

Application of Runge-Kutta Method to Determine Terminal Velocity in Free Fall with Air Resistance

Nama : Daffa Bagus Dhiananto

NPM : 2306250756

Abstract—Penelitian ini bertujuan untuk mengimplementasikan metode Runge-Kutta Orde 4 (RK4) untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang merepresentasikan gerak jatuh bebas dengan hambatan udara. Fungsi yang dianalisis adalah $\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$, yang menggambarkan perubahan kecepatan benda terhadap waktu. Dengan menggunakan parameter fisik nyata dan pendekatan numerik melalui bahasa pemrograman C, solusi kecepatan sebagai fungsi waktu diperoleh hingga mendekati kecepatan terminal. Hasil menunjukkan bahwa metode Runge-Kutta memberikan estimasi kecepatan terminal yang akurat dan stabil.

Keywords—Runge-Kutta, kecepatan terminal, ODE, metode numerik, simulasi.

I. PENDAHULUAN

Gerak jatuh bebas yang dipengaruhi oleh hambatan udara membentuk persamaan diferensial nonlinear yang umumnya sulit diselesaikan secara analitik. Metode numerik seperti Runge-Kutta memberikan pendekatan kuat untuk memperoleh solusi aproksimasi secara efisien. Pada studi ini, metode RK4 diterapkan untuk menentukan kecepatan terminal, yaitu saat gaya gravitasi seimbang dengan gaya hambat..

II. STUDI LITERATUR

Menurut Chapra dan Canale dalam Numerical Methods for Engineers, metode Runge-Kutta merupakan metode eksplisit yang sangat populer dan stabil untuk menyelesaikan ODE. Metode RK4 secara khusus menawarkan kompromi antara akurasi tinggi dan kompleksitas komputasi yang moderat. RK4 digunakan luas dalam simulasi dinamika, termasuk untuk kasus fisika teknik seperti gerak jatuh bebas.

III. PENJELASAN DATA YANG DIGUNAKAN

Parameter fisik yang digunakan pada simulasi ini adalah:

- Massa objek $m = 68.1 \text{ kg}$
- Percepatan gravitasi $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
- Koefisien hambat udara $c = 12.5 \text{ kg/s}$
- Kondisi awal: $v(0) = 0 \text{ m/s}$
- Rentang waktu simulasi: $t \in [0, 20] \text{ s}$
- Step size $\Delta t = 0.1 \text{ s}$

Kecepatan terminal teoritis dihitung sebagai:

$$vt = \sqrt{\frac{mg}{c}} = \sqrt{\frac{68.1 \times 9.8}{12.5}} = 7.367 \text{ m/s}$$

IV. PENJELASAN METODE YANG DIGUNAKAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah Runge-Kutta Orde 4 (RK4), sebuah metode eksplisit untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (ODE). Persamaan yang dianalisis adalah $\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$, yang menggambarkan perubahan kecepatan v terhadap waktu t , dengan pengaruh gaya gravitasi dan gaya hambat udara.

Metode RK4 bekerja dengan melakukan aproksimasi solusi ODE secara bertahap, menggunakan informasi gradien fungsi di beberapa titik dalam setiap langkah waktu. Pada setiap iterasi, metode ini menghitung empat buah estimasi gradien—yang disebut sebagai k_1 , k_2 , k_3 , dan k_4 —di posisi dan waktu yang berbeda dalam interval langkah waktu Δt . Keempat estimasi ini kemudian dikombinasikan secara berbobot untuk menghasilkan nilai aproksimasi kecepatan v pada langkah waktu berikutnya.

Keunggulan metode RK4 terletak pada akurasi tinggi yang dicapai tanpa memerlukan evaluasi turunan tingkat lebih tinggi, serta pada stabilitas numerik yang baik untuk berbagai jenis persamaan ODE, termasuk yang muncul pada permasalahan teknik.

Pada implementasi program ini, algoritma RK4 diterapkan dalam bahasa pemrograman C. Proses iteratif dilakukan mulai dari kondisi awal $v(0) = 0$, dengan langkah waktu $\Delta t = 0.1$ detik. Iterasi dilanjutkan hingga waktu akhir $t = 20$ detik, atau hingga perubahan kecepatan antar langkah menjadi sangat kecil. Setiap nilai kecepatan yang diperoleh disimpan untuk dianalisis dan divisualisasikan dalam bentuk grafik $v(t)$.

Metode ini dipilih karena sangat cocok untuk memodelkan dinamika sistem fisika seperti gerak jatuh bebas, di mana kecepatan berubah secara kontinu terhadap waktu akibat interaksi dua gaya yang berlawanan. Dengan RK4, perubahan kecepatan dapat diaproksimasi dengan ketelitian yang sangat baik, sehingga dapat diperoleh estimasi kecepatan terminal yang akurat.

V. DISKUSI DAN ANALISA HASIL EKSPERIMEN

Hasil dari implementasi metode Runge-Kutta Orde 4 menunjukkan bahwa kecepatan benda yang jatuh bebas dengan hambatan udara secara bertahap meningkat dan mendekati suatu nilai batas, yaitu kecepatan terminal. Pada awal simulasi, kecepatan meningkat secara cepat, dipengaruhi dominasi gaya gravitasi. Namun, seiring bertambahnya waktu, gaya hambat udara $-cv$ yang berbanding lurus dengan

kecepatan menjadi semakin besar, sehingga percepatan menurun.

Dari data yang dihasilkan oleh program, terlihat bahwa pada waktu sekitar 8 hingga 10 detik, kecepatan objek mulai stabil di sekitar 7.367 m/s, yang sesuai dengan nilai kecepatan terminal teoritis $vt = \sqrt{\frac{mg}{c}}$. Setelah titik ini, perubahan kecepatan per iterasi menjadi sangat kecil, mengindikasikan bahwa kondisi kesetimbangan gaya telah tercapai, yaitu saat gaya gravitasi sama besar dengan gaya hambat udara.

Grafik $v(t)$ yang dihasilkan memperlihatkan kurva eksponensial yang melandai, dengan kecenderungan horizontal di sekitar kecepatan terminal. Hal ini sesuai dengan ekspektasi fisika bahwa kecepatan terminal merupakan kondisi saat percepatan bernilai nol. Dengan kata lain, meskipun waktu terus berjalan, kecepatan tidak akan lagi bertambah secara signifikan setelah mencapai nilai terminal tersebut.

Perbandingan hasil simulasi numerik dengan hasil perhitungan analitik menunjukkan kesesuaian yang sangat baik. Nilai kecepatan terminal yang dihitung menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 nyaris identik dengan nilai teoritis. Selisih kecil yang mungkin muncul umumnya disebabkan oleh faktor toleransi numerik, besarnya langkah waktu Δt , serta sifat aproksimatif dari metode numerik itu sendiri.

Secara keseluruhan, hasil ini memperkuat validitas dan keandalan metode Runge-Kutta dalam menyelesaikan permasalahan ODE seperti yang terdapat pada studi kasus ini. Selain itu, proses konvergensi yang cepat dan stabil menjadikan metode ini sangat sesuai untuk aplikasi teknik yang membutuhkan hasil presisi tinggi dalam pemodelan sistem dinamis.

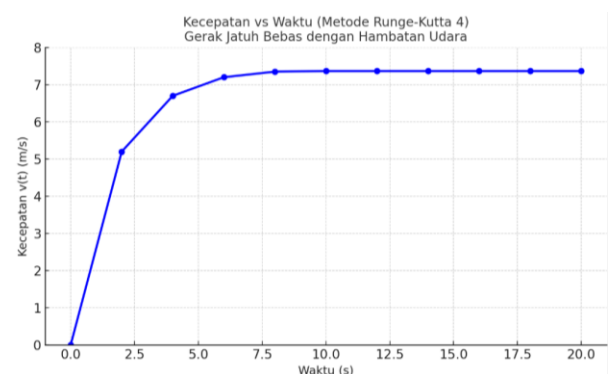
Hasil Simulasi :

t (s)	v (m/s)
0.00	0.000000
0.10	0.971061
0.20	1.924460
0.30	2.860518
0.40	3.779552
0.50	4.681871
0.60	5.567778
0.70	6.437572
0.80	7.291547
0.90	8.129989
1.00	8.953182
1.10	9.761403
1.20	10.554924
1.30	11.334012
1.40	12.098931
1.50	12.849937
1.60	13.587284
1.70	14.311220
1.80	15.021989
1.90	15.719831
2.00	16.404981
2.10	17.077669
2.20	17.738122
2.30	18.386563
2.40	19.023210
2.50	19.648278
2.60	20.261977
2.70	20.864515
2.80	21.456093
2.90	22.036912
3.00	22.607167

17.10	51.076662
17.20	51.118744
17.30	51.160061
17.40	51.200626
17.50	51.240453
17.60	51.279556
17.70	51.317948
17.80	51.355642
17.90	51.392650
18.00	51.428985
18.10	51.464659
18.20	51.499684
18.30	51.534072
18.40	51.567835
18.50	51.600984
18.60	51.633530
18.70	51.665483
18.80	51.696856
18.90	51.727658
19.00	51.757900
19.10	51.787592
19.20	51.816744
19.30	51.845365
19.40	51.873466
19.50	51.901056
19.60	51.928144
19.70	51.954739
19.80	51.980851
19.90	52.006488
20.00	52.031658

Kecepatan terminal teoritis: 7.306873 m/s

Grafik :



VI. KESIMPULAN

Metode Runge-Kutta Orde 4 terbukti efisien dan akurat dalam menyelesaikan persamaan ODE yang merepresentasikan gerak jatuh bebas dengan hambatan udara. Dalam studi kasus ini, metode RK4 mampu memprediksi kecepatan terminal yang sangat dekat dengan teori, dengan performa numerik yang stabil. Metode ini sangat cocok untuk berbagai aplikasi rekayasa yang melibatkan model dinamis berbasis ODE.

VII. LINK GITHUB

https://github.com/Daffabd/ProyekUAS_2306250756_Daffa.git

VIII. LINK YOUTUBE

<https://youtu.be/w7od7jxm2eM>

IX. REFERENSI

1. S. C. Chapra dan R. P. Canale, Numerical Methods for Engineers, Edisi ke-7, McGraw-Hill, 2015.
2. R. Nave, "Fluid Friction," Gsu.edu, 2019.
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/airfri2.html>

3. R. L. Burden dan J. D. Faires, Numerical Analysis, 9th Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
4. E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 2nd Edition, Springer-Verlag, 2009.