Integrantes:
Dafne Bonilla Reyes
José Camilo García Ponce
José Alberto Rosales Peña

1. Demuestre que cada una de las siguientes fórmulas se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

   (b) $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   (c) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

   (d) $\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

2. Demuestre cada una de las siguientes desigualdades para los valores de $n \in \mathbb{N}$ especificados.

   (a) $(1 + \frac{1}{n})^n < n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$.

   (b) $3^n > n^3$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$.

3. Demuestre que

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

   Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.

4. Sea $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}^\times}$ la sucesión definida por $r_1 = 1$, y $r_{n+1} = 4r_n + 7$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $r_n = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7)$ para cada $n \in \mathbb{N}^\times$.

5. Sea $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, y $b_n = \frac{1}{3}\left(b_{n-1} + \frac{3}{b_{n-2}}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Demuestre que $1 \leq b_n \leq \frac{3}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

6. Sea $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $d_0 = 2$, $d_1 = 3$, y $d_n = d_{n-1} \cdot d_{n-2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Encuentre una fórmula explícita para d_n, y demuestre por inducción que su fórmula funciona.

7. Sea F_n la sucesión de Fibonacci, y sea $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Demuestre que si $n > 5$, entonces $F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}$.

   (b) Demuestre que si $k \in \mathbb{N}$ es tal que $k \geq 2$, entonces $F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n$.

8. Un cuadrado mágico de orden n es un arreglo cuadrado de los enteros positivos entre 1 y n^2 tales que la suma de los enteros en cada renglón, columna, y diagonal, es una constante k, llamada la constante mágica. Demuestre que la constante mágica de cualquier cuadrado mágico de orden n es $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Un cuadrado mágico de orden 4.

9. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 8$. Demuestre que existen $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $n = 3k + 5l$.

10. Sea Q la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Demuestre que

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

Respuestas

1. Demuestre que cada una de las siguientes fórmulas se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

   - Caso Base
     Tenemos que $n = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2 = 1$, por lo tanto se cumple.

   - Hipótesis de inducción
     Suponemos que para algún n tenemos $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

   - Paso inductivo
     PD que para n+1 tenemos $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$
     Empezamos con que $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + ... + 2(n+1) - 1$
     Tenemos que $= (1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1) + 2(n+1) - 1$
     Por hipótesis $= (n^2) + 2(n+1) - 1$
     Después $= (n^2) + 2n + 2 - 1$
     Luego $= n^2 + 2n + 1$
     Tenemos que es $= (n+1)^2$
     Y concluimos que $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$ $\square$

   (b) $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   - Caso Base
     Tenemos que $n = 0$, por lo tanto $\sum_{i=0}^{0} i(i+1) = 0 = \frac{0(0+1)(0+2)}{3} = 0$ por lo tanto se cumple.

   - Hipótesis de inducción
     Suponemos que para algún n tenemos $\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   - Paso inductivo
     PD que para n+1 tenemos $\sum_{i=0}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}$
     Empezamos con que $\sum_{i=0}^{n+1} i(i+1) = 0 + 2 + 6 + ... + (n+1)((n+1)+1)$
     Tenemos que $= (0 + 2 + 6 + ... + n(n+1)) + (n+1)((n+1)+1)$
     Por hipótesis $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)((n+1)+1)$
     Después $= \frac{(n)(n+1)(n+2)+(3)(n+1)((n+1)+1)}{3}$
     Luego $= \frac{n^3+6n^2+11n+6}{3}$
     Tenemos que es $= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$
     Con esto tenemos que $= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}$
     Y concluimos que $\sum_{i=0}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}$ $\square$

   (c) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

   - Caso Base
     Tenemos que $n = 0$, por lo tanto $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 1 = 2^{0+1} - 1 = 1$ por lo tanto se cumple.

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

- Hipótesis de inducción
  Suponemos que para algún n tenemos $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

- Paso inductivo
  PD que para n+1 tenemos $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{(n+1)+1} - 1$
  Empezamos con que $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 1 + 2 + 4 + ... + 2^{n+1}$
  Tenemos que $= (1 + 2 + 4 + ... + 2^n) + 2^{n+1}$
  Por hipótesis $= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1}$
  Después $= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1$
  Luego $= 2^{n+2} - 1$
  Tenemos que es $= 2^{(n+1)+1} - 1$
  Y concluimos que $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{(n+1)+1} - 1$ $\square$

(d) $\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

- Caso Base
  Tenemos que $n = 0$, por lo tanto $\sum_{i=0}^{0} \frac{i}{2^i} = 0 = 2 - \frac{0+2}{2^0} = 2 - 2 = 0$ por lo tanto se cumple.

- Hipótesis de inducción
  Suponemos que para algún n tenemos $\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

- Paso inductivo
  PD que para n+1 tenemos $\sum_{i=0}^{n} +1 \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$
  Empezamos con que $\sum_{i=0}^{n} +1 \frac{i}{2^i} = 0 + \frac{1}{2} + ... + \frac{n+1}{2^{n+1}}$
  Tenemos que $= (0 + \frac{1}{2} + ... + \frac{n}{2^n}) + \frac{n+1}{2^{n+1}}$
  Por hipótesis $= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$
  Después $= 2 - \frac{(2^{n+1})(n+2)-(n+1)(2^n)}{(2^n)(2^{n+1})}$
  Luego $= 2 - \frac{(2^n)(2)(n+2)-(n+1)}{(2^n)(2^{n+1})} = 2 - \frac{(2)(n+2)-(n+1)}{(2^{n+1})}$
  Tenemos que es $= 2 - \frac{2n+4-n-1}{(2^{n+1})} = 2 - \frac{n+3}{(2^{n+1})}$
  Con esto tenemos que $= 2 - \frac{(n+1)+2}{(2^{n+1})}$
  Y concluimos que $\sum_{i=0}^{n} +1 \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$ $\square$

2. Demuestre cada una de las siguientes desigualdades para los valores de $n \in \mathbb{N}$ especificados.

(a) $(1 + \frac{1}{n})^n < n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$

- Caso Base
  Tenemos que $n = 3$, por lo tanto $(1 + \frac{1}{3})^3 = \frac{64}{27} < 3$ por lo tanto se cumple.

- Hipótesis de inducción
  Suponemos que para algún $n \geq 3$ tenemos $(1 + \frac{1}{n})^n < n$

- Paso inductivo
  PD $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} < n + 1$
  Empezamos con que $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^n \cdot (1 + \frac{1}{n+1})^1$
  Por hipótesis $(1 + \frac{1}{n+1})^n \cdot (1 + \frac{1}{n+1})^1 < n \cdot (1 + \frac{1}{n+1})^1$
  Después $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} < n + \frac{n}{n+1}$

Luego $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < n + \frac{n+1}{n+1}$
Después $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < n+1$
Y concluimos que $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < n+1$ $\square$

(b) $3^n > n^3$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 4$

- Caso Base
  Tenemos que $n = 4$, por lo tanto $3^4 = 81 > 4^3 = 64$ por lo tanto se cumple.

- Hipótesis de inducción
  Suponemos que para algún $n \geq 4$ tenemos $3^n > n^3$

- Paso inductivo
  PD $3^{n+1} > (n+1)^3$
  Por hipótesis tenemos que $3^n > n^3$
  Sabemos que $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
  Por hipótesis $3^n > n^3$
  Luego $3^n > n^3 > 3n^2$ porque $n > 3$ y $n^3 > n^2$ y con esto tenemos que $3^n > 3n^2$
  Después $3^n > n^3 > 3n + 1$ porque $n^3 > 3n$ y $n^3 > 1$ y con esto tenemos que $3^n > 3n + 1$
  Y con lo anterior tenemos que $3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1} > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
  Y esto es igual a $3^{n+1} > (n+1)^3$ $\square$

3. Demuestre que $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$

- Caso Base
  Tenemos que $n = 2$, por lo tanto $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2(2)} = \frac{3}{4}$ por lo tanto se cumple.

- Hipótesis de inducción
  Suponemos que para algún $n \geq 2$ tenemos $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

- Paso inductivo
  PD $\prod_{i=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$
  Empezamos con que $\prod_{i=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot ... \cdot (1 - \frac{1}{(n+1)^2})$
  Tenemos que $= (\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot ... \cdot 1 - \frac{1}{n^2})(1 - \frac{1}{(n+1)^2})$
  Por hipótesis $= (\frac{n+1}{2n})(1 - \frac{1}{(n+1)^2})$
  Después $= \frac{n+1}{2n} - \frac{n+1}{(2n)(n+1)^2}$
  Luego $= \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{(2n)(n+1)}$
  Tenemos que es $= \frac{2n^3+4n^2+2n-2n}{4n^3+4n^2} = \frac{2n^3+4n^2}{4n^3+4n^2}$
  Después $= \frac{2n^2(n+2)}{2n^2(2n+2)} = \frac{n+2}{2n+2}$
  Luego $= \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$
  Y concluimos que $\prod_{i=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$ $\square$

4. Sea $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}^\times}$ la sucesión definida por $r_1 = 1$, y $r_{n+1} = 4r_n + 7$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $r_n = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7)$ para cada $n \in \mathbb{N}^\times$.

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

- Caso Base
  Tenemos que $n = 1$, por lo tanto $r_1 = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{1-1} - 7) = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^0 - 7) = \frac{1}{3}(10 \cdot 1 - 7) = \frac{1}{3}(3) = 1$ por lo tanto se cumple.

- Hipótesis de inducción
  Sea $n \in \mathbb{N}$, suponemos que para todo i, $0 \leq i \leq n$ se cumple $r_i = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{i-1} - 7)$

- Paso inductivo
  PD $r_{n+1} = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{(n+1)-1} - 7)$
  Por sucesión tenemos $r_{n+1} = 4r_n + 7$
  Y por hipótesis $= 4(\frac{1}{3}(10 \cdot 4^{n-1} - 7)) + 7$
  Luego $= 4(\frac{10 \cdot 4^{n-1} - 7}{3}) + 7$
  Después $= \frac{4(10 \cdot 4^{n-1} - 7)}{3} + 7$
  Después $= \frac{4(10 \cdot 4^{n-1} - 7) + 21}{3}$
  Y esto $= \frac{(10 \cdot 4^n - 28) + 21}{3} = \frac{10 \cdot 4^n - 7}{3}$
  Luego $= \frac{1}{3}(10 \cdot 4^n - 7) = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{(n+1)-1} - 7)$
  Y concluimos que $r_{n+1} = \frac{1}{3}(10 \cdot 4^{(n+1)-1} - 7)$ $\square$

5. Sea $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, y $b_n = \frac{1}{3}\left(b_{n-1} + \frac{3}{b_{n-2}}\right)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Demuestre que $1 \leq b_n \leq \frac{3}{2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   Caso base:
   $b_0 = b_1 = 1$
   $1 \leq 1 \leq \frac{3}{2}$

   Hipótesis de inducción:
   Para todo i tal que $0 \leq i < n$ se cumple que $1 \leq b_i \leq \frac{3}{2}$

   Paso inductivo:
   Por hipótesis de inducción $1 \leq b_{n-2} \leq \frac{3}{2}$
   $1 \geq \frac{1}{b_{n-2}} \geq \frac{2}{3}$
   Por hipótesis de inducción $1 \leq b_{n-1} \leq \frac{3}{2}$
   $\frac{1}{3}(1 + \frac{3}{b_{n-2}}) \leq \frac{1}{3}(b_{n-1} + \frac{3}{b_{n-2}}) \leq \frac{1}{3}(\frac{3}{2} + \frac{3}{b_{n-2}})$
   $\frac{1}{3} + \frac{1}{b_{n-2}} \leq \frac{1}{3}(b_{n-1} + \frac{3}{b_{n-2}}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{b_{n-2}}$
   Por la definición de la sucesión $\frac{1}{3} + \frac{1}{b_{n-2}} \leq b_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{b_{n-2}}$
   Como $1 \geq \frac{1}{b_{n-2}} \geq \frac{2}{3}$, entonces $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \leq b_n \leq \frac{1}{2} + 1$
   Por lo tanto, $1 \leq b_n \leq \frac{3}{2}$

6. Sea $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por $d_0 = 2$, $d_1 = 3$, y $d_n = d_{n-1} \cdot d_{n-2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Encuentre una fórmula explícita para d_n, y demuestre por inducción que su fórmula funciona.

   - Formula explicita es $d_n = 3^{F_n} \cdot 2^{F_{|n-1|}}$ donde F_n es el n-esimo termino de la sucesión de Fibonacci donde $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
     Esto lo sacamos al ver:

$d_0 = 2$
$d_1 = 3 = 3^1 \cdot 2^0$
$d_2 = 3 \cdot 2 = 6 = 3^1 \cdot 2^1$
$d_3 = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 = 3^2 \cdot 2^1$
$d_4 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 108 = 3^3 \cdot 2^2$
$d_4 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 1944 = 3^5 \cdot 2^3$
Y como podemos ver los exponentes son los números de la secuencia de Fibonacci

- Caso Base
  Sea $n = 0$ entonces $d_0 = 3^{F_0} \cdot 2^{F_{|0-1|}} = 3^0 \cdot 2^1 = 2$ por lo tanto se cumple
  Sea $n = 1$ entonces $d_1 = 3^{F_1} \cdot 2^{F_{|1-1|}} = 3^1 \cdot 2^0 = 3$ por lo tanto se cumple

- Hipótesis de inducción
  Sea $n \in \mathbb{N}$, suponemos que para k tal que $0 \leq k \leq n$ se cumple $d_k = 3^{F_k} \cdot 2^{F_{|k-1|}}$

- Paso inductivo
  PD $d_{n+1} = 3^{F_{n+1}} \cdot 2^{F_{|n|}}$
  Por sucesión $d_{n+1} = d_n \cdot d_{n-1}$
  Por hipótesis $d_{n+1} = (3^{F_n} \cdot 2^{F_{|n-1|}}) \cdot (3^{F_{n-1}} \cdot 2^{F_{|n-2|}})$
  Luego $= (3^{F_n} \cdot 3^{F_{n-1}}) \cdot (2^{F_{|n-1|}} \cdot 2^{F_{|n-2|}})$
  Después $= 3^{F_n + F_{n-1}} \cdot 2^{F_{|n-1|} + F_{|n-2|}}$
  Por secuencia de Fibonacci $= 3^{F_{n+1}} \cdot 2^{F_{|n|}}$
  Y concluimos que $d_{n+1} = 3^{F_{n+1}} \cdot 2^{F_{|n|}}$ □

7. Sea F_n la sucesión de Fibonacci, y sea $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Demuestre que si $n > 5$, entonces $F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5}$.

   - Caso Base
     Sea $n = 6$ entonces $F_6 = 5F_{6-4} + 3F_{6-5} = 5F_2 + 3F_1 = 5(1) + 3(1) = 8$ por lo que se cumple

   - Hipótesis de inducción
     Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 5$, suponemos que para i tal que $5 \leq i \leq n$ se cumple $F_i = 5F_{i-4} + 3F_{i-5}$

   - Paso inductivo
     Demostrar para $n + 1$, PD $F_{n+1} = 5F_{(n+1)-4} + 3F_{(n+1)-5}$
     Por sucesión de Fibonacci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$
     Por hipótesis $F_{n+1} = (5F_{n-4} + 3F_{n-5}) + (5F_{(n-1)-4} + 3F_{(n-1)-5})$
     Luego $= (5F_{n-4} + 3F_{n-5}) + (5F_{n-5} + 3F_{n-6})$
     Después $= 5(F_{n-4} + F_{n-5}) + 3(F_{n-5} + F_{n-6})$
     Por sucesión de Fibonacci $= 5(F_{n-3}) + 3(F_{n-4})$
     Y esto es $= 5(F_{(n+1)-4}) + 3(F_{(n+1)-5})$
     Y concluimos que $F_{n+1} = 5(F_{(n+1)-4}) + 3(F_{(n+1)-5})$ □

   (b) Demuestre que si $k \in \mathbb{N}$ es tal que $k \geq 2$, entonces $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$.

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

- Caso Base
  Sea $n = 0$ y $k = 2$ entonces $F_{0+2} = F_2F_{0+1} + F_{2-1}F_0 = F_2F_1 + F_1F_0 = 1(1) + 1(0) = 1$ por lo tanto se cumple

- Hipótesis de inducción
  Sea $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$, suponemos que para $n + m$ donde m tal que $2 \leq m \leq k$ se cumple $F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n$

- Paso inductivo
  Demostrar pata $n + 1$ y $k + 1$, PD $F_{(n+1)+(k+1)} = F_{k+1}F_{(n+1)+1} + F_{(k+1)-1}F_{n+1}$
  Por sucesión de Fibonacci $F_{(n+1)+(k+1)} = F_{n+k} + F_{(n-1)+(k-1)}$
  Por hipótesis $= (F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n) + (F_{k-1}F_n + F_{k-2}F_{n-1})$
  Después $= (F_k + F_{k-1}F_{n+1}F_n) + (F_{k-1} + F_{k-2}F_n + F_{n-1})$
  Por sucesión de Fibonacci $= (F_{k+1}F_{n+2}) + (F_kF_{n+1})$
  Esto es $= (F_{k+1}F_{(n+1)+1}) + (F_{(k+1)-1}F_{n+1})$
  Y concluimos que $F_{(n+1)+(k+1)} = (F_{k+1}F_{(n+1)+1}) + (F_{(k+1)-1}F_{n+1})$ $\square$

8. Un cuadrado mágico de orden n es un arreglo cuadrado de los enteros positivos entre 1 y n^2 tales que la suma de los enteros en cada renglón, columna, y diagonal, es una constante k, llamada la constante mágica. Demuestre que la constante mágica de cualquier cuadrado mágico de orden n es $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Un cuadrado mágico de orden 4.

- Formula
  La formula m es $\sum_{i=1}^{n^2} i = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ donde n es el numero de orden del cuadro y entonces $k = \frac{m}{n}$
- Caso Base
  Sea $n = 1$ entonces $m_1 = \sum_{i=1}^{1^2} i = \frac{1^2(1^2+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ entonces $k = \frac{1}{1} = 1$ y $\frac{1(1^2+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ entonces se cumple

- Hipótesis de inducción
  Suponemos que para n se cumple $k_n = \frac{m_n}{n}$ donde $m_n = \sum_{i=1}^{n^2} i = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$

- Paso inductivo
  Demostramos para $n + 1$, PD $k_{n+1} = \frac{m_{n+1}}{n+1} = \frac{n+1((n+1)^2+1)}{2}$
  Sabemos que $m_{n+1} = 1 + 2 + 3 + ... + (n + 1)^2 - 1 + (n + 1)^2$
  Por formula $m_{n+1} = \frac{(n+1)^2((n+1)^2+1)}{2}$
  Ahora para ver si es k_{n+1} hacemos $\frac{m_{n+1}}{n+1}$
  Esto es $\frac{\frac{(n+1)^2((n+1)^2+1)}{2}}{n+1}$
  Luego $\frac{(n+1)^2((n+1)^2+1)}{2(n+1)}$
  Después $\frac{n+1((n+1)^2+1)}{2}$
  Y concluimos que $k_{n+1} = \frac{n+1((n+1)^2+1)}{2}$ $\square$

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

9. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 8$. Demuestre que existen $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $n = 3k + 5l$.

- Caso Base
  Sea $n = 8$ entonces podemos escribir $8 = 3 + 5$ por lo tanto $k = 1$ y $l = 1$ y se cumple

- Hipótesis de inducción
  Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 8$, suponemos que para m tal que $8 \leq m \leq n$ se cumple $m = 3k + 5l$, con $k, l \in \mathbb{N}$

- Paso inductivo
  Probar para $n + 1$, tenemos tres casos:
  Caso 1: $n + 1 = 9$ tenemos que $9 = 3(3) + 5(0)$
  Caso 2: $n + 1 = 10$ tenemos que $10 = 3(0) + 5(2)$
  Caso 3: $n + 1 \geq 11$ tenemos que es $(n + 1) - 3 \geq 8$ entonces $n - 2 \geq 8$
  Por hipótesis $n - 2 = 3k + 5l$
  Entonces $n + 1 = n - 2 + 3 = 3k + 5l + 3$
  Después $3k + 5l + 3 = 3(k + 1) + 5l$
  Y concluimos que $n + 1 = 3(k + 1) + 5l$ $\square$

10. Sea Q la matriz
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Demuestre que
$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$
Donde F_n denota al n-ésimo número de Fibonacci.

- Caso Base
  Sea $n = 1$ entonces
$$Q^1 = \begin{pmatrix} F_{1+1} & F_1 \\ F_1 & F_{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_1 \end{pmatrix}$$
  y por secuencia de Fibonacci tenemos
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  por lo que se cumple.

- Hipótesis de inducción
  Suponemos que para n se cumple
$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

- Paso inductivo
  Demostrar para $n + 1$
  PD
$$Q^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno

Sabemos que $Q^{n+1} = Q^n \cdot Q^1$
Por hipótesis

$$Q^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11} = (F_{n+1} \cdot 1) + (F_n \cdot 1) = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$
$a_{12} = (F_{n+1} \cdot 1) + (F_n \cdot 0) = F_{n+1} + 0 = F_{n+1}$
$a_{21} = (F_n \cdot 1) + (F_{n-1} \cdot 1) = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$
$a_{22} = (F_n \cdot 1) + (F_{n-1} \cdot 0) = F_n + 0 = F_n$

$$Q^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \square$$

11. Demostración para sucesión de Fibonacci
Sea F_n la sucesión de Fibonacci, y sea sea $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
Demostrar que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$

- Caso Base
Sea $n = 0$, tenemos que $F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^0 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^0] = \frac{1}{\sqrt{5}}[1-1] = 0$, por lo que se cumple.
Sea $n = 1$, tenemos que $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^1] = \frac{1}{\sqrt{5}}[\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}] = \frac{1}{\sqrt{5}}[\frac{2\sqrt{5}}{2}] = \frac{1}{\sqrt{5}}[\sqrt{5}] = 1$, por lo que se cumple.

- Hipótesis de inducción
Sea $n \in \mathbb{N}$, suponemos que para todo k, $0 \leq k < n$ se cumple $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k]$

- Paso inductivo
PD $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$
Por sucesión tenemos que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
Por hipótesis $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}] + \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}]$
Luego $= \frac{1}{\sqrt{5}}[[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} + (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2}] - [(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2}]]$
Después $= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1)]$
Y eso $= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}+2}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}+2}{2})]$
Luego $= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{6+2\sqrt{5}}{4}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{6-2\sqrt{5}}{4})]$
Después $= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{6+2\sqrt{5}}{2^2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{6-2\sqrt{5}}{2^2})]$
Y eso $= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{(1-\sqrt{5})^2}{2^2})]$
Luego $= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-2} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2]$
Después $= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$
Y esto es $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$ $\square$

Profesor: César Hernández Cruz
Ayudante: Alma Rocío Sánchez Salgado
Ayudante: Gisselle Ibarra Moreno