 $\frac{N}{2} \times \log_2 N$ 次乘法和 $N \log_2 N$ 加法。



频域变换——快速傅立叶变换

■ 逆向FFT算法

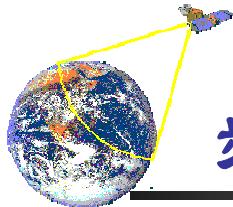
➤ 算法思想：用正向变换计算逆向变换

$$\text{设 } F(u) = \text{FFT}[f(x)]$$

可有：

$$f(x) = \text{FFT}^{-1}[F(u)] = N \cdot \{\text{FFT}[F^*(u)]\}^*$$

即：对 $F(u)$ 取共轭，利用正向FFT进行变换计算，其结果取共轭后再乘以 N ，即可得到 $f(x)$ 。

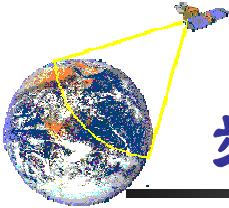


频域变换——快速傅立叶变换

■ 二维快速Fourier变换：

利用傅里叶变换的分离性质，对二维FFT进行2次的一维FFT变换

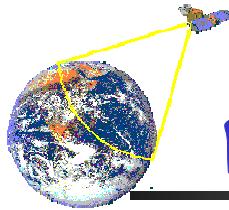
$$F(u, v) = \text{FFT}_{\text{行}} \left\{ \text{FFT}_{\text{列}}[f(x, y)] \right\}$$



频域变换——快速傅立叶变换

■ 傅里叶变换的应用

- 在图像高低通滤波中的应用
- 在图像噪声滤波中的应用
- 在图像的选择性滤波中的应用
- 在图像压缩中的应用
- 在图像增强中的应用



图像处理中的正交变换

■ 其他变换

➤ 其他变换

✓ 离散余弦变换

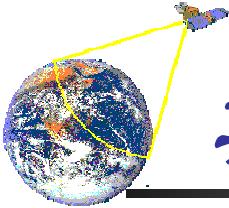
沃尔什—哈达玛变换

斜 (Slant) 变换

✓ 霍特林变换 (主成分变换)

哈尔变换

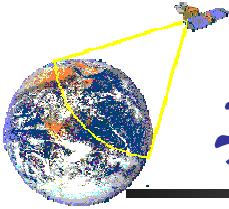
✓ 小波变换



其他变换——离散余弦变换

■ 离散余弦变换

➤ 问题的提出：傅里叶变换的一个最大问题是：它的参数都是复数，在数据的描述上相当于实数的两倍。为此，我们希望有一种能够达到相同功能但数据量又不大的变换。



其他变换——离散余弦变换

- 由傅里叶变换性质

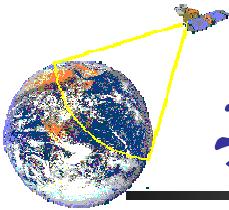
- 当 $f(x)$ 为实的偶函数时，傅里叶变换域中得到实的偶函数
- 考察一维离散傅立叶变换

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi u x}{N}} \quad u = 0, 1, \dots, N-1$$

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi u x}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (\cos(\frac{2\pi u x}{N}) - j \sin(\frac{2\pi u x}{N}))$$

- 当 $f(x)$ 为偶函数时，傅里叶变换的计算公式虚部为零，只有余弦项

余弦变换是简化傅立叶变换的一种方法



其他变换——离散余弦变换

■ 一维离散余弦变换定义

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2x+1)u \right]$$

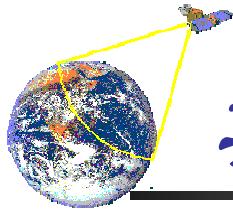
$$F(0) = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_0^{N-1} f(x)$$

注：实数基，共轭后不变

通常归一化表示为：

$$F(u) = c(u) \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2x+1)u \right]$$

$$c(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u = 0 \\ 1 & u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$



其他变换——离散余弦变换

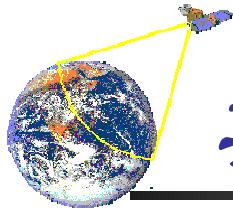
■ 一维离散余弦反变换定义

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=0}^{N-1} c(u) F(u) \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2x+1)u \right]$$

$$C(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u = 0 \\ 1 & u = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

矩阵表示：

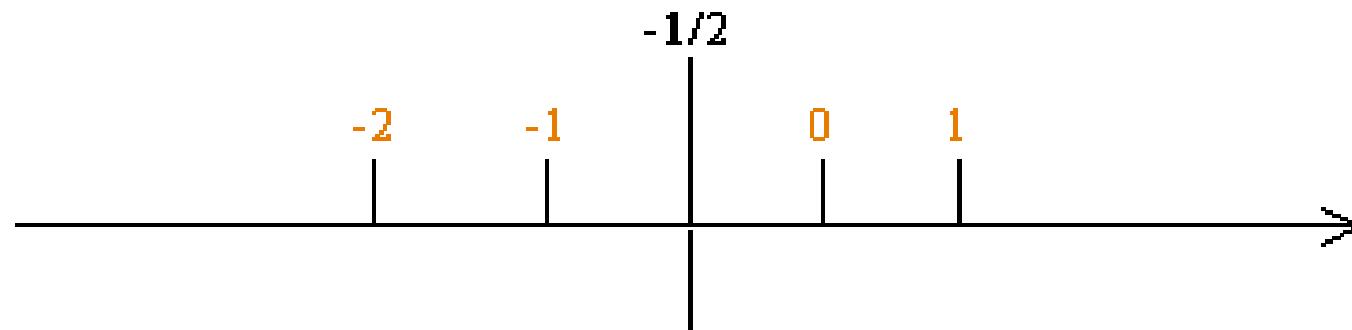
$$F = Cf \quad f = C^T F$$



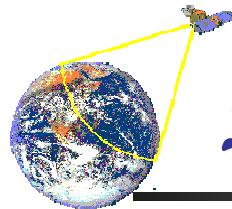
其他变换——离散余弦变换

■ 任意函数离散余弦变换

- 一个任意函数采样从 $0, 1, 2, \dots, N-1$, 若向负方向折叠形成 $2N$ 采样的偶函数, 就可以进行 $2N$ 的偶函数傅立叶变换。



此时可采用离散余弦变换进行。



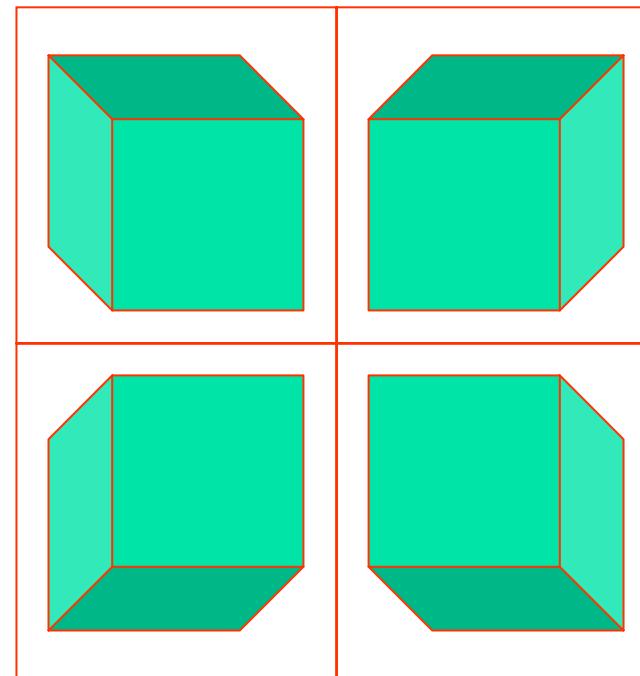
其他变换——离散余弦变换

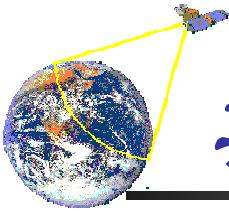
■ 二维离散余弦变换

➤ 二维偶函数：

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & x \geq 0, y \geq 0 \\ f(-x, y) & x < 0, y \geq 0 \\ f(x, -y) & x \geq 0, y < 0 \\ f(-x, -y) & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

➤ 为折叠镜像序列。





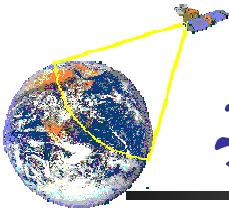
其他变换——离散余弦变换

► 二维离散余弦变换定义

$$F(u, v) = \frac{2}{N} C(u) C(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left[\frac{(2x+1)}{2N} u\pi\right] \cos\left[\frac{(2y+1)}{2N} v\pi\right]$$

$$f(x, y) = \frac{2}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u) C(v) F(u, v) \cos\left[\frac{(2x+1)}{2N} u\pi\right] \cos\left[\frac{(2y+1)}{2N} v\pi\right]$$

$$C(u) = C(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u, v = 0 \\ 1 & u, v = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$



其他变换——离散余弦变换

表为矩阵形式：

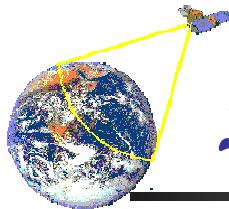
注意：这时 $f(x,y)$ 和 $F(u,v)$ 分别为空域和谱图像

$$F_c = CfC \quad f = CF_c C$$

矩阵C的元素为：

$$C_{i,m} = \alpha(m) \cos \left[\frac{\pi(2i+1)m}{2N} \right]$$

$$\alpha(m) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & m = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & m \neq 0 \end{cases}$$

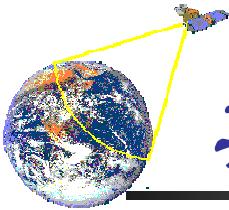


其他变换——离散余弦变换

$N=4$ 时

$$\sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos \frac{\pi}{2N} & \dots & \cos \frac{(2N-1)\pi}{2N} \\ \cos \frac{\pi}{2N} & \cos \frac{3\pi}{2N} & \dots & \cos \frac{(2N-1)(N-1)\pi}{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos \frac{(N-1)\pi}{2N} & \cos \frac{3(N-1)\pi}{2N} & \dots & \cos \frac{(2N-1)(N-1)\pi}{2N} \end{bmatrix}$$

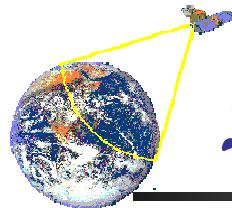
$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.653 & 0.271 & -0.271 & -0.653 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.271 & -0.653 & 0.653 & -0.271 \end{bmatrix}$$



其他变换——离散余弦变换

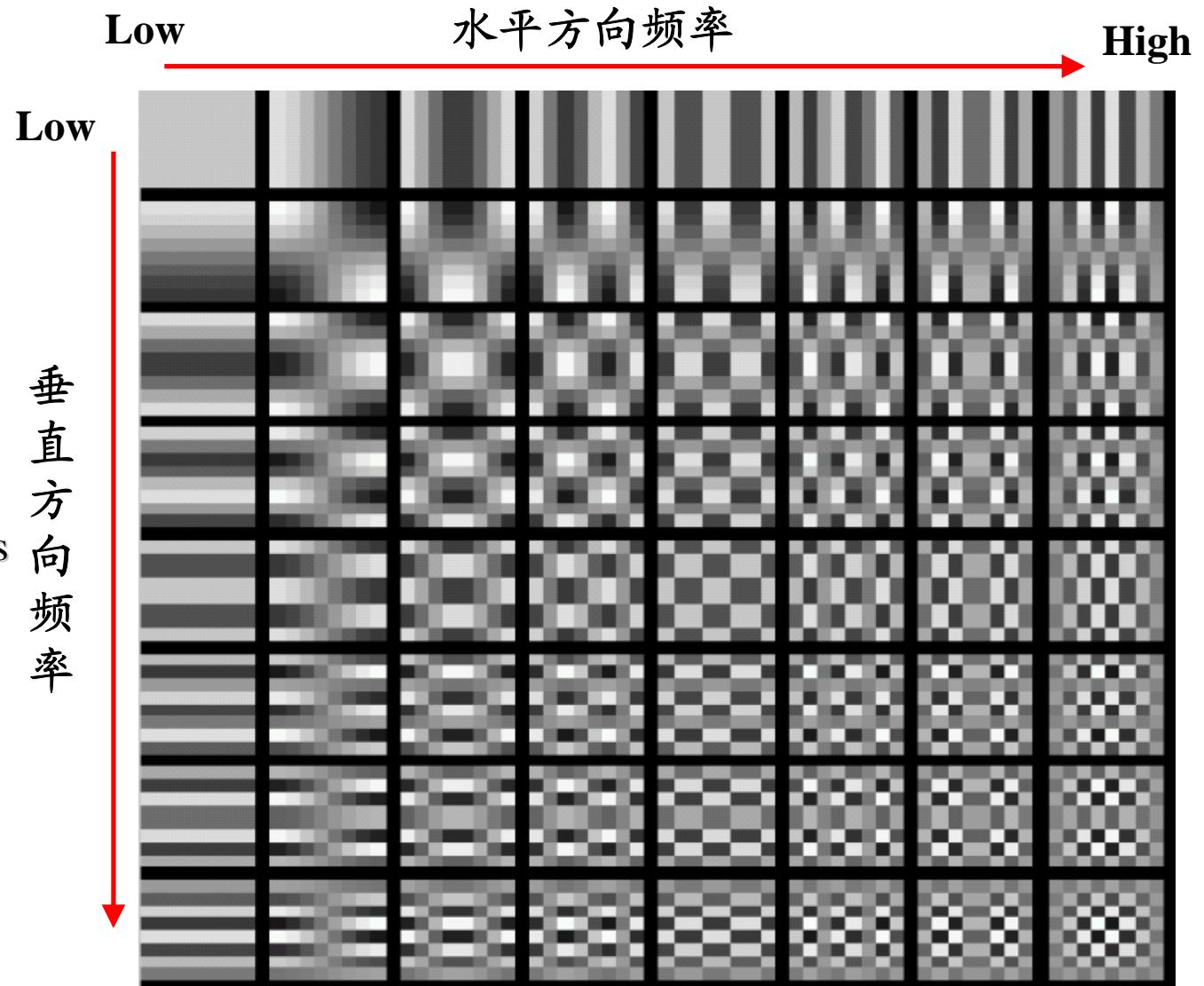
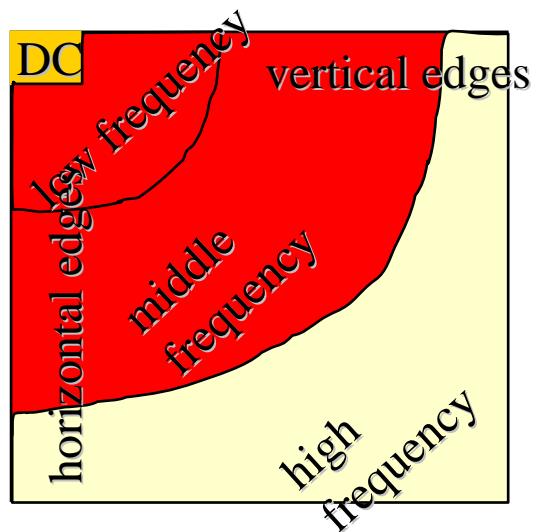
➤ 余弦变换的性质

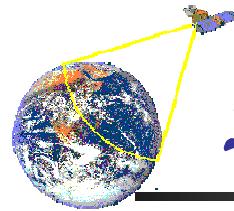
- ✓ 余弦变换为实的正交变换，变换核的基函数正交
- ✓ 序列的余弦变换是DFT的对称扩展形式
- ✓ 核可分离，可以用两次一维变换来执行
- ✓ 余弦变换的能量向低频集中
- ✓ 余弦变换有快速变换，和傅立叶变换一样，分奇偶组



其他变换—离散余弦变换

8x8 DCT
basis
images





其他变换—离散余弦变换

➤ 余弦变换的应用—压缩编码

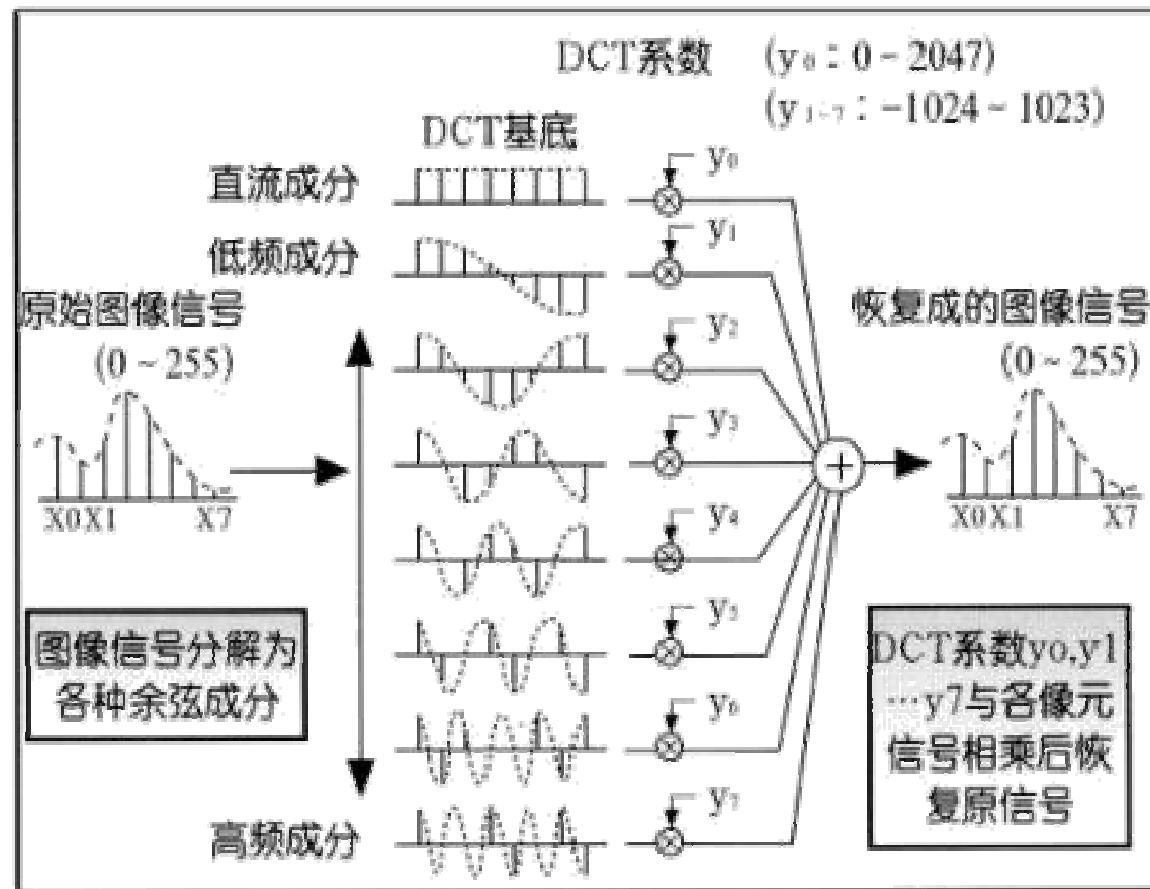
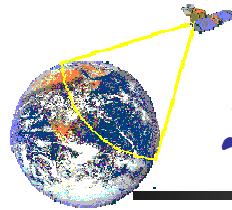
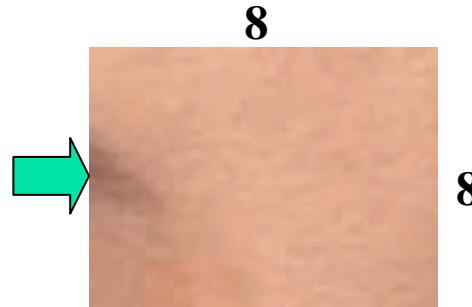
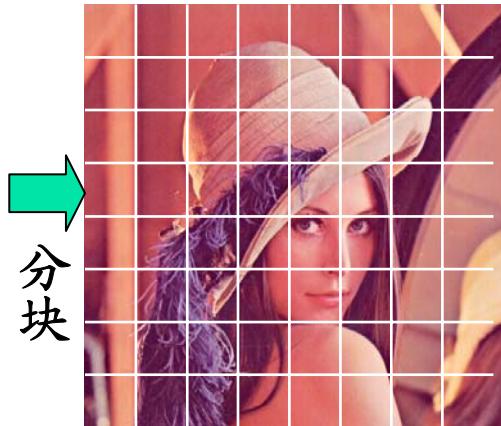


图 1



其他变换—离散余弦变换

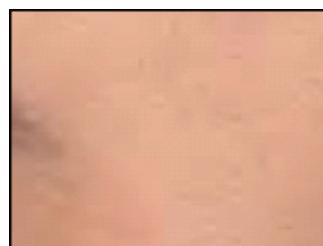
余弦变换的应用—压缩编码



125	125	125	126	126	125	125
125	125	126	125	127	125	126
125	125	125	126	126	125	125
125	125	126	125	127	125	126
125	125	125	126	126	125	125
125	125	126	125	127	125	126
125	125	125	126	126	125	125
125	125	126	125	127	125	126

8

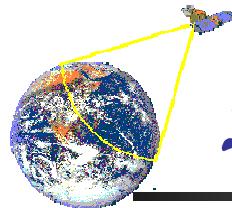
8



IDCT

324	25	12	21	5	0	0	0
26	10	13	7	2	0	0	0
10	5	2	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

DCT+量化



其他变换—离散余弦变换

►余弦变换的应用—压缩编码

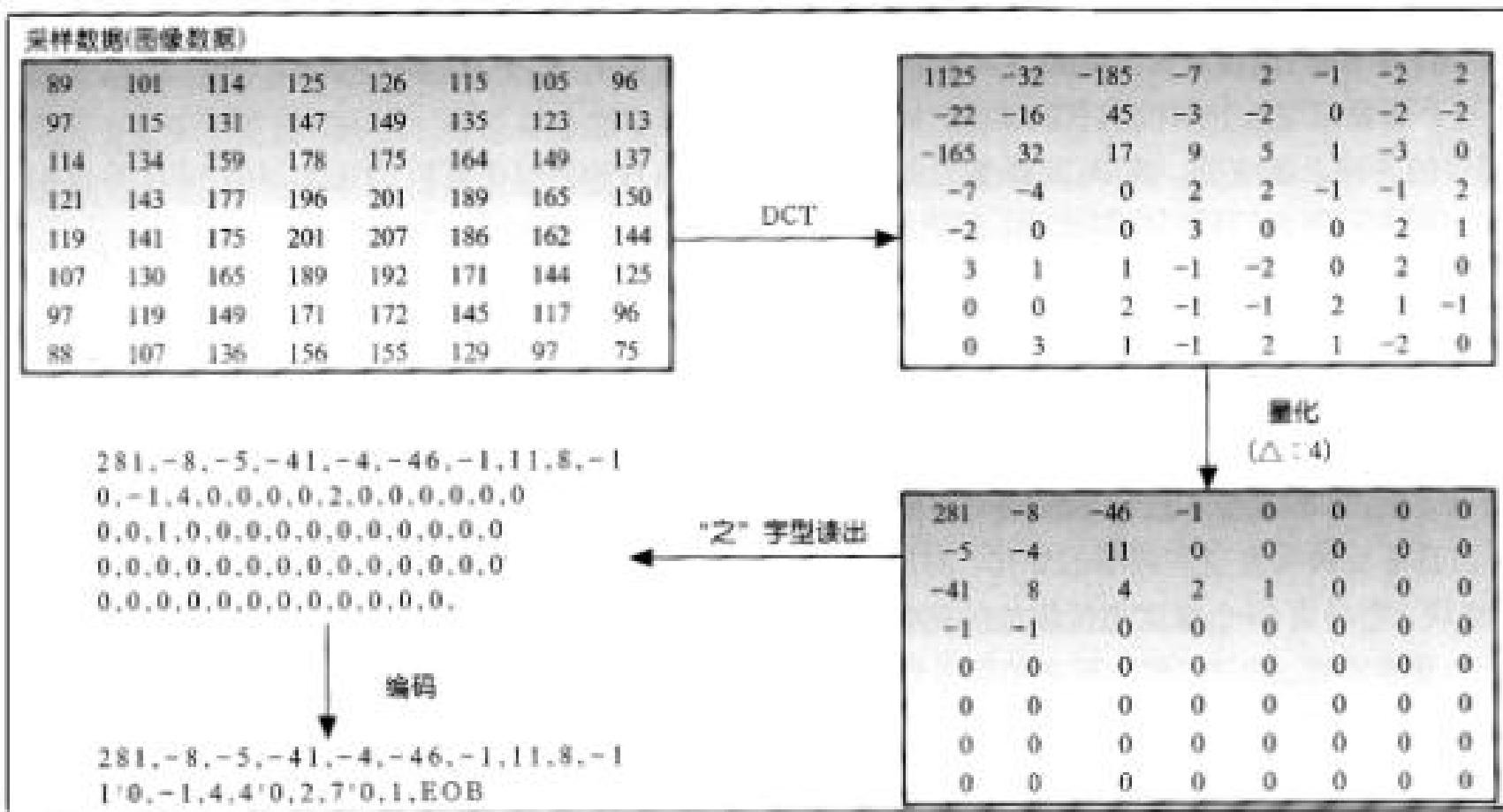
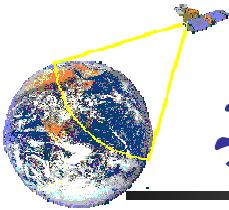


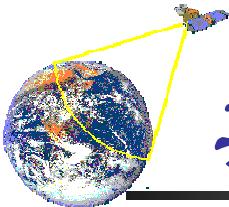
图 3



其他变换——K-L变换

■ K-L变换主导思想

- 假定一幅图像在某个通讯信道中传输了 M 次，由于任何物理信道均存在随机干扰因素，接收到的图像系列总混杂有许多随机干扰信号，称之为随机图像集合，集合中各图像之间存在相关性但又不相等
- K-L变换本质上是针对这类广泛的随机图像提出来的，当对 M 个图像施加了K-L变换以后，变换后的 M 新图像组成的集合中各图像之间互不相关
- 由变换结果图像集中取有限个图像 K ($K < M$)而恢复的图像将是原图像在统计意义上的最佳逼近



其他变换——K-L变换

■ K-L变换原理

设 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]^T$ 和 $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n]^T$

为两个 n 维随机向量，其元素 $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j$ 分别具有 M 个随机值
假定 \mathbf{X} 能由 \mathbf{Y} 精确表示为：

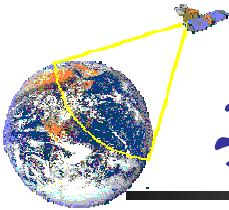
$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{Y}$$

Φ 为 $n \times n$ 正交矩阵，记为 $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$

若取 \mathbf{Y} 向量的前 m 个向量 \mathbf{Y}_m 来表示 \mathbf{X} ，记为 \mathbf{X}_m ，可有误差

$$\Delta \mathbf{X}_m = \mathbf{X} - \mathbf{X}_m$$

从统计角度，如何选择 Φ ，使得上述误差的统计均方值达到极小



其他变换—K-L变换

■ K-L变换原理

➤ 通过数学分析，可得出结论如下：

$$\text{对正交矩阵 } \Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$$

➤ 若取 ϕ_i 为 \mathbf{X} 的协方差矩阵 C_x 的特征向量，则对 \mathbf{X} 进行下述变换后

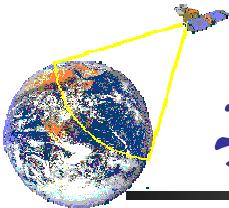
$$\mathbf{Y} = \Phi^T \mathbf{X} \quad (1)$$

其结果 \mathbf{Y} 向量可满足前述要求

➤ 上述变换式(1)与反变换

$$\mathbf{X} = \Phi \mathbf{Y} \quad (2)$$

称之为K-L变换，通常又称之为Hotelling变换、特征向量变换或主成分分析（信号分析中的降维技术 - PCA）



其他变换—K-L变换

■ K-L变换计算

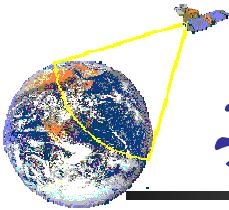
- 对 N 维随机向量 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 其每个元素 x_i 分别具有 M 个样本
- 其平均值向量定义为:

$$\mathbf{M}_x = E\{\mathbf{X}\} \quad \mathbf{M}_x \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i \quad (3)$$

- 其协方差矩阵为一个 $N \times N$ 的矩阵, 定义为:

$$\mathbf{C}_x = E\{(\mathbf{X} - \mathbf{M}_x)(\mathbf{X} - \mathbf{M}_x)^T\} \quad (4)$$

$$\mathbf{C}_x \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)^T = \frac{1}{M} \left[\sum \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \right] - \mathbf{m}_x \mathbf{m}_x^T$$



其他变换—K-L变换

■ K-L变换计算（续）

➤ 令 \mathbf{F} 和 λ 为 \mathbf{C}_x 的特征向量和对应的特征值，可有关系

$$|\mathbf{C}_x - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad \mathbf{C}_x \mathbf{F} = \lambda \mathbf{F} \quad (5)$$

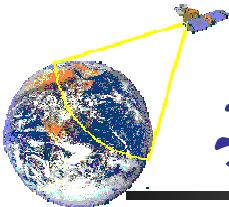
➤ 特征向量 \mathbf{F} 为 N 维矢量，由上式可解出 N 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，将其按降序排列

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n$$

特征值按降序排列使得
变换后的向量中各分量
的能量按降序排列

➤ 将各特征值分别代入 (5) 式，可得出对应各特征值的特征向量为：

$$\mathbf{F}_i = [f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in}]^T$$

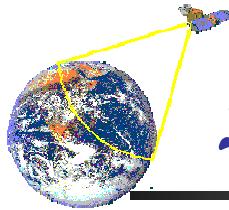


其他变换—K-L变换

■ K-L变换计算（续）

➤ 将各特征向量转置后即可构成变换矩阵：

$$\Phi = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \\ \vdots \\ F_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \cdots & \cdots & & \\ f_{N1} & \cdots & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \quad (6)$$



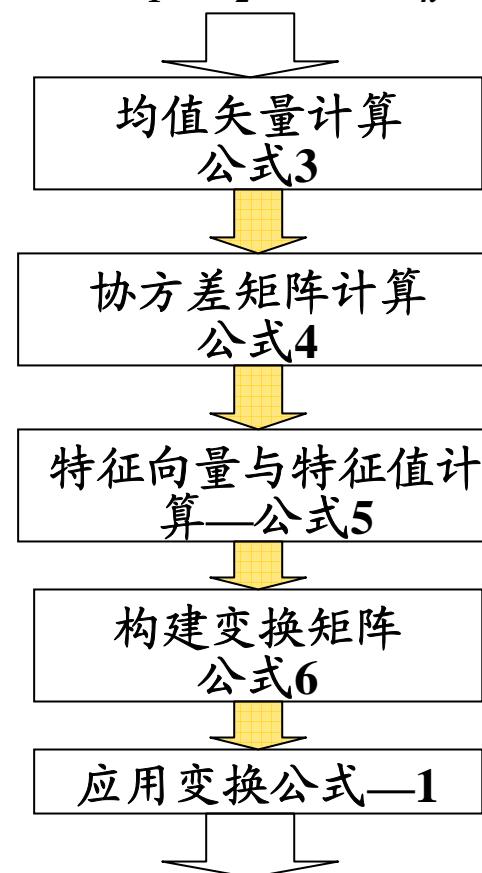
其他变换—K-L变换

■ K-L变换计算（续）

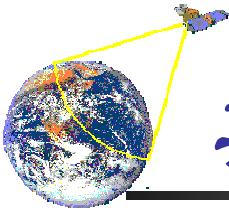
➤ 计算流程与K-L讨论

- ✓ 确定随机向量X及其样本集合范围
- ✓ 在确定的随机向量集合下，关键的是确定协方差矩阵；进而由协方差矩阵通过线性代数计算得出特征向量与特征值
- ✓ 变换的实质在于：输入随机向量X中各分量之间存在很强的相关性，通过变换使输出随机向量Y中各分量之间互不相关
- ✓ 若定义不同的输入随机向量组成方式，则可导致不同的应用方向

确定随机向量集合
 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$



获取变换结果 $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$



其他变换—K-L变换

■ K-L变换性质

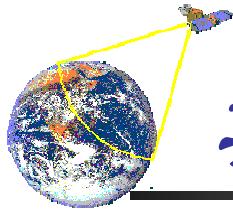
- 去相关性：上述变换结果Y向量的各分量互不相关，具有协方差矩阵为

$$C_y = \Phi^T C_x \Phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- 最佳重构特性：对变换后结果进行截断后恢复原数据，其均方误差是最小的

假定取Y向量的前M个分量进行反变换恢复X向量，其均方误差为：

$$\varepsilon^2(m) = \sum_{i=M+1}^N \lambda_i$$



其他变换——K-L变换

■ K-L变换计算实例

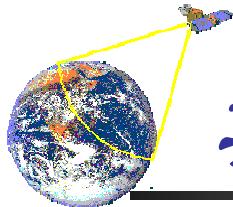
➤ 假定 2×6 图像矩阵为: $X = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 给定6个2-维向量

➤ 将每一行作为一个随机矢量, 形成随机向量为:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]$$

➤ 其均值矢量为

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2+4+5+5+3+2 \\ 2+3+4+5+4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$



其他变换——K-L变换

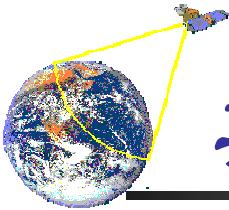
■ K-L变换计算实例

➤ 可有协方差矩阵:

$$C_x \approx \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_x)^T =$$

$$\frac{1}{M} \left\{ \begin{bmatrix} 2.25 & 2.25 \\ 2.25 & 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 2.25 \\ 2.25 & 2.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.25 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix} \right\}$$

$$C_x = \begin{bmatrix} 1.9 & 1.1 \\ 1.1 & 1.1 \end{bmatrix}$$



其他变换——K-L变换

■ K-L变换计算实例

➤ 由协方差矩阵计算特征值：

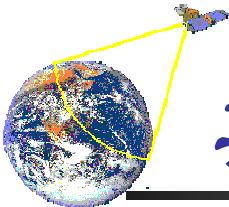
➤ 由

$$\begin{vmatrix} 1.9 - \lambda & 1.1 \\ 1.1 & 1.1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

➤ 可解出： $\lambda^2 - 3\lambda + 0.88 = 0$ $\lambda_1 = 2.67$ $\lambda_2 = 0.33$

➤ 将 λ_1 , λ_2 分别代入公式(5)，可解出特征向量并构建变换矩阵为：

$$\Phi = \begin{bmatrix} f_1^T \\ f_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.82 & 0.57 \\ -0.57 & 0.82 \end{bmatrix}$$



其他变换—K-L变换

■ K-L变换计算实例

► 对X进行变换:

$$Y = \begin{bmatrix} 0.82 & 0.57 \\ -0.57 & 0.82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2.78 & 4.99 & 6.38 & 6.95 & 4.74 & 3.35 \\ 0.5 & 0.18 & 0.43 & 1.25 & 1.57 & 1.32 \end{bmatrix}$$

► Y向量的协方差矩阵为:

可见89%的能量集中在分量1中

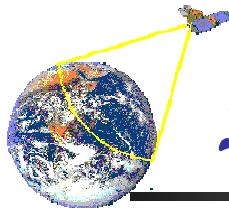
$$C_Y = \begin{bmatrix} 2.67 & 0 \\ 0 & 0.33 \end{bmatrix}$$

根据6个变换后的
的2-维向量Y

► 舍弃分量2, 反变换结果为:

$$X = \begin{bmatrix} 0.82 & -0.57 \\ 0.57 & 0.82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 278 & 499 & 638 & 695 & 474 & 335 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228 & 41 & 523 & 5.7 & 389 & 275 \\ 1.58 & 2.84 & 3.64 & 3.96 & 2.7 & 1.91 \end{bmatrix}$$

取Y中的第一维向量
逼近原2-维向量X



其他变换—K-L变换

■ K-L变换的深入讨论—从另一种角度

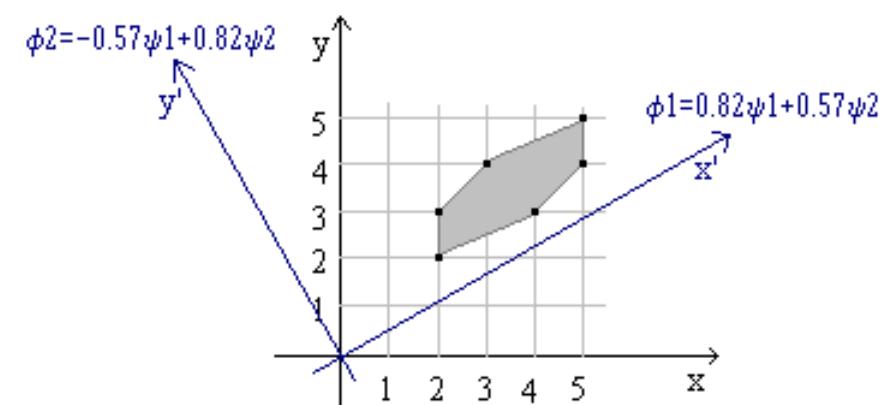
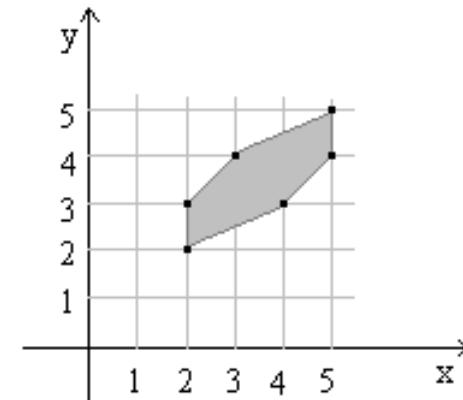
- 对图像矩阵 \mathbf{X} , 可看作为二维平面上一组像素点坐标的集合, 如图所示

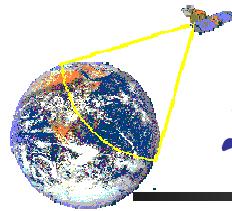
$$\mathbf{X} = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

- 变换结果 \mathbf{Y} , 则可看作为一个新坐标系下相同像素点的集合

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2.78 & 4.99 & 6.38 & 6.95 & 4.74 & 3.35 \\ 0.5 & 0.18 & 0.43 & 1.25 & 1.57 & 1.32 \end{bmatrix}$$

- 该新坐标系为原坐标系的旋转, 旋转矩阵即为K-L变换矩阵





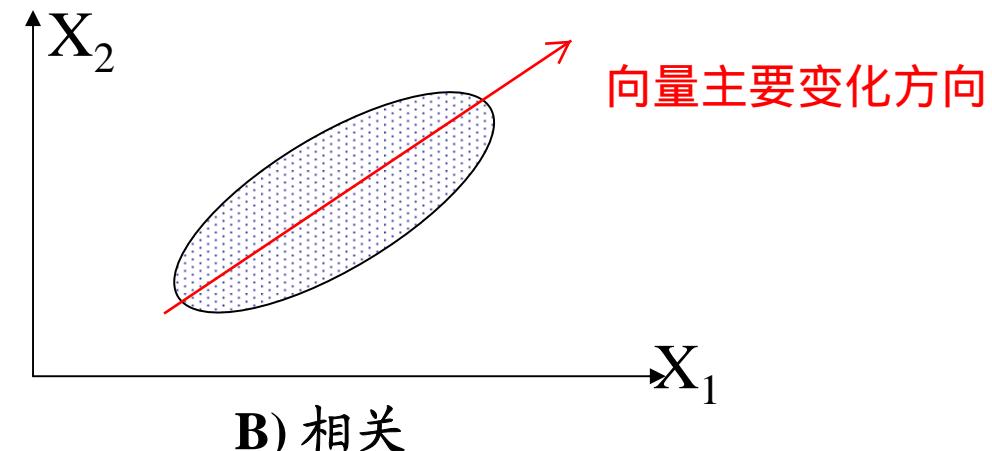
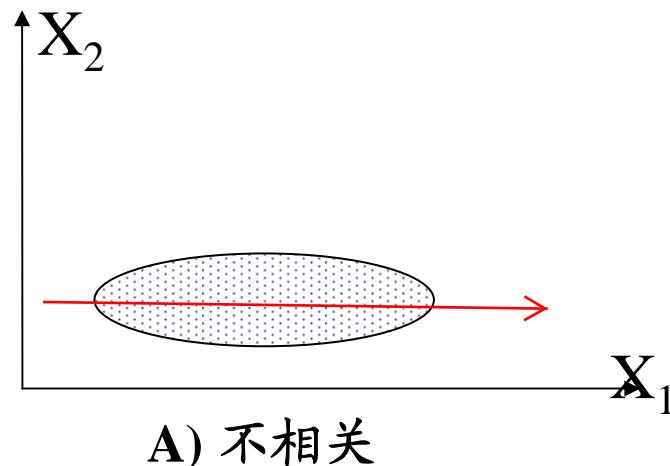
其他变换—K-L变换

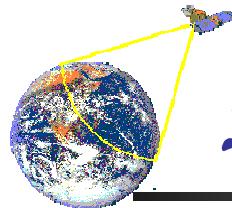
■ K-L变换的深入讨论

➤ 考察下图二维X空间中框界内各矢量X:

✓ 图(B)中, 各点的 x_1 变化时, 其 x_2 也必定增大或减小; 表明矢量X的 x_1 , x_2 分量之间**相关性很高**

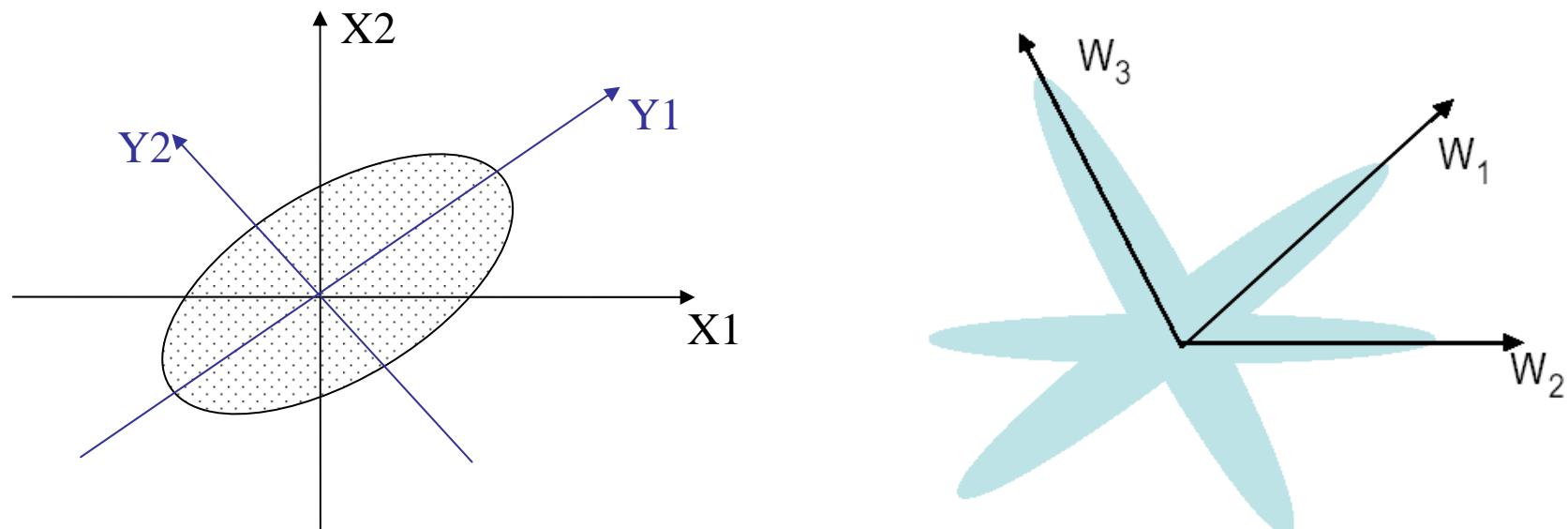
✓ 图(A)中, 各点的 x_1 变化时, 其 x_2 变化很小或没有变化; 表明矢量X的 x_1 , x_2 分量之间**相关性很低或没有相关性**

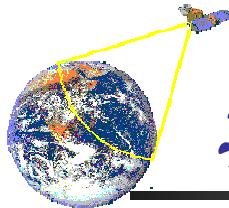




其他变换—K-L变换

- K-L变换的目标，即在于找出使X矢量中各分量相关性降低或去除的方向，对图像进行旋转，使其新空间的坐标轴指向各主分量方向—主成分分析或主成分变换
- 扩展至多维空间，K-L变换可实现多维空间中的去相关，并将能量集中在少数主要分量上





其他变换—K-L 变换

- 各主分量相互之间的互不相关，使得变换后的特征具有独立描述图像的全部信息
- 在遥感图像处理中，将原始的多波段图像转换为主分量图像，将使大量信息更多地集中在少数几个分量上，实现有效的特征抽取

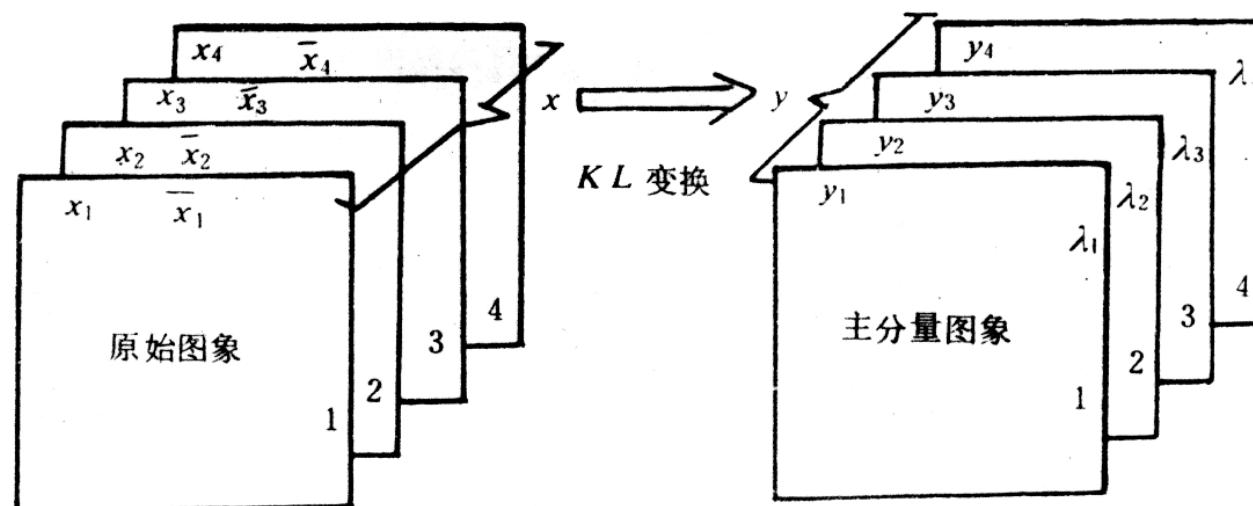
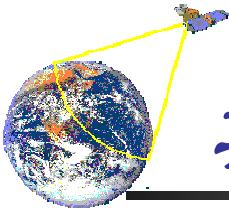


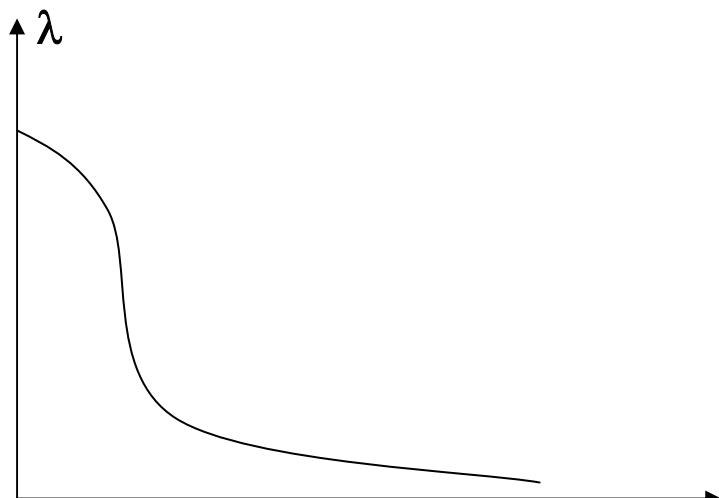
图 7-1 KL 变换过程示意图

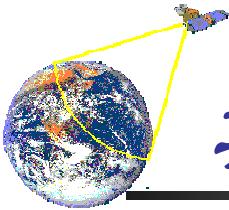


其他变换——K-L变换

1. 傅立叶和DCT变换，基函数和信号无关，有快速算法
2. K-L 变换，基函数和信号有关，无快速算法

- 为有效的发挥K-L变换的作用，待变换的对象中各分量之间应具有较强的相关性；相关性越强，K-L变换的效果越明显，表现为变换矩阵的特征值具有快速下降的曲线
- 与傅里叶变换、Hadamard 变换等不同，K-L变换的变换矩阵随不同图像的统计性质、不同的随机向量定义而不同
- K-L变换域的图像常常具有直接应用的价值
- 到目前为止，K-L变换尚无有效的快速算法，计算量巨大是其应用发展上的瓶颈





其他变换—K-L变换

■ K-L变换的应用

➤ 图像目标旋转的应用

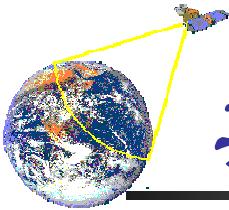
✓ 将图像的坐标作为随机向量的分量 $X=[x, y]$

➤ 多波段图像特征抽取应用

✓ 将图像的波段作为随机向量的分量 $X=[b_1, b_2, \dots, b_n]$

➤ 图像数据压缩应用

✓ 将图像的波段或像素作为随机向量的分量 $X=[p_1, p_2, \dots, p_n]$



其他变换—哈尔变换

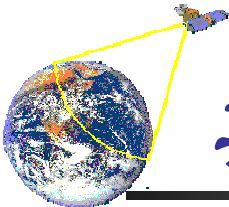
■ 哈尔变换—Haar Transform

- 与沃尔什—哈达玛变换的构成方法相似，寻找其他可用的正交函数
- Haar 函数于1910年提出，其矩阵只有 +1, -1 和另一个以 $\sqrt{2}$ 为基础的系数。它是正交稀疏矩阵，可实现快速计算
- 哈尔函数具备完备性与归一化正交性

■ 哈尔变换的定义

- 利用哈尔函数作为基函数的对称、可分离酉变换，要求 $N = 2^n$

$$T = H F H$$



其他变换——哈尔变换

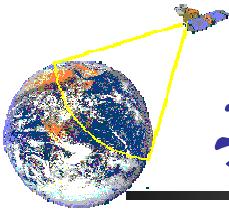
■ 哈尔函数的定义

➤ 令整数 $0 \leq k \leq N-1$ 由其他两个整数 p 和 q 唯一决定

$$k = 2^p + q - 1$$

➤ 哈尔函数定义为：

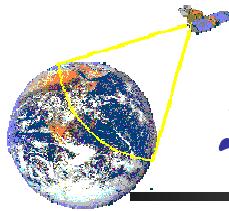
$$h_0(x) = \frac{1}{N} \quad h_k(x) = \frac{1}{N} \begin{cases} 2^{p/2} & \frac{q-1}{2^p} \leq x < \frac{q-0.5}{2^p} \\ -2^{p/2} & \frac{q-0.5}{2^p} \leq x < \frac{q}{2^p} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



其他变换——哈尔变换

- 对于 $i=0, 1, \dots, N-1$, 令 $x=i/N$, 则形成一组基函数, 除 $k=0$ 时为常数外, 每个基函数均具有独特的一个矩形脉冲对
- 这些基函数在尺度 (宽度) 和位置上均有所变化, 索引 p 规定了尺度, q 决定了平移量
- 可以计算 $N=8$ 时 p 和 q 的关系:

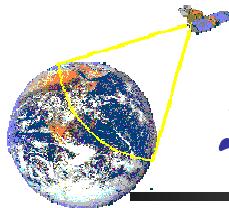
$N = 8$	k	0	1	2	3	4	5	6	7
$n = 3$	p	0	0	1	1	2	2	2	2
	q	0	1	1	2	1	2	3	4



其他变换——哈尔变换

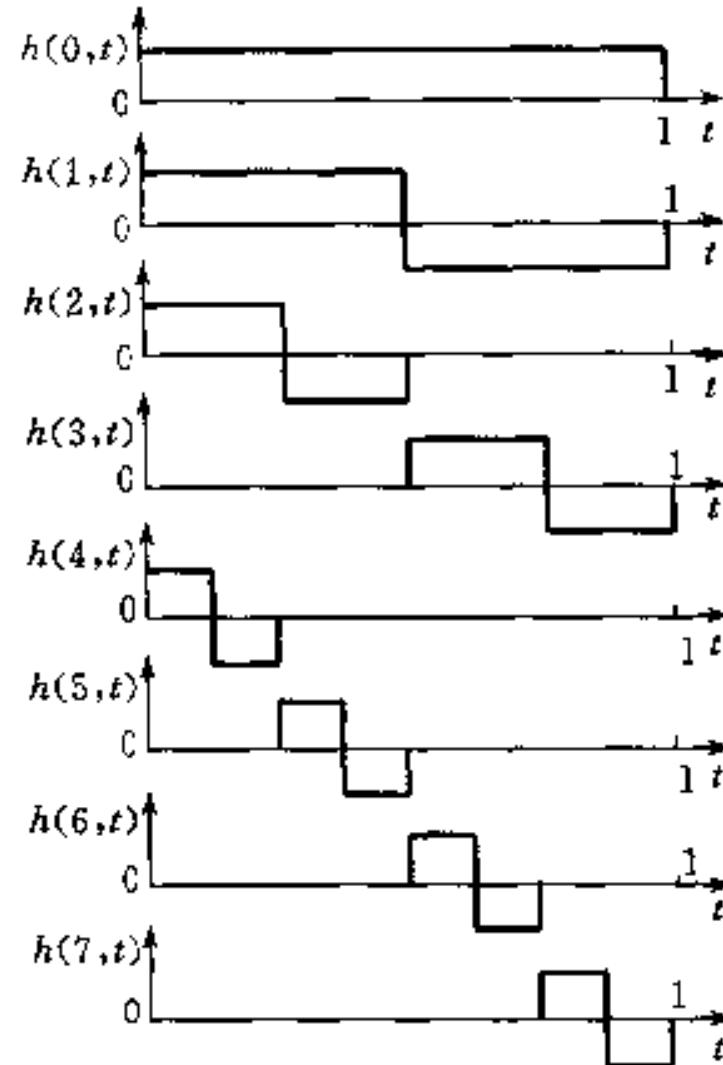
➤ 由此形成8个函数，构建哈尔矩阵：

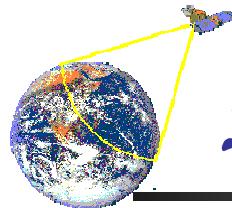
$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$



其他变换——哈尔变换

- $N = 8$ 哈尔函数波形如右图，可有特征：
 - 第一行反映一种整体变换，第二行反映两个半幅变换，下两行是 $N/4$ 之间的变换，最后是相邻两像元之间的变换
 - 哈尔矩阵既反映整体，又反映局部
 - 如果一个信号、或信号中的一部分，可以近似地匹配上某一基函数，则在变换后，会产生一个对应那个基函数的较大的变换系数，而对于其他正交基函数产生较小的系数。由此，哈尔变换可以给出一些线和边的尺寸和位置信息

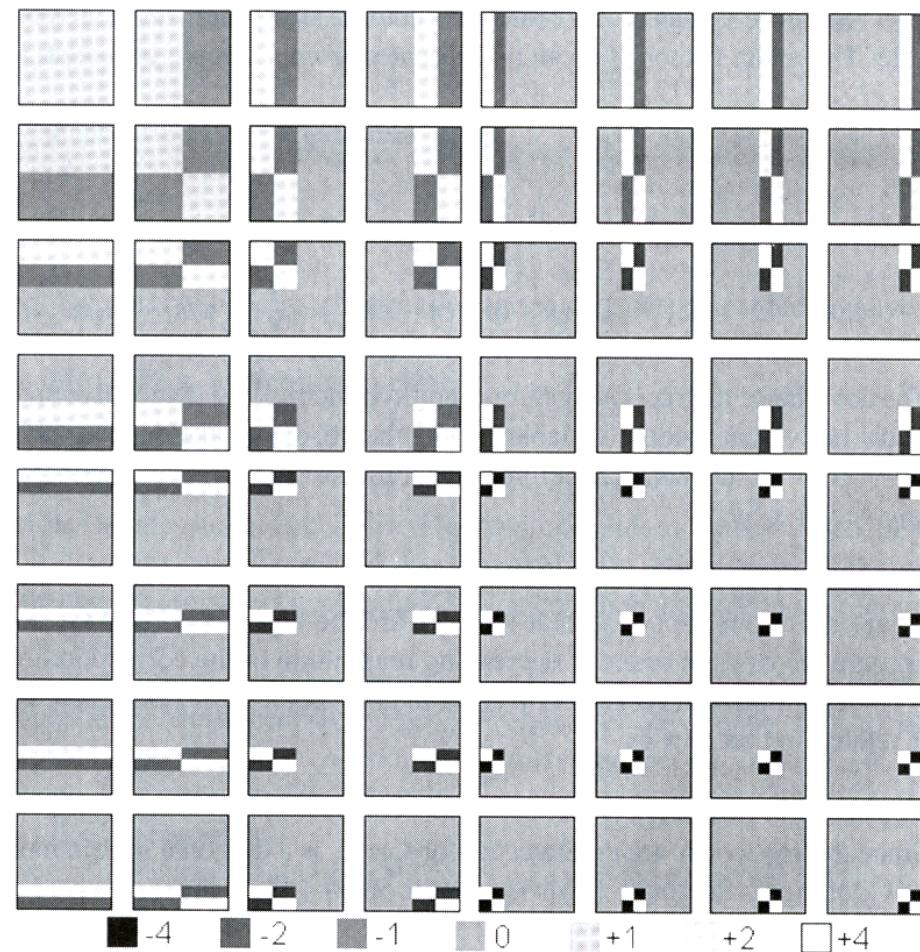


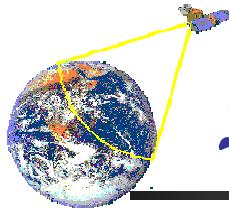


其他变换—哈尔变换

■ $N = 8$ 哈尔基图像

注意：右下象限部分可以用来搜索图
像中不同位置的小特征

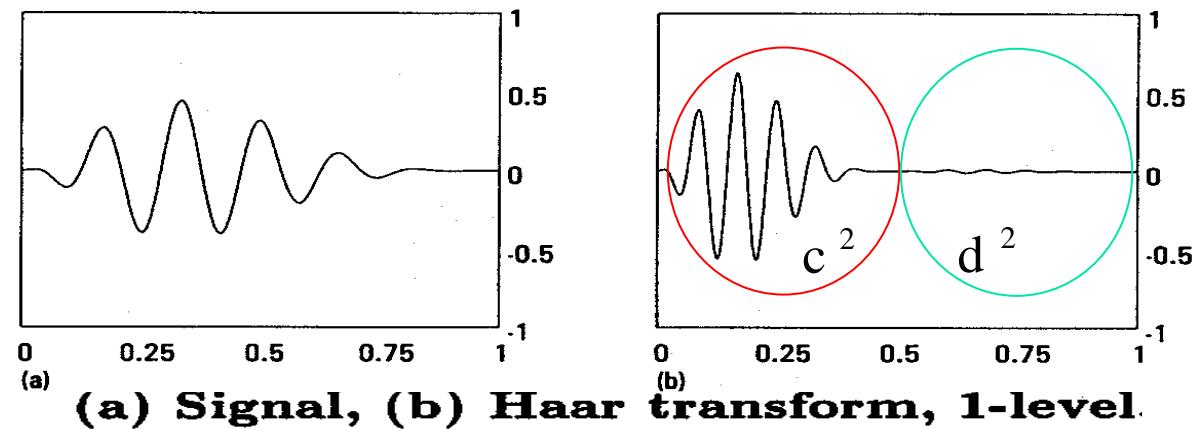


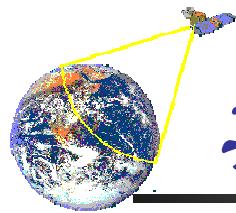


其他变换——哈尔变换

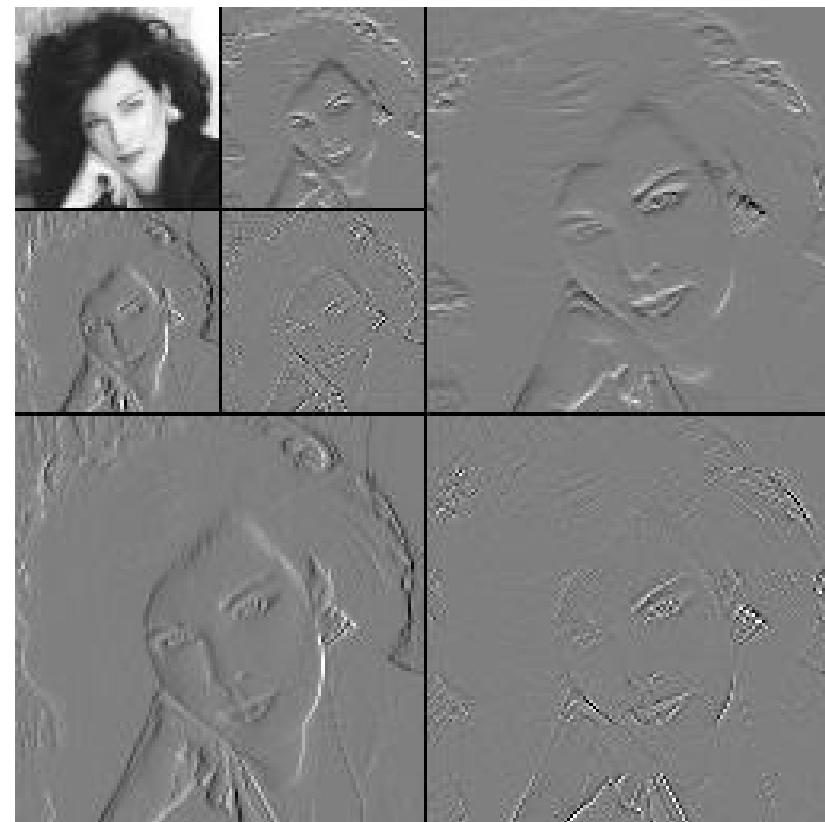
■ 哈尔变换的特性

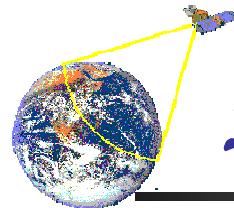
- Haar 函数的一个重要特性——收敛均匀而迅速
- 傅里叶变换的基函数仅是频率不同，哈尔函数在尺度和位置上都不同
- 哈尔变换具有尺度和位置的双重性
- 全域特性和区域特性：哈尔函数系列可分为全域部分和区域部分。全域部分作用于整个变换区间，区域部分作用于局部区域
- 小波特性：
变换后子波的尺度
远小于原始信号





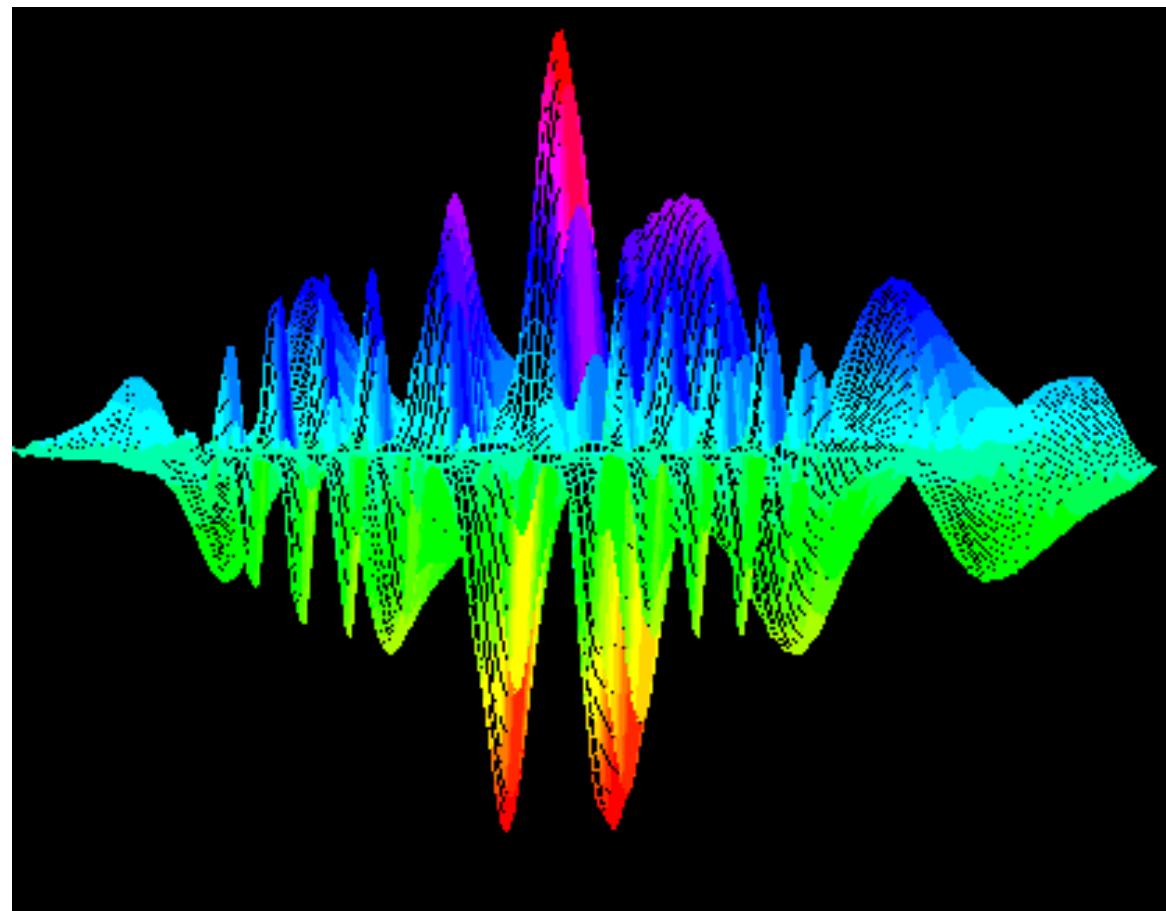
其他变换——哈尔变换

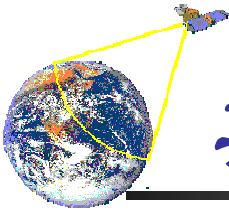




其他变换——小波变换

小波变换

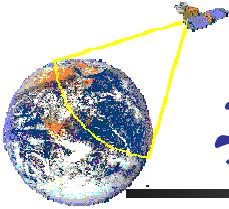




其他变换——小波变换

■ 发展历史

- 小波分析的发展非常迅速。最早可以追溯到**1900年希尔伯特(Hilbert)**的论述，和**1910年哈尔**提出的规范正交基
- 实际的主要工作还应该是**1984年法国的Morlet**，从地震学角度，**Morlet**认识到探测高频时，送到地下可调脉冲持续时间太长，不能用来分析密集的地层结构。因此探测高频时应该发送更短的波，因而引入小波概念
- 以后，**Grossman**对**Morlet**的信号按一个确定函数的伸缩、平移系进行了研究，为小波分析的形成开了先河
- **Meyer**试图证明不存在正则的（随尺度变换迅速变小）的小波正交基。结果构造出了相应小波基 **2017年数学阿贝尔大奖获得者**
- **Daubechies**发现了紧支集的正交小波基
- **Mallat**发现了构造小波基的一般方法：多分辨率分析
- 小波变换理论的理解与解释，可从严格的理论推导、傅里叶分析的延伸、多分辨率分析、子带编码等不同角度展开



其他变换——小波变换

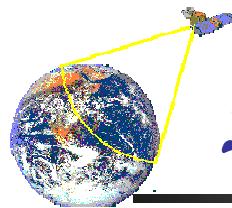
- 傅里叶变换的引入，使人类对于自然界复杂信号或图像的分析与处理，转变为对于其相对较为简单的频域特征的分析与处理

➤ 回忆调和信号与傅里叶变换

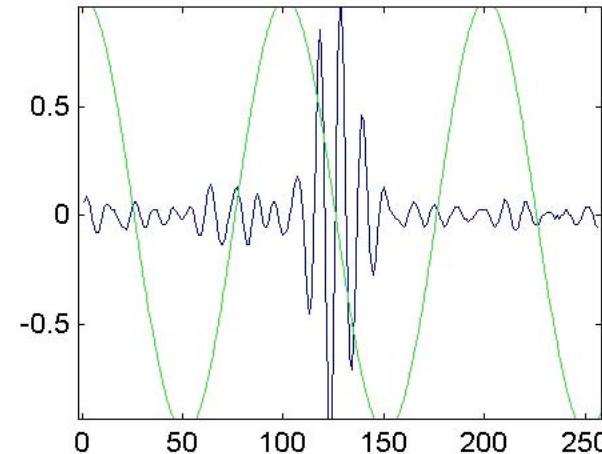
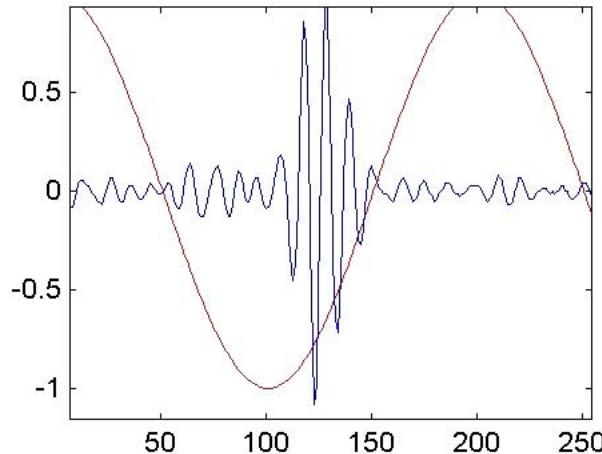
$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$F(\omega) = \int f(t)e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- 实际上相当于将调和信号频率与实际信号相比较
- 若实际信号中含有对应频率，则具有较大的变换系数
- 若实际信号中没有某特定频率，则该频率对应的系数较小或为零

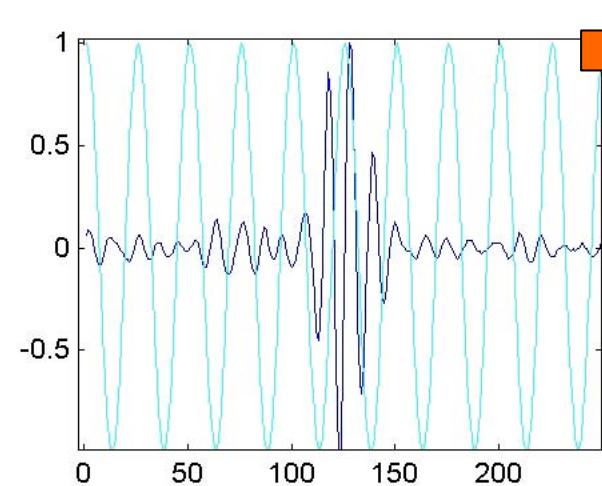
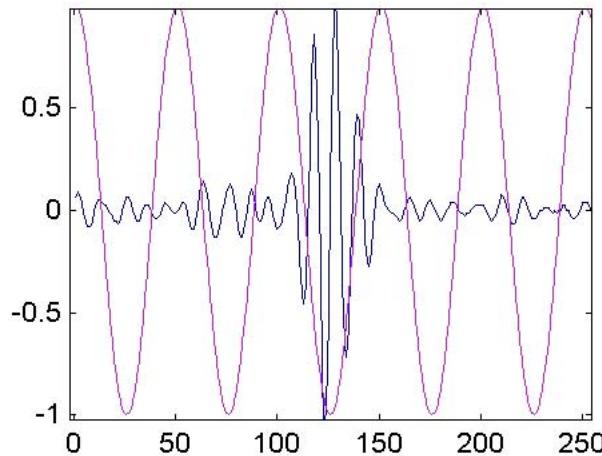


其他变换——小波变换

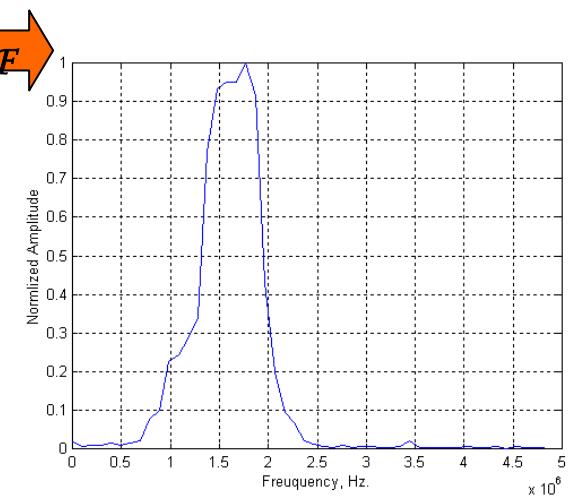


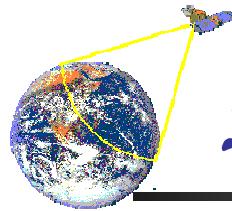
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} dt$$



\mathcal{F}



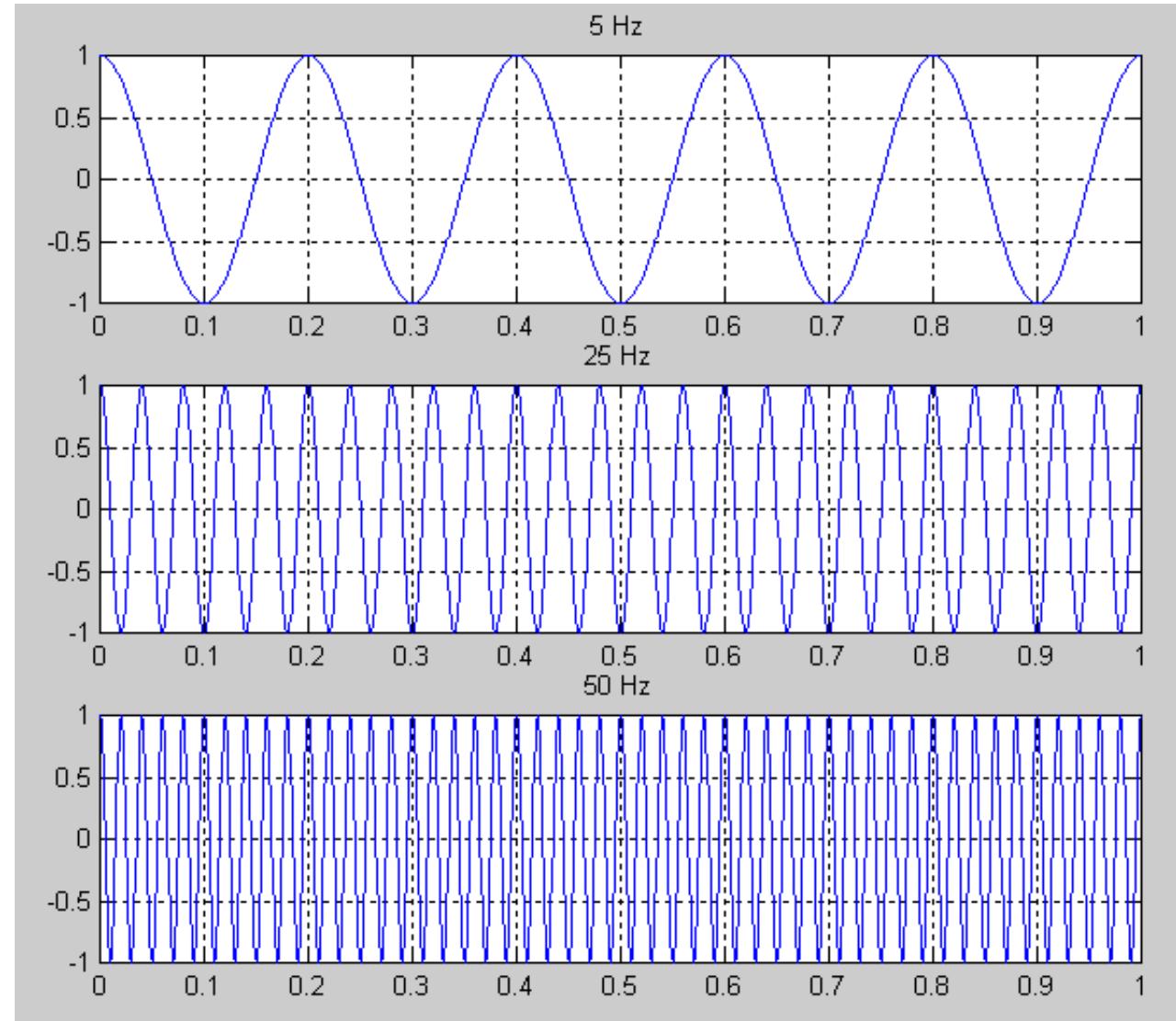


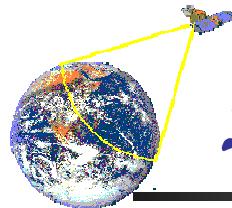
其他变换——小波变换

$$x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t)$$

$$x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t)$$

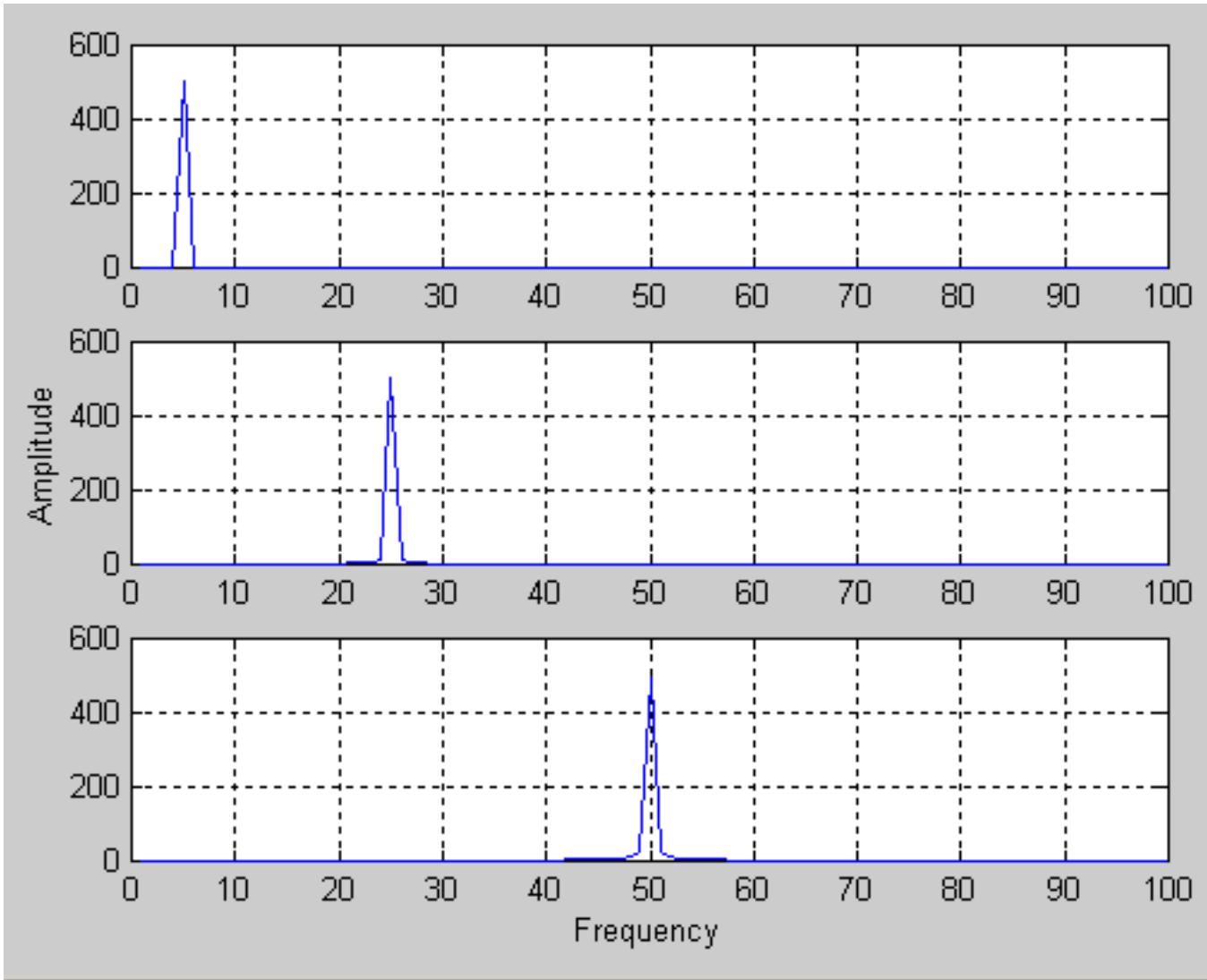
$$x_3(t) = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$





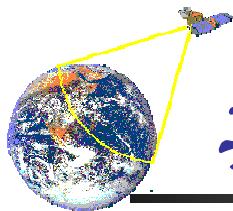
其他变换——小波变换

$$x_1(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)$$



$$x_2(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)$$

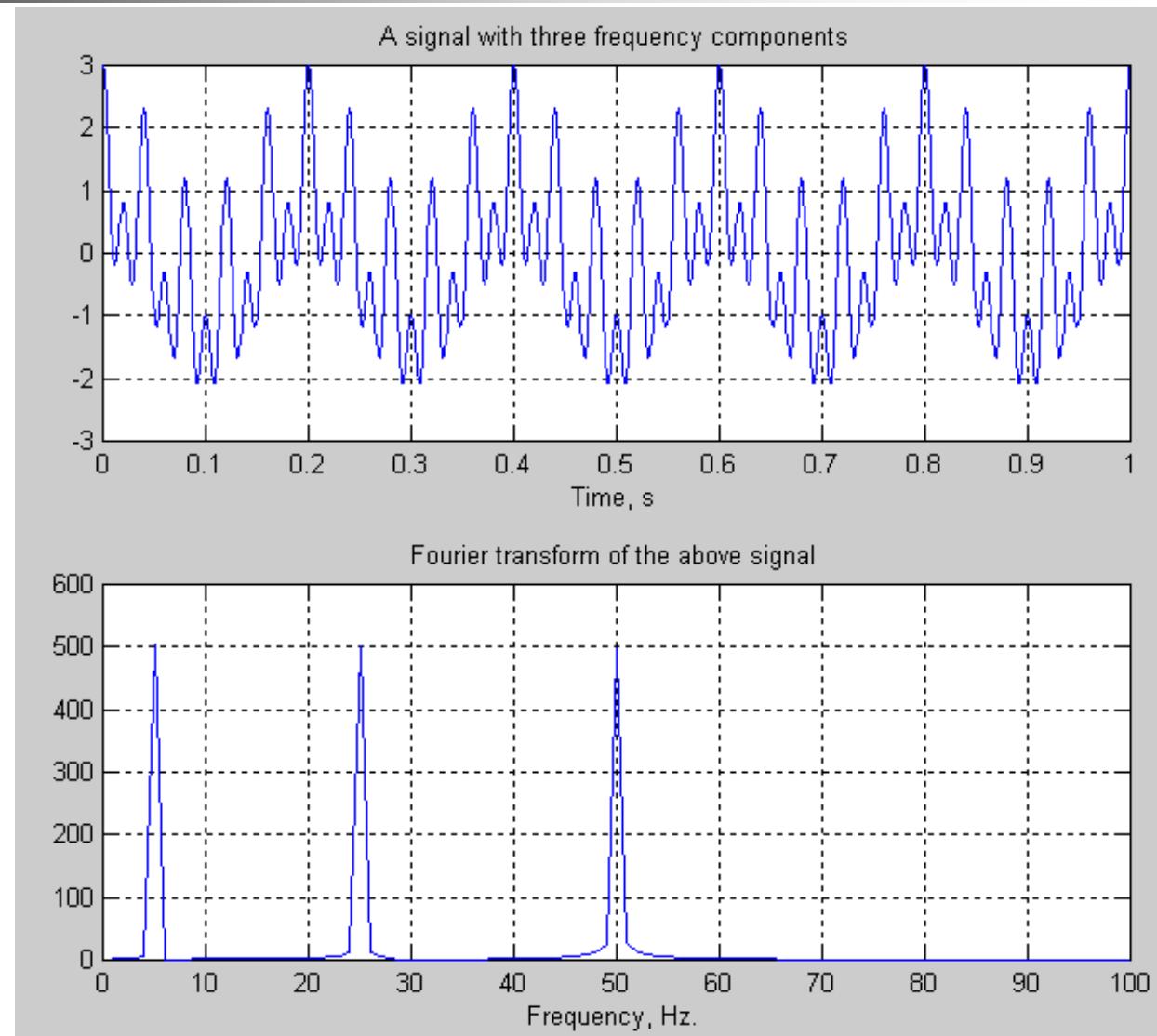
$$x_3(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} X_3(\omega)$$

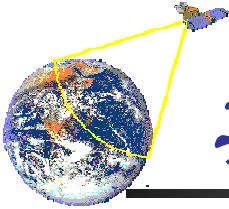


其他变换——小波变换

$$x_4(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)$$

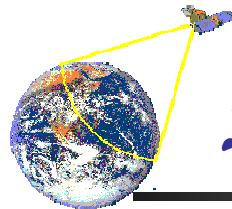
$$x_4(t) \xleftarrow{\mathcal{F}} X_4(\omega)$$





其他变换——小波变换

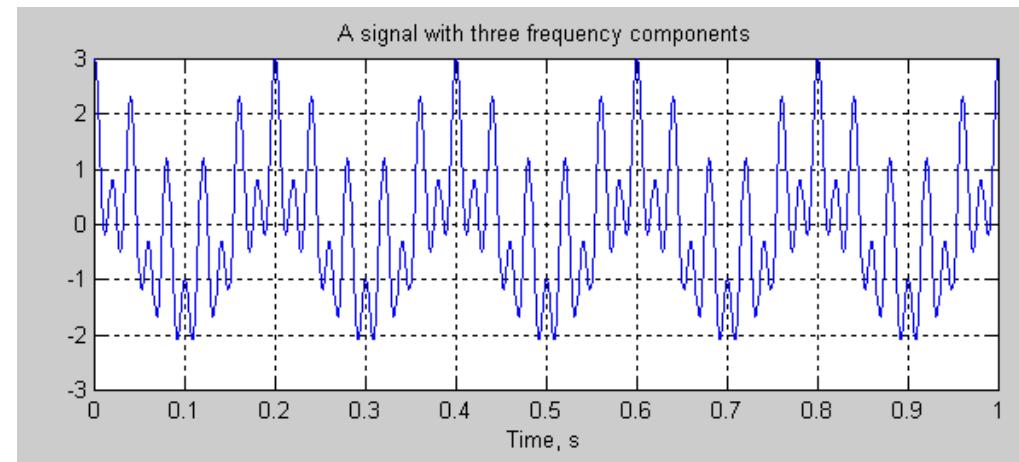
- 傅里叶变换可以准确地知道信号中含有哪些频率成分，但不知道这些成分发生的时间、位置 **没有空间分辨率**
- 稳态信号特征 **统计特征不随时间变化**
 - 由一系列不随时间变化的频率组成
 - 不需要知道任何频率的开始与停止时间
 - 傅立叶变换基于在时间轴上无限伸展的正弦曲线波作为正交基函数，十分适于表现稳态信号
- 非稳态信号具有随时间变化的频率成分，分析中需要知道
 - 什么频率在什么时候发生
 - 特定频率发生的位置



其他变换——小波变换

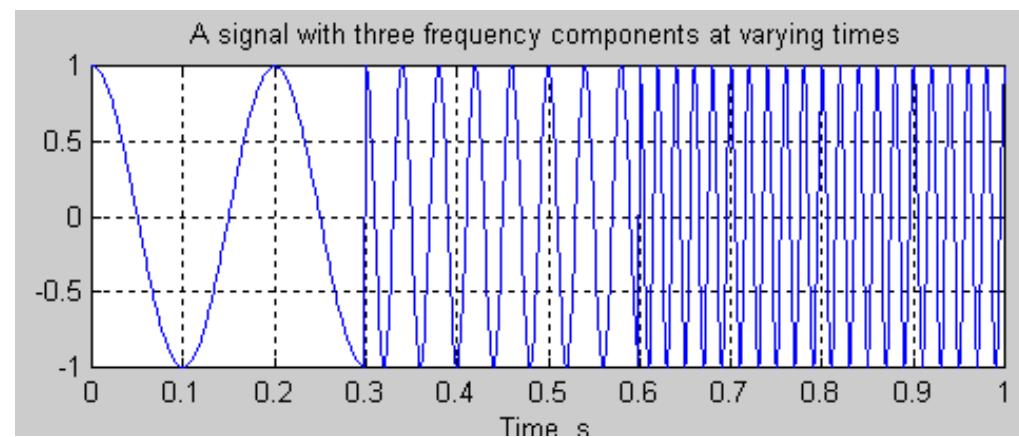
► 稳态信号

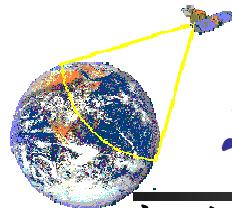
$$\begin{aligned}x_4(t) = & \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t) \\& + \cos(2\pi \cdot 25 \cdot t) \\& + \cos(2\pi \cdot 50 \cdot t)\end{aligned}$$



► 非稳态信号

$$x_5(t) = [x_1 \oplus x_2 \oplus x_3]$$

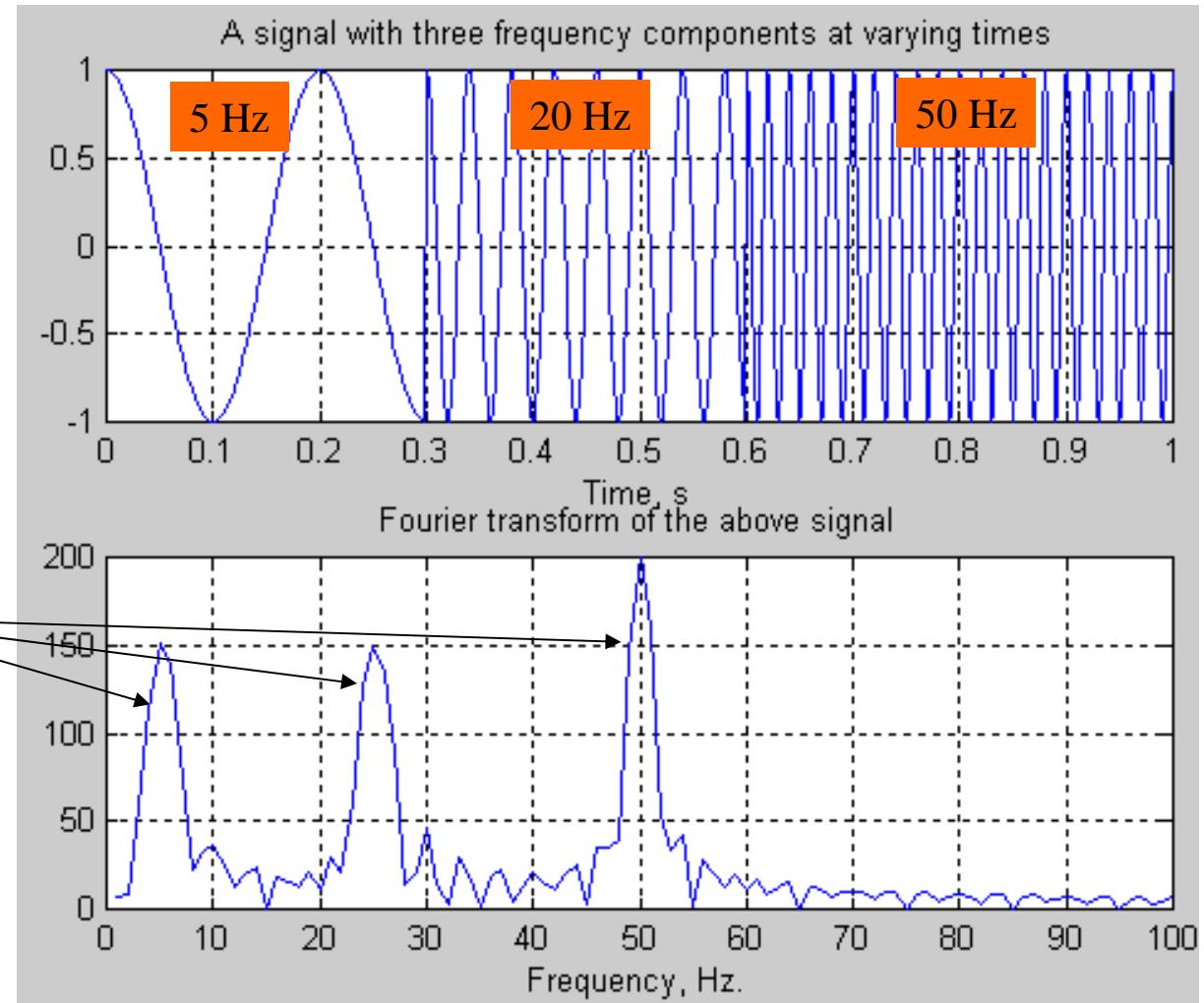


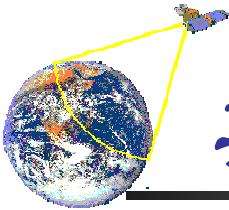


其他变换——小波变换

➤ 非稳态信号的傅里叶变换

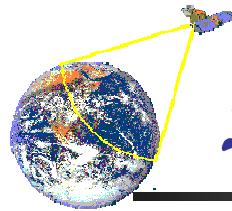
可以准确的知道频率成分，但不知道这些频率出现的位置和延续的时间





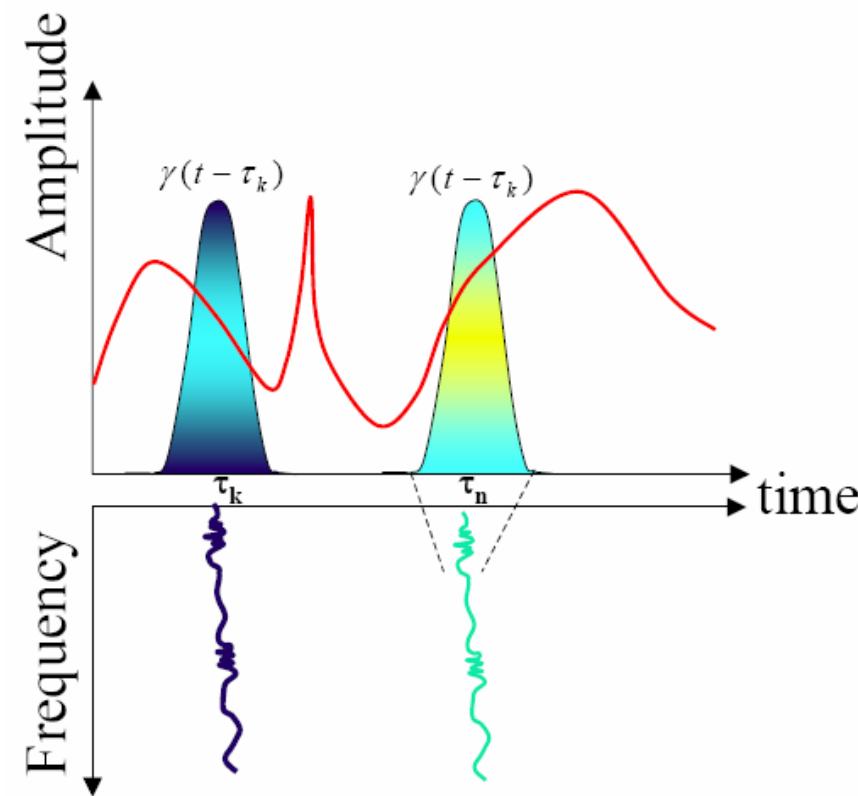
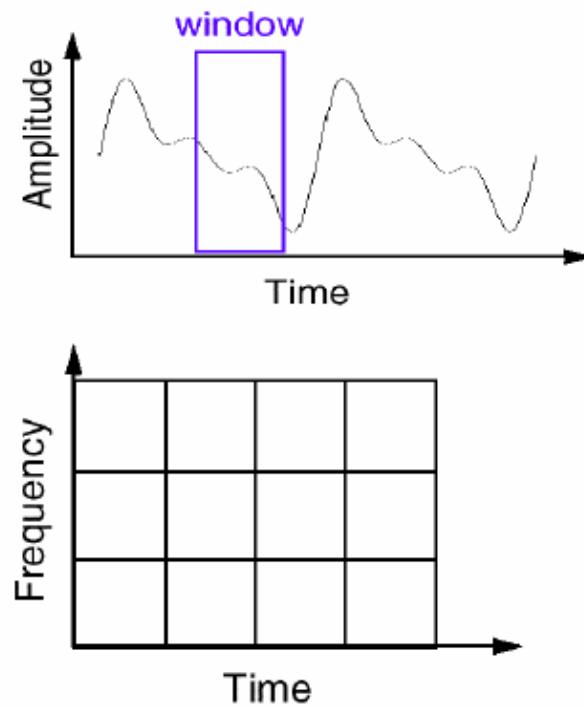
其他变换——小波变换

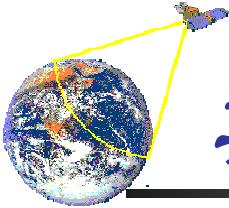
- 傅里叶变换的局限性
 - 时间信息损失：什么时候特定的事件发生？
 - 位置信息的损失：傅里叶变换不能确定某一事件的漂移、趋势、突变、起始和结束等
 - 傅里叶变换分析是全局性的分析，难以分析局部信号特征
- 傅里叶变换的其他局限性
 - 对于瞬态信号或高度局部化的信号（例如边缘），由于这些成分并不类似于任何一个傅立叶基函数，它们的变换系数（频谱）不是紧凑的，频谱上呈现出一幅相当混乱的构成
 - 这种情况下，傅立叶变换是通过复杂的安排，以抵消一些正弦波的方式构造出在大部分区间都为零的函数而实现的
 - 对于包含瞬态或局部变化成分的信号，傅里叶变换分析将难于得到最佳的表示



其他变换——小波变换

- 为了克服上述缺陷，使用有限宽度基函数的变换方法
- Gabor 变换（1946），或称之为加窗付里叶变换、短时傅里叶变换（STFT）首先产生：





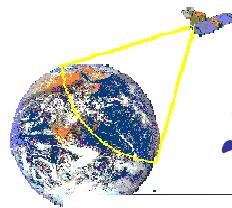
其他变换——小波变换

- STFT变换步骤为：

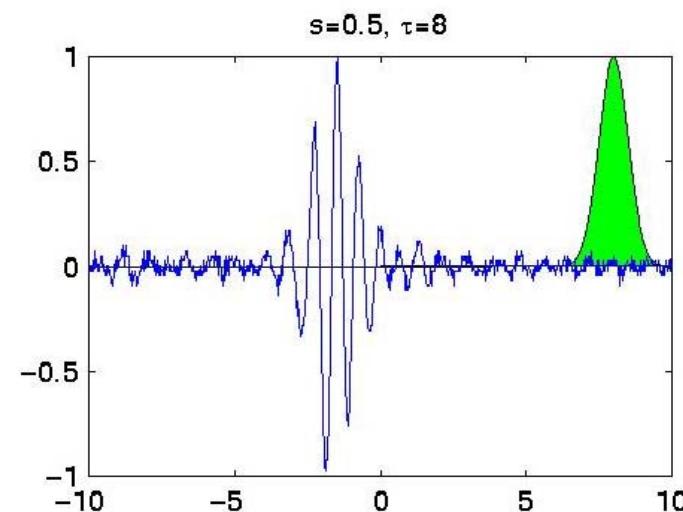
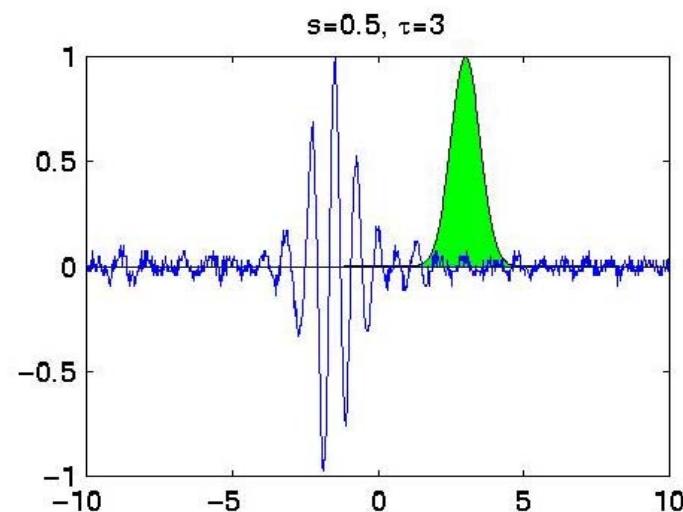
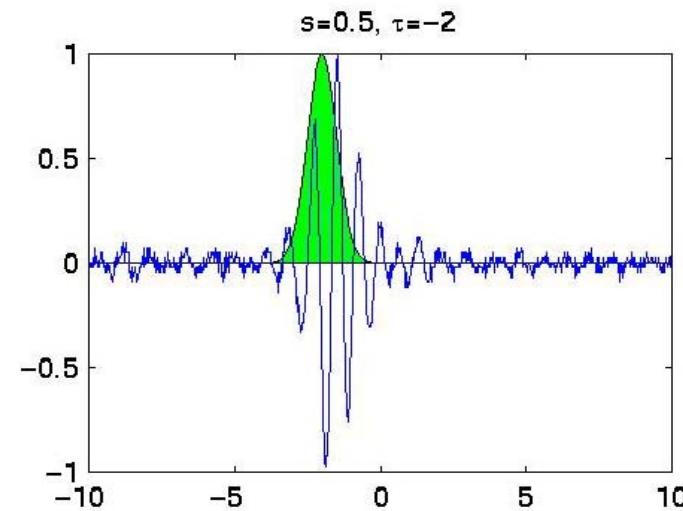
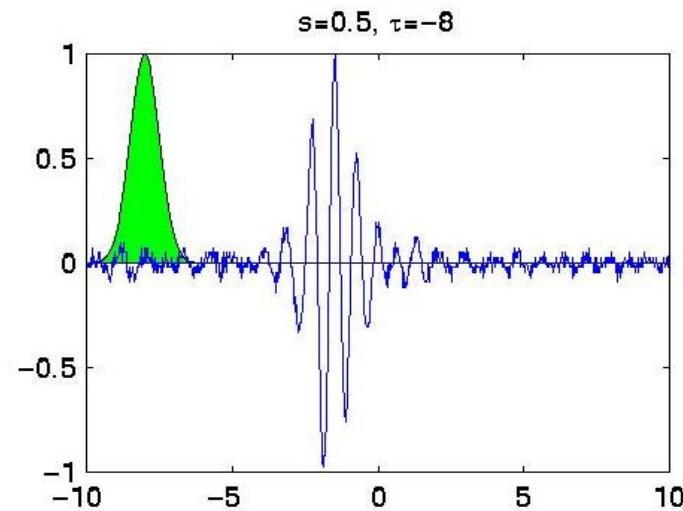
- 1) 选定一个有限窗口
- 2) 将窗口放置于信号的起点
- 3) 计算窗口内信号的傅里叶变换
- 4) 将窗口向右移动一个距离
- 5) 重复3) 4) 步，直至达到信号的末尾

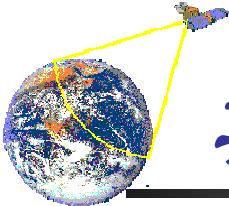
由此，得到每个时间段内信号的频率成分

通过短时窗口得到了时间分辨率



其他变换——小波变换



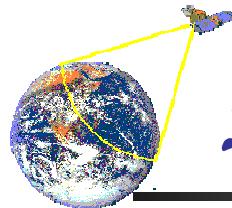


其他变换——小波变换

- Gabor变换具有特征:

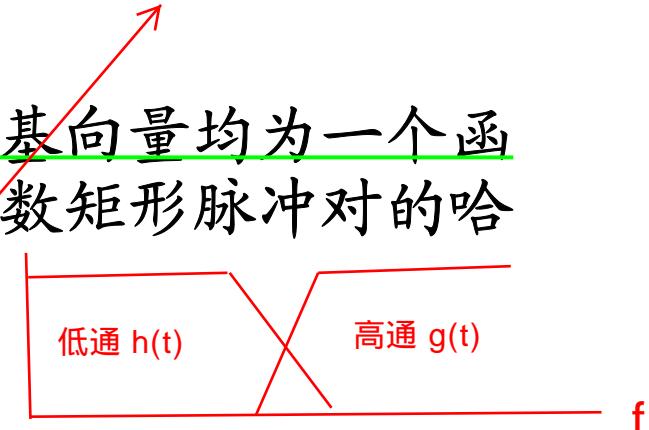
- 实现了对于信号的频率与时间观察的折衷
- 无论时间还是频率的观察均为有限精度；整体精度取决于窗口尺寸
- 一旦窗口尺寸确定，将作用于所有频率

实际信号需要在时间与频率方面更为灵活的观察与分析

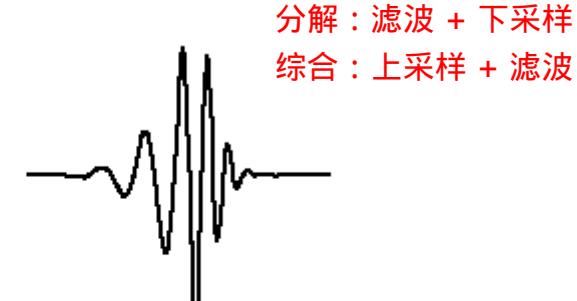


其他变换—小波变换

- 进一步的发展—采用频率不同、位置不同、宽度有限的基函数进行变换：小波变换出现
- 哈尔变换—最早出现的小波变换实例，其基向量均为一个函数通过不断的平移和伸缩来产生。具有奇数矩形脉冲对的哈尔函数为最古老又最简单的哈
尔函数为最古老又最简单的哈
- 什么是小波？ 位置 频率 窗口大小

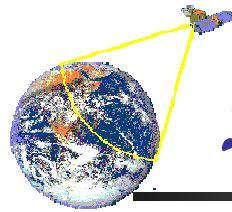


Sine Wave



Wavelet (db10)

小波是具有有限区间和均值为零的波



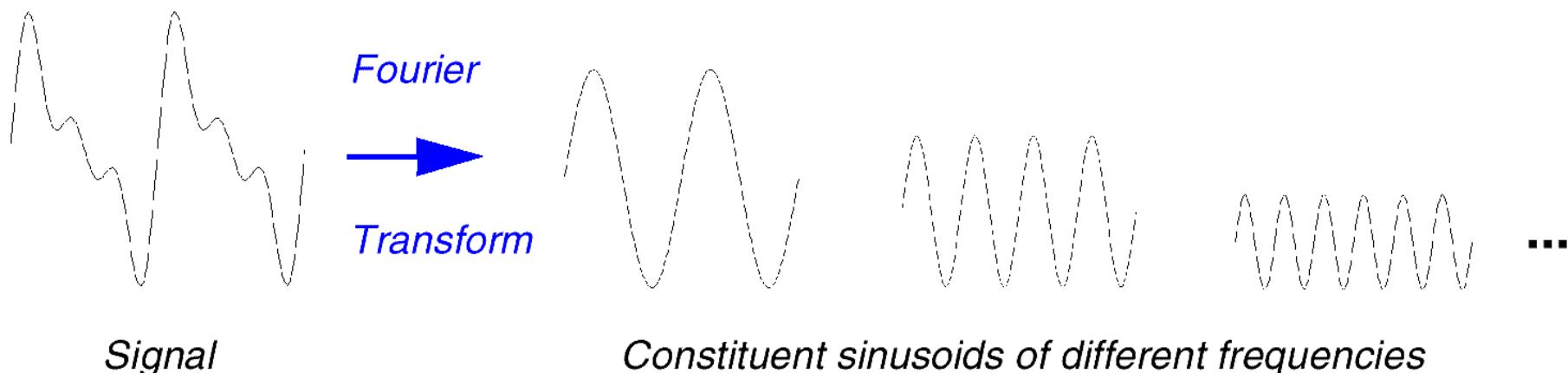
其他变换——小波变换

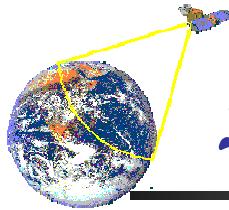
- 从傅里叶变换到小波变换 (wavelet transforms)

- 傅里叶变换

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

- ✓ 意味着信号在所有时间区间与复指数相乘，结果产生傅里叶系数 $F(\omega)$
 - ✓ 按照傅里叶系数，可将原信号分解为不同频率的组合



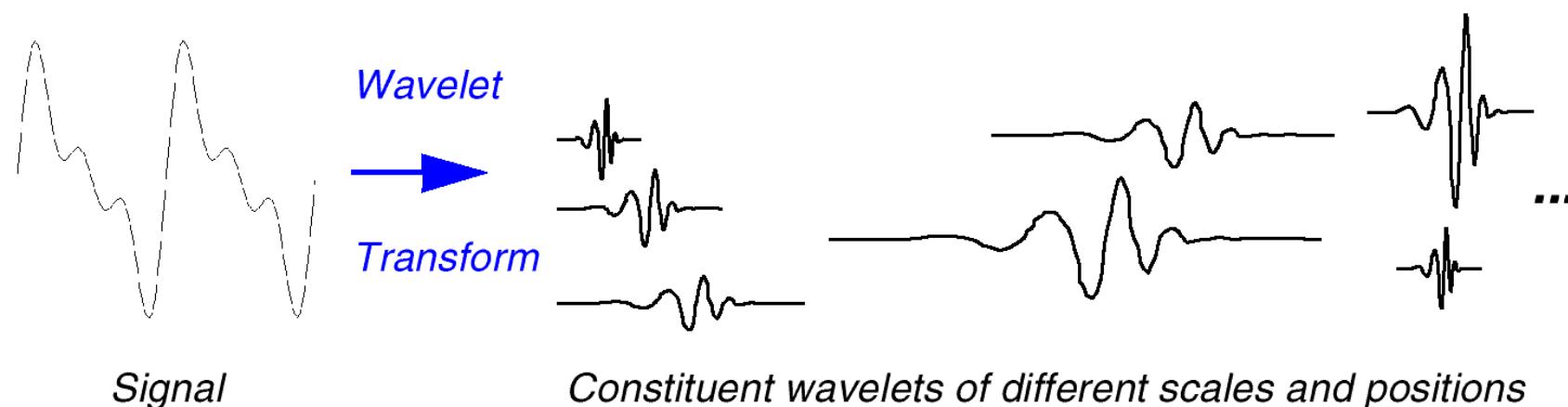


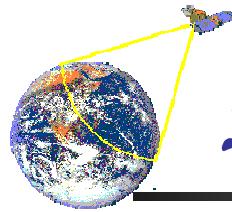
其他变换——小波变换

■ 从傅里叶变换到小波变换（续）

➤ 小波变换

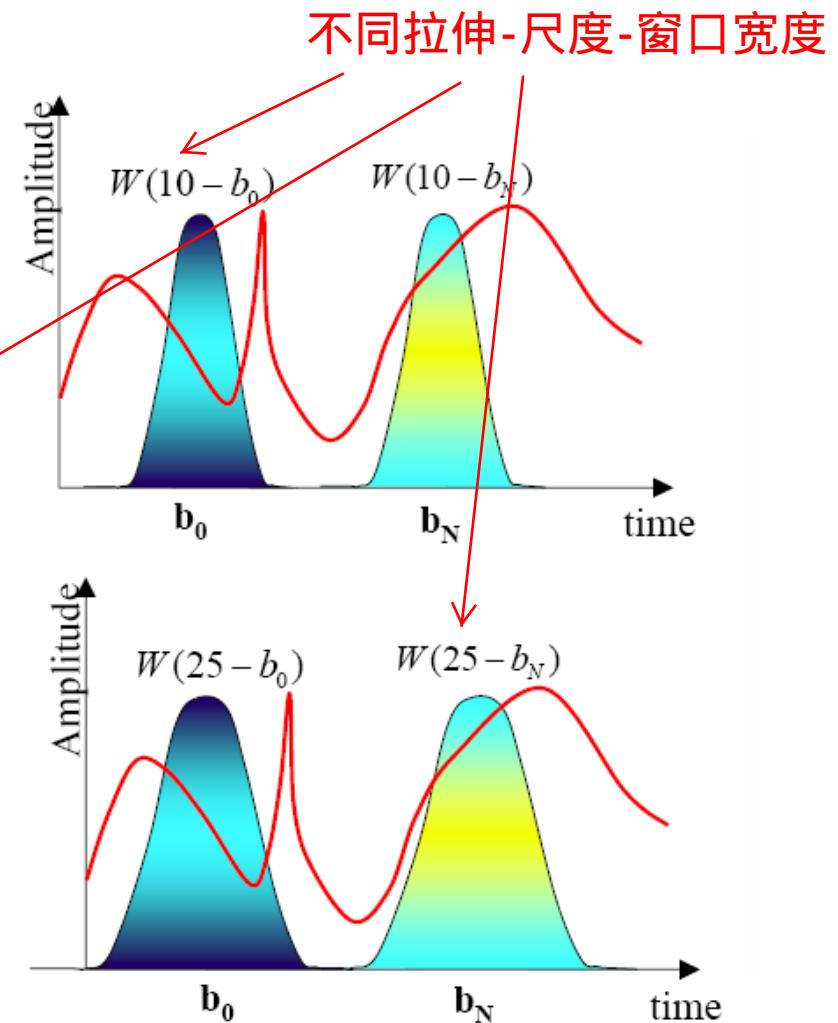
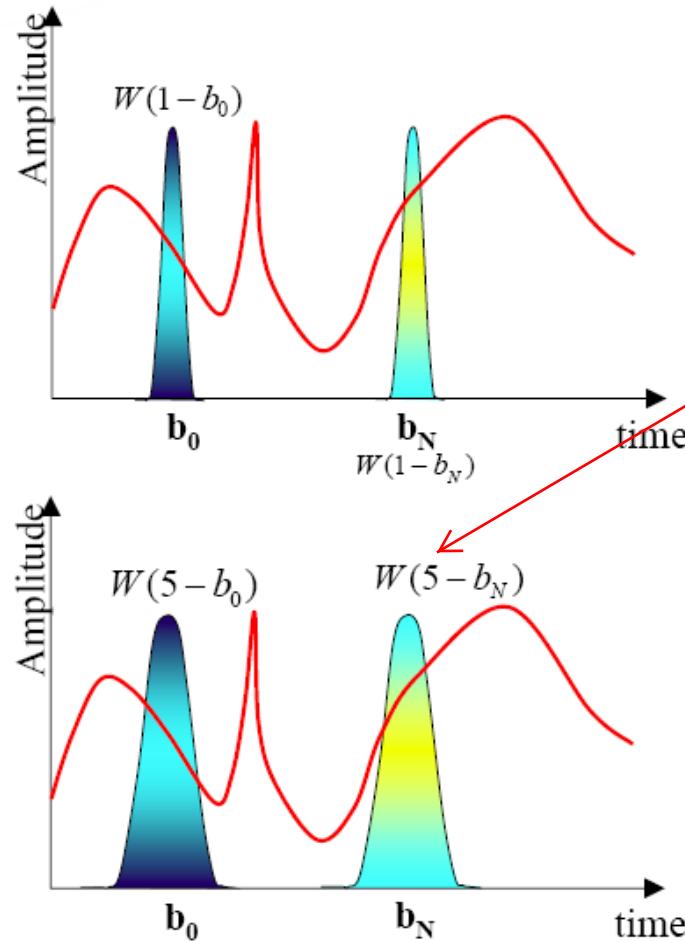
- ✓ 结果产生小波变换系数
- ✓ 按照小波系数，原始信号分解为不同小波的组合

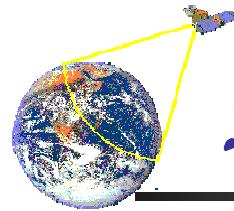




其他变换——小波变换

■ STFT与小波变换的比较





其他变换——小波变换

■ 从傅里叶变换到小波变换（续）

► 小波变换步骤：

第一步

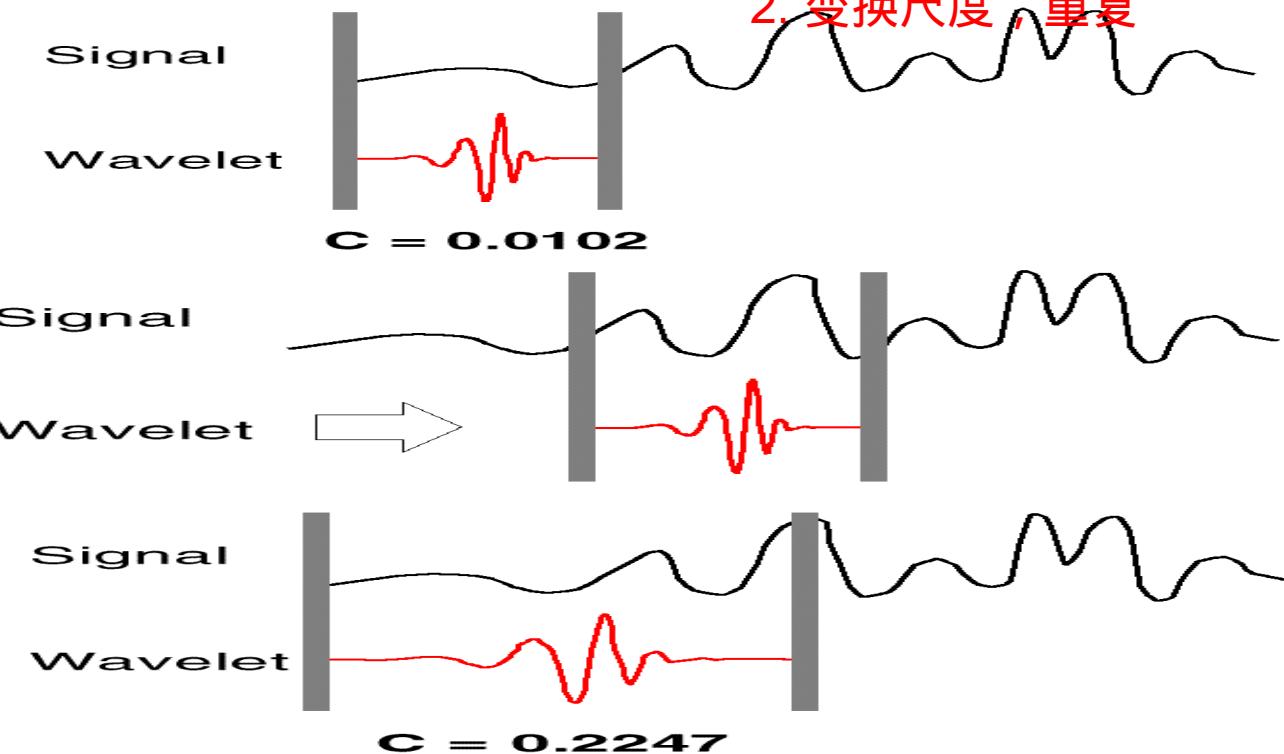
第二步

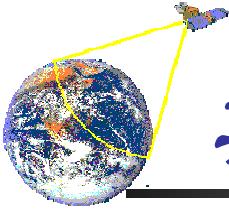
第三步

第四步

第五步：对所有尺度的小波重复一至四步

1. 确定某尺度小波，在不同位置，求得小波变换系数
2. 变换尺度，重复





其他变换——小波变换

■ 连续小波变换

➤ 基本小波

✓ 基本小波是一具有特殊性质的实值函数，它是震荡衰减的，而且通常衰减得很快，在数学上满足积分为零的条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

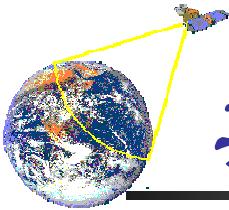
✓ 同时其频谱

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt$$

✓ 满足条件：

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

两个条件可概括为： 小波应是一个具有振荡性和迅速衰减的波



其他变换——小波变换

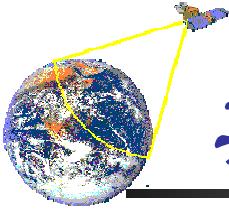
■ 连续小波变换（续）

➤ 小波基函数

- ✓ 通过对基本小波进行尺度上的伸缩和位置上的移动，可形成一系列小波函数—**小波基函数**
- ✓ 一组小波基函数是通过尺度因子和位移因子由基本小波来产生：

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

式中：a - 尺度系数（伸缩系数）； b - 位移系数



其他变换——小波变换

■ 连续小波变换（续）

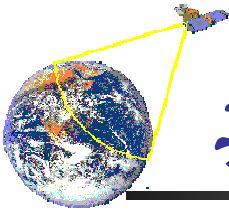
➤ **连续小波变换定义**（又称之为积分小波变换）：

$$\begin{aligned} W_f(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b}(t) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \end{aligned}$$

➤ **连续小波变换的逆变换为：**

小波基函数有2个参数a和b，反变换为二重积分

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}$$



其他变换——小波变换

■ 连续小波变换（续）

➤ 连续小波变换的深入讨论

✓ 观察 L^2 空间的内积函数

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int f(t)g^*(t)dt$$

✓ 以及互相关函数

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int x(t) \cdot y^*(t-\tau) dt \\ &= \langle x(t), y(t-\tau) \rangle \end{aligned}$$

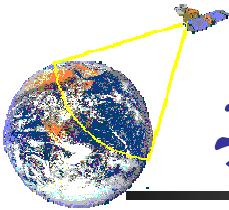
$\langle x(t), y(t-\tau) \rangle$

✓ 可有

$$\begin{aligned} W(a, b) &= \langle x(t), \psi(a, b) \rangle \\ &= \langle x(t), \psi_{a,0}(t-b) \rangle = R_{x, \psi_{a,0}}(b) \end{aligned}$$

➤ $W(a, b)$ 是信号 $x(t)$ 与小波基本函数在尺度因子 a 和位移因子 b 时的互相关函数

➤ 如果信号在特定的尺度因子 a 和位移因子 b 下与基本小波函数具有较大的相关性（相似性），则 $W(a, b)$ 值将较大



其他变换——小波变换

■ 连续小波变换（续）

➤ 连续小波变换的深入讨论（续）

✓ 回忆线性系统输入输出关系

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) \\&= \int x(\tau)h(t - \tau)d\tau\end{aligned}$$

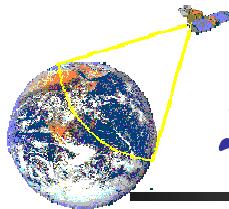
✓ 观察

$$W(a,b) = x(b) * \psi^*_{a,0}(-b)$$

b : 在尺度a下，信号f
在b点的响应

➤ 对于任意给定的尺度因子a（频率 $\sim 1/a$ ），小波变换
 $W(a, b)$ 为输入信号作用于具有响应函数 $\psi^*_{a,0}(-b)$ 的滤波器输出；

➤ 小波变换定义了一组由尺度因子a规范的连续滤波器组



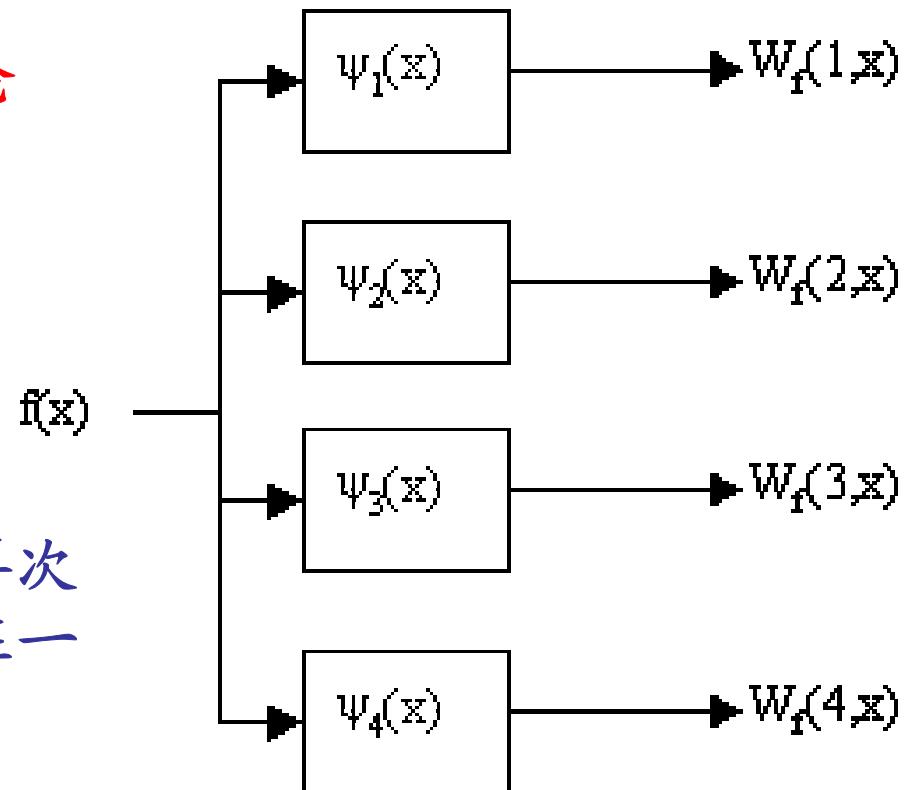
其他变换——小波变换

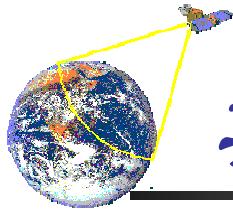
■ 连续小波变换（续）

➤ 连续小波变换的深入讨论
(续)

➤ 小波变换的滤波器解释

➤ 每个滤波器的输出分量再次
滤波并适当伸缩后组合在一
起可重构 $f(x)$ 。



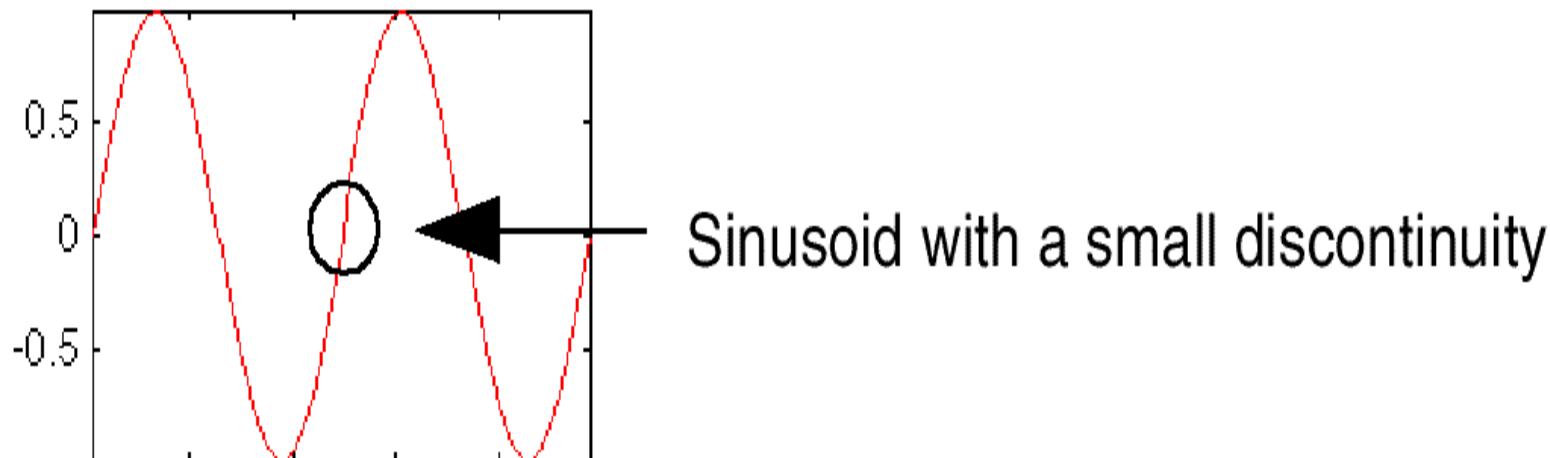


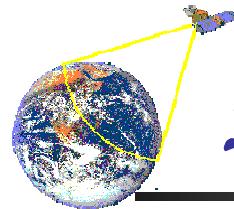
其他变换——小波变换

- 连续小波变换（续）

- 连续小波变换的深入讨论（续）

- ✓ 与傅里叶变换的比较
 - ✓ 例：对于具有微小间断的正弦波

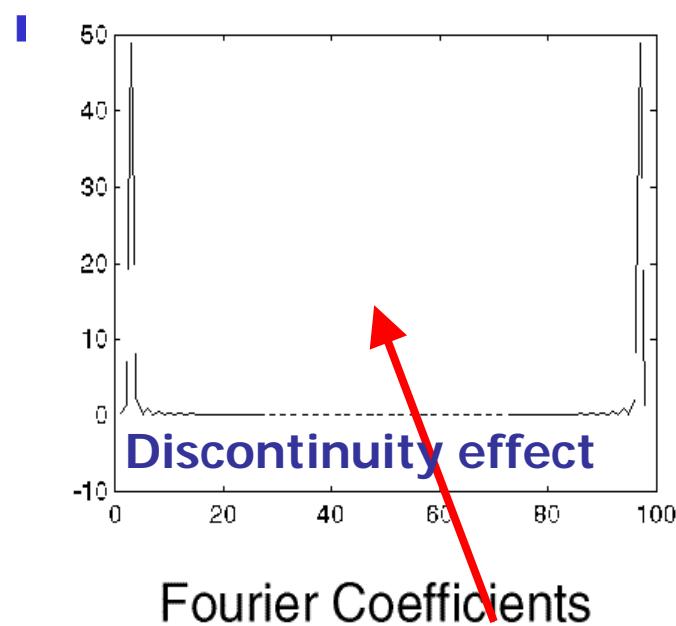




其他变换——小波变换

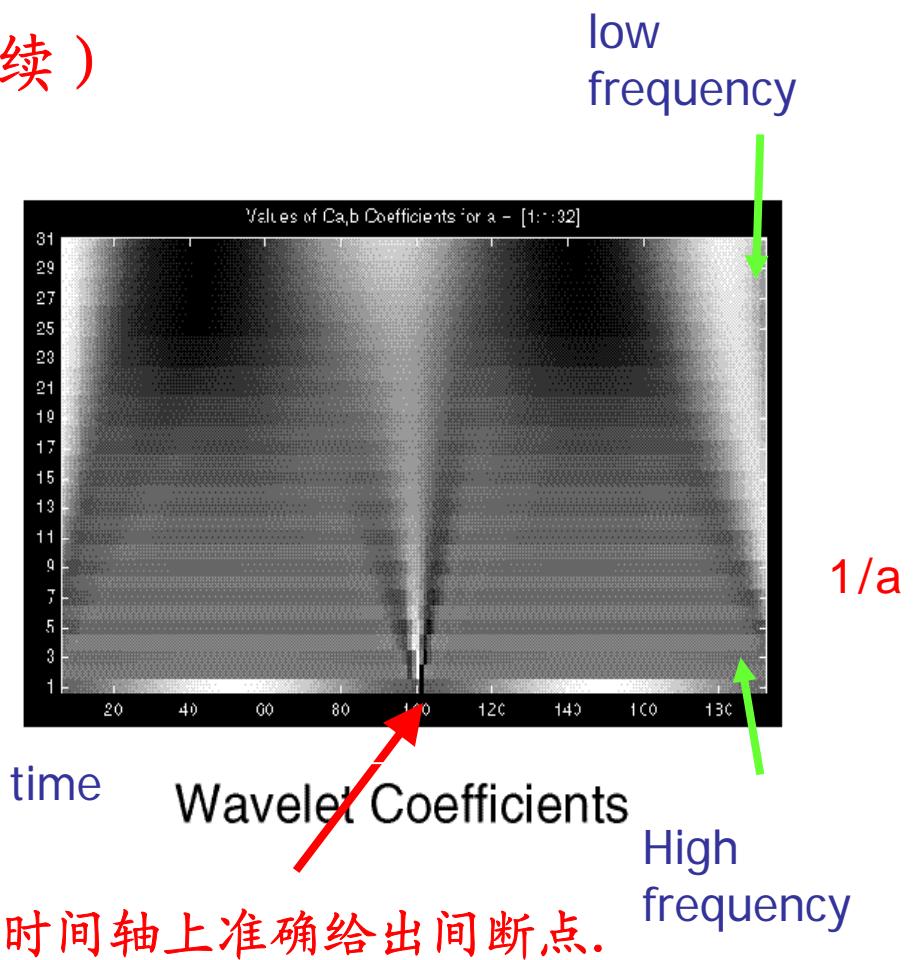
■ 连续小波变换（续）

➤ 连续小波变换的深入讨论（续）

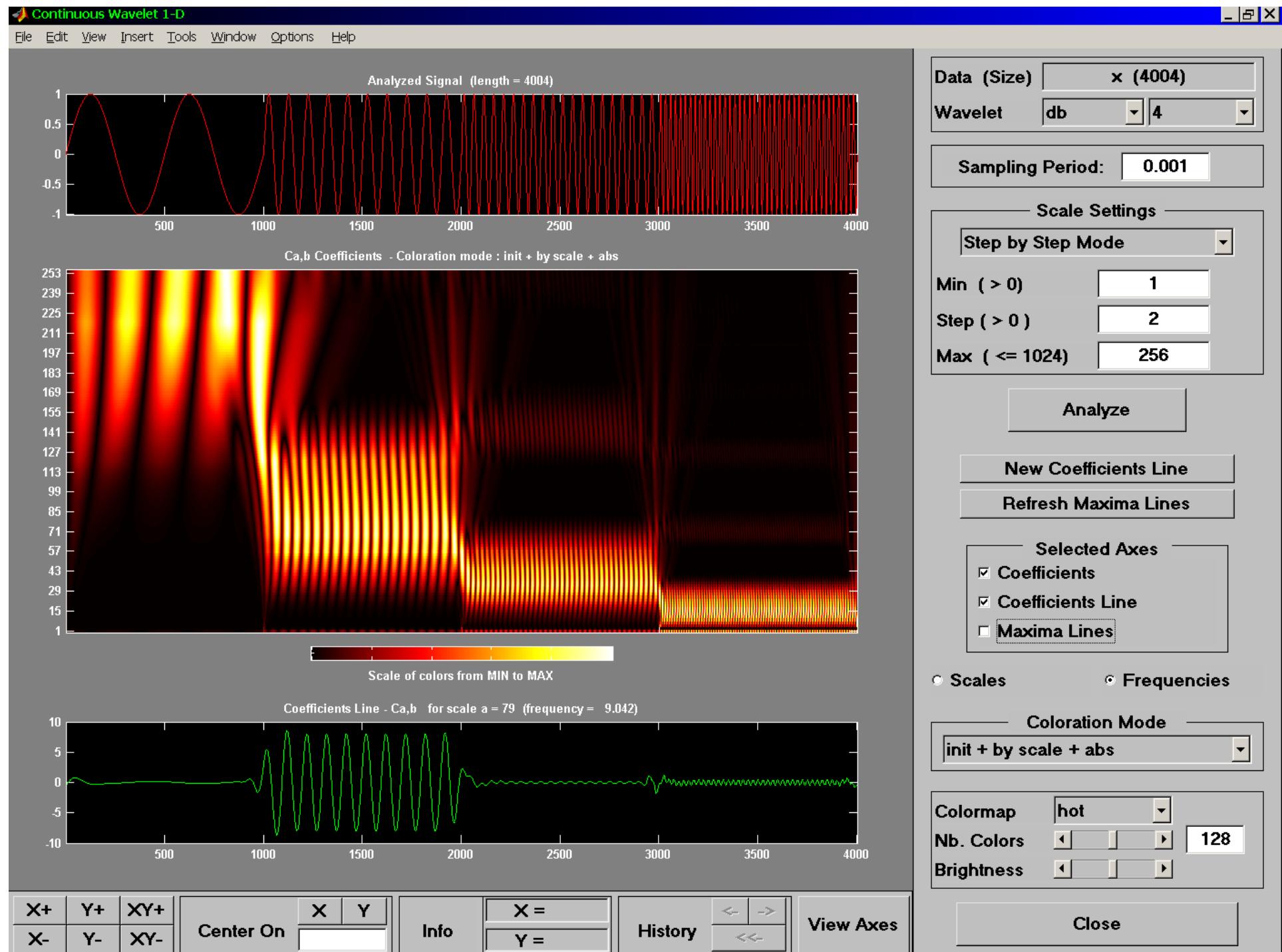


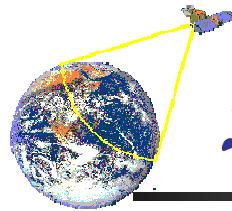
NOTHING!

scale
a



在时间轴上准确给出间断点.

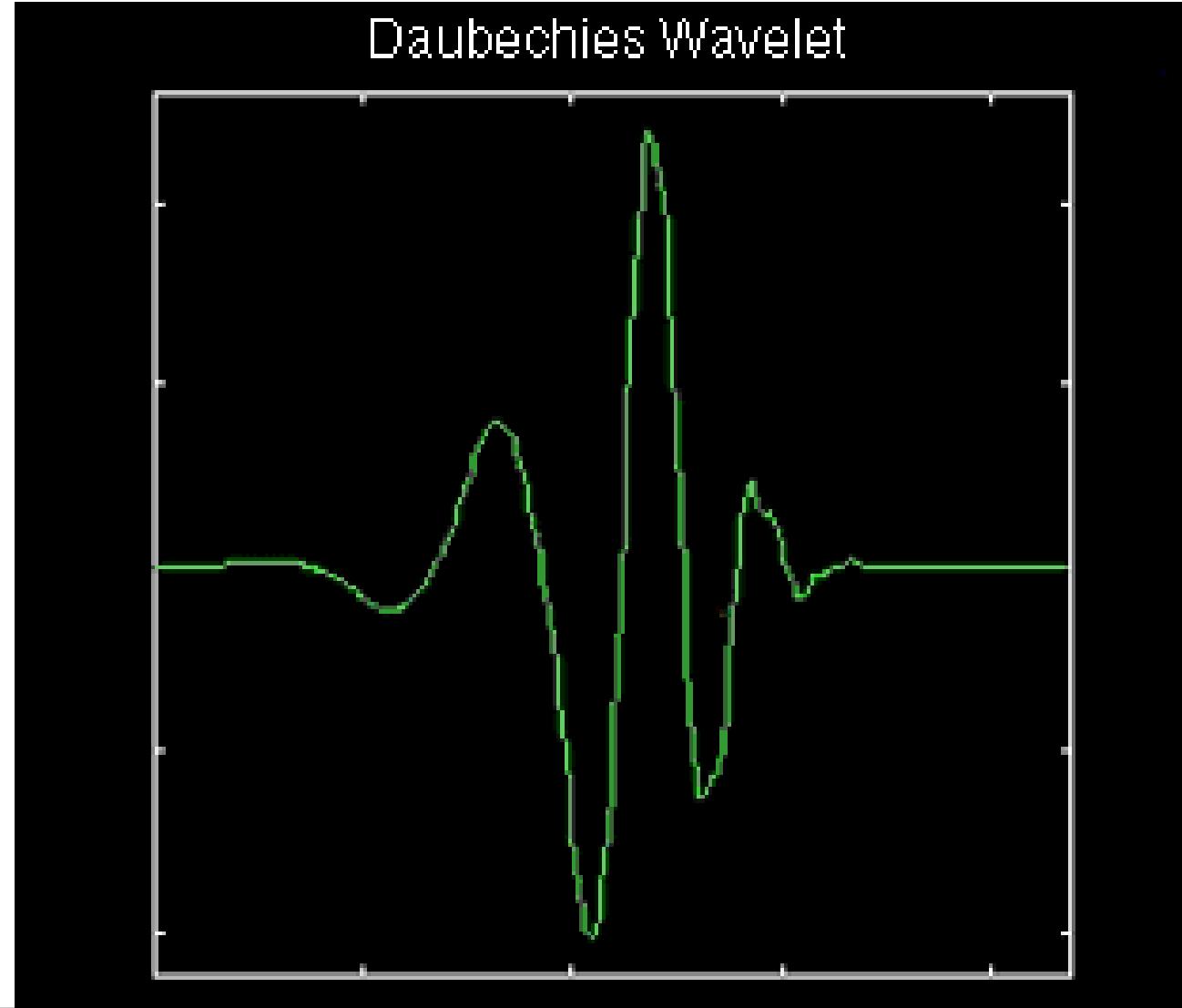


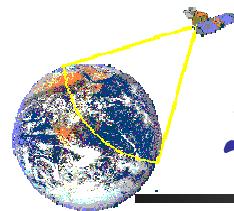


其他变换——小波变换

- 几种典型的一维小波
 - Mexican Hat Wavelet
 - Haar Wavelet
 - Morlet Wavelet
 - Daubechies

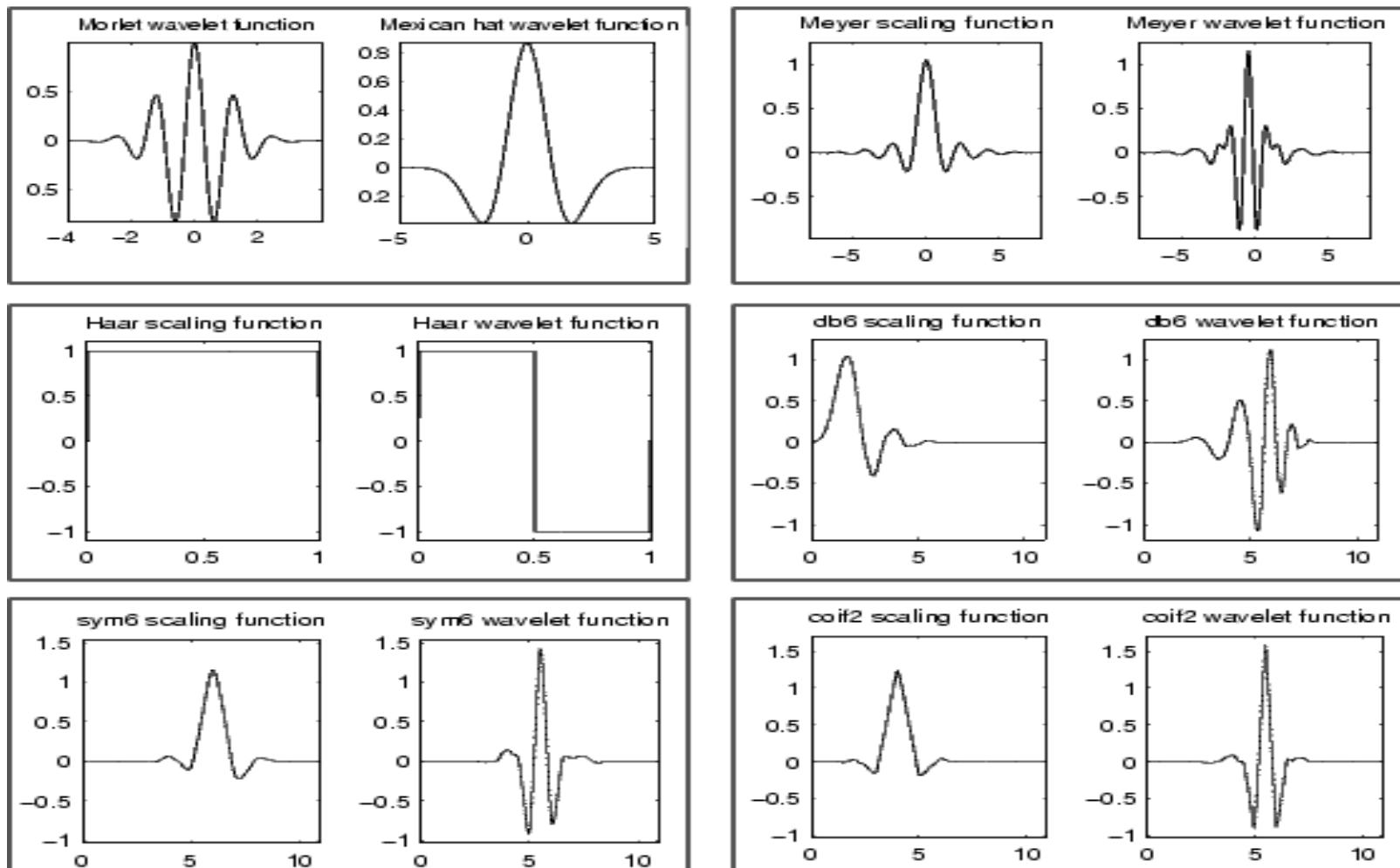
小波变换实例

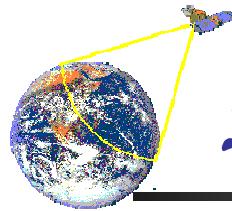




其他变换——小波变换

■ 小波基本形状





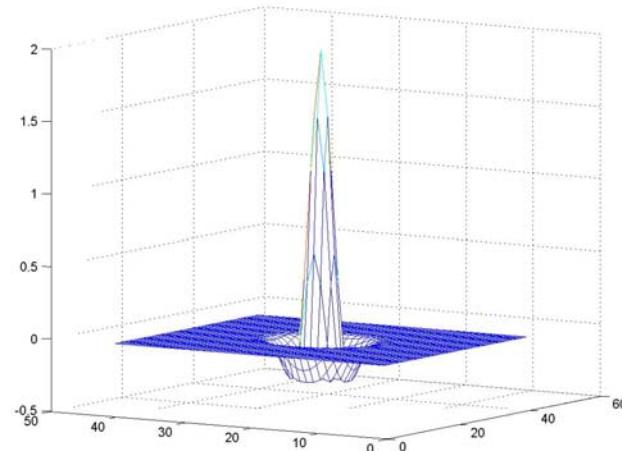
其他变换——小波变换

■ 小波基本形状（续）

2D Mexican Hat wavelet

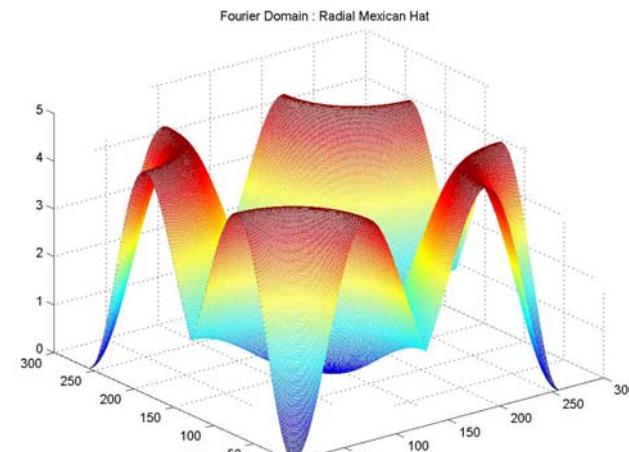
Time domain

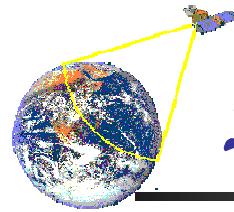
$$\Psi(x, y) = (x^2 + y^2 - 2)e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$



Frequency domain

$$\Phi(w_1, w_2) = -2\pi(w_1^2 + w_2^2)e^{-\frac{1}{2}(w_1^2 + w_2^2)}$$





其他变换——小波变换

■ 小波变换参数的深入分析

- 尺度 (Scaling) — 小波的“尺度”变化意味着对小波进行“拉伸”或“压缩”

$$f(t) = \sin(t)$$

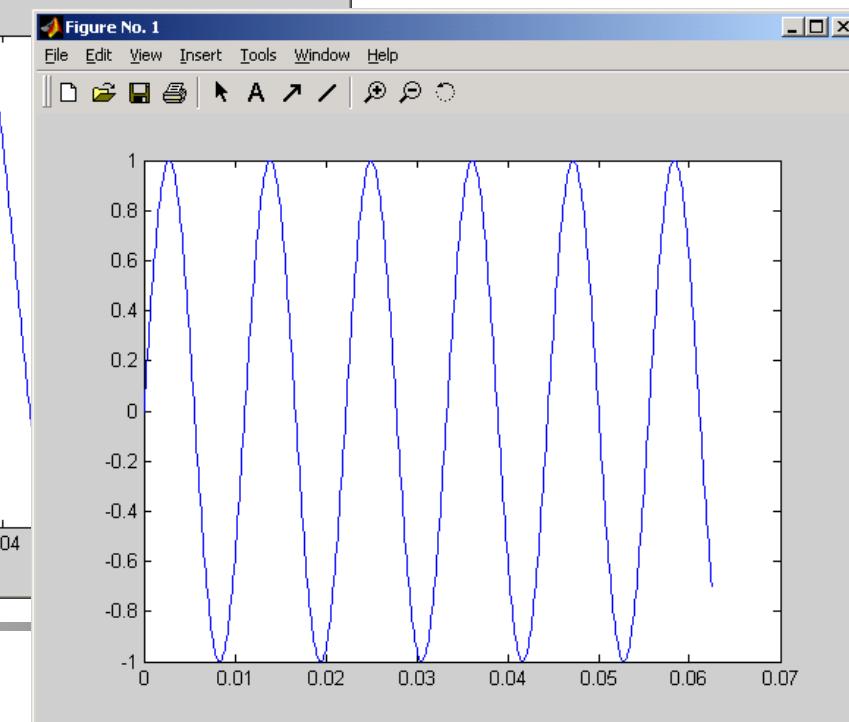
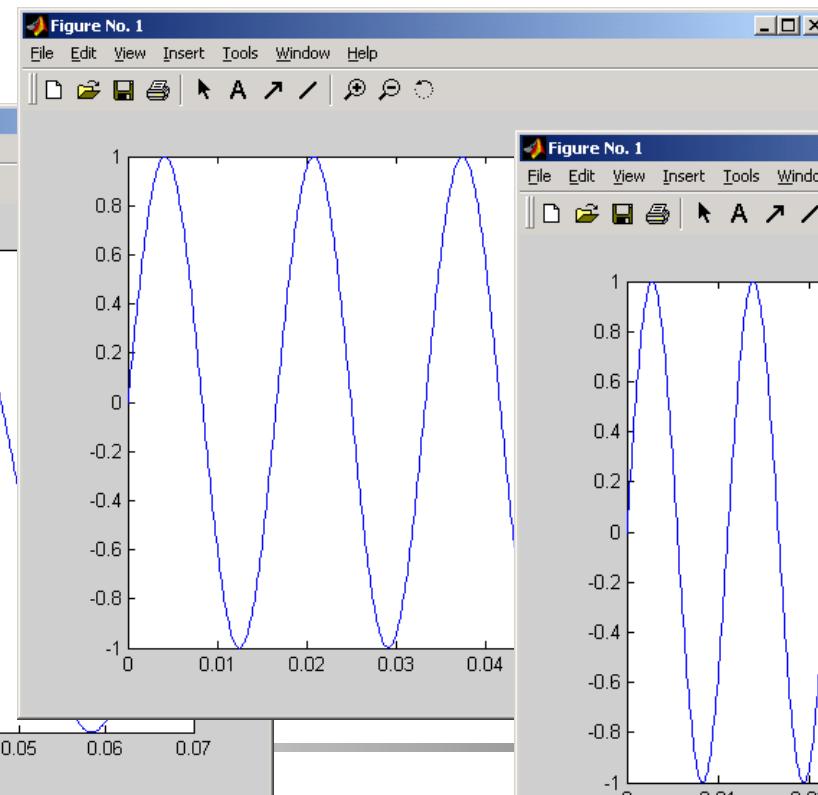
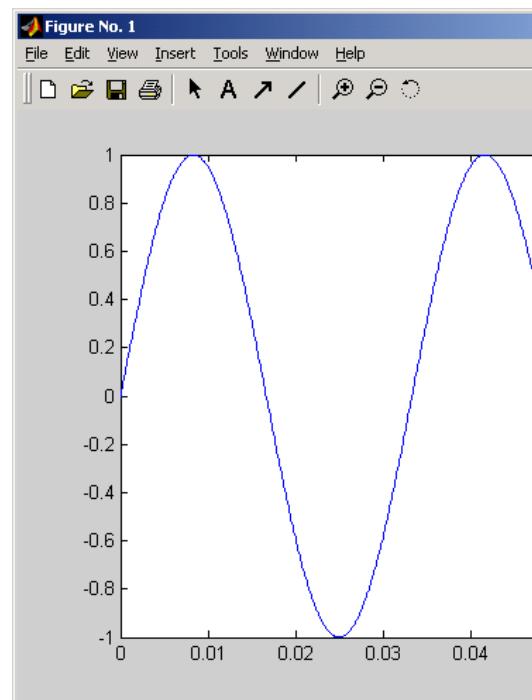
scale factor 1

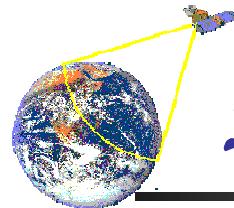
$$f(t) = \sin(2t)$$

scale factor 2

$$f(t) = \sin(3t)$$

scale factor 3

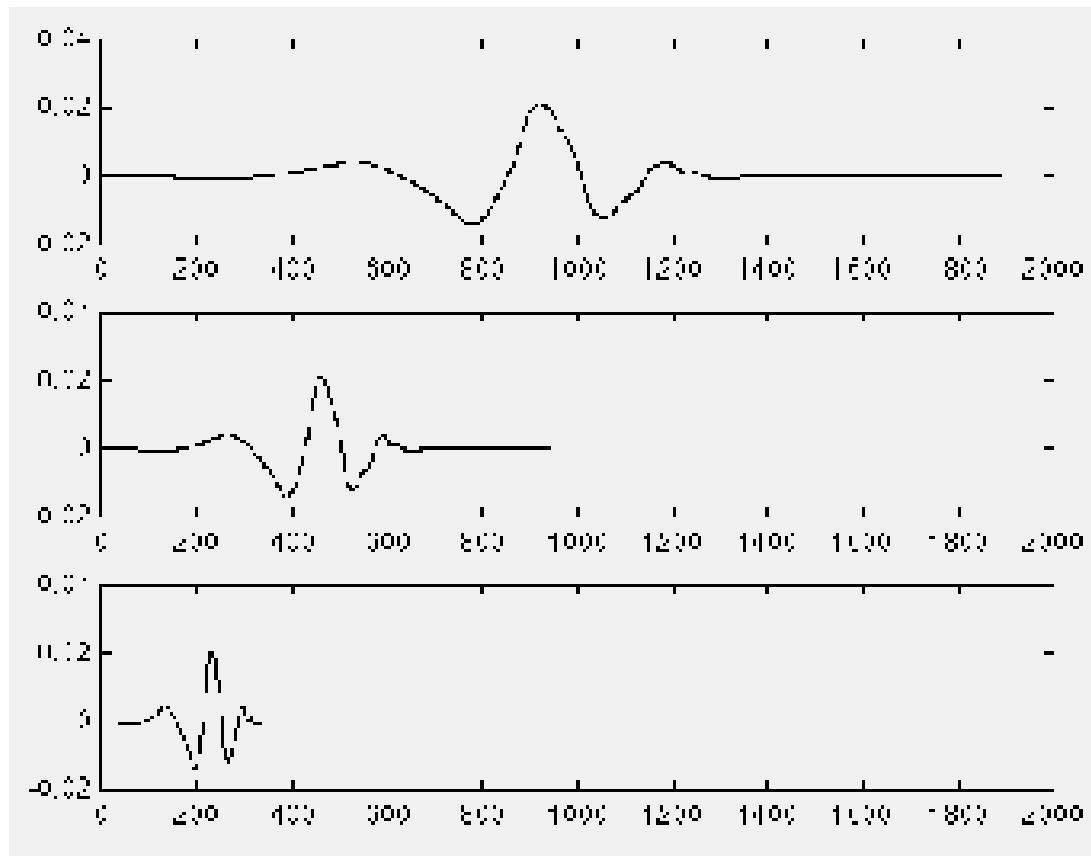




其他变换——小波变换

■ 小波变换参数的深入分析（续）

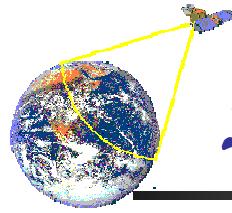
➤ 尺度—某种程度上类似于频率：频率 $\sim 1/a$



$$f(t) = \psi(t) ; a = 1$$

$$f(t) = \psi(2t) ; a = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \psi(4t) ; a = \frac{1}{4}$$

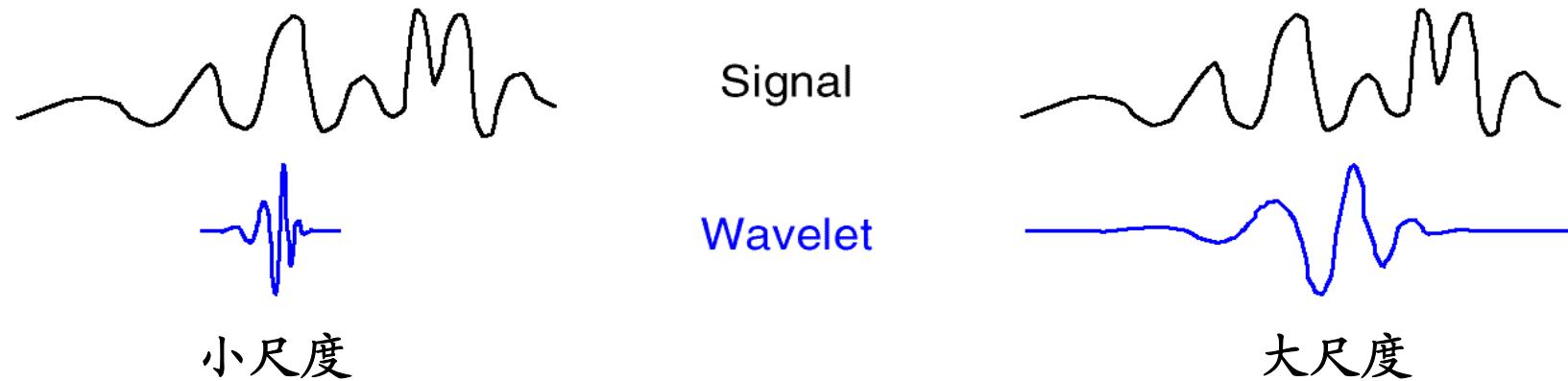


其他变换——小波变换

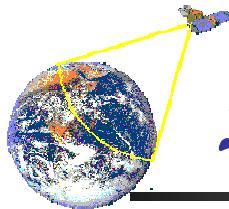
■ 小波变换参数的深入分析（续）

➤ 尺度与频率

- ✓ 大尺度对应于“展开”的小波，小波展开越大，该小波表征的信号特征就越粗糙（平滑）



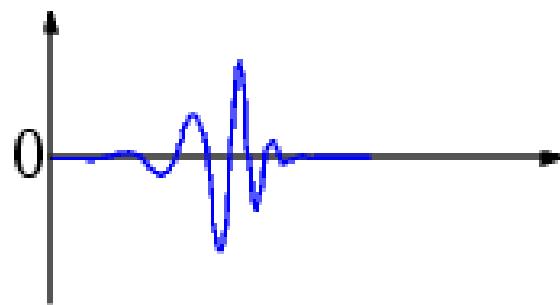
- ✓ 小尺度 a : 对应于压缩的小波；可表征更好的细节（变化）：**高频率**
- ✓ 大尺度 a : 对应于展开的小波；表征粗糙部分（慢变化）：**低频率**



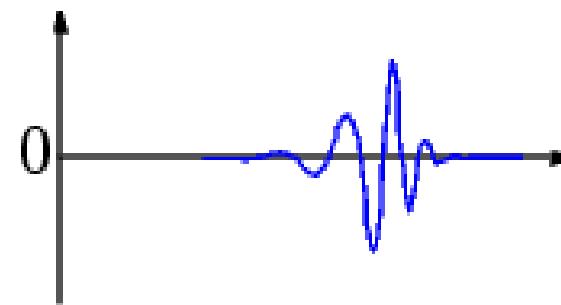
其他变换——小波变换

■ 小波变换参数的深入分析（续）

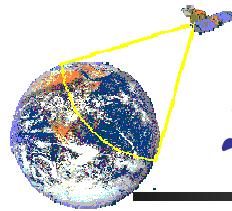
- 位移（Shifting）—延迟或加速小波
- 数学上，延迟一个函数 $f(t)$ 表示为 $f(t-k)$



Wavelet function
 $\psi(t)$

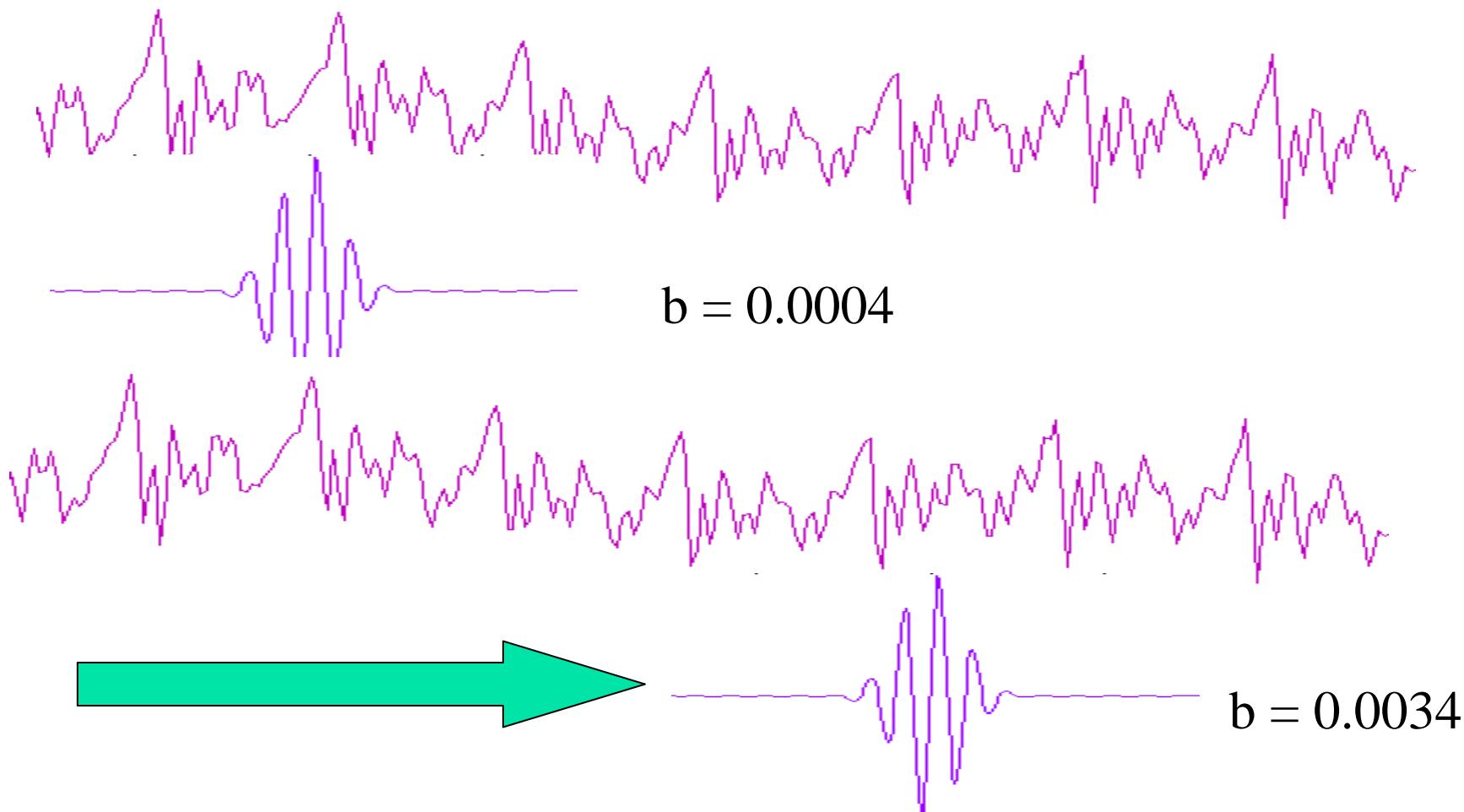


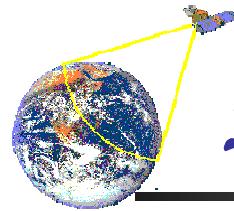
Shifted wavelet function
 $\psi(t - k)$



其他变换——小波变换

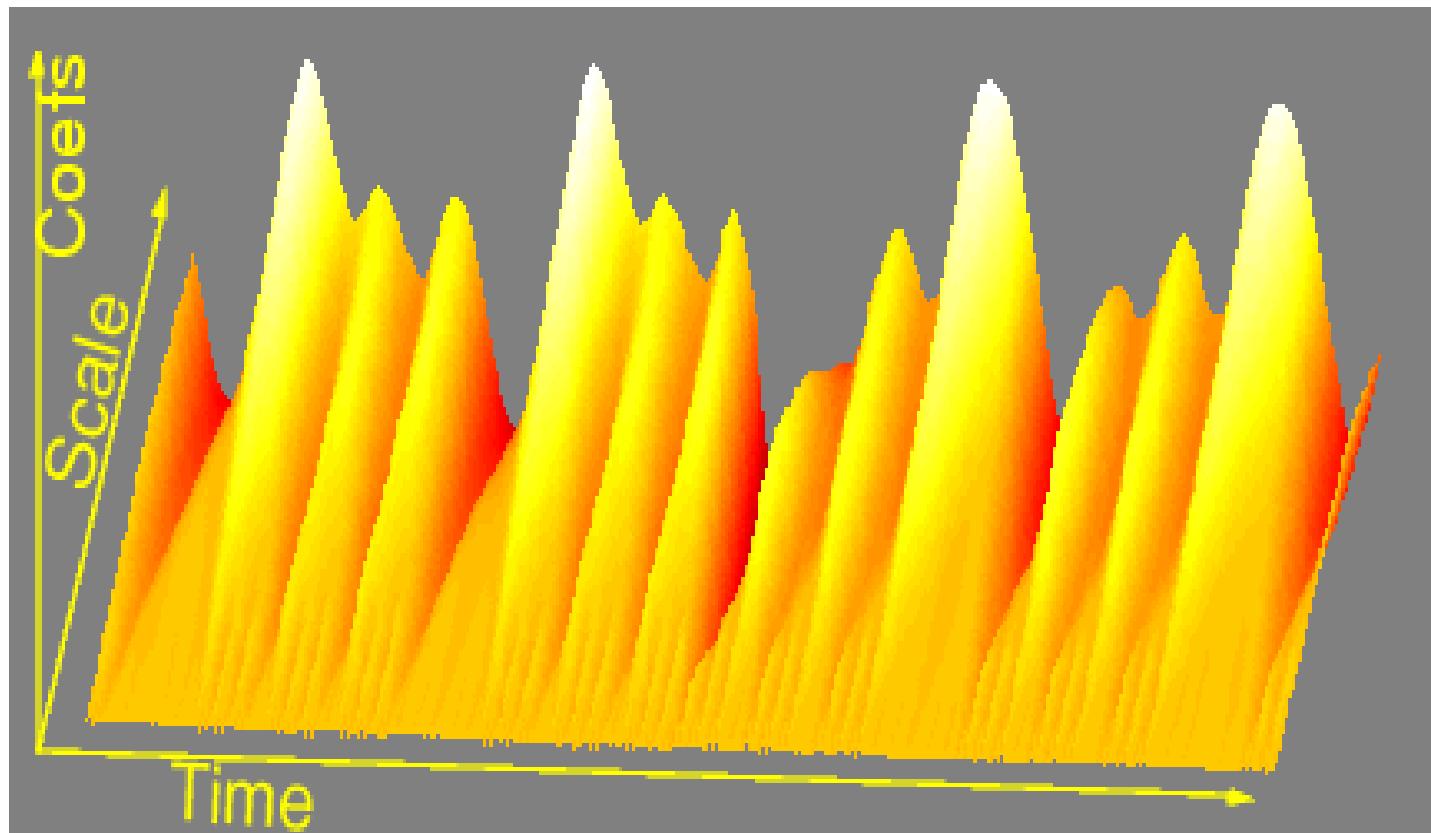
■ 小波变换参数的深入分析（续）

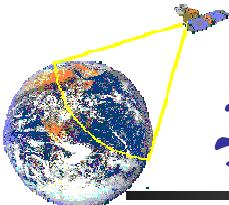




其他变换——小波变换

- 小波变换参数的深入分析（续）
 - 小波变换系数分布图





其他变换——小波变换

- 小波变换的基本性质

- 线性—小波变换是线性变换

$$f(t) = \alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$$

$$W_f(a, b) = \alpha W_{f_1}(a, b) + \beta W_{f_2}(a, b)$$

- 平移和伸缩的共变性

$$f(a_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} W_f(a_0 a, a_0 b)$$

- 冗余性：连续小波变换中存在信息表述的冗余度
 - ✓ 由连续小波变换恢复原信号的重构公式不唯一
 - ✓ 小波变换的核函数存在许多可能的选择
 - 尽管冗余的存在可以提高信号重建时计算的稳定性，但增加了分析和解释小波变换结果的困难