Estructuras Discretas

Tarea 4. Relaciones

Profesor: César Hernández.

Ayudantes: Gisselle Ibarra Moreno
Alma Rocío Sánchez Salgado

1. Sean m, n y p enteros positivos, y sean A y B matrices booleanas de $m \times p$ y de $p \times n$, respectivamente. Calcule el mínimo número de operaciones booleanas necesarias para calcular $A \odot B$. Justifique su respuesta.

2. Sean R y S relaciones sobre un cojunto A. Demuestre que si $S \subseteq R$, entonces para cada entero positivo n, se tiene que $S^n \subseteq R^n$.

3. El **complemento** y la **inversa** de una relación R de un conjunto A en un conjunto B, denotadas $\overline{R}$ y R^{-1}, respectivamente, se definen de la siguiente forma:

$$\overline{R} = \{(a, b) \colon\ a \not R\, b\},$$

$$\overline{R} = \{(a, b) \colon\ b \, R \, a\}.$$

   Demuestre que

   (a) $(R^{-1})^{-1} = R$

   (b) Si $R \subseteq S$, $\overline{S} \subseteq \overline{R}$

   (c) Si $R \subseteq S$, $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

   (d) $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$

   (e) $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$

   (f) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

   (g) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

4. Sean R y S relaciones sobre un conjunto A. Para cada una de las siguientes afirmaciones, demuestre o exhiba un contraejemplo.

   (a) Si R es reflexiva, entonces R^{-1} es reflexiva.

   (b) Si R es simétrica, entonces R^{-1} es simétrica.

   (c) Si R es reflexiva, entonces $\overline{R}$ es reflexiva.

   (d) Si R es simétrica, entonces $\overline{R}$ es simétrica.

   (e) R es simétrica si y sólo si $R^{-1} = R$.

   (f) Si R y S son simétricas, entonces $R \cup S$ es simétrica.

   (g) Si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ es simétrica.

   (h) Si R y S son transitivas, entonces $R \cup S$ es transitiva.

   (i) Si R y S son transitivas, entonces $R \cap S$ es transitiva.

5. Utilizando el algoritmo de Warshall, encuentre la clausura transitiva de las relaciones dadas por las siguientes matrices booleanas.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Demuestre que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a R.

7. Sea L el lenguaje de las cadenas de longitud menor o igual a 3 sobre el alfabeto $\{a, b\}$.
   (a) Demuestre que la relación R definida sobre L en la que $x \; R \; y$ si y sólo si x es un prefijo de y es un orden parcial.
   (b) Dibuje un diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado (L, R).
   (c) Encuentre los elementos máximos y mínimos de (L, R).

8. Sean $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ conjuntos parcialmente ordenados. Defina una relación $\leq_3$ sobre $A \times B$ en la que $(a, b) \leq_3 (c, d)$ si y sólo si $a \leq_1 c$ y $b \leq_2 d$. Demuestre que $\leq_3$ es un orden parcial.

Respuestas

Integrantes:
Dafne Bonilla Reyes
José Camilo García Ponce
José Alberto Rosales Peña

1. Ejercicio 1:
   m, n y p son enteros positivos, A y B matrices booleanas de $m \times p$ y $p \times n$ respectivamente. El mínimo número de operaciones booleanas necesarias para calcular $A \odot B$ es $mn(2p - 1)$.
   Explicación:
   Primero veamos cuantas operaciones necesitamos para calcular cualquier entrada, lo que hacemos para calcular la entrada es multiplicar (AND) los elementos de cada renglón de la primera matriz por los elementos de cada columna de la segunda, aquí podemos ver que como multiplicamos p elementos entonces son p operaciones, y a los resultados de las multiplicaciones los sumamos (OR), entonces vamos a sumar p números y para eso requerimos $p - 1$ operaciones, entonces para cada entrada hacemos $2p - 1$ operaciones. Ahora sabemos que la matriz resultante sera de $m \times n$ por lo tanto tendrá mn entradas y como cada entrada toma $2p - 1$ concluimos que para toda la matriz toma $mn(2p - 1)$ operaciones.

2. Ejercicio 2:
   Demostración por inducción:
   Caso base:
   Cuando n = 1, $S^1 = S$ y $R^1 = R$
   Por lo tanto, $S^1 \subseteq R^1$

   Hipótesis de inducción:
   $S^k \subseteq R^k$ se cumple para algún entero positivo k.

Paso inductivo:
PD $S^{k+1} \subseteq R^{k+1}$
Sea $(a, b) \in S^{k+1}$
Notemos que $S^{k+1} = S^k \odot S$, por lo que $(a, b) \in S^k \odot S$.
Entonces por definición de composición existe una c tal que $(a, c) \in S^k$ y $(c, b) \in S$.
Por hipótesis de inducción tenemos que $S^k \subseteq R^k$, por lo que $(a, c) \in R^k$.
Como $S \subseteq R$, entonces $(c, b) \in R$.
Entonces por definición de composición, $(a, b) \in R^k \odot R$
Como $R^k \odot R = R^{k+1}$, entonces $(a, b) \in R^{k+1}$
Por lo tanto $S^{k+1} \subseteq R^{k+1}$

Por lo tanto $S^n \subseteq R^n$ se cumple para todo entero positivo n.

3. Ejercicio 3:

   (a) $(R^{-1})^{-1} = R$
   Usamos cadena de equivalencias
   Sea $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$ cualquiera
   Por definición de inversa $\Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$
   Por definición de inversa $\Leftrightarrow (x, y) \in R$
   Como la elección fue arbitraria y por cadena de equivalencias concluimos que $(R^{-1})^{-1} = R$. $\square$

   (b) Si $R \subseteq S$, entonces $\overline{S} \subseteq \overline{R}$
   Supongamos que $R \subseteq S$ y sea $(x, y) \in \overline{S}$ cualquiera
   Por definición de complemento $\Rightarrow (x, y) \notin S$
   Por hipótesis tenemos que $\Rightarrow (x, y) \notin R$
   Por definición de complemento $\Rightarrow (x, y) \in \overline{R}$
   Como la elección fue arbitraria concluimos que $\overline{S} \subseteq \overline{R}$. $\square$

   (c) Si $R \subseteq S$, $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
   Supongamos que $R \subseteq S$ y sea $(x, y) \in R^{-1}$ cualquiera.
   Por definición de inversa $\Rightarrow (y, x) \in R$
   Por hipótesis tenemos que $\Rightarrow (y, x) \in S$
   Por definición de inversa $\Rightarrow (x, y) \in S^{-1}$
   Como la elección fue arbitraria concluimos que $R^{-1} \subseteq S^{-1}$. $\square$

   (d) $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$
   Usamos doble contención:
   $\subseteq \rfloor$ Sea $(x, y) \in \overline{(R \cup S)}$ cualquiera
   Por definición de complemento $\Rightarrow (x, y) \notin R \cup S$
   Por ley de DeMorgan $\Rightarrow (x, y) \notin R$ y $(x, y) \notin S$
   Por definición de complemento $\Rightarrow (x, y) \in \overline{R}$ y $(x, y) \in \overline{S}$
   Por definición de intersección $\Rightarrow (x, y) \in \overline{R} \cap \overline{S}$
   Como la elección fue arbitraria tenemos que $\overline{(R \cup S)} \subseteq \overline{R} \cap \overline{S}$.

$\supseteq\rfloor$ Sea $(x,y) \in \overline{R} \cap \overline{S}$ cualquiera
Por definición de intersección $\Rightarrow (x,y) \in \overline{R}$ y $(x,y) \in \overline{S}$
Por definición de complemento $\Rightarrow (x,y) \notin R$ y $(x,y) \notin S$
Por ley de DeMorgan $\Rightarrow (x,y) \notin R \cup S$
Por definición de complemento $\Rightarrow (x,y) \in \overline{(R \cup S)}$
Como la elección fue arbitraria tenemos que $\overline{R} \cap \overline{S} \subseteq \overline{(R \cup S)}$
Y por doble contención concluimos que $\overline{R} \cap \overline{S} = \overline{(R \cup S)}$. $\square$

(e) $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$
Usamos doble contención
$\subseteq\rfloor$ Sea $(x,y) \in \overline{(R \cap S)}$ cualquiera.
Por definición de complemento $\Rightarrow (x,y) \notin R \cap S$
Por ley DeMorgan $\Rightarrow (x,y) \notin R$ o $(x,y) \notin S$, ya que $(x,y) \in R$ y $(x,y) \in S$ no es cierto
Por definición de complemento $\Rightarrow (x,y) \in \overline{R}$ o $(x,y) \in \overline{S}$
Por definición de unión $\Rightarrow (x,y) \in \overline{R} \cup \overline{S}$
Como la elección fue arbitraria tenemos que $\overline{(R \cap S)} \subseteq \overline{R} \cup \overline{S}$
$\supseteq\rfloor$ Sea $(x,y) \in \overline{R} \cup \overline{S}$ cualquiera
Por definición de unión $\Rightarrow (x,y) \in \overline{R}$ o $(x,y) \in \overline{S}$
Por definición de complemento $\Rightarrow (x,y) \notin R$ o $(x,y) \notin S$
Por ley DeMorgan $\Rightarrow (x,y) \notin R \cap S$, ya que $(x,y) \in R$ y $(x,y) \in S$ no es cierto
Por definición de complemento $\Rightarrow (x,y) \in \overline{(R \cap S)}$
Como la elección fue arbitraria tenemos que $\overline{R} \cup \overline{S} \subseteq \overline{(R \cap S)}$
Y por doble contención concluimos que $\overline{R} \cup \overline{S} = \overline{(R \cap S)}$. $\square$

(f) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
Usamos doble contención
$\subseteq\rfloor$ Sea $(x,y) \in (R \cup S)^{-1}$ cualquiera
Por definición de inversa $\Rightarrow (y,x) \in R \cup S$
Por definición de unión $\Rightarrow (y,x) \in R$ o $(y,x) \in S$
Por definición de inversa $\Rightarrow (x,y) \in R^{-1}$ o $(x,y) \in S^{-1}$
Por definición de unión $\Rightarrow (x,y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$
Como la elección fue arbitraria tenemos que $(R \cup S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cup S^{-1}$
$\supseteq\rfloor$ Sea $(x,y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$ cualquiera
Por definición de unión $\Rightarrow (x,y) \in R^{-1}$ o $(x,y) \in S^{-1}$
Por definición de inversa $\Rightarrow (y,x) \in R$ o $(y,x) \in S$
Por definición de unión $\Rightarrow (y,x) \in R \cup S$
Por definición de inversa $\Rightarrow (x,y) \in (R \cup S)^{-1}$
Como la elección fue arbitraria tenemos que $R^{-1} \cup S^{-1} \subseteq (R \cup S)^{-1}$
Y por doble contención concluimos que $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$. $\square$

(g) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
Usamos doble contención
$\subseteq\rfloor$ Sea $(x,y) \in (R \cap S)^{-1}$ cualquiera
Por definición de inversa $\Rightarrow (y,x) \in R \cap S$
Por definición de intersección $\Rightarrow (y,x) \in R$ y $(y,x) \in S$
Por definición de inversa $\Rightarrow (x,y) \in R^{-1}$ y $(x,y) \in S^{-1}$
Por definición de intersección $\Rightarrow (x,y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$

Como la elección fue arbitraria tenemos que $(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$
$\supseteq \rfloor$ Sea $(x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1}$ cualquiera
Por definición de intersección $\Rightarrow (x, y) \in R^{-1}$ y $(x, y) \in S^{-1}$
Por definición de inversa $\Rightarrow (y, x) \in R$ y $(y, x) \in S$
Por definición de intersección $\Rightarrow (y, x) \in R \cap S$
Por definición de inversa $\Rightarrow (x, y) \in (R \cap S)^{-1}$
Como la elección fue arbitraria tenemos que $R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}$
Y por doble contención concluimos que $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ $\square$.

4. Ejercicio 4:

(a) Si R es reflexiva, entonces R^{-1} es reflexiva
Supongamos que R es reflexiva, es decir $\forall x \in A$ tenemos que $(x, x) \in R$, y sea $(x, x) \in R$ cualquiera
Por definición de inversa tenemos que $(x, x) \in R^{-1}$
Como la elección fue arbitraria y por la definición de reflexividad concluimos que R^{-1} es reflexiva. $\square$

(b) Si R es simétrica, entonces R^{-1} es simétrica
Supongamos que R es simétrica, es decir si $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$, y sea $(x, y) \in R^{-1}$ cualquiera.
Por definición de inversa tenemos que $(y, x) \in R$
Por la hipótesis de que R es simétrica tenemos que $(x, y) \in R$
Por definición de inversa tenemos que $(y, x) \in R^{-1}$
Como la elección fue arbitraria y por la definición de simetría concluimos que R^{-1} es simétrica $\square$

(c) Si R es reflexiva, entonces $\overline{R}$ es reflexiva
Esto no es cierto, contraejemplo:
Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $R \subseteq A \times A$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
Podemos ver que R es reflexiva, por la definición de reflexividad
Veamos quien es $\overline{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$
Observemos que $\overline{R}$ no es reflexiva, ya que no cumple la definición de reflexividad, dado que no están las parejas $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 3)$.

(d) Si R es simétrica, entonces $\overline{R}$ es simétrica.
Demostraremos esto por contradicción
Sea R simétrica y supongamos que $\overline{R}$ no es simétrica
Por la definición de simetría y como $\overline{R}$ veamos que $\exists (x, y) \in \overline{R}$ tal que $(y, x) \notin \overline{R}$
Por definición de complemento tenemos que $(y, x) \in R$ y $(x, y) \notin R$ **!**
Veamos que eso generó una contrición, ya que R es simétrica, es decir que si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$, y vemos que $(x, y) \in R$ pero $(y, x) \notin R$, por lo cual se dio una contradicción al suponer que $\overline{R}$ no es simétrica
Por la contradicción generada por la suposición podemos concluir que $\overline{R}$ es simétrica. $\square$

(e) R es simétrica si y sólo si $R^{-1} = R$
Probamos la ida y el regreso:
$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que R simétrica
Demostremos que $R^{-1} = R$ por doble contención
$\subseteq\rfloor$ Sea $(x, y) \in R^{-1}$ cualquiera
Por definición de inversa tenemos que $(y, x) \in R$
Como R es simétrica tenemos que $(x, y) \in R$
Como la elección fue arbitraria concluimos que $R^{-1} \subseteq R$
$\supseteq\rfloor$ Sea $(x, y) \in R$ cualquiera
Como R es simétrica tenemos que $(y, x) \in R$
Por definición de inversa tenemos que $(x, y) \in R^{-1}$
Como la elección fue arbitraria concluimos que $R \subseteq R^{-1}$
Y por doble contención concluimos que $R^{-1} = R$
$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que $R^{-1} = R$
Sea $(x, y) \in R$ cualquiera
Por definición de inversa tenemos que $(y, x) \in R^{-1}$
Por la hipótesis de que $R^{-1} = R$ tenemos que $(y, x) \in R$
Como la elección fue arbitraria y por la definición de simetría concluimos que R es simétrica
Por lo tanto la doble implicación se cumple. $\square$

(f) Si R y S son simétricas, entonces $R \cup S$ es simétrica
Supongamos que R y S son simétricas, sea $(x, y) \in R \cup S$ cualquiera
Por definición de unión tenemos que $(x, y) \in R$ o $(x, y) \in S$
Ahora tenemos 2 casos:
Caso 1, que $(x, y) \in R$
Como R es simétrica, entonces tenemos que $(y, x) \in R$
Veamos que un conjunto siempre esta contenido en en la unión del conjunto y otro conjunto (es decir $A \subseteq A \cup B$), entonces por lo tanto tenemos que $(y, x) \in R \cup S$
Caso 2, que $(x, y) \in S$
Como S es simétrica, entonces tenemos que $(y, x) \in S$
Veamos que un conjunto siempre esta contenido en en la unión del conjunto y otro conjunto (es decir $A \subseteq A \cup B$), entonces por lo tanto tenemos que $(y, x) \in S \cup R$
Como podemos ver, en los dos casos tenemos que $(y, x) \in R \cup S$
Como la elección fue arbitraria y por la definición de simetría concluimos que $R \cup S$ es simétrica $\square$

(g) Si R y S son simétricas, entonces $R \cap S$ es simétrica
Supongamos que R y S son simétricas, sea $(x, y) \in R \cap S$ cualquiera
Por definición de intersección tenemos que $(x, y) \in R$ y $(x, y) \in S$
Como R y S son simétricas, entonces tenemos que $(y, x) \in R$ y $(y, x) \in S$
Por definición de intersección tenemos que $(y, x) \in R \cap S$
Como la elección fue arbitraria y por la definición de simetría concluimos que $R \cap S$ es simétrica $\square$

(h) Si R y S son transitivas, entonces $R \cup S$ es transitiva
Esto no es cierto, contraejemplo:

Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$, $S \subseteq A \times A$, y $S = \{(4,2),(2,5),(4,5)\}$
Podemos ver que R y S son transitivas, por la definición de transitividad
Veamos que $R \cup S = \{(1,2),(2,3),(1,3),(4,2),(2,5),(4,5)\}$
Observemos que $R \cup S$ no es transitiva, ya que no cumple con la definición de transitividad, dado a que están las parejas $(4,2)$ y $(2,3)$, pero no esta la pareja $(4,3)$.

(i) Si R y S son transitivas, entonces $R \cap S$ es transitiva
Supongamos que R y S son transitivas, sean $a,b,c \in A$ y $(a,b) \in R \cap S$ y $(b,c) \in R \cap S$ cualquiera
Por definición de intersección tenemos que $(a,b) \in R$ y $(a,b) \in S$, además que $(b,c) \in R$ y $(b,c) \in S$
Como R y S son transitivas, entonces tenemos que $(a,c) \in R$ y $(a,c) \in S$
Por definición de intersección tenemos que $(a,c) \in R \cap S$
Como la elección fue arbitraria y por la definición de transitividad concluimos que $R \cap S$ es transitiva $\square$

5. Ejercicio 5:

(a)
- Original

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 1
Tomamos la primera columna C_1 y la primer fila R_1, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
$C_1 = \{3\}$ y $R_1 = \{2\}$
Ahora hacemos el producto cartesiano de C_1 con R_1:
$C_1 \times R_1 = \{(3,2)\}$, esta sera la nueva adición a la matriz, y ahora la matriz nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 2
Tomamos la segunda columna C_2 y la segunda fila R_2, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
$C_2 = \{1,3,4\}$ y $R_2 = \{3\}$
Ahora hacemos el producto cartesiano de C_2 con R_2:
$C_2 \times R_2 = \{(1,3),(3,3),(4,3)\}$, estas serán las nuevas adiciones a la matriz, y ahora la matriz nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 3
  Tomamos la tercer columna C_3 y la tercer fila R_3, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_3 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R_3 = \{1, 2, 3\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_3 con R_3:
  $C_3 \times R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$, estas serán las nuevas adiciones a la matriz, y ahora la matriz nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 4
  Tomamos la cuarta columna C_4 y la cuarta fila R_4, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_4 = \{4\}$ y $R_4 = \{1, 2, 3, 4\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_4 con R_4:
  $C_4 \times R_4 = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$, estas serán las nuevas adiciones a la matriz, y ahora la matriz nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Clausura transitiva

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)
- Original

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 1
  Tomamos la primera columna C_1 y la primer fila R_1, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_1 = \{1\}$ y $R_1 = \{1\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_1 con R_1:
  $C_1 \times R_1 = \{(1, 1)\}$, esta sera la nueva adición a la matriz, y ahora la matriz nos

queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 2
  Tomamos la segunda columna C_2 y la segunda fila R_2, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_2 = \{2, 3, 4\}$ y $R_2 = \{2, 4\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_2 con R_2:
  $C_2 \times R_2 = \{(2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$, estas serán las nuevas adiciones a la matriz, y ahora la matriz nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 3
  Tomamos la tercer columna C_3 y la tercer fila R_3, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_3 = \varnothing$ y $R_3 = \{2, 4\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_3 con R_3:
  $C_3 \times R_3 = \varnothing$, por lo tanto no hay nuevas adiciones, y la matriz se queda igual:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 4
  Tomamos la cuarta columna C_4 y la cuarta fila R_4, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_4 = \{2, 3, 4\}$ y $R_4 = \{2, 4\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_4 con R_4:
  $C_4 \times R_4 = \{(2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$, estas serán las nuevas adiciones a la matriz, y ahora la matriz nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Clausura transitiva

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

- Original

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 1
  Tomamos la primera columna C_1 y la primer fila R_1, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_1 = \{2, 4\}$ y $R_1 = \{2, 4\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_1 con R_1:
  $C_1 \times R_1 = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$, esta sera la nueva adición a la matriz, y ahora la matriz nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 2
  Tomamos la segunda columna C_2 y la segunda fila R_2, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_2 = \{1, 2, 4\}$ y $R_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_2 con R_2:
  $C_2 \times R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$, estas serán las nuevas adiciones a la matriz, y ahora la matriz nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 3
  Tomamos la tercer columna C_3 y la tercer fila R_3, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_3 = \{1, 2, 4\}$ y $R_3 = \{4\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_3 con R_3:
  $C_3 \times R_3 = \{(1, 4), (2, 4), (4, 4)\}$, por lo tanto no hay nuevas adiciones, y la matriz se queda igual:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Paso 4
  Tomamos la cuarta columna C_4 y la cuarta fila R_4, ponemos las posiciones donde 1 esta presente y tenemos:
  $C_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R_4 = \{1, 2, 3, 4\}$
  Ahora hacemos el producto cartesiano de C_4 con R_4:
  $C_4 \times R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4,$

estas serán las nuevas adiciones a la matriz, y ahora la matriz nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Clausura transitiva

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Ejercicio 6:
Demuestre que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a R
Primero veamos si $R \subseteq R \cup R^{-1}$
Esto es trivial, debido a que cualquier conjunto esta contenido en la unión del mismo conjunto con cualquier otro conjunto ($A \subseteq A \cup B$), por lo tanto $R \subseteq R \cup R^{-1}$ si pasa
Ahora veamos si $R \cup R^{-1}$ es simétrica
Aquí tenemos dos casos:
Caso 1: Que R sea simétrica, por lo tanto sabemos que R^{-1} también lo es por lo demostrado en $4.b$ y sabemos que $R \cup R^{-1}$ también es simétrica por lo demostrado en $4.f$, además $R = R \cup R^{-1}$
Caso 2: Que R no sea simétrica, entonces sea $(x, y) \in R$ cualquiera
Por la definición de unión y como $(x, y) \in R$ tenemos que $(x, y) \in R \cup R^{-1}$
Por la definición de inversa y como $(x, y) \in R$ tenemos que $(y, x) \in R^{-1}$
Por la definición de unión y como $(y, x) \in R^{-1}$ tenemos que $(y, x) \in R \cup R^{-1}$
Como la elección fue arbitraria y por la definición de simetría concluimos que $R \cup R^{-1}$ es simétrica.
Por último veamos que $R \cup R^{-1}$ es la más pequeña que cumple lo de arriba
Aquí volvemos a tener dos casos: Caso 1: Que R sea simétrica, si esto pasa entonces R seria la relación simétrica más pequeña que contiene a R porque cada conjunto es subconjunto de si mismo.
Caso 2: Que R no sea simétrica, entonces sea S una relación tal que es simétrica y $R \subseteq S$
Sea $(x, y) \in R \cup R^{-1}$ cualquiera
Por definición de unión $(x, y) \in R$ o $(x, y) \in R^{-1}$
Aquí tenemos 2 casos:
Caso 2.1: $(x, y) \in R$, por la hipótesis de que $R \subseteq S$ tenemos que $(x, y) \in S$
Caso 2.2: $(x, y) \in R^{-1}$, por definición de inversa tenemos que $(y, x) \in R$, por la hipótesis de que $R \subseteq S$ tenemos que $(y, x) \in S$ y por la hipótesis de que S es simétrica tenemos que $(x, y) \in S$
Como vemos en los dos casos llegamos a que $(x, y) \in S$ y como la elección fue arbitraria concluimos que $R \cup R^{-1} \subseteq S$
Y con todo esto concluimos que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a R. $\square$

7. Ejercicio 7:

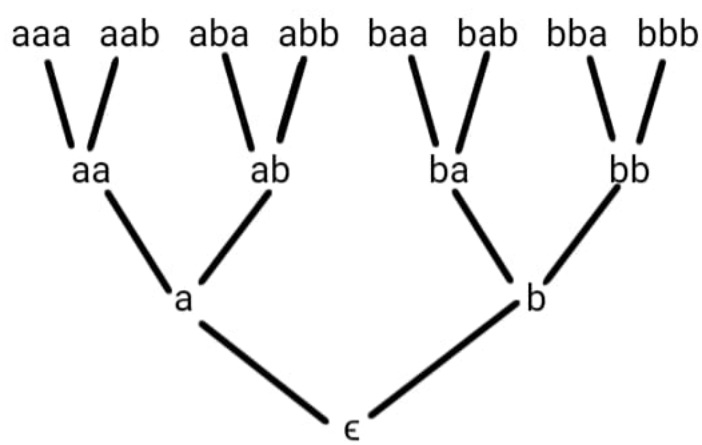
   (a) Demuestre que la relación R definida sobre L en la que xRy si y sólo si x es un prefijo de y es un orden parcial.

Veamos si R es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
Sean $w, x, y \in L$

- Reflexiva, PD wRw
  Notemos que $w = w\varepsilon$
  Entonces w es prefijo de sí mismo, por definición de prefijo.
  Por lo tanto wRw, por definición de R, y por lo tanto R es reflexiva.
- Transitiva, PD Si wRx y xRy, entonces wRy
  Como wRx, entonces por definición de prefijo existe un s tal que $x = ws$.
  Como xRy, entonces por definición de prefijo existe un t tal que $y = xt$.
  Sustituyendo x tenemos que $y = wst$
  Sea $u = st$, entonces $y = wu$
  Entonces w es prefijo de y, por definición de prefijo.
  Por lo tanto wRy, por definición de R, y por lo tanto R es transitiva.
- Antisimétrica PD Si wRx y xRw, entonces $w = x$
  Como wRx, entonces por definición de prefijo existe un s tal que $x = ws$.
  Como xRw, entonces por definición de prefijo existe un t tal que $w = xt$.
  Sustituyendo x tenemos que $w = wst$
  Entonces $st = \varepsilon$, porque esa es la única forma de que se cumpla que $w = w$.
  Entonces $t = \varepsilon$
  Sustituyendo t en $w = xt$ tenemos que $w = x\varepsilon = x$, y por lo tanto R es antisimétrica.

Como R tiene las 3 propiedades, entonces es un orden parcial.

(b) Dibuje un diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado (L, R).



(c) Mínimos y máximos de (L, R)

- Mínimos:
  El mínimo del conjunto es ϵ

- Máximos:
  Los máximos del conjunto son $aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba$ y bbb

8. Ejercicio 8:
   Sean $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ conjuntos parcialmente ordenados.

Definamos la relación $\leq_3$ sobre $A \times B$ como $(a,b) \leq_3 (c,d)$ si y sólo si $a \leq_1 c$ y $b \leq_2 d$
Ahora veamos que $\leq_3$ es un orden parcial, para esto veamos si $\leq_3$ es reflexiva, antisemítica y transitiva:
Sean (a,b), (c,d) y $(x,y) \in A \times B$ cualesquiera

- Reflexiva, PD $(a,b) \leq_3 (a,b)$
  Observemos que por definición de $\leq_3$ necesitamos que $a \leq_1 a$ y $b \leq_2 b$, esto podemos ver que se cumple debido a que $\leq_1$ y $\leq_2$ son ordenes parciales (son reflexivas) en A y B respectivamente, por lo tanto $\leq_3$ es reflexiva
- Antisimétrica, PD $(a,b) \leq_3 (c,d)$ y $(c,d) \leq_3 (a,b)$ implica que $(a,b) = (c,d)$
  Supongamos que $(a,b) \leq_3 (c,d)$ y $(c,d) \leq_3 (a,b)$, por definición de $\leq_3$ tenemos que $a \leq_1 c$ y $b \leq_2 d$ y $c \leq_1 a$ y $d \leq_2 b$, reacomodamos un poco y tenemos que $a \leq_1 c$ y $c \leq_1 a$ y $b \leq_2 d$ y $d \leq_2 b$, ahora como $\leq_1$ y $\leq_2$ son ordenes parciales (son antisemíticas) en A y B respectivamente, tenemos que $a = c$ y $b = d$, por lo tanto tenemos que $(a,b) = (c,d)$ por la definición de pareja ordenada y por lo tanto $\leq_3$ es antisemítica
- Transitiva, PD $(a,b) \leq_3 (x,y)$ y $(x,y) \leq_3 (c,d)$ implica que $(a,b) \leq_3 (c,d)$
  Supongamos que $(a,b) \leq_3 (x,y)$ y $(x,y) \leq_3 (c,d)$, por definición de $\leq_3$ tenemos que $a \leq_1 x$ y $b \leq_2 y$ y $x \leq_1 c$ y $y \leq_2 d$, reacomodamos un poco y tenemos que $a \leq_1 x$ y $x \leq_1 c$ y $b \leq_2 y$ y $y \leq_2 d$, ahora como $\leq_1$ y $\leq_2$ son ordenes parciales (son transitivas) en A y B respectivamente, tenemos que $a \leq_1 c$ y $b \leq_2 d$, ahora por la definición de $\leq_3$ tenemos que $(a,b) \leq_3 (c,d)$, por lo tanto $\leq_3$ es transitiva

Y con las 3 propiedades y la definición de orden parcial concluimos que $\leq_3$ es un orden parcial sobre $A \times B$ $\square$