1. Sea Σ un conjunto no vacío. Una *palabra* o *cadena* sobre Σ es una sucesión finita de elementos de Σ. Si w es una cadena sobre σ, la *reversa* de w, w^R, es la cadena obtenida al escribir a w de atrás hacia adelante. La *longitud* de una cadena es el número de elementos que aparecen en la subsucesión.

   Sea P el conjunto definido por

$$P = \left\{ww^R : \ w \text{ es una cadena sobre } \Sigma\right\}.$$

   Proponga una definición recursiva de un conjunto de cadenas P_*, de tal manera que $P_* = P$, y demuestre esto último. (Sugerencia: Puede utilizar inducción sobre la construcción de cada cadena para demostrar $P_* \subseteq P$ y el principio de inducción matemática para demostrar $P \subseteq P_*$.) Demuestre además, utilizando inducción, que todas las cadenas en P_* tienen longitud par.

2. Un *lenguaje* sobre un alfabeto Σ es un conjunto de palabras sobre Σ. Demuestre que el lenguaje $L = \{a^n b^n : \quad n \in \mathbb{N}\}$ es generado por la gramática

$$S \to aSb \ | \ \epsilon$$

3. Sea A un conjunto. Un *árbol binario sobre* A se define recursivamente como sigue:

   (a) $\varnothing$ es un árbol binario sobre A.

   (b) Si L y R son árboles binarios y $r \in A$, la terna ordenada (L, r, R) es un árbol binario sobre A. Este nuevo árbol binario tiene raíz r, subárbol izquierdo L y subárbol derecho R.

   (c) Sólo los obtenidos por a y b son árboles binarios sobre A.

   Defina recursivamente las siguientes funciones.

   - $*$ $f(\varnothing) = 0$.
     $*$ Para cualesquiera árboles binarios L y R, y cualquier $r \in a$,
     $$f(L, r, R) = f(L) + f(R) + 1.$$
   - $*$ $g(\varnothing) = 0$.
     $*$ Para cualquier $r \in A$,
     $$g(\varnothing, r, \varnothing) = 1.$$
     $*$ Para cualesquiera árboles binarios L y R, y cualquier $r \in a$, si $L \neq \varnothing$ o $R \neq \varnothing$,
     $$g(L, r, R) = g(L) + g(R).$$
   - $*$ $h(\varnothing) = 0$.
     $*$ Para cualquier $r \in A$,
     $$h(\varnothing, r, \varnothing) = 0.$$
     $*$ Para cualesquiera árboles binarios L y R, y cualquier $r \in a$, si $L \neq \varnothing$ o $R \neq \varnothing$,
     $$h(L, r, R) = 1 + \max\{h(L), h(R)\}.$$

   Una *hoja* en un árbol binario es un vértice que no tiene hijos. Una *trayectoria* en un árbol binario es una sucesión P de vértices de la forma $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$, donde v_{i-1} es el padre de v_i para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Decimos que la longitud $\ell(P)$ de la trayectoria P es n. La altura de un árbol T es la longitud de la trayectoria más larga que inicia en la raíz de T.

   (a) ¿Qué hace la función f?

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

(b) ¿Qué hace la función g?

(c) ¿Qué hace la función h?

(d) Demuestre por inducción que un árbol binario de altura h tiene a lo más $2^{h+1} - 1$ vértices.

(e) Demuestre por inducción que un árbol binario de altura h tiene a lo más 2^h hojas.

(f) Demuestre por inducción que en un árbol binario, el número de hojas siempre es uno más que el número de vértices interiores con dos hijos.

4. Sea A un conjunto. Una *lista sobre* A se define recursivamente de la siguiente forma.

   (a) $\varnothing$ es una lista sobre A, la *lista vacía*, que denotaremos por $[]$.

   (b) Si $\ell \in A$ y ℓs es una lista sobre A, entonces la pareja ordenada $(\ell, \ell s)$ es una lista sobre A, la lista que tiene cabeza ℓ y resto ℓs, que denotamos por $(\ell : \ell s)$.

   (c) Sólo las obtenidas por a y b son listas sobre A.

   Considere la siguiente función f definida recursivamente.

   - $f([], ys) = ys$.
   - $f(x : xs, ys) = f(xs, x : ys)$.

   (a) ¿Qué hace la función f? Demuestre su respuesta utilizando inducción.

   (b) Muestre que
$$\mathsf{rev}(xs) = f(xs, []).$$

5. Sea $\{P_i\}_{i\in\omega}$ un conjunto de variables, llamadas *variables proposicionales*. Definimos recursivamente a las *fórmulas del cálculo proposicional*, o simplemente *fórmulas* de la siguiente manera.

   (a) Toda variable proposicional es una fórmula.

   (b) Si P y Q son fórmulas, entonces también lo son

      i. $(\neg P)$.
      ii. $(P \vee Q)$.
      iii. $(P \wedge Q)$.
      iv. $(P \to Q)$.
      v. $(P \leftrightarrow Q)$.

   (c) Sólo las definidas por a y b son fórmulas.

   Una *asignación de verdad* es una función $\tau\colon \{P_i\}_{i\in\omega} \to \{0,1\}$. Si $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las fórmulas del cálculo proposicional, podemos definir una función τ^* que extienda a una asignación de verdad τ de la siguiente forma:

   (a) Para cualquier variable proposicional P,
$$\tau^*(P) = \tau(P).$$

   (b) Si P y Q son fórmulas, entonces

      - $\tau^*((\neg P)) = 1 - \tau(P)$.
      - $\tau^*((P \vee Q)) = \max\{\tau(P), \tau(Q)\}$.
      - $\tau^*((P \wedge Q)) = \tau(P) \cdot \tau(Q)$.
      - $\tau^*((P \to Q)) = 0$ si y sólo si $\tau(P) = 1$ y $\tau(Q) = 0$.
      - $\tau^*((P \leftrightarrow Q)) = 1 - |\tau(P) - \tau(Q)|$.

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

Decimos que dos fórmulas P y Q son *equivalentes*, denotado $P \equiv Q$ si para cualquier asignación de verdad τ, se tiene que $\tau^*(P) = \tau^*(Q)$. Proponga una función recursiva $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que para cualquier fórmula P, se cumpla que $P \equiv \varphi(P)$ y tal que los únicos conectivos que aparezcan en $\varphi(P)$ sean $\neg$ y $\wedge$. Demuestre utilizando inducción que la función propuesta es correcta, es decir, que para cualquier asignación de verdad τ, y cualquier fórmula P, se cumpla $\tau^*(P) = \tau^*(\varphi(P))$.

6. Sea A una fórmula de la lógica proposicional cuyos únicos conectivos son $\wedge, \vee, \neg$. Definimos la fórmula dual de A, denotada como A_D, intercambiando $\wedge$ por $\vee$, $\vee$ por $\wedge$ y reemplazando a cada variable P por su negación $(\neg P)$. Por ejemplo, si $A = ((R \vee Q) \wedge (\neg P))$, $A_D = ((\neg R) \vee (\neg Q)) \vee (\neg(\neg P))$.

   (a) Defina recursivamente una función dual tal que $\mathsf{dual}(A) = A_D$.

   (b) Muestre que $(\neg A) \equiv A_D$ mediante inducción.

7. Un *punto reticular* en $\mathbb{R}^2$ es un punto con coordenadas enteras, es decir, un punto de la forma (n, m) con $n, m \in \mathbb{Z}$. Un *polígono reticular* es un polígono en $\mathbb{R}^2$ cuyos vértices son puntos reticulares. Sea P un polígono reticular y denotemos por i al número de puntos reticulares que se encuentran al interior de P, y por b al número de puntos reticulares que se encuentran en la frontera (o perímetro) de P. Demuestre utilizando inducción estructural que el área A de P se puede calcular con la siguiente fórmula

$$A = i + \frac{b}{2} - 1.$$

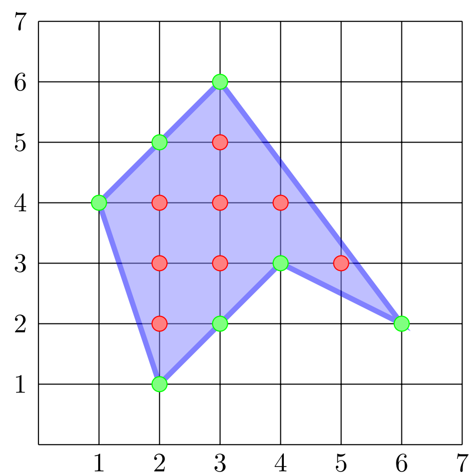

Figure 1: Un polígono reticular con vértices $(1,4), (2,1), (4,3), (6,2), (3,6)$, cuya área es $8 + \frac{7}{2} - 1 = 10.5$.

Notemos que podemos construir recursivamente a la familia de todos los polígonos reticulares de la siguiente forma:

i. Todos los triángulos reticulares son polígonos reticulares.

ii. Si P_1 y P_2 son polígonos reticulares que tienen un lado en común ℓ, y tales que $P_1 \cap P_2 = \ell$, entonces el polígono que se obtiene al unir P_1 y P_2 y borrar ℓ, también es un polígono reticular.

iii. Sólo los polígonos obtenidos por i y ii son polígonos reticulares.

Por lo tanto, la base inductiva de nuestra demostración será demostrar la fórmula para todos los triángulos reticulares, y el paso inductivo se obtendrá construyendo un polígono reticular a partir

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

de dos polígonos reticulares más pequeños. Demuestre la fórmula arriba mencionada utilizando inducción estructural, efectuando los siguientes pasos.

(a) Demuestre que la fórmula se cumple para cualquier cuadrado unitario.

(b) Deduzca del inciso anterior que la fórmula es válida para cualquier rectángulo reticular con lados paralelos a los ejes coordenados.

(c) Deduzca la fórmula para triángulos rectángulos con catetos paralelos a los ejes coordenados.

(d) Demuestre que cualquier triángulo puede ser completado a un rectángulo reticular con lados paralelos a los ejes coordenados, pegándole triángulos rectángulos. Como la fórmula es válida para los triángulos rectángulos y el rectángulo obtenido, deduzca que también es válida para el triángulo original. (Esto concluye la base inductiva).

(e) Considere un polígono reticular P. Observe que P o bien es un triángulo, o bien existen P_1 y P_2, polígonos reticulares que tienen un lado en común, y tales que, al pegarlos por su lado común, se obtiene P.

(f) Lleve a cabo el paso inductivo utilizando la observación del inciso anterior. (Sugerencia: ¿Qué pasa con los puntos reticulares que se encuentran sobre el lado común de P_1 y P_2?).

Respuestas

Integrantes:
Dafne Bonilla Reyes
José Camilo García Ponce
José Alberto Rosales Peña

1. Ejercicio 1:

(a) **Definición recursiva:**
Sea P_* un conjunto de cadenas de Σ definido recursivamente tal que:

- Regla Base: $\epsilon \in P_*$.
- Regla Recursiva: Si $x \in P_*$, entonces $yxy \in P_*$, donde y es un elemento de Σ.

(b) **Demostración:**
Demostrar que $P_* = P$ por doble contención:

- PD $P_* \subseteq P$, usamos inducción estructural sobre P_*
  - Caso base
    Por definición $\epsilon \in P_*$, dado que ϵ es la cadena vacía, entonces ϵ^R es la cadena vacía también, por lo tanto $\epsilon \in P$.
  - Hipótesis de inducción
    Sea $x \in P_*$, entonces $x \in P$, donde $x = bb^R$ con b una cadena en Σ.
  - Paso inductivo
    Sea y un elemento de Σ, entonces definición de P_*, $yxy \in P_*$. Por hipótesis sabemos que $x = bb^R$, entonces ybb^Ry que es la concatenación de dos cadenas yb y b^Ry. Ahora veamos que por definición de la reversa $(yb)^R = b^Ry$, por lo tanto, $yxy \in P$.
- PD $P \subseteq P_*$, usamos inducción matemática sobre la longitud de la cadena.
  Sea $|ww^R|$ la longitud de la cadena ww^R.

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

- Caso Base
  Si $|ww^R| = 0$, entonces $ww^R = \epsilon$, entonces $\epsilon \in P_*$

- Hipótesis de inducción
  Supongamos que para la cadena xx^R, con $xx^R \in P$, se cumple que $|xx^R| < |ww^R|$ y $xx^R \in P_*$

- Paso inductivo
  Sean las cadenas $ww^R \in P$ con $|ww^R| > 0$ y $y \in \Sigma$ un elemento, sea la cadena x una subcadena de w, por lo tanto x^R es subcadena de w^R, sea w la concatenación de x y el elemento y, por lo tanto tendríamos que $ww^R = yxx^R y$. Observemos que $|ww^R| = |yxx^R y|$. Por hipótesis tenemos que $xx^R \in P_*$, entonces por definición de P_* tenemos que $yxx^R y \in P_*$ y dado que $yxx^R y = ww^R$, entonces $ww^R \in P_*$.

Por lo tanto, por definición de doble contención concluimos que $P = P_*$

(c) **Longitud Par:**
Demostrar que las cadenas de P_* tienen longitud par.
Sea n_i la longitud de la cadena i en P_* donde n_i es un natural.

- Caso Base
  Sea $\epsilon \in P_*$. Dado que ϵ es la cadena vacía, entonces $n_\epsilon = 0$ y como 0 es par, entonces se cumple.

- Hipótesis de inducción
  Supongamos que para la cadena x en P_* se cumple que n_x es par.

- Paso inductivo
  PD que para la cadena yxy en P_* la longitud es par.
  Por definición de P_* y por como funciona la longitud de las cadenas? sabemos que $n_{yxy} = n_y + n_x + n_y$. Por hipótesis, sabemos que n_x es par, ahora notemos que como y es un elemento de Σ, entonces su longitud es n_y, por lo tanto, $n_y + n_y = 2n_y$, entonces $n_{yxy} = 2n_y + n_x$. Notemos que cualquier natural multiplicado por 2 es un número par, por lo tanto $2n_y$ es par, y un par sumando con otro par es número par, por lo tanto, $2n_y + n_x$ debe ser un número par y con esto concluimos que n_{yxy} es par.

2. Ejercicio 2:
   Sea P el lenguaje generado por la gramática S, entonces vamos a demostrar que $P = L$ por doble contención.

   - PD $P \subseteq L$, usamos inducción estructural.
     - Caso Base
       Sabemos que $\epsilon \in P$ por la regla base de S, y $a^0 b^0 = \epsilon$, entonces $\epsilon \in L$.

     - Hipótesis de inducción
       Supongamos que $w \in P$ (donde w es una cadena producida por S), entonces $w \in L$ tal que $w = a^n b^n$ para algún n.

     - Paso inductivo
       PD que la cadena $awb \in L$

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

Por hipótesis sabemos que $w = a^n b^n$ ya que $w \in L$, entonces $awb = aa^n b^n b$ y esto es igual a $a^{n+1}b^{n+1}$. Observemos que $n+1$ es el sucesor de n (que es un natural), entonces $n+1$ debe ser un natural y por la definición de L tenemos que $awb = a^{n+1}b^{n+1} \in L$.
Entonces $P \subseteq L$.

- PD $L \subseteq P$, usamos inducción matemática sobre n.
  - Caso Base
    Sea $n = 0$, entonces $a^0 b^0 = \epsilon$ y por la regla base de S tenemos que $\epsilon \in P$.
  - Hipótesis de inducción
    Supongamos que para algún n se cumple que $a^n b^n \in L$ y $a^n b^n \in P$.
  - Paso inductivo
    PD que $a^{n+1}b^{n+1} \in P$
    Sabemos que $a^{n+1}b^{n+1} = aa^n b^n b$. Ahora, sea $w = a^n b^n$, entonces por hipótesis tenemos que $a^n b^n \in P$, entonces $a^{n+1}b^{n+1} = aa^n b^n b = awb$. Por la regla recursiva de S tenemos que $awb \in P$.
    Entonces $L \subseteq P$.

Y por doble contención concluimos que $P = L$

3. Ejercicio 3:

(a) ¿Qué hace la función f?
Es la función para obtener el número de vértices del árbol binario.

(b) ¿Qué hace la función g?
Es la función para obtener el número de hojas del árbol binario.

(c) ¿Qué hace la función h?
Es la función para obtener la altura del árbol binario.

(d) Demuestre por inducción que un árbol binario de altura h tiene a lo más $2^{h+1} - 1$ vértices.

- Caso Base
  Sea T_0 un árbol vació $T_0 = (\varnothing)$, por lo tanto $f(T_0) = 0$ y $h(T_0) = 0$. Entonces $f(T_0) \leq 2^{h(T_0)+1} - 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$, por lo tanto $1 \leq 1$ y se cumple.
- Hipótesis de inducción
  Supongamos que se cumple para los arboles L y R, entonces:
  $f(L) \leq 2^{h(L)+1} - 1$ y $f(R) \leq 2^{h(R)+1} - 1$
- Paso inductivo
  Demostremos para el árbol $T = (L, r, R)$ formado por los arboles de la hipótesis.
  PD $f(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$, entonces tenemos 3 casos:
  - Caso 1, donde L y R no son $\varnothing$, entonces $T = (L, r, R)$
    $f(T) = f(L) + f(R) + 1$, por definición de f.
    $f(T) \leq (2^{h(L)+1} - 1) + (2^{h(R)+1} - 1) + 1$, por hipótesis.

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

$f(T) \leq (2^{h(L)+1}) + (2^{h(R)+1}) - 1$.
$f(T) \leq 2 \cdot \max(2^{h(L)+1}, 2^{h(R)+1}) - 1$, porque la suma de dos términos es a lo más 2 veces el más grande.
$f(T) \leq 2 \cdot 2^{\max(h(L)+1, h(R)+1)} - 1$, porque $\max(2^x, 2^y) = 2^{\max(x,y)}$.
$f(T) \leq 2 \cdot 2^{\max(h(L),h(R))+1} - 1$.
$f(T) \leq 2 \cdot 2^{h(T)} - 1$, por la definición de h.
$f(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$, por lo tanto se cumple.

- Caso 2, donde $T = (L, r, \varnothing)$, entonces $h(T) = 1 + \max(h(L), 0) = 1 + h(L)$, por definición de h.
  $f(T) = f(L) + f(\varnothing) + 1 = f(L) + 0 + 1$, por definición de f.
  $f(T) \leq 2^{h(L)+1} - 1 + 1 = 2^{h(L)+1}$, por hipótesis.
  $f(T) \leq 2^{h(T)}$, por lo visto al inicio de caso 2.
  $f(T) \leq 2^{h(T)} \leq 2^{h(T)+1} - 1$.
  $f(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$, por lo tanto, por transitividad se cumple.

- Caso 3, donde $T = (\varnothing, r, R)$, entonces $h(T) = 1 + \max(0, h(R)) = 1 + h(R)$, por definición de h
  $f(T) = f(\varnothing) + f(R) + 1 = 0 + f(R) + 1$, por definición de f.
  $f(T) \leq 2^{h(R)+1} - 1 + 1 = 2^{h(R)+1}$, por hipótesis.
  $f(T) \leq 2^{h(T)}$, por lo visto al inicio de caso 3.
  $f(T) \leq 2^{h(T)} \leq 2^{h(T)+1} - 1$.
  $f(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$, por lo tanto, por transitividad se cumple

(e) Demuestre por inducción que un árbol binario de altura h tiene a lo más 2^h hojas.

- Caso Base
  Sea T_0 un árbol vacío $T_0 = (\varnothing)$, por lo tanto $g(T_0) = 0$ y $h(T_0) = 0$. Entonces $g(T_0) \leq 2^{h(T_0)} = 2^0 = 1$, por lo tanto $0 \leq 1$ y se cumple.

- Hipótesis de inducción
  Supongamos que se cumple para los arboles L y R, entonces:
  $g(L) \leq 2^{h(L)}$ y $g(R) \leq 2^{h(R)}$

- Paso inductivo
  Demostremos para el árbol $T = (L, r, R)$ formado por los arboles de la hipótesis.
  PD $g(T) \leq 2^{h(T)}$, entonces tenemos 3 casos:

  - Caso 1, donde L y R no son $\varnothing$, entonces $T = (L, r, R)$
    $g(T) = g(L) + g(R)$, por definición de g.
    $g(T) \leq 2^{h(L)} + 2^{h(R)}$, por hipótesis.
    $g(T) \leq 2 \cdot \max(2^{h(L)}, 2^{h(R)})$, porque la suma de dos términos es a lo más 2 veces el más grande.
    $g(T) \leq 2 \cdot 2^{\max(h(L),h(R))}$, porque $\max(2^x, 2^y) = 2^{\max(x,y)}$.
    $g(T) \leq 2^{\max(h(L),h(R))+1}$.
    $g(T) \leq 2^{h(T)}$, por la definición de h.
    $g(T) \leq 2^{h(T)}$, por lo tanto se cumple.

  - Caso 2, donde $T = (L, r, \varnothing)$, entonces $h(T) = 1 + \max(h(L), 0) = 1 + h(L)$, por definición de h.

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

$g(T) = g(L) + g(\varnothing) = g(L) + 0$, por definición de g.
$g(T) \leq 2^{h(L)}$, por hipótesis.
$g(T) \leq 2^{h(L)} \leq 2^{h(L)+1} = 2^{h(T)}$, por lo visto al inicio del caso 2.
$g(T) \leq 2^{h(T)}$, por lo tanto se cumple.

- Caso 3, donde $T = (\varnothing, r, R)$, entonces $h(T) = 1 + \max(0, h(R)) = 1 + h(R)$, por definición de h.
  $g(T) = g(\varnothing) + g(R) = 0 + g(R)$, por definición de g.
  $g(T) \leq 2^{h(R)}$, por hipótesis.
  $g(T) \leq 2^{h(R)} \leq 2^{h(R)+1} = 2^{h(T)}$, por lo visto al inicio del caso 3.
  $g(T) \leq 2^{h(T)}$, por lo tanto se cumple.

(f) Demuestre por inducción que en un árbol binario, el número de hojas siempre es uno más que el número de vértices interiores con dos hijos.
Para la demostración tendremos la variable z la cual es el número de vértices con dos hijos que tiene un árbol. Queremos demostrar para el árbol X que $z_X + 1 = g(X)$.

- Caso Base
  Sea $T_0 = (\varnothing, r, \varnothing)$, sabemos que un árbol con lo la raíz tiene $g(T_0) = 1$ y z_{T_0} es 0, porque no tiene subárboles, entonces $z_{T_0} + 1 = 0 + 1 = 1 = g(T_0)$ por lo tanto se cumple.

- Hipótesis de inducción
  Supongamos que se cumple para los arboles L y R entonces:
  $z_L + 1 = g(L)$ y $z_R + 1 = g(R)$

- Paso inductivo
  Demostremos para el árbol $T = (L, r, R)$ formado por los arboles de la hipótesis, PD $z_T + 1 = g(T)$, tenemos 3 casos:

  - Caso 1, donde L y R no son $\varnothing$, entonces $T = (L, r, R)$
    $g(T) = g(L) + g(R)$, por definición de g.
    $g(T) = z_L + 1 + z_R + 1$, por hipótesis.
    $g(T) = z_L + z_R + 1 + 1$.
    $g(T) = z_T + 1$, porque z_T siempre sera la suma de $z_L + z_R$ porque son los dos hijos de la raíz y como la raíz tiene dos hijos entonces $z_T = z_L + z_R + 1$.
    $g(T) = z_T + 1$, por lo tanto se cumple.

  - Caso 2, donde $T = (L, r, \varnothing)$
    $g(T) = g(L) + g(\varnothing) = g(L) + 0$, por definición de g.
    $g(T) = z_L + 1$, por hipótesis.
    $g(T) = z_T + 1$, porque como T solo tiene un hijo entonces el número de vértices con dos hijos debe ser el mismo de su hijo o subárbol, entonces $z_T = z_L$.
    $g(T) = z_T + 1$, por lo tanto se cumple.

  - Caso 3, donde $T = (\varnothing, r, R)$
    $g(T) = g(\varnothing) + g(R) = 0 + g(R)$, por definición de g.
    $g(T) = z_R + 1$, por hipótesis.
    $g(T) = z_T + 1$, porque como T solo tiene un hijo entonces el numero de vértices con dos hijos debe ser el mismo de su hijo o subárbol, entonces $z_T = z_R$.
    $g(T) = z_T + 1$, por lo tanto se cumple.

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

4. Ejercicio 4:

   (a) ¿Qué hace la función f? Demuestre su respuesta utilizando inducción.
   Lo que hace f es: $f(x:xs, ys) = rev(x:xs) ++ ys$, en otras palabras, primero hace la reversa del primer elemento y a lo que resulte se le concatena al final el segundo elemento.

   - Caso Base
     Sea $xs = []$ la lista vacía y ys sea cualquier lista.
     Entonces, por definición de f, $f(xs, ys) = f([], ys) = ys$ y por definición de rev, $rev(xs) = rev([]) = []$, entonces $[] ++ ys = ys$ por definición de ++. Por lo tanto, se cumple.

   - Hipótesis de inducción
     Supongamos que se cumple para xs con ys siendo cualquier lista, entonces $f(xs, ys) = rev(xs) ++ ys$

   - Paso inductivo
     Demostremos para la lista $(x : xs)$ con cualquier ys.
     PD $f(x : xs, ys) = rev(x : xs) ++ ys$.
     $rev(x : xs) ++ ys = rev(xs) ++ (x : []) ++ ys$, por la definición de rev
     $rev(x : xs) ++ ys = rev(xs) ++ (x : ([] ++ ys))$, por la definición de ++
     $rev(x : xs) ++ ys = rev(xs) ++ (x : ys)$, por la definición de ++
     $rev(x : xs) ++ ys = f(xs, x : ys)$, por hipótesis
     $rev(x : xs) ++ ys = f(x : xs, ys)$, por definición de f
     $f(x : xs, ys) = rev(x : xs) ++ ys$, por lo tanto se cumple

   (b) Muestre que
   $$\mathsf{rev}(xs) = f(xs, []).$$

   - Caso Base
     Sea $xs = []$ la lista vacía, entonces $rev(xs) = []$ por definición de rev y $f(xs, []) = []$ por definición de f, por lo tanto $rev(xs) = [] = f(xs, [])$ entonces se cumple

   - Hipótesis de inducción
     Supongamos que se cumple para la lista xs, entonces $rev(xs) = f(xs, [])$

   - Paso inductivo
     Demostremos para la lista $(x : xs)$, PD $rev(x : xs) = f(x : xs, [])$
     $rev(x : xs) = rev(xs) ++ (x : [])$, por definición de rev
     $rev(x : xs) = f(xs, []) ++ (x : [])$, por hipótesis
     $rev(x : xs) = f(xs, x : [])$, por definición de ++ y por el comportamiento de f
     $rev(x : xs) = f(x : xs, [])$, por definición de f
     $rev(x : xs) = f(x : xs, [])$, por lo tanto se cumple

5. Ejercicio 5:
   Definimos la función φ de la siguiente forma:
   (a) Para cualquier variable proposicional P,
   $$\varphi(P) = P.$$

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

(b) Si P y Q son fórmulas, entonces:

- $\varphi((\neg P)) = (\neg\varphi(P))$
- $\varphi((P \wedge Q)) = (\varphi(P) \wedge \varphi(Q))$
- $\varphi((P \vee Q)) = \neg(\neg\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q))$
- $\varphi((P \rightarrow Q)) = \neg(\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q))$.
- $\varphi((P \leftrightarrow Q)) = \neg(\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q)) \wedge \neg(\varphi(Q) \wedge \neg\varphi(P))$

Demostración:
Caso base:
Sea P una variable proposicional, $\varphi(P) = P$, por definición de φ. Por lo tanto, $\tau^*(P) = \tau^*(\varphi(P))$.

Hipótesis de inducción:
Para cualquier asignación de verdad τ, para alguna fórmula P se cumple $\tau^*(P) = \tau^*(\varphi(P))$ y para alguna fórmula Q se cumple $\tau^*(Q) = \tau^*(\varphi(Q))$.

Paso inductivo:
PD $\tau^*((\neg P)) = \tau^*(\varphi((\neg P)))$.
$\tau^*(\varphi((\neg P))) = \tau^*(\neg\varphi(P))$, por definición de φ.
$\tau^*(\varphi((\neg P))) = 1 - \tau^*(\varphi(P))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((\neg P))) = 1 - \tau^*(P)$, por hipótesis de inducción.
$\tau^*(\varphi((\neg P))) = \tau^*((\neg P))$, por definición de τ^*.

PD $\tau^*((P \wedge Q)) = \tau^*(\varphi((P \wedge Q)))$.
$\tau^*(\varphi((P \wedge Q))) = \tau^*(\varphi(P) \wedge \varphi(Q))$, por definición de φ.
$\tau^*(\varphi((P \wedge Q))) = \tau^*(\varphi(P)) \cdot \tau^*(\varphi(Q))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \wedge Q))) = \tau^*(P) \cdot \tau^*(Q)$, por hipótesis de inducción.
$\tau^*(\varphi((P \wedge Q))) = \tau^*((P \wedge Q))$, por definición de τ^*.

PD $\tau^*((P \vee Q)) = \tau^*(\varphi((P \vee Q)))$.
$\tau^*(\varphi((P \vee Q))) = \tau^*(\neg(\neg\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q)))$, por definición de φ.
$\tau^*(\varphi((P \vee Q))) = 1 - \tau^*(\neg\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \vee Q))) = 1 - \tau^*(\neg\varphi(P)) \cdot \tau^*(\neg\varphi(Q))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \vee Q))) = 1 - (1 - \tau^*(\varphi(P))) \cdot (1 - \tau^*(\varphi(Q)))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \vee Q))) = 1 - (1 - \tau^*(P)) \cdot (1 - \tau^*(Q))$, por hipótesis de inducción.
Aquí hay dos posibles casos.
Caso 1: $\max\{\tau^*(P), \tau^*(Q)\} = 0$
Entonces $\tau^*(P) = 0$ y $\tau^*(Q) = 0$.
Entonces $1 - \tau^*(P) = 1 - 0 = 1$ y $1 - \tau^*(Q) = 1 - 0 = 1$.
Entonces $(1 - \tau^*(P)) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = 1 \cdot 1 = 1$.
Entonces $1 - (1 - \tau^*(P)) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = 1 - 1 = 0 = \max\{\tau^*(P), \tau^*(Q)\}$.
Caso 2: $\max\{\tau^*(P), \tau^*(Q)\} = 1$
Entonces $\tau^*(P) = 1$ o $\tau^*(Q) = 1$.
Entonces $1 - \tau^*(P) = 1 - 1 = 0$ o $1 - \tau^*(Q) = 1 - 1 = 0$.
Entonces $(1 - \tau^*(P)) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = 1 \cdot 0 = 0$.
Entonces $1 - (1 - \tau^*(P)) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = 1 - 0 = 1 = \max\{\tau^*(P), \tau^*(Q)\}$.
Por lo tanto, en cualquier caso $1 - (1 - \tau^*(P)) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = \max\{\tau^*(P), \tau^*(Q)\}$.
Como $\tau^*(\varphi((P \vee Q))) = 1 - (1 - \tau^*(P)) \cdot (1 - \tau^*(Q))$, entonces $\tau^*(\varphi((P \vee Q))) = \max\{\tau^*(P), \tau^*(Q)\}$.

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

Por lo tanto, $\tau^*(\varphi((P \vee Q))) = \tau^*((P \vee Q))$, por definición de τ^*.

PD $\tau^*((P \to Q)) = \tau^*(\varphi((P \to Q)))$.
$\tau^*(\varphi((P \to Q))) = \tau^*(\neg(\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q)))$, por definición de φ.
$\tau^*(\varphi((P \to Q))) = 1 - \tau^*(\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \to Q))) = 1 - \tau^*(\varphi(P)) \cdot \tau^*(\neg\varphi(Q))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \to Q))) = 1 - \tau^*(\varphi(P)) \cdot (1 - \tau^*(\varphi(Q)))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \to Q))) = 1 - \tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q))$, por hipótesis de inducción.
$1 - \tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = 0$ si y solo si $\tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = 1$.
Si y solo si $\tau^*(P) = 1$ y $(1 - \tau^*(Q)) = 1$.
Si y solo si $\tau^*(P) = 1$ y $\tau^*(Q)) = 0$.
Por lo tanto, $1 - \tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = 0$ si y solo si $\tau^*(P) = 1$ y $\tau^*(Q)) = 0$.
Como $\tau^*(\varphi((P \to Q))) = 1-\tau^*(P)\cdot(1-\tau^*(Q))$, entonces $\tau^*(\varphi((P \to Q))) = 0$ si y solo si $\tau^*(P) = 1$ y $\tau^*(Q)) = 0$.
Por lo tanto, $\tau^*(\varphi((P \to Q))) = \tau^*((P \to Q))$, por definición de τ^*.

PD $\tau^*((P \leftrightarrow Q)) = \tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q)))$.
$\tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q))) = \tau^*(\neg(\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q)) \wedge \neg(\varphi(Q) \wedge \neg\varphi(P)))$, por definición de φ.
$\tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q))) = \tau^*(\neg(\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q))) \cdot \tau^*(\neg(\varphi(Q) \wedge \neg\varphi(P)))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q))) = (1 - \tau^*(\varphi(P) \wedge \neg\varphi(Q))) \cdot (1 - \tau^*(\varphi(Q) \wedge \neg\varphi(P)))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q))) = (1 - \tau^*(\varphi(P)) \cdot \tau^*(\neg\varphi(Q))) \cdot (1 - \tau^*(\varphi(Q)) \cdot \tau^*(\neg\varphi(P)))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q))) = (1 - \tau^*(\varphi(P)) \cdot (1 - \tau^*(\varphi(Q)))) \cdot (1 - \tau^*(\varphi(Q)) \cdot (1 - \tau^*(\varphi(P))))$, por definición de τ^*.
$\tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q))) = (1 - \tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q))) \cdot (1 - \tau^*(Q) \cdot (1 - \tau^*(P)))$, por hipótesis de inducción.
Aquí hay dos posibles casos.
Caso 1: $|\tau^*(P) - \tau^*(Q)| = 0$
Entonces $\tau^*(P) = \tau^*(Q)$.
Entonces $\tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = 0$ y $\tau^*(Q) \cdot (1 - \tau^*(P)) = 0$.
Entonces $(1 - \tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q))) \cdot (1 - \tau^*(Q) \cdot (1 - \tau^*(P))) = (1 - 0) \cdot (1 - 0) = 1 = 1 - 0 = 1 - |\tau^*(P) - \tau^*(Q)|$.
Caso 2: $|\tau^*(P) - \tau^*(Q)| = 1$
Entonces $\tau^*(P) \neq \tau^*(Q)$.
Entonces $\tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q)) = 1$ o $\tau^*(Q) \cdot (1 - \tau^*(P)) = 1$.
Entonces $(1 - \tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q))) \cdot (1 - \tau^*(Q) \cdot (1 - \tau^*(P))) = (1 - 1) \cdot (1 - 0) = 0 = 1 - 1 = 1 - |\tau^*(P) - \tau^*(Q)|$.
Por lo tanto, en cualquier caso $(1-\tau^*(P)\cdot(1-\tau^*(Q)))\cdot(1-\tau^*(Q)\cdot(1-\tau^*(P))) = 1-|\tau^*(P)-\tau^*(Q)|$
Como $\tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q))) = (1 - \tau^*(P) \cdot (1 - \tau^*(Q))) \cdot (1 - \tau^*(Q) \cdot (1 - \tau^*(P)))$, entonces $\tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q))) = 1 - |\tau^*(P) - \tau^*(Q)|$.
Por lo tanto, $\tau^*(\varphi((P \leftrightarrow Q))) = \tau^*((P \leftrightarrow Q))$, por definición de τ^*.

6. Ejercicio 6:

   (a) Defina recursivamente una función dual tal que $\mathsf{dual}(A) = A_D$.
   Definimos la función dual de la siguiente forma:
   (a) Para cualquier variable proposicional P,

$$dual(P) = \neg P.$$

(b) Si P y Q son fórmulas, entonces:

- $dual(\neg P) = (\neg dual(P))$
- $dual(P \wedge Q) = dual(P) \vee dual(Q)$
- $dual(P \vee Q) = dual(P) \wedge dual(Q)$

(b) Muestre que $(\neg A) \equiv A_D$ mediante inducción.
Caso base:
Sea P una variable proposicional, entonces $dual(P) = \neg P$, por definición de dual.
Por lo tanto, $dual(P) \equiv \neg P$.

Hipótesis de inducción:
Sean P y Q fórmulas, entonces $\neg P \equiv dual(P)$ y $\neg Q \equiv dual(Q)$.

Paso inductivo:
PD $\neg(\neg P) \equiv dual(\neg P)$.
$dual(\neg P) = \neg dual(P)$, por definición de dual.
$\neg dual(P) \equiv \neg(\neg P)$, por hipótesis de inducción.
Por lo tanto, $dual(\neg P) \equiv \neg(\neg P)$.

PD $\neg(P \wedge Q) \equiv dual(P \wedge Q)$.
$dual(P \wedge Q) = dual(P) \vee dual(Q)$, por definición de dual.
$dual(P) \vee dual(Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$, por hipótesis de inducción.
$\neg P \vee \neg Q \equiv \neg(P \wedge Q)$, por ley de De Morgan.
Por lo tanto, $dual(P \wedge Q) \equiv \neg(P \wedge Q)$

PD $\neg(P \vee Q) \equiv dual(P \vee Q)$.
$dual(P \vee Q) = dual(P) \wedge dual(Q)$, por definición de dual.
$dual(P) \wedge dual(Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$, por hipótesis de inducción.
$\neg P \wedge \neg Q \equiv \neg(P \vee Q)$, por ley de De Morgan.
Por lo tanto, $dual(P \vee Q) \equiv \neg(P \vee Q)$

7. Ejercicio 7
Formula $A = i + \frac{b}{2} - 1$

- Casos base

(a) Sea w cualquier cuadrado unitario (esto quiere decir que la longitud de sus lado es 1, por lo tanto su área es 1 cm^2), entonces sabemos que el numero de puntos reticulares en su interior i_w es 0 y los puntos reticulares en la frontera b_w son 4 (sus 4 vértices), con esto sabemos que:
$A_w = i_w + \frac{b_w}{2} - 1$
$A_w = 0 + \frac{4}{2} - 1$
$A_w = 2 - 1 = 1$, por lo tanto se cumple

(b) Sea q cualquier rectángulo reticular con lados paralelos a los ejes coordenados, sea a los puntos en su lado menor menos 1 (la longitud de su lado menor) y c los los puntos en su lado mayor menos 1 (la longitud de su lado mayor), por lo tanto sabemos que el área de un rectángulo es $a * c$ (base por altura). Ahora veamos que los puntos reticulares en la frontera b_q es $2a + 2c$ y los puntos reticulares en el interior i_q es $(a-1)(c-1)$, entonces veamos que:

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

$A_q = i_q + \frac{b_q}{2} - 1$
$A_q = (a-1)(c-1) + \frac{2a+2c}{2} - 1$
$A_q = (a-1)(c-1) + a + c - 1$
$A_q = a * c - a - c + 1 + a + c - 1$
$A_q = a * c$, por lo tanto se cumple

(c) Sea s cualquier triangulo rectángulo con catetos paralelos a los ejes coordenado, recordemos que si unimos dos triángulos rectángulos igual por la hipotenusa formas un rectángulo, por lo tanto tenemos que a son los puntos en un cateto menos 1 (la longitud del cateto), c son los puntos del otro cateto menos 1 (la longitud del otro cateto) y h son los puntos sobre la hipotenusa, con esto podemos ver que si formamos un rectángulo su área seria $a * c$ y como este rectángulo se formo con dos triángulos rectángulos iguales entonces la área de cada uno debe ser $\frac{a*c}{2}$ (además sabemos que el área de un triangulo rectángulo es cateto a por cateto c), ahora veamos que los puntos reticulares en la frontera b_s es $a+c+h-1$ y los puntos reticulares en el interior i_s es $\frac{(a-1)(c-1)-h+2}{2}$, entonces veamos que:
$A_s = i_s + \frac{b_s}{2} - 1$
$A_s = \frac{(a-1)(c-1)-h+2}{2} + \frac{a+c+h-1}{2} - 1$
$A_s = \frac{a*c-a-c+1-h+2}{2} + \frac{a+c+h-1}{2} - \frac{2}{2}$
$A_s = \frac{a*c-a-c+1-h+2+a+c+h-1-2}{2}$
$A_s = \frac{a*c}{2}$, por lo tanto se cumple

(d) Sea z un triangulo arbitrario con sus tres vértices en los puntos $f = (x_1, y_1)$, $g = (x_2, y_2)$ y $h = (x_3, y_3)$, ahora veamos como lo completamos en un rectángulo reticular con lados paralelos a los ejes coordenados pegándole triángulos rectángulos:
Primero vemos cual es el vértice más arriba u del triangulo con la formula $\max(y_1, y_2, y_3)$,tenemos 4 casos:

- Si el máximo resulta ser y_1 entonces $u = f$
- Si el máximo resulta ser y_2 entonces $u = g$
- Si el máximo resulta ser y_3 entonces $u = h$
- Si tenemos 2 máximos tomamos como máximo al primero en el orden (primero y_1, segundo y_2 y tercero y_3)

Entonces ya tenemos el vértice más alto u
Luego vemos cual es el vértice más bajo d del triangulo con la formula $\min(y_1, y_2, y_3)$,tenemos 4 casos:

- Si el mínimo resulta ser y_1 entonces $d = f$
- Si el mínimo resulta ser y_2 entonces $d = g$
- Si el mínimo resulta ser y_3 entonces $d = h$
- Si tenemos 2 mínimos tomamos como mínimo al primero en el orden (primero y_1, segundo y_2 y tercero y_3)

Entonces ya tenemos el vértice más bajo d
Ahora checaremos cual es el vértice más a la izquierda l con la formula $\min(x_1, x_2, x_3)$, tenemos 4 casos:

- Si el mínimo resulta ser x_1 entonces $l = f$
- Si el mínimo resulta ser x_2 entonces $l = g$
- Si el mínimo resulta ser x_3 entonces $l = h$
- Si tenemos 2 mínimos tomamos como mínimo al primero en el orden (primero x_1, segundo x_2 y tercero x_3)

Después revisaremos cual es el vértice más a la derecha r con la formula $\max(x_1, x_2, x_3)$, tenemos 3 casos:

- Si el máximo resulta ser x_1 entonces $l = f$
- Si el máximo resulta ser x_2 entonces $l = g$
- Si el máximo resulta ser x_3 entonces $l = h$
- Si tenemos 2 máximos tomamos como máximo al primero en el orden (primero x_1, segundo x_2 y tercero x_3)

Con eso listo, ya podemos empezar a volver el triangulo arbitrario en un rectángulo
Vamos a trazar el contorno del rectángulo que contendrá al triangulo y lo haremos en dos pasos:
Paso 1: veamos que tenemos 3 casos para l:

- Si $l \neq u$ y $l \neq d$ (l es el vértice de en medio) entonces, primero vamos a ir subiendo (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las ordenadas (y) hasta estar en el mismo eje de abscisas (x) que u y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y u, luego vamos a ir bajando (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las ordenadas (y) hasta estar en el mismo eje de abscisas (x) que d y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y d
- Si $l = u$ (l es el vértice más arriba) entonces, vamos ir por la derecha (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las abscisas (x) hasta estar en el mismo eje de las ordenadas (y) que r y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y r, luego vamos a ir bajando (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las ordenadas (y) hasta estar en el mismo eje de abscisas (x) que d y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y d
- Si $l = d$ (l es el vértice más abajo) entonces, vamos ir por la derecha (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las abscisas (x) hasta estar en el mismo eje de las ordenadas (y) que r y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y r, luego vamos a ir subiendo (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las ordenadas (y) hasta estar en el mismo eje de abscisas (x) que u y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y u

Paso 2: veamos que tenemos 3 casos para r:

- Si $r \neq u$ y $l \neq d$ (r es el vértice de en medio) entonces, primero vamos a ir subiendo (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las ordenadas (y) hasta estar en el mismo eje de abscisas (x) que u y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y u, luego vamos a ir bajando (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las ordenadas (y) hasta estar en el mismo eje de abscisas (x) que d y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y d
- Si $r = u$ (r es el vértice más arriba) entonces, vamos ir por la izquierda (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las abscisas (x) hasta estar en el mismo eje de las ordenadas (y) que l y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y l, luego vamos a ir bajando (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las ordenadas (y) hasta estar en el mismo eje de abscisas (x) que d y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y d
- Si $l = d$ (l es el vértice más abajo) entonces, vamos ir por la izquierda (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las abscisas (x) hasta estar en el mismo eje de las ordenadas (y) que l y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y l, luego vamos a ir subiendo (dejando una linea que sera el contorno del rectángulo) por el eje de las ordenadas (y) hasta estar en el mismo eje de abscisas (x) que u y desde ahí cerramos con una recta que conecte donde nos encontramos y u

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

En un pequeño resumen tendríamos que los vértices del rectángulo que formamos son:
(l_x, u_y), (r_x, u_y), (l_x, d_y) y (r_x, d_y)
Si los dos pasos salieron bien y nada fuera de lo normal sucedió vamos a tener a z dentro de un rectángulo que llamaremos j, ahora notemos que j contiene a z y a tres triángulos (en un caso normal), dos triángulos (esto sucede si un cateto de z es paralelo a los ejes ordenados) o 1 triangulo (esto sucede si los dos catetos de z son paralelos a los ejes ordenados) y estos triángulos son triángulos rectángulos. Ahora vamos a ver que la formula se cumple y para esto tenemos 3 casos:

- j tiene a z y 3 triángulos más (T_1, T_2 y T_3)
  Como la formula sirve para j por (b) y para T_1, T_2 y T_3 por (c) entonces sabemos que $A_z = A_j - A_{T_1} - A_{T_2} - A_{T_3}$, para la demostración hay que saber que $i_z = i_j - i_{T_1} - i_{T_2} - i_{T_3} - h_{T_1} - h_{T_2} - h_{T_3} + 6$ y $b_z = b_j - b_{T_1} - b_{T_2} - b_{T_3} + 2h_{T_1} + 2h_{T_2} + 2h_{T_3} - 6$, con esto podemos empezar a demostrar:
  PD $A_z = i_z + \frac{b_z}{2} - 1 = A_j - A_{T_1} - A_{T_2} - A_{T_3}$
  $A_z = i_z + \frac{b_z}{2} - 1$
  $A_z = (i_j - i_{T_1} - i_{T_2} - i_{T_3} - h_{T_1} - h_{T_2} - h_{T_3} + 6) + \frac{(b_j - b_{T_1} - b_{T_2} - b_{T_3} + 2h_{T_1} + 2h_{T_2} + 2h_{T_3} - 6)}{2} - 1$, por lo visto antes de la demostración
  $A_z = i_j - i_{T_1} - i_{T_2} - i_{T_3} - h_{T_1} - h_{T_2} - h_{T_3} + 6 + \frac{b_j}{2} - \frac{b_{T_1}}{2} - \frac{b_{T_2}}{2} - \frac{b_{T_3}}{2} + h_{T_1} + h_{T_2} + h_{T_3} - 3 - 1$
  $A_z = i_j - (i_{T_1} + \frac{b_{T_1}}{2} - 1) - (i_{T_2} + \frac{b_{T_2}}{2} - 1) - (i_{T_3} + \frac{b_{T_3}}{2} - 1) + \frac{b_j}{2} - 1$, agrupamos
  $A_z = (i_j + \frac{b_j}{2} - 1) - (A_{T_1}) - (A_{T_2}) - (A_{T_3})$, agrupamos y por (c)
  $A_z = (A_j) - (A_{T_1}) - (A_{T_2}) - (A_{T_3})$, por (b)
  $A_z = (A_j) - (A_{T_1}) - (A_{T_2}) - (A_{T_3}) = i_z + \frac{b_z}{2} - 1$, por lo tanto se cumple la formula

- j tiene a z y 2 triángulos más (T_1 y T_2)
  Como la formula sirve para j por (b) y para T_1, T_2 y T_3 por (c) entonces sabemos que $A_z = A_j - A_{T_1} - A_{T_2}$, para la demostración hay que saber que $i_z = i_j - i_{T_1} - i_{T_2} - h_{T_1} - h_{T_2} + 4$ y $b_z = b_j - b_{T_1} - b_{T_2} + 2h_{T_1} + 2h_{T_2} - 4$, con esto podemos empezar a demostrar:
  PD $A_z = i_z + \frac{b_z}{2} - 1 = A_j - A_{T_1} - A_{T_2}$
  $A_z = i_z + \frac{b_z}{2} - 1$
  $A_z = (i_j - i_{T_1} - i_{T_2} - h_{T_1} - h_{T_2} + 4) + \frac{(b_j - b_{T_1} - b_{T_2} + 2h_{T_1} + 2h_{T_2} - 4)}{2} - 1$, por lo visto antes de la demostración
  $A_z = i_j - i_{T_1} - i_{T_2} - h_{T_1} - h_{T_2} + 4 + \frac{b_j}{2} - \frac{b_{T_1}}{2} - \frac{b_{T_2}}{2} + h_{T_1} + h_{T_2} - 2 - 1$
  $A_z = i_j - (i_{T_1} + \frac{b_{T_1}}{2} - 1) - (i_{T_2} + \frac{b_{T_2}}{2} - 1) + \frac{b_j}{2} - 1$, agrupamos
  $A_z = (i_j + \frac{b_j}{2} - 1) - (A_{T_1}) - (A_{T_2})$, agrupamos y por (c)
  $A_z = (A_j) - (A_{T_1}) - (A_{T_2})$, por (b)
  $A_z = (A_j) - (A_{T_1}) - (A_{T_2}) = i_z + \frac{b_z}{2} - 1$, por lo tanto se cumple la formula

- j tiene a z y 1 triángulo más (T_1)
  Como la formula sirve para j por (b) y para T_1 por (c) entonces sabemos que $A_z = A_j - A_{T_1}$, para la demostración hay que saber que $i_z = i_j - i_{T_1} - h_{T_1} + 2$ y $b_z = b_j - b_{T_1} + 2h_{T_1} - 2$, con esto podemos empezar a demostrar:
  PD $A_z = i_z + \frac{b_z}{2} - 1 = A_j - A_{T_1}$
  $A_z = i_z + \frac{b_z}{2} - 1$
  $A_z = (i_j - i_{T_1} - h_{T_1} + 2) + \frac{(b_j - b_{T_1} + 2h_{T_1} - 2)}{2} - 1$, por lo visto antes de la demostración
  $A_z = i_j - i_{T_1} - h_{T_1} + 2 + \frac{b_j}{2} - \frac{b_{T_1}}{2} + h_{T_1} - 1 - 1$
  $A_z = i_j - (i_{T_1} + \frac{b_{T_1}}{2} - 1) + \frac{b_j}{2} - 1$, agrupamos
  $A_z = (i_j + \frac{b_j}{2} - 1) - (A_{T_1})$, agrupamos y por (c)

$A_z = (A_j) - (A_{T_1})$, por (b)
$A_z = (A_j) - (A_{T_1}) = i_z + \frac{b_z}{2} - 1$, por lo tanto se cumple la formula

- Hipótesis de inducción

  (e) Supongamos que para dos polígonos reticulares cualesquiera P_1 y P_2 se cumple la fórmula, eso quiere decir que $A_{P_1} = i_{P_1} + \frac{b_{P_1}}{2} - 1$ y $A_{P_2} = i_{P_2} + \frac{b_{P_2}}{2} - 1$

- Paso inductivo

  (f) Sea P polígono reticular arbitrario, ahora vamos a probar que la formula sirve para P
  Tenemos 2 casos:
  - P es un triángulo (tiene 3 vértices)
    Si P es un triangulo por (d) sabemos que sirve la formula sobre P, entonces $A_P = i_P + \frac{b_P}{2} - 1$ se cumple

  - P no es un triángulo (más de 3 vértices)
    Si P no es un triángulo entonces es un polígono, ahora tenemos 2 casos de como dividirlo en dos polígonos:
    * P es un polígono convexo (sus ángulos son menores a 180 grados)
      Si esto sucede es "trivial" como dividirlo, solo nos ponemos en cualquier vértice y lo unimos con algún vértice que este enfrente del vértice que elegimos, de esta manera dividimos a P en dos polígonos que llamaremos P_1 y P_2 y la línea que hicimos la llamaremos L (la única línea que comparten P_1 y P_2)

    * P no es un polígono convexo (tiene ángulos cóncavos)
      Si esto sucede no es "trivial" como dividirlo, nos vamos a fijar en algo, vamos a buscar a un ángulo mayor a 180 grados seguido de un menor a 180 grados, esto es posible porque es un polígono y si todos sus ángulos fueran mayores a 180 grados nunca cerraría, ahora nos ponemos en el vértice del ángulo mayor de 180 grados que encontramos y debe existir un vértice directamente enfrente de el, y uniendo estos dos vértices podemos dividir a P, de esta manera dividimos a P en dos polígonos que llamaremos P_1 y P_2 y la linea que hicimos la llamaremos L (la única linea que comparten P_1 y P_2)

    Ya que tenemos divido a P en P_1 y P_2, vamos a ver que la formula sirva sobre P, por la hipótesis sabemos que sirve para P_1 y P_2 entonces $A_{P_1} = i_{P_1} + \frac{b_{P_1}}{2} - 1$ y $A_{P_2} = i_{P_2} + \frac{b_{P_2}}{2} - 1$, ahora sea n el numero de puntos sobre el lado en común L, y con esto sabemos que $i_P = i_{P_1} + i_{P_2} + n - 2$ y $b_P = b_{P_1} + b_{P_2} - 2n + 2$, ahora con esto vamos a demostrar que $A_P = A_{P_1} + A_{P_2} = i_P + \frac{b_P}{2} - 1$:
    $A_P = i_P + \frac{b_P}{2} - 1$
    $A_P = (i_{P_1} + i_{P_2} + n - 2) + \frac{(b_{P_1} + b_{P_2} - 2n + 2)}{2} - 1$, por lo visto antes de empezar la demostración
    $A_P = i_{P_1} + i_{P_2} + n - 2 + \frac{b_{P_1}}{2} + \frac{b_{P_2}}{2} - n + 1 - 1$
    $A_P = (i_{P_1} + \frac{b_{P_1}}{2} - 1) + (i_{P_2} + \frac{b_{P_2}}{2} - 1)$, agrupamos
    $A_P = (A_{P_1}) + (A_{P_2})$, por la hipótesis
    $A_P = (A_{P_1}) + (A_{P_2}) = i_P + \frac{b_P}{2} - 1$, por lo tanto se cumple la formula

  Y con todos esos pasos podemos decir que la formula $A = i + \frac{b}{2} - 1$

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno