Estructuras Discretas

Tarea 1. Lógica Proposicional y Álgebra Booleana

Profesor: César Hernández Cruz.

Ayudantes: Gisselle Ibarra Moreno
Alma Rocío Sánchez Salgado

Integrantes: Dafne Bonilla Reyes
José Camilo García Ponce
José Alberto Rosales Peña

1. Traduzca los siguientes enunciados a símbolos. Suponga que a Héctor le gustan los frijoles, no le gustan los chícharos, no le gustan las lentejas, y le gustan las semillas de girasol. ¿Cuáles de ellos son verdaderos, y cuáles son falsos?

   (a) Si a Héctor le gustan los frijoles, entonces le gustan las lentejas.

   (b) A Héctor le gustan las lentejas si y sólo si le gustan los chícharos.

   (c) A Héctor le gustan las semillas de girasol, y si le gustan las lentejas, entonces le gustan los frijoles.

   (d) A Héctor le gustan los chícharos y las semillas de girasol si le gustan los frijoles.

   (e) Si a Héctor le gustan las lentejas, entonces le gustan las semillas de girasol, o a Héctor le gustan las lentejas si y sólo si le gustan los chícharos.

   (f) Para que a Héctor le gusten los frijoles y las lentejas es necesario y suficiente que le gusten los chícharos o las semillas de girasol.

   F = A Héctor le gustan los frijoles (F)
   C = A Héctor no le gustan los chícharos ($\neg C$)
   L = A Héctor no le gustan las lentejas ($\neg L$)
   G = A Héctor le gustan las semillas de girasol (G)

   (a) $F \to L$ esto es 0 falso

   (b) $L \leftrightarrow C$ esto es 1 verdadero

   (c) $G \land (L \to F)$ esto es 1 verdadero

   (d) $F \to (C \land G)$ esto es 0 falso

   (e) $(L \to G) \lor (L \leftrightarrow C)$ esto es 1 verdadero

   (f) $(C \lor G) \leftrightarrow (F \land L)$ esto es 0 falso

2. Sean X = "Estoy feliz", Y = "Estoy con mi gato" y Z = "Estoy comiendo pan de muerto". Traduzca los siguientes enunciados a español.

   (a) $Z \to X$.

   (b) $X \leftrightarrow Y$.

   (c) $(Y \lor Z) \to X$.

   (d) $Y \lor (Z \to X)$.

   (e) $(Y \to \neg X) \land (Z \to \neg X)$.

   (f) $(X \land \neg Y) \leftrightarrow (Y \lor Z)$.

(a) Si estoy comiendo pan de muerto, entonces estoy feliz.

(b) Estoy feliz si y solo si estoy con mi gato.

(c) Si estoy con mi gato o estoy comiendo pan de muerto, entonces estoy feliz.

(d) Estoy con mi gato o, si estoy comiendo pan de muerto entonces estoy feliz.

(e) Si estoy con mi gato, entonces no estoy feliz, y, si estoy comiendo pan de muerto, entonces no estoy feliz.

(f) Estoy feliz y no estoy con mi gato, si y solo si, estoy con mi gato o estoy comiendo pan de muerto.

3. Para cada una de las siguientes proposiciones determine si son tautologías, contradicciones o contingencias.

(a) $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$.

P	Q	R	$Q \to R$	$P \to (Q \to R)$	$P \to Q$	$P \to R$	$(P \to Q) \to (P \to R)$	$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

(a) Es una tautología.

(b) $(P \vee Q) \to P$.

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \to P$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

(b) Es una contingencia.

(c) $(\neg P \wedge ((P \vee Q) \to P))$.

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \to P$	$\neg P$	$\neg P \wedge ((P \vee Q) \to P)$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V

(c) Es una contingencia.

(d) $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$.

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$Q \wedge P$	$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V

(d) Es una contingencia.

(e) $\neg(P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)$.

P	Q	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

(e) Es una tautología.

4. Escriba la inversa, contrapositiva y la recíproca de las siguientes afirmaciones:

(a) En sistema binario, $1 + 1 = 10$.

i. Inversa: Si no es sistema binario, $1 + 1 \neq 10$.
ii. Contrapositiva: Si $1 + 1 \neq 10$, entonces no es sistema binario.
iii. Recíproca: Si $1 + 1 = 10$, entonces es sistema binario.

(b) Si $9x + 36 = 9$, entonces $x \neq 17$.

i. Inversa: Si $9x + 36 \neq 9$, entonces $x = 17$.
ii. Contrapositiva: Si $x = 17$, entonces $9x + 36 \neq 9$.
iii. Recíproca: Si $x \neq 17$, entonces $9x + 36 = 9$.

(c) Si $cos(x) = 1$, entonces $x = 0$.

i. Inversa: Si $cos(x) \neq 1$, entonces $x \neq 0$.
ii. Contrapositiva: Si $x \neq 0$, entonces $cos(x) \neq 1$.
iii. Recíproca: Si $x = 0$, entonces $cos(x) = 1$.

(d) Dos conjuntos son iguales si tienen el mismo número de elementos.

i. Inversa: Dos conjuntos no son iguales si no tienen el mismo número de elementos.
ii. Contrapositiva: Si dos conjuntos no son iguales entonces no tienen el mismo número de elementos.
iii. Recíproca: Si dos conjuntos son iguales entonces tienen el mismo número de elementos.

(e) Si $x < y$, entonces $x + z < y + z$.

i. Inversa: Si $x \geq y$, entonces $x + z \geq y + z$.

ii. Contrapositiva: Si $x + z \geq y + z$, entonces $x \geq y$.

iii. Recíproca: Si $x + z < y + z$, entonces $x < y$.

5. Determine si cada uno de los siguientes argumentos es válido o no. En caso de serlo, exhiba una derivación y diga si las premisas son consistentes o inconsistentes, si no, justifique con un contraejemplo.

(a) Si a Susana le gusta el pescado, entonces le gusta la cebolla. Si a Susana no le gusta el ajo, entonces no le gusta la cebolla. Si le gusta el ajo, entonces le gusta la guayaba. Le gusta el pescado o el cilantro. No le gusta la guayaba. Por lo tanto, a Susana le gusta el cilantro.

P = Susana le gusta pescado
A = Susana le gusta ajo
C = Susana le gusta cebolla
G = Susana le gusta guayaba
S = Susana le gusta cilantro

(1) $P \to C$ hipótesis
(2) $\neg A \to \neg C$ hipótesis
(3) $A \to G$ hipótesis
(4) $P \vee S$ hipótesis
(5) $\neg G$ hipótesis
(6) $\neg A$ modus tollens(3)(5)
(7) $\neg C$ modus ponens(2)(6)
(8) $\neg P$ modus tollens(1)(7)
(9) S modus tollendo ponens(4)(8)

El argumento es válido, sus premisas son consistentes (la conjunción de sus hipótesis no es una contradicción).

P	A	C	G	S	$P \to C$	$\neg A \to \neg C$	$A \to G$	$P \vee S$	$\neg G$	$(P \to C) \wedge (\neg A \to \neg C) \wedge (A \to G) \wedge (P \vee S) \wedge (\neg G)$
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

(b) Si la comida es verde, entonces está cruda. Si la comida huele mal, entonces está rancia. La comida es verde o está rancia. Por lo tanto, la comida está cruda o huele mal.

V= La comida es verde
C= La comida está cruda
H= La comida huele mal
R= La comida está rancia

(1) $V \to C$ hipótesis
(2) $H \to R$ hipótesis

(3) $V \lor R$ hipótesis
(4) $C \lor H$ conclusión

El argumento es inválido, por lo que se da un contraejemplo en donde las hipótesis son verdaderas y la conclusión es falsa.

Contraejemplo:
$t(V) = t(C) = t(H) = 0$
$t(R) = 1$

(1) $V \to C = 0 \to 0 = 1$
(2) $H \to R = 0 \to 1 = 1$
(3) $V \lor R = 0 \lor 1 = 1$
(4) $C \lor H = 0 \lor 0 = 0$

(c) Si robas un banco, vas a prisión. Si vas a prisión, no te diviertes. Si tienes vacaciones, te diviertes. Robas un banco o tienes vacaciones. Por lo tanto, vas a prisión o te diviertes.

B = robas un banco
P = vas a prisión
D = te diviertes
V = tienes vacaciones

(1) $B \to P$ hipótesis
(2) $P \to \neg D$ hipótesis
(3) $V \to D$ hipótesis
(4) $B \lor V$ hipótesis
(5) $P \lor D$ dilema constructivo(1)(3)(4)

El argumento es válido, sus premisas son consistentes (la conjunción de sus hipótesis no es una contradicción).

B	P	D	V	$B \to P$	$P \to \neg D$	$V \to D$	$B \lor V$	$(B \to P) \land (P \to \neg D) \land (V \to D) \land (B \lor V)$
V	V	F	F	V	V	V	V	V

(d) Si los jabalíes son inteligentes, entonces son interesantes. Los jabalíes, o no son interesantes, o son sigilosos. No es el caso que los jabalíes sean agradables o no sean listos. Por lo tanto, los jabalíes son sigilosos.

B= Los jabalíes son inteligentes
I= Los jabalíes son interesantes
S= Los jabalíes son sigilosos
A= Los jabalíes son agradables

(1) $B \to I$ hipótesis
(2) $\neg I \vee S$ hipótesis
(3) $\neg(A \vee \neg B)$ hipótesis
(4) $\neg A \wedge \neg(\neg B)$ DeMorgan(3)
(5) $\neg A \wedge (B)$ doble negacion(4)
(6) B simplificación(5)
(7) $\neg B \vee I$ implicación(1)
(8) I modus tollendo ponens(7)(6)
(9) S modus tollendo ponens(2)(8)

El argumento es válido, sus premisas son consistentes (la conjunción de sus hipótesis no es una contradicción).

B	I	S	A	$B \to I$	$\neg I \vee S$	$A \vee \neg B$	$\neg(A \vee \neg B)$	$(B \to I) \wedge (\neg I \vee S) \wedge (\neg(A \vee \neg B))$
V	V	V	F	V	V	F	V	V

6. Encuentre la FND para las siguientes funciones booleanas.

(a)

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

(a)

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

primero $f(x,y,z) = (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z) + (\overline{x} \cdot y \cdot \overline{z}) + (x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) + (x \cdot y \cdot \overline{z})$

segundo $f(x,y,z) = (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}) + (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z) + (\overline{x} \cdot y \cdot z) + (x \cdot \overline{y} \cdot z)$

Para cada función booleana obtuvimos las FND a partir del algoritmo para darla, es decir, primero localizamos los renglones para los cuales se evalúa en 1, después, construimos el mintérmino. Esto para cada renglón. Finalmente, construimos la suma de todos los mintérminos y así dimos la FND.

7. El dual de la FND es la *forma normal conjuntiva* (FNC). Es un producto de maxtértminos, donde un *maxtérmino* de n variables $x_1, \ldots, x_n$ es una suma $y_1 + \cdots + y_n$, donde cada y_i es la literal x_i o $\overline{x_i}$. Modificando el algoritmo visto en clase para encontrar la FND de una función booleana, proponga un algoritmo para encontrar la FNC de una función booleana.

- 1. Si la función booleana está dada por una expresión booleana, se construye la tabla de verdad asociada a esta.
- 2. Para cada renglón en la tabla:
  - 2.1. Si el renglón se evalúa en 0:

- $*$ 2.11. Construir su maxtérmino
- $*$ 2.12. Guarda el maxtérmino formado

- 3. Haz un producto de todos los maxtérminos formados

8. Aunque las asociatividades para las dos operaciones se suelen enunciar como axiomas para las álgebras booleanas, se pueden demostrar a partir de los demás axiomas. Demuestre la asociatividad de ambas operaciones a partir de los demás axiomas de álgebra booleana. (**Sugerencia:** Note que la propiedad de absorción no utilizó el axioma de asociatividad en su demostración. Demuestre que para cualesquiera $b_1, b_2, b_3 \in B$, se cumple $((b_1+b_2)+b_3)(b_1+(b_2+b_3)) = (b_1+b_2)+b_3$.)

   Demostración:
   $((b_1+b_2)+b_3)(b_1+(b_2+b_3))$
   $= ((b_1+b_2)+b_3)(b_1) + ((b_1+b_2)+b_3)(b_2+b_3)$ Distributividad
   $= ((b_1+b_2)+b_3)(b_1) + ((b_1+b_2)+b_3)(b_2) + ((b_1+b_2)+b_3)(b_3)$ Distributividad

   $(b_1+b_2)+b_3$
   $= ((b_1+b_2)+b_3)((b_1+b_2)+b_3)$ Idempotencia
   $= ((b_1+b_2)+b_3)(b_1+b_2) + ((b_1+b_2)+b_3)(b_3)$ Distributividad
   $= ((b_1+b_2)+b_3)(b_1) + ((b_1+b_2)+b_3)(b_2) + ((b_1+b_2)+b_3)(b_3)$ Distributividad

   Este resultado es igual al anterior, por lo tanto $((b_1+b_2)+b_3)(b_1+(b_2+b_3)) = (b_1+b_2)+b_3$

9. Sea n un entero positivo, y sea $F = \{f_i\colon\ 1 \leq i \leq 2^{2^n}$ el conjunto de todas las funciones booleanas sobre las variables $x_1, \ldots, x_n$. Suponga que para cada $i \in \{1, \ldots, 2^{2^n}\}$, E_i es una expresión booleana cuya función booleana es f_i. Definimos las siguientes operaciones sobre el conjunto F:

   (a) $\overline{f}_i = \overline{E}_i$ para cada $f_i \in F$.

   (b) $f_i f_j = E_i E_j$ para cualesquiera $f_i, f_j \in F$.

   (c) $f_i + f_j = E_i + E_j$ para cualesquiera $f_i, f_j \in F$.

   Demuestre que existen elementos $f_0, f_1 \in F$ tales que para cualquier $f_i \in F$

   - $f_0 + f_i = f_i + f_0 = f_i$
   - $f_i f_1 = f_1 f_i = f_i$.

   Demuestre que $(F, +, \cdot, ^{-}, f_0, f_1)$ es un álgebra booleana.

   Demostración:

   - Demostración de la unidad y el cero del sistema:

   Notemos que: $f_j + f_0 = E_j + E_0$

   Como E_0, E_j son parte de una álgebra booleana, usamos las propiedades de la álgebra booleana, donde E_0 es el cero del álgebra. Por las propiedades tenemos que $E_j + E_0 = E_j$, esto se cumple para cualquier E_j (expresión booleana), por lo tanto tenemos que $E_j + E_0 =$

$E_j = f_j + f_0 = f_j$. Por lo tanto, concluimos que f_0 es el cero de nuestro conjunto F.

Notemos que: $f_j f_1 = E_j E_1$

Como E_1, E_j son parte de una álgebra booleana, usamos las propiedades de la álgebra booleana, donde E_1 es la unidad del álgebra. Por las propiedades tenemos que $E_j E_1 = E_j$, esto se cumple para cualquier E_j (expresión booleana), por lo tanto, tenemos que $E_j E_1 = E_j = f_j f_1 = f_j$. Por lo tanto, concluimos que f_1 es la unidad de nuestro conjunto F.

- Demostración de conmutatividad:

Demostramos que $f_i + f_j = f_j + f_i$

Tenemos que $f_i + f_j = E_i + E_j$, como E_i y E_j son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de conmutatividad y tenemos que $E_j + E_i$, por lo tanto $E_j + E_i = f_j + f_i$.
Tenemos que $f_j + f_i = E_j + E_i$, como E_j y E_i son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de conmutatividad y tenemos que $E_i + E_j$, por lo tanto $E_i + E_j = f_i + f_j$.
Por lo tanto, podemos concluir que $f_i + f_j = f_j + f_i$ es verdadero, para cualquier f_i, f_j de nuestro conjunto F.

Demostramos que $f_i f_j = f_j f_i$

Tenemos que $f_i f_j = E_i E_j$, como E_i y E_j son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de conmutatividad y tenemos que $E_j E_i$, por lo tanto $E_j E_i = f_j f_i$.
Tenemos que $f_j f_i = E_j E_i$, como E_j y E_i son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de conmutatividad y tenemos que $E_i E_j$, por lo tanto $E_i E_j = f_i f_j$.
Por lo tanto, podemos concluir que $f_i f_j = f_j f_i$ es verdadero, para cualquier f_i, f_j de nuestro conjunto F.

- Demostración asociatividad:

Demostramos que $f_i + (f_j + f_k) = (f_i + f_j) + fk$

Tenemos que $f_i + (f_j + f_k) = E_i + (E_j + E_k)$, como E_i, E_j y E_k son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de asociatividad y tenemos que $E_i + (E_j + E_k) = (E_i + E_j) + E_k$, por lo tanto $(E_i + E_j) + E_k = (f_i + f_j) + f_k$.
Tenemos que $(f_i + f_j) + f_k = (E_i + E_j) + E_k$, como E_i, E_j y E_k son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de asociatividad y tenemos que $(E_i + E_j) + E_k = E_i + (E_j + E_k)$, por lo tanto $E_i + (E_j + E_k) = f_i + (f_j + f_k)$.
Por lo tanto, podemos concluir que $f_i + (f_j + f_k) = (f_i + f_j) + f_k$ es verdadero, para cualquier f_i, f_j y f_k de nuestro conjunto F.

Demostramos que $f_i(f_j f_k) = (f_i f_j) fk$

Tenemos que $f_i(f_jf_k) = E_i(E_jE_k)$, como E_i, E_j y E_k son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de asociatividad y tenemos que $E_i(E_jE_k) = (E_iE_j)E_k$, por lo tanto $(E_iE_j)E_k = (f_if_j)f_k$.
Tenemos que $(f_if_j)f_k = (E_iE_j)E_k$, como E_i, E_j y E_k son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de asociatividad y tenemos que $(E_iE_j)E_k = E_i(E_jE_k)$, por lo tanto $E_i(E_jE_k) = f_i(f_jf_k)$.
Por lo tanto podemos concluir que $f_i(f_jf_k) = (f_if_j)f_k$ es verdadero, para cualquier f_i, f_j y f_k de nuestro conjunto F.

- Demostración distributividad:

Demostramos que $f_i(f_j + f_k) = (f_if_j) + (f_if_k)$

Tenemos que $f_i(f_j+f_k) = E_i(E_j+E_k)$, como E_i, E_j y E_k son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de distributividad y tenemos que $E_i(E_j + E_k) = (E_iE_j) + (E_iE_k)$, por lo tanto, $(E_iE_j) + (E_iE_k) = (f_if_j) + (f_if_k)$.
Tenemos que $(f_if_j) + (f_if_k) = (E_iE_j) + (E_iE_k)$, como E_i, E_j y E_k son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de distributividad y tenemos que $(E_iE_j) + (E_iE_k) = E_i(E_j + E_k)$, por lo tanto, $E_i(E_j + E_k) = f_i(f_j + f_k)$.
Por lo tanto, podemos concluir que $f_i(f_j + f_k) = (f_if_j) + (f_if_k)$ es verdadero, para cualquier f_i, f_j y f_k de nuestro conjunto F.

Demostramos que $f_i + (f_jf_k) = (f_i + f_j)(f_i + f_k)$

Tenemos que $f_i + (f_jf_k) = E_i + (E_jE_k)$, como E_i, E_j y E_k son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de distributividad y tenemos que $E_i + (E_jE_k) = (E_i + E_j)(E_i + E_k)$, por lo tanto, $(E_i + E_j)(E_i + E_k) = (f_i + f_j)(f_i + f_k)$.
Tenemos que $(f_i + f_j)(f_i + f_k) = (E_i + E_j)(E_i + E_k)$, como E_i, E_j y E_k son parte de una álgebra booleana, usamos la propiedad de distributividad y tenemos que $(E_i+E_j)(E_i+E_k) = E_i + (E_jE_k)$, por lo tanto, $E_i + (E_jE_k) = f_i + (f_jf_k)$.
Por lo tanto, podemos concluir que $f_i+(f_jf_k) = (f_i+f_j)(f_i+f_k)$ es verdadero, para cualquier f_i, f_j y f_k de nuestro conjunto F.

- Demostración elemento neutro:

Demostramos que $f_0 + f_i = f_i + f_0 = f_i$

Tenemos que $f_0 + f_i = E_0 + E_i$, como E_0 y E_i son parte de una álgebra booleana, donde E_0 es el cero del álgebra, usamos la propiedad de conmutatividad y tenemos que $E_0 + E_i = E_i + E_0$ y por la propiedad de elemento neutro tenemos que $E_i + E_0 = E_i$, por lo tanto $E_i = f_i$.
Tenemos que $f_i + f_0 = E_i + E_0$, como E_i y E_0 son parte de una álgebra booleana, donde E_0 es el cero del álgebra, usamos la propiedad de elemento neutro para tener $E_i + E_0 = E_i$, y con esto tenemos que $E_i = f_i$.
Por lo tanto, podemos concluir que $f_0 + f_i = f_i + f_0 = f_i$ es verdadero, para cualquier f_i, f_0

de nuestro conjunto F, donde f_0 es el cero.

Demostramos que $f_i f_1 = f_1 f_i = f_i$

Tenemos que $f_i f_1 = E_i E_1$, como E_i y E_1 son parte de una álgebra booleana, donde E_1 es la unidad del álgebra, usamos la propiedad de elemento neutro para tener $E_i E_1 = E_i$, y con esto tenemos que $E_i = f_i$.
Tenemos que $f_1 f_i = E_1 E_i$, como E_1 y E_i son parte de una álgebra booleana, donde E_1 es la unidad del álgebra, usamos la propiedad de conmutatividad y tenemos que $E_1 E_i = E_i E_1$ y por la propiedad de elemento neutro tenemos que $E_i E_1 = E_i$, por lo tanto $E_i = f_i$.
Por lo tanto, podemos concluir que $f_i f_1 = f_1 f_i = f_i$ es verdadero, para cualquier f_i, f_1 de nuestro conjunto F, donde f_1 es la unidad.

- Demostración complemento:

Demostramos que $f_i + \overline{f_i} = f_1$

Tenemos que $f_i + \overline{f_i} = E_i + \overline{E_i}$, como E_i y E_1 son parte de una álgebra booleana, donde E_1 es la unidad del álgebra, usamos la propiedad del complemento para tener $E_i + \overline{E_i} = E_1$, y con esto tenemos que $E_1 = f_1$.

Tenemos que $f_1 = E_1$, como E_i y E_1 son parte de una álgebra booleana, donde E1 es la unidad del álgebra, usamos la propiedad del complemento para tener $E_1 = E_i + \overline{E_i}$, y con esto tenemos que $E_i + \overline{E_i} = f_i + \overline{f_i}$.

Por lo tanto, podemos concluir que $f_i + \overline{f_i} = f_1$ es verdadero, para cualquier f_i, f_1 de nuestro conjunto F, donde f_1 es la unidad.

Demostramos que $f_i \overline{f_i} = f_0$

Tenemos que $f_i \overline{f_i} = E_i \overline{E_i}$, como E_i y E_0 son parte de una álgebra booleana, donde E_0 es el cero del álgebra, usamos la propiedad del complemento para tener $E_i \overline{E_i} = E_0$, y con esto tenemos que $E_0 = f_0$.

Tenemos que $f_0 = E_0$, como E_i y E_1 son parte de una álgebra booleana, donde E_0 es el cero del álgebra, usamos la propiedad del complemento para tener $E_0 = E_i \overline{E_i}$, y con esto tenemos que $E_i \overline{E_i} = f_i \overline{f_i}$.

Por lo tanto, podemos concluir que $f_i \overline{f_i} = f_0$ es verdadero, para cualquier f_i, f_0 de nuestro conjunto F, donde f_0 es el cero.

Por esto podemos concluir que $(F, +, \cdot, ^{-}, f_0, f_1)$ es una álgebra booleana.

10. El sistema central de calefacción de una casa pequeña está controlado por tres termostatos, cada uno ubicado en un cuarto diferente. Los termostatos están configurados para encender la calefacción si la temperatura baja de 15°C, pero para ahorrar energía, es deseable que la calefacción se encienda únicamente cuando la temperatura en al menos dos cuartos baja de 15°C; de otro modo, la calefacción debe estar apagada.

    Diseñe un circuito combinatorio, que será controlado por los termostatos, que permitirá que la corriente fluya por el circuito (activando la calefacción) sólo si la temperatura en al menos dos de los cuartos baja de 15°C. Minimice su circuito, haciendo explícitos los pasos para minimizarlo, y dibuje el circuito final.

    110,101,011,111
    $f(x,y,z) = (xy\overline{z}) + (x\overline{y}z) + (\overline{x}yz) + (xyz)$
    $f(x,y,z) = (xyz + xy\overline{z}) + (xyz + x\overline{y}z) + (xyz + \overline{x}yz)$
    $f(x,y,z) = (xy)(z+\overline{z}) + (xz)(y+\overline{y}) + (yz)(x+\overline{x})$
    $f(x,y,z) = (xy)1 + (xz)1 + (yz)1$
    $f(x,y,z) = (xy) + (xz) + (yz)$

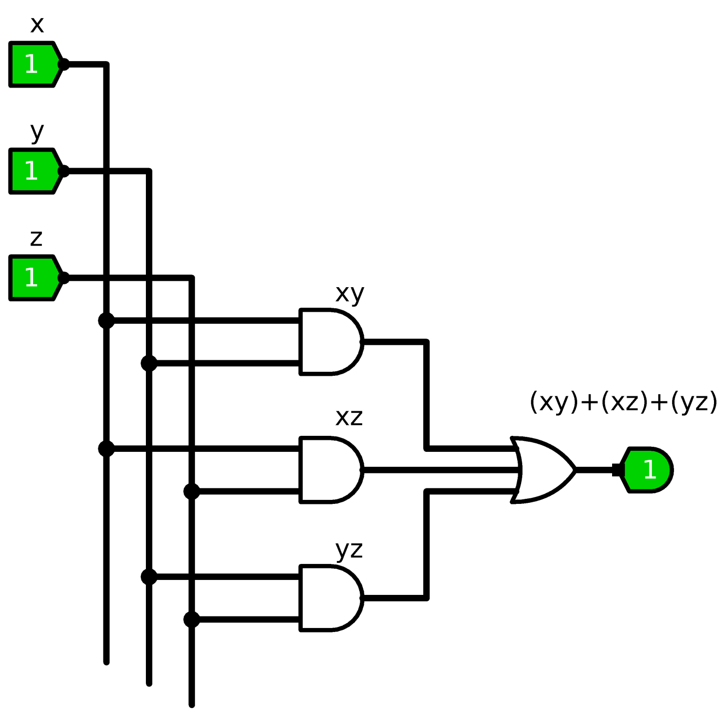


Figure 1: Circuito 10

11. Un sistema de alarma simple consiste de un interruptor maestro y dos sensores de movimiento. Cuando el interruptor maestro está encendido y cualquiera de los dos sensores es activado por movimiento, la alarma se enciende hasta que el interruptor maestro se apague. Si el interruptor maestro está apagado, la alarma no suena, independientemente del estado de los sensores.

Diseñe un circuito combinatorio que controle a este sistema de alarma. Minimice su cirtuito, haciendo explícitos los pasos para minimizarlo, y dibuje el circuito final.

110,101,111

$f(x, y, z) = (xy\overline{z}) + (x\overline{y}z) + (xyz)$

$f(x, y, z) = (xyz + xy\overline{z}) + (xyz + x\overline{y}z)$

$f(x, y, z) = (xy)(z + \overline{z}) + (xz)(y + \overline{y})$

$f(x, y, z) = (xy)1 + (xz)1$

$f(x, y, z) = (xy) + (xz)$

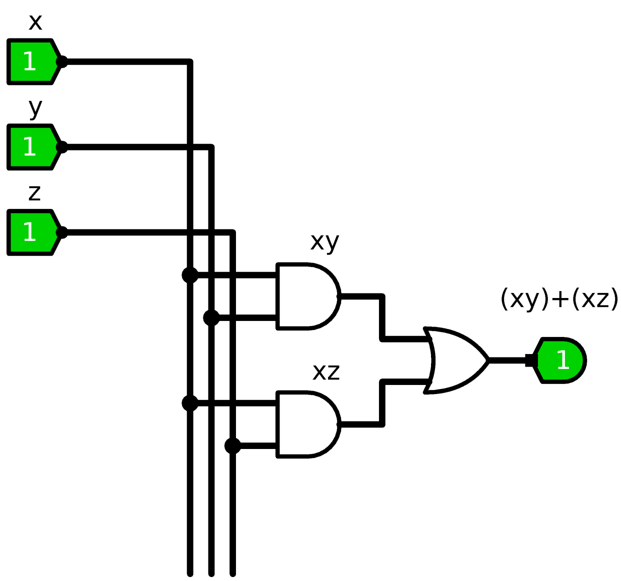
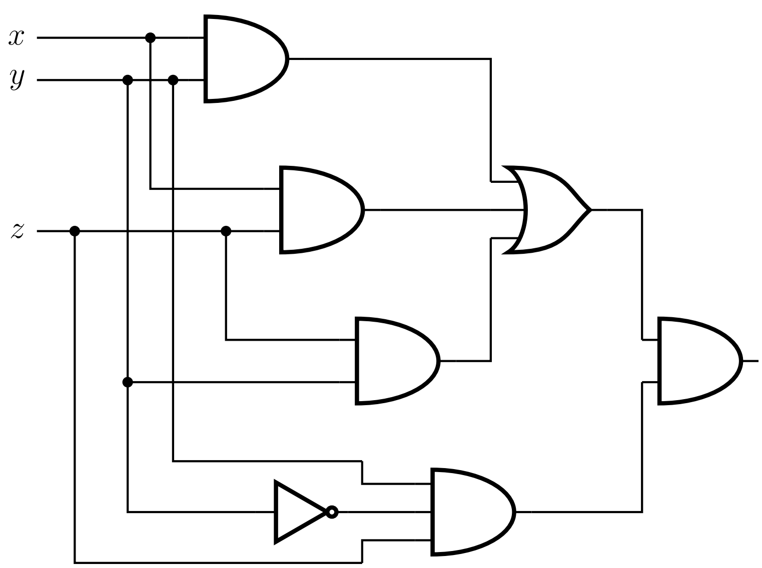


Figure 2: Circuito 11

12. Encuentre una expresión booleana para el siguiente circuito.



Expresión booleana del circuito: $f(x, y, z) = (y\overline{y}z)(xy + xz + zy)$