Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea Examen I

Lógica Computacional

Dafne Bonilla Reyes

Profesor: Javier Enríquez Mendoza

Ayudante: Kevin Axel Prestegui Ramos
Ayudante: Karla Denia Salas Jiménez
Ayudante Laboratorio: Ramón Arenas Ayala
Ayudante Laboratorio: Oscar Fernando Millán Pimentel

Marzo 2023

Tarea Examen 1: Lógica Proposicional

1. Demuestre que las siguientes fórmulas son equivalentes utilizando interpretaciones.

$$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \qquad\qquad (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$$

Para demostrar esta equivalencia lógica, probemos que para toda interpretación I, el valor de verdad de estas proposiciones coincide bajo I.

Usando una tabla de verdad, podemos ver que existen 4 posibles interpretaciones:

φ_1	φ_2
1	1
1	0
0	0
0	1

Es decir, tenemos

- Interpretación 1:
$$I_1(\varphi_1) = 1 \qquad I_1(\varphi_2) = 1$$
- Interpretación 2:
$$I_2(\varphi_1) = 1 \qquad I_2(\varphi_2) = 0$$
- Interpretación 3:
$$I_3(\varphi_1) = 0 \qquad I_3(\varphi_2) = 0$$
- Interpretación 4:
$$I_4(\varphi_1) = 0 \qquad I_4(\varphi_2) = 1$$

Tomando esto en cuenta, veamos si para cada interpretación, obtenemos el mismo valor de verdad. Sean $\alpha = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ y $\beta = \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$.

- Consideremos la interpretación 1

  Usando la tabla de verdad de la equivalencia obtenemos
$$I_1(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = 1$$
  Por otro lado,
$$I_1(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = I_1(\alpha) \vee I_1(\beta)$$
$$I_1(\alpha) = 1 \qquad I_1(\beta) = 0$$
$$\Rightarrow I_1(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = 1$$
  Por lo que
$$I_1(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = I_1(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

- Consideremos la interpretación 2

  Usando la tabla de verdad de la equivalencia obtenemos
$$I_2(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = 0$$
  Por otro lado,
$$I_2(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = I_2(\alpha) \vee I_2(\beta)$$
$$I_2(\alpha) = 0 \qquad I_1(\beta) = 0$$
$$\Rightarrow I_2(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = 0$$
  Por lo que
$$I_2(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = I_2(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

- Consideremos la interpretación 3

  Usando la tabla de verdad de la equivalencia obtenemos

  $$I_3(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = 1$$

  Por otro lado,

  $$I_3(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = I_3(\alpha) \vee I_1(\beta)$$
  $$I_3(\alpha) = 0 \qquad I_3(\beta) = 1$$
  $$\Rightarrow I_3(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = 1$$

  Por lo que

  $$I_3(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = I_3(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

- Consideremos la interpretación 4

  Usando la tabla de verdad de la equivalencia obtenemos

  $$I_4(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = 0$$

  Por otro lado,

  $$I_4(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = I_4(\alpha) \vee I_4(\beta)$$
  $$I_4(\alpha) = 0 \qquad I_4(\beta) = 0$$
  $$\Rightarrow I_4(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = 0$$

  Por lo que

  $$I_4(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) = I_4(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

Por lo tanto, $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

2. Decida si el siguiente argumento es correcto utilizando resolución binaria. Indique el significado de las variables proposicionales usadas y muestre a detalles las trasnformaciones a la forma clausular.

   Petrolino o Quelónico cometieron un crimen.
   Petrolino estuvo fuera de la tienda donde se cometió el crimen.
   Si Petrolino estaba fuera de la tienda entonces no estaba en la escena del crimen.
   Si Petrolino no estaba en la escena del crimen entonces él no pudo haber cometido el crimen.
   Por lo tanto Quelónico debió haber cometido el crimen.

   Primero, definamos a las variables proposicionales.

   - p = Petrolino cometió un crimen
   - q = Quelónico cometió un crimen
   - r = Petrolino estuvo fuera de la tienda donde se cometió el crimen
   - s = Petrolino estaba en la escena del crimen

   Por lo que las fórmulas de nuestro argumento son:

   $$\begin{array}{l} p \vee q \\ r \\ r \to \neg s \\ \neg s \to \neg p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Veamos que de esta manera, obtenemos el conjunto de premisas $\{p \vee q, r, r \to \neg s, \neg s \to \neg p\} \vDash q$ que describen a nuestro argumento.

Para resolver por resolución binaria, primero usemos el principio de refutación, obteniendo así que:

$$\{p \vee q, r, r \to \neg s, \neg s \to \neg p, \neg q\}$$

Y ahora, cambiemos el conjunto a forma clausular, comenzando por pasar las premisas a FNN.

$$\{p \vee q, r, r \to \neg s, \neg s \to \neg p, \neg q\}$$

$$\{p \vee q, r, \neg r \vee \neg s, \neg(\neg s) \vee \neg p, \neg q\}$$

$$\{p \vee q, r, \neg r \vee \neg s, s \vee \neg p, \neg q\}$$

Notemos que el conjunto de premisas obtenido ya está también en FNC. Con esto, ya es posible resolver por resolución binaria.

Nuestras hipótesis serán entonces:

1. $p \vee q$
2. r
3. $\neg r \vee \neg s$
4. $s \vee \neg p$
5. $\neg q$

Y resolviendo,

6. $\neg s$ Res 2,3
7. $q \vee s$ Res 1,4
8. q Res 6,7
9. $\square$ Res 5,8

Veamos que llegamos a la claúsula vacía y dado que usamos el principio de refutación, el conjunto es insatisfacible.

Por lo tanto, el argumento es correcto.

3. La función traducción negativa de Gödel-Gentzen se define como sigue: $\mathbf{gg}(\varphi)$ es la fórmula obtenida a partir de φ al colocar dos negaciones enfrente de cada variable proposicional y enfrente de cada disyunción. Por ejemplo

$$\mathbf{gg}\Big(p \wedge q \to r \vee \neg s\Big) = \neg\neg p \wedge \neg\neg q \to \neg\neg(\neg\neg r \vee \neg\neg\neg s)$$

$$\mathbf{gg}\Big(\neg(\neg q \wedge (s \vee \bot))\Big) = \neg(\neg\neg\neg q \wedge \neg\neg(\neg\neg s \vee \bot))$$

a) Defina **gg** recursivamente y muestre que su definición es correcta aplicando su definición en el segundo ejemplo anterior.

Sea **gg** la función tal que $\mathbf{gg}(\varphi) : \text{PROP} \to \text{PROP}$ que se define recursivamente como:

1. $\mathbf{gg}(\bot) = \bot$
2. $\mathbf{gg}(\top) = \top$
3. $\mathbf{gg}(\varphi) = \neg\neg p$ si $p \in \text{ATOM}$
4. $\mathbf{gg}(\neg\varphi) = \neg\ \mathbf{gg}(\varphi)$
5. $\mathbf{gg}(\varphi \wedge \psi) = \mathbf{gg}(\varphi) \wedge \mathbf{gg}(\psi)$
6. $\mathbf{gg}(\varphi \vee \psi) = \neg\neg\ (\mathbf{gg}(\varphi) \vee \mathbf{gg}(\psi))$
7. $\mathbf{gg}(\varphi \to \psi) = \neg\ \mathbf{gg}(\varphi) \vee \mathbf{gg}(\psi)$
8. $\mathbf{gg}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \mathbf{gg}(\varphi \to \psi) \wedge \mathbf{gg}(\psi \to \varphi)$

Ahora, apliquemos la definición en el segundo ejemplo.

$$\Rightarrow \mathbf{gg}\Big(\neg(\neg q \land (s \lor \bot))\Big) = \neg\ \mathbf{gg}\Big(\neg q \land (s \lor \bot)\Big) \texttt{ Por definición 4}$$
$$= \neg(\neg\neg\neg q \land \neg\neg(\neg\neg s \lor \neg\neg\bot)) \texttt{ Por definición 3 y 6}$$
$$= \neg(\neg\neg\neg q \land \neg\neg(\neg\neg s \lor \bot)) \texttt{ Ya que } \neg\neg\bot = \bot$$
$$\Rightarrow \mathbf{gg}\Big(\neg(\neg q \land (s \lor \bot))\Big) = \neg(\neg\neg\neg q \land \neg\neg(\neg\neg s \lor \bot))$$

Por lo tanto, la definición es correcta.

b) Demuestre que para cualquier fórmula φ, se cumple que $\varphi \equiv \mathbf{gg}(\varphi)$.

Demostración. Procederemos por inducción estructural sobre PROP.

- *Caso Base. P.D* Si $\varphi \in$ ATOM $\Rightarrow \varphi \equiv \mathbf{gg}(\varphi)$

  Sea $\varphi \in$ ATOM.
  $\Rightarrow \mathbf{gg}(\varphi) = \neg\neg\varphi$ `Por definición`
  $\Rightarrow \neg\neg\varphi \equiv \varphi$ `Por ley de la doble negación`
  $\Rightarrow \varphi \equiv \mathbf{gg}(\varphi)$

- *Hipótesis de Inducción.* Supongamos que $\varphi, \psi \in$ PROP y que $\mathbf{gg}(\varphi) \equiv \varphi$ y $\mathbf{gg}(\psi) \equiv \psi$.

- *Paso Inductivo.*

  P.D

  1. $\mathbf{gg}(\neg\varphi) \equiv \neg\varphi$
  2. $\mathbf{gg}(\varphi \land \psi) \equiv \varphi \land \psi$
  3. $\mathbf{gg}(\varphi \lor \psi) \equiv \varphi \lor \psi$
  4. $\mathbf{gg}(\varphi \to \psi) \equiv \varphi \to \psi$
  5. $\mathbf{gg}(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv \varphi \leftrightarrow \psi$

  Resolviendo, tenemos que:

  1. $\mathbf{gg}(\neg\varphi) = \neg\ \mathbf{gg}(\varphi)$ `Por definición`
     `Por H.I` $\mathbf{gg}(\varphi) \equiv \varphi$
     $\Rightarrow \neg\varphi \equiv \neg\ \mathbf{gg}(\varphi) \equiv \mathbf{gg}(\neg\varphi)$
  2. $\mathbf{gg}(\varphi \land \psi) = \mathbf{gg}(\varphi) \land \mathbf{gg}(\psi)$ `Por definición`
     `Por H.I` $\mathbf{gg}(\varphi) \equiv \varphi$ y $\mathbf{gg}(\psi) \equiv \psi$
     $\Rightarrow \varphi \land \psi \equiv \mathbf{gg}(\varphi) \land \mathbf{gg}(\psi) \equiv \mathbf{gg}(\varphi \land \psi)$
  3. $\mathbf{gg}(\varphi \lor \psi) = \neg\neg\ (\mathbf{gg}(\varphi) \lor \mathbf{gg}(\psi))$ `Por definición`
     `Por H.I` $\mathbf{gg}(\varphi) \equiv \varphi$ y $\mathbf{gg}(\psi) \equiv \psi$
     $\Rightarrow \neg\neg(\varphi \lor \psi) \equiv \neg\neg\ (\mathbf{gg}(\varphi) \lor \mathbf{gg}(\psi))$
     `Por Ley de Morgan` $\neg\neg(\varphi \lor \psi) = \neg(\neg\varphi \land \neg\psi))$
     `Nuevamente por Ley de Morgan` $\neg(\neg\varphi \land \neg\psi)) = \neg\neg\varphi \lor \neg\neg\psi$
     `Por ley de la doble negación` $\neg\neg\varphi \lor \neg\neg\psi = \varphi \lor \psi$
     $\Rightarrow \varphi \lor \psi \equiv \mathbf{gg}(\varphi \lor \psi)$
  4. $\mathbf{gg}(\varphi \to \psi) = \neg\ \mathbf{gg}(\varphi) \lor \mathbf{gg}(\psi)$ `Por definición`
     `Por H.I` $\neg\varphi \lor \psi \equiv \neg\ \mathbf{gg}(\varphi) \lor \mathbf{gg}(\psi)$
     `Por regla de la eliminación de la implicación` $\neg\varphi \lor \psi = \varphi \to \psi$
     $\Rightarrow \varphi \to \psi \equiv \mathbf{gg}(\varphi \to \psi)$

5. $\mathbf{gg}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \mathbf{gg}(\varphi \to \psi) \wedge \mathbf{gg}(\psi \to \varphi)$ `Por definición`
   `Nuevamente por definición` $\mathbf{gg}(\varphi \to \psi) \wedge \mathbf{gg}(\psi \to \varphi)$
   $= (\neg\, \mathbf{gg}(\varphi) \vee \mathbf{gg}(\psi)) \wedge (\neg\, \mathbf{gg}(\psi) \vee \mathbf{gg}(\varphi))$
   `Por H.I` $(\neg\, \mathbf{gg}(\varphi) \vee \mathbf{gg}(\psi)) \wedge (\neg\, \mathbf{gg}(\psi) \vee \mathbf{gg}(\varphi)) = (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$
   `Por regla de la eliminación de la implicación`
   $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
   `Por regla de la eliminación de la doble implicación`
   $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) = \varphi \leftrightarrow \psi$
   $\Rightarrow \varphi \to \psi \equiv \mathbf{gg}(\varphi \leftrightarrow \psi)$

Por lo tanto, para cualquier fórmula $\varphi \in \text{PROP}$ se cumple que $\varphi \equiv \mathbf{gg}(\varphi)$. □

4. Decidir si el siguiente argumento es correcto utilizando el algoritmo DPLL. Debes mostrar los pasos detalladamente y en caso de que exista, mostrar y verificar el modelo obtenido.

$$\{p \vee r, q \vee \neg r \vee s, \neg q \vee \neg r \vee s, r, p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s\} \models p$$

Para usar el algoritmo DPLL, primero, apliquemos el principio de refutación, obteniendo así el siguiente conjunto de premisas:

$$\{p \vee r, q \vee \neg r \vee s, \neg q \vee \neg r \vee s, r, p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s, \neg p\}$$

Ahora bien, busquemos un modelo usando DPLL si es posible.

Resolviendo:

$$\cdot \models p \vee r, q \vee \neg r \vee s, \neg q \vee \neg r \vee s, r, p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s, \neg p$$

`unit`

$$\neg p, r \models p \vee r, q \vee \neg r \vee s, \neg q \vee \neg r \vee s, p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s$$

`elim`

$$\neg p, r \models q \vee \neg r \vee s, \neg q \vee \neg r \vee s, p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s$$

`red`

$$\neg p, r \models q \vee s, \neg q \vee s, \neg q \vee \neg s$$

`split` q

$$\neg p, r, q \models q \vee s, \neg q \vee s, \neg q \vee \neg s$$

$$\neg p, r, \neg q \models q \vee s, \neg q \vee s, \neg q \vee \neg s$$

`elim`

$$\neg p, r, \neg q \models q \vee s$$

`red`

$$\neg p, r, \neg q \models s$$

`unit`

$$\neg p, r, \neg q, s \models \varnothing$$

`success`

Por lo que nuestro modelo sería $p = 0, r = 1, q = 0$ y $s = 1$. Verifiquemos si es correcto:

$$\{p \vee r, q \vee \neg r \vee s, \neg q \vee \neg r \vee s, r, p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s, \neg p\}$$

Entonces,

1. $p \vee r = 0 \vee 1 = 1$
2. $q \vee \neg r \vee s = 0 \vee 0 \vee 1 = 1$

3. $\neg q \vee \neg r \vee s = 1 \vee 0 \vee 1 = 1$
4. $r = 1$
5. $p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s = 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 = 1$
6. $\neg p = 1$

Así pues, podemos concluir que este si es modelo para el conjunto, por lo que es satisfacible.

Por lo tanto, el argumento es incorrecto.

5. *El piojo y la pulga se van a casar y han invitado a las nupcias a la mosca, el escarabajo y el abejorro. Estos finos invitados deben sentarse juntos en el banquete pero debido a viejos pleitos y supersticiones sabemos que:*

   - La mosca no quiere sentarse junto al abejorro.
   - La mosca no quiere sentarse en la silla de la izquierda.
   - El escarabajo no quiere sentarse a la derecha del abejorro.

   Represente esta información como una instancia del problema SAT, es decir mediante formas normales conjuntivas. Debe incluir la información implícita necesaria como que una silla sólo puede ocuparla un bicho, que cada bicho debe estar sentado y que ninguno ocupa más de una silla.

   Usamos a las letras M, E y A para representar a la mosca, al escarabajo y al abejorro, respectivamente. Además, las letras i, c, d indican la silla a la que nos referimos: izquierda, central o derecha.

   De esta manera, podemos definir a una variable B_s tal que $B \in \{M, E, A\}$ y $s \in \{i, c, d\}$, que indica en que silla s está sentado un bicho B. Así, definimos a las 9 posibles variables proposicionales solo con B_s.

   Tomando esto en cuenta, modelemos la información implícita. Notemos que cada silla puede ser ocupada por 1 y solo 1 bicho. Es decir, sean A, B y C tres bichos. Si tenemos que A_s, entonces $A \neq B$ y $A \neq C$ de tal manera que B y C no ocupan la silla s. Por otro lado, es importante mencionar que cuando asignemos fórmulas proposicionales a los enunciados que obtengamos, interpretaremos como una conjunción a cada conectivo gramatical *pero* usado en el enunciado. Entonces si tenemos un enunciado como:

   *Si la **mosca** se sienta en la silla izquierda, entonces el **escarabajo** no se sienta en la silla izquierda y el **abejorro** no se sienta en la silla izquierda, pero si el **escarabajo** se sienta en la silla izquierda, entonces...*

   Obtenemos:

$$(M_i \Rightarrow (\neg E_i \wedge \neg A_i)) \wedge (E_i \Rightarrow (\neg M_i \wedge \neg A_i)) \wedge (A_i \Rightarrow (\neg M_i \wedge \neg E_i))$$
$$\wedge$$
$$(M_c \Rightarrow (\neg E_c \wedge \neg A_c)) \wedge (E_c \Rightarrow (\neg M_c \wedge \neg A_c)) \wedge (A_c \Rightarrow (\neg M_c \wedge \neg E_c))$$
$$\wedge$$
$$(M_d \Rightarrow (\neg E_d \wedge \neg A_d)) \wedge (E_d \Rightarrow (\neg M_d \wedge \neg A_d)) \wedge (A_d \Rightarrow (\neg M_d \wedge \neg E_d))$$

   Ahora, si modelamos que cada bicho debe ocupar alguna silla, es decir, que $\forall X \in \{M, E, A\}\ \exists i$ tal que $i \in \{i, c, d\}$, tenemos:

$$(M_i \vee M_c \vee M_d) \wedge (E_i \vee E_c \vee E_d) \wedge (A_i \vee A_c \vee A_d)$$

   Ahora bien modelemos la unicidad de la ocupación en las sillas. Es decir, que ningún insecto ocupada más de una silla. Por lo que tenemos que si un insecto X se sienta en la silla y, entonces X

no se siente ni en la silla w ni en la silla z, tal que $w \neq z$ con $w, z \in \{i, c, d\} \backslash \{y\}$. Obteniendo así las siguientes premisas:

$$(M_i \Rightarrow (\neg M_c \land \neg M_d)) \land (M_c \Rightarrow (\neg M_i \land \neg M_d)) \land (M_d \Rightarrow (\neg M_i \land \neg M_c))$$

$$\land$$

$$(E_i \Rightarrow (\neg E_c \land \neg E_d)) \land (E_c \Rightarrow (\neg E_i \land \neg E_d)) \land (E_d \Rightarrow (\neg E_i \land \neg E_c))$$

$$\land$$

$$(A_i \Rightarrow (\neg A_c \land \neg A_d)) \land (A_c \Rightarrow (\neg A_i \land \neg A_d)) \land (A_d \Rightarrow (\neg A_i \land \neg A_c))$$

Luego, modelamos las condiciones de cada bicho para sentarse en determinada silla. Comenzamos con que la mosca no quiere sentarse junto al abejorro. Esto es que, si A se sienta en la silla y, entonces M no se sienta en ninguna silla que esté al lado de y. Por ejemplo, Si A se sienta en c, entonces M no se sienta ni en i ni en d. Si enunciamos esto con lenguaje normal, tendremos un enunciado parecido a *"Si E se sienta en i, entonces..., **pero** si E se sienta en c, entonces..., **pero** si E se sienta en d..."*. Cómo ya habíamos mencionado anteriormente, el *pero* se escribirá en las premisas como una conjunción. Entonces tenemos:

$$(A_i \Rightarrow \neg M_c) \land (A_c \Rightarrow (\neg M_i \land \neg M_d)) \land (A_d \Rightarrow \neg M_c)$$

A continuación, modelamos que la mosca no se quiere sentar en la silla de la izquierda, lo que simplemente es:

$$\neg M_i$$

Por último, modelamos que el escarabajo no quiere sentarse a la derecha del abejorro, que es análogo a la condición de la mosca, entonces:

$$(A_i \Rightarrow E_d) \land (A_c \Rightarrow E_i) \land (A_d \Rightarrow (E_i \land E_c))$$

Todas las condiciones se deben que cumplir, por lo que obtenemos una fórmula proposicional dada como:

$$(M_i \Rightarrow (\neg E_i \land \neg A_i)) \land (E_i \Rightarrow (\neg M_i \land \neg A_i)) \land (A_i \Rightarrow (\neg M_i \land \neg E_i))$$

$$\land$$

$$(M_c \Rightarrow (\neg E_c \land \neg A_c)) \land (E_c \Rightarrow (\neg M_c \land \neg A_c)) \land (A_c \Rightarrow (\neg M_c \land \neg E_c))$$

$$\land$$

$$(M_d \Rightarrow (\neg E_d \land \neg A_d)) \land (E_d \Rightarrow (\neg M_d \land \neg A_d)) \land (A_d \Rightarrow (\neg M_d \land \neg E_d))$$

$$\land$$

$$(M_i \lor M_c \lor M_d) \land (E_i \lor E_c \lor E_d) \land (A_i \lor A_c \lor A_d)$$

$$\land$$

$$(M_i \Rightarrow (\neg M_c \land \neg M_d)) \land (M_c \Rightarrow (\neg M_i \land \neg M_d)) \land (M_d \Rightarrow (\neg M_i \land \neg M_c))$$

$$\land$$

$$(E_i \Rightarrow (\neg E_c \land \neg E_d)) \land (E_c \Rightarrow (\neg E_i \land \neg E_d)) \land (E_d \Rightarrow (\neg E_i \land \neg E_c))$$

$$\land$$

$$(A_i \Rightarrow (\neg A_c \land \neg A_d)) \land (A_c \Rightarrow (\neg A_i \land \neg A_d)) \land (A_d \Rightarrow (\neg A_i \land \neg A_c))$$

$$\land$$

$$(A_i \Rightarrow \neg M_c) \land (A_c \Rightarrow (\neg M_i \land \neg M_d)) \land (A_d \Rightarrow \neg M_c)$$

$$\land$$

$$\neg M_i$$

$$\wedge$$
$$(A_i \Rightarrow E_d) \wedge (A_c \Rightarrow E_i) \wedge (A_d \Rightarrow (E_i \wedge E_c))$$

Convertimos cada proposición, una por una, a FNC:

$$M_i \Rightarrow (\neg E_i \wedge \neg A_i) \leftrightarrow \neg M_i \vee (\neg E_i \wedge \neg A_i) \leftrightarrow (\neg M_i \vee \neg E_i) \wedge (\neg M_i \vee \neg A_i)$$
$$E_i \Rightarrow (\neg M_i \wedge \neg A_i) \leftrightarrow \neg E_i \vee (\neg M_i \wedge \neg A_i) \leftrightarrow (\neg E_i \vee \neg M_i) \wedge (\neg E_i \vee \neg A_i)$$
$$A_i \Rightarrow (\neg M_i \wedge \neg E_i) \leftrightarrow \neg A_i \vee (\neg M_i \wedge \neg E_i) \leftrightarrow (\neg A_i \vee \neg M_i) \wedge (\neg A_i \vee \neg E_i)$$
$$M_c \Rightarrow (\neg E_c \wedge \neg A_c) \leftrightarrow \neg M_c \vee (\neg E_c \wedge \neg A_c) \leftrightarrow (\neg M_c \vee \neg E_c) \wedge (\neg M_c \vee \neg A_c)$$
$$E_c \Rightarrow (\neg M_c \wedge \neg A_c) \leftrightarrow \neg E_c \vee (\neg M_c \wedge \neg A_c) \leftrightarrow (\neg E_c \vee \neg M_c) \wedge (\neg E_c \vee \neg A_c)$$
$$A_c \Rightarrow (\neg M_c \wedge \neg E_c) \leftrightarrow \neg A_c \vee (\neg M_c \wedge \neg E_c) \leftrightarrow (\neg A_c \vee \neg M_c) \wedge (\neg A_c \vee \neg E_c)$$
$$M_d \Rightarrow (\neg E_d \wedge \neg A_d) \leftrightarrow \neg M_d \vee (\neg E_d \wedge \neg A_d) \leftrightarrow (\neg M_d \vee \neg E_d) \wedge (\neg M_d \vee \neg A_d)$$
$$E_d \Rightarrow (\neg M_d \wedge \neg A_d) \leftrightarrow \neg E_d \vee (\neg M_d \wedge \neg A_d) \leftrightarrow (\neg E_d \vee \neg M_d) \wedge (\neg E_d \vee \neg A_d)$$
$$A_d \Rightarrow (\neg M_d \wedge \neg E_d) \leftrightarrow \neg A_d \vee (\neg M_d \wedge \neg E_d) \leftrightarrow (\neg A_d \vee \neg M_d) \wedge (\neg A_d \vee \neg E_d)$$
$$M_d \Rightarrow (\neg E_d \wedge \neg A_d) \leftrightarrow \neg M_d \vee (\neg E_d \wedge \neg A_d) \leftrightarrow (\neg M_d \vee \neg E_d) \wedge (\neg M_d \vee \neg A_d)$$
$$E_d \Rightarrow (\neg M_d \wedge \neg A_d) \leftrightarrow \neg E_d \vee (\neg M_d \wedge \neg A_d) \leftrightarrow (\neg E_d \vee \neg M_d) \wedge (\neg E_d \vee \neg A_d)$$
$$A_d \Rightarrow (\neg M_d \wedge \neg E_d) \leftrightarrow \neg A_d \vee (\neg M_d \wedge \neg E_d) \leftrightarrow (\neg A_d \vee \neg M_d) \wedge (\neg A_d \vee \neg E_d)$$
$$(M_i \vee M_c \vee M_d)$$
$$(E_i \vee E_c \vee E_d)$$
$$(A_i \vee A_c \vee A_d)$$
$$M_i \Rightarrow (\neg M_c \wedge \neg M_d) \leftrightarrow \neg M_i \vee (\neg M_c \wedge \neg M_d) \leftrightarrow (\neg M_i \vee \neg M_c) \wedge (\neg M_i \vee \neg M_d)$$
$$M_c \Rightarrow (\neg M_i \wedge \neg M_d) \leftrightarrow \neg M_c \vee (\neg M_i \wedge \neg M_d) \leftrightarrow (\neg M_c \vee \neg M_i) \wedge (\neg M_c \vee \neg M_d)$$
$$M_d \Rightarrow (\neg M_i \wedge \neg M_c) \leftrightarrow \neg M_d \vee (\neg M_i \wedge \neg M_c) \leftrightarrow (\neg M_d \vee \neg M_i) \wedge (\neg M_d \vee \neg M_c)$$
$$E_i \Rightarrow (\neg E_c \wedge \neg E_d) \leftrightarrow \neg E_i \vee (\neg E_c \wedge \neg E_d) \leftrightarrow (\neg E_i \vee \neg E_c) \wedge (\neg E_i \vee \neg E_d)$$
$$E_c \Rightarrow (\neg E_i \wedge \neg E_d) \leftrightarrow \neg E_c \vee (\neg E_i \wedge \neg E_d) \leftrightarrow (\neg E_c \vee \neg E_i) \wedge (\neg E_c \vee \neg E_d)$$
$$E_d \Rightarrow (\neg E_i \wedge \neg E_c) \leftrightarrow \neg E_d \vee (\neg E_i \wedge \neg E_c) \leftrightarrow (\neg E_d \vee \neg E_i) \wedge (\neg E_d \vee \neg E_c)$$
$$A_i \Rightarrow (\neg A_c \wedge \neg A_d) \leftrightarrow \neg A_i \vee (\neg A_c \wedge \neg A_d) \leftrightarrow (\neg A_i \vee \neg A_c) \wedge (\neg A_i \vee \neg A_d)$$
$$A_c \Rightarrow (\neg A_i \wedge \neg A_d) \leftrightarrow \neg A_c \vee (\neg A_i \wedge \neg A_d) \leftrightarrow (\neg A_c \vee \neg A_i) \wedge (\neg A_c \vee \neg A_d)$$
$$A_d \Rightarrow (\neg A_i \wedge \neg A_c) \leftrightarrow \neg A_d \vee (\neg A_i \wedge \neg A_c) \leftrightarrow (\neg A_d \vee \neg A_i) \wedge (\neg A_d \vee \neg A_c)$$
$$A_i \Rightarrow \neg M_c \leftrightarrow \neg A_i \vee \neg M_c$$
$$A_c \Rightarrow (\neg M_i \wedge \neg M_d) \leftrightarrow \neg A_c \vee (\neg M_i \wedge \neg M_d) \leftrightarrow (\neg A_c \vee \neg M_i) \wedge (\neg A_c \vee \neg M_d)$$
$$A_d \Rightarrow \neg M_c \leftrightarrow \neg A_d \vee \neg M_c$$

Tomando en cuenta que si la mosca no se sienta en la silla izquierda, es porque se sentó en la silla derecha o central, entonces:

$$\neg M_i ::== M_c \vee M_d$$
$$A_i \Rightarrow E_d \leftrightarrow \neg A_i \vee E_d$$
$$A_c \Rightarrow E_i \leftrightarrow \neg A_c \vee E_i$$
$$A_d \Rightarrow (E_i \vee E_c) \leftrightarrow \neg A_d \vee (E_i \vee E_c) \leftrightarrow \neg A_d \vee E_i \vee E_c$$

Notemos que para cada fórmula, obtuvimos conjunciones de clausulas, las cuáles son:

$$(\neg M_i \vee \neg E_i) \wedge (\neg M_i \vee \neg A_i)$$

$$(\neg E_i \vee \neg M_i) \wedge (\neg E_i \vee \neg A_i)$$

$$(\neg A_i \vee \neg M_i) \wedge (\neg A_i \vee \neg E_i)$$

$$(\neg M_c \vee \neg E_c) \wedge (\neg M_c \vee \neg A_c)$$

$$(\neg E_c \vee \neg M_c) \wedge (\neg E_c \vee \neg A_c)$$

$$(\neg A_c \vee \neg M_c) \wedge (\neg A_c \vee \neg E_c)$$

$$(\neg M_d \vee \neg E_d) \wedge (\neg M_d \vee \neg A_d)$$

$$(\neg E_d \vee \neg M_d) \wedge (\neg E_d \vee \neg A_d)$$

$$(\neg A_d \vee \neg M_d) \wedge (\neg A_d \vee \neg E_d)$$

$$(\neg M_d \vee \neg E_d) \wedge (\neg M_d \vee \neg A_d)$$

$$(\neg E_d \vee \neg M_d) \wedge (\neg E_d \vee \neg A_d)$$

$$(\neg A_d \vee \neg M_d) \wedge (\neg A_d \vee \neg E_d)$$

$$M_i \vee M_c \vee M_d$$

$$E_i \vee E_c \vee E_d$$

$$A_i \vee A_c \vee A_d$$

$$(\neg M_i \vee \neg M_c) \wedge (\neg M_i \vee \neg M_d)$$

$$(\neg M_c \vee \neg M_i) \wedge (\neg M_c \vee \neg M_d)$$

$$(\neg M_d \vee \neg M_i) \wedge (\neg M_d \vee \neg M_c)$$

$$(\neg E_i \vee \neg E_c) \wedge (\neg E_i \vee \neg E_d)$$

$$(\neg E_c \vee \neg E_i) \wedge (\neg E_c \vee \neg E_d)$$

$$(\neg E_d \vee \neg E_i) \wedge (\neg E_d \vee \neg E_c)$$

$$(\neg A_i \vee \neg A_c) \wedge (\neg A_i \vee \neg A_d)$$

$$(\neg A_c \vee \neg A_i) \wedge (\neg A_c \vee \neg A_d)$$

$$(\neg A_d \vee \neg A_i) \wedge (\neg A_d \vee \neg A_c)$$

$$\neg A_i \vee \neg M_c$$

$$(\neg A_c \vee \neg M_i) \wedge (\neg A_c \vee \neg M_d)$$

$$\neg A_d \vee \neg M_c$$

$$M_c \vee M_d$$

$$\neg A_i \vee E_d$$

$$\neg A_c \vee E_i$$

$$\neg A_d \vee E_i \vee E_c$$

Por lo que finalmente, quitando a las conjunciones, obtenemos cada claúsula individualemente como:

$$\neg M_i \vee \neg E_i$$

$$\neg M_i \vee \neg A_i$$

$$\neg E_i \vee \neg M_i$$

$$\neg A_i \vee \neg M_i$$
$$\neg A_i \vee \neg E_i$$
$$\neg M_c \vee \neg E_c$$
$$\neg M_c \vee \neg A_c$$
$$\neg E_c \vee \neg M_c$$
$$\neg E_c \vee \neg A_c$$
$$\neg A_c \vee \neg M_c$$
$$\neg A_c \vee \neg E_c$$
$$\neg M_d \vee \neg E_d$$
$$\neg M_d \vee \neg A_d$$
$$\neg E_d \vee \neg M_d$$
$$\neg E_d \vee \neg A_d$$
$$\neg A_d \vee \neg M_d$$
$$\neg A_d \vee \neg E_d$$
$$M_i \vee M_c \vee M_d$$
$$E_i \vee E_c \vee E_d$$
$$A_i \vee A_c \vee A_d$$
$$\neg M_i \vee \neg M_c$$
$$\neg M_i \vee \neg M_d$$
$$\neg M_c \vee \neg M_i$$
$$\neg M_c \vee \neg M_d$$
$$\neg M_d \vee \neg M_i$$
$$\neg M_d \vee \neg M_c$$
$$\neg E_i \vee \neg E_c$$
$$\neg E_i \vee \neg E_d$$
$$\neg E_c \vee \neg E_i$$
$$\neg E_c \vee \neg E_d$$
$$\neg E_d \vee \neg E_i$$
$$\neg E_d \vee \neg E_c$$
$$\neg A_i \vee \neg A_c$$
$$\neg A_i \vee \neg A_d$$
$$\neg A_c \vee \neg A_i$$
$$\neg A_c \vee \neg A_d$$
$$\neg A_d \vee \neg A_i$$
$$\neg A_d \vee \neg A_c$$
$$\neg A_i \vee \neg M_c$$
$$\neg A_c \vee \neg M_i$$

$$\neg A_c \vee \neg M_d$$

$$\neg A_d \vee \neg M_c$$

$$M_c \vee M_d$$

$$\neg A_i \vee E_d$$

$$\neg A_c \vee E_i$$

$$\neg A_d \vee E_i \vee E_c$$

La conjunción de todas las cláusulas nos da el modelo del problema en la forma FNC, una instancia del problema SAT.

6. Una cláusula $\mathcal{C} = \ell_1 \vee \ldots \vee \ell_k$ es de Horn si a lo más una de sus literales ℓ_i es positiva. Por ejemplo $\neg t \vee p \vee \neg q \vee \neg s$ es de Horn y $\neg t \vee p \vee q$ no es de Horn.

   a) ¿Existen cláusulas de Horn unitarias? En caso afirmativo, de qué forma son.

   Sí, las cláusulas con una única literal. Esto es, sea p una variable proposicional, tal que p puede ser p ó $\neg p$, ya que se preservaría el hecho de que solo haya una literal positiva, pues ambas son cláusulas de Horn. Es decir, tendremos: $\mathcal{C} = \ell$ en dóne ℓ puede estar o no negada.

   b) ¿Existen cláusulas de Horn positivas? En caso afirmativo, de qué forma son.

   Sí, sólo las cláusulas unitarias. Es decir, las cláusulas que tienen a lo más una literal. Esto porque por definición, una cláusula es positiva si todas sus literales son positivas. Si existe más de una literal positiva en la cláusula, ya no es cláusula de Horn. Estas tendrían la misma forma del inciso anterior.

   c) ¿Existen cláusulas de Horn negativas? En caso afirmativo, de qué forma son.

   Al contrario de las cláusulas positivas, las cláusulas negativas son aquellas cuyas literales son negativas. Notemos que por definición de cláusula de Horn, solo puede haber a lo más una literal positiva. Teniendo esto en cuenta, veamos que las cláusulas negativas hay 0 literales positivas, por lo que la definición se mantiene. Estas son de la forma $\mathcal{C} = \neg\ell_1 \vee \ldots \vee \neg\ell_n$, con $i \in \{1, ..., n\}$ en donde ℓ_i es variable proposicional.

   d) Una fórmula es de Horn si en su forma normal conjuntiva todas las cláusulas son de Horn. Dada una fórmula cualquiera A, ¿es posible hallar una fórmula de Horn equivalente a A?

   No es posible. De hecho, veamos que que si tenemos como fórmula a $p \vee q$ es claro que no es posible encontrar una fórmula de Horn equivalente a esta fórmula.

   e) Demuestre o refute la siguiente propiedad: un resolvente de dos cláusulas de Horn es necesariamente una cláusula de Horn.

   Demostración.

   Sean φ y ψ dos cláusulas de Horn. Supongamos que hay resolvente.

   P.D El resolvente es cláusula de Horn.

   Si hay resolvente, entonces ya sea en φ o en ψ había exactamente una ℓ literal positiva. Esto por definición de cláusula de Horn y porque debe haber al menos una literal positiva para poder resolver por resolución binaria usando su complemento.

   Por otro lado, la cláusula restante puede tener a lo más una literal positiva o ninguna. Tomando esto en cuenta, cuando se realice la resolución binaria, ℓ y ℓ^c se eliminan, obteniendo así dos posibles casos:

   1. El resolvente tiene exactamente una literal positiva.
   2. El resolvente no tiene ninguna literal positiva.

Por lo tanto, el resolvente es cláusula de Horn. □

7. Sea H un conjunto de cláusulas de Horn no positivas. Muestre que H es satisfacible. ¿Es esto cierto si existen cláusulas positivas en H?

Demostración.

P.D Para demostrar esto, es suficiente encontrar un modelo que satisfaga a todas las cláusulas de H.

Recordemos que una cláusula negativa de Horn no tiene literales positivas y tiene al menos dos literales, es decir, una cláusula negativa de Horn es una disyunción de literales negativas.

Por definición, el conjunto H contiene solo cláusulas de Horn negativas, es decir, $H = C_1, C_2, \ldots, C_k$, en dónde para toda C_i, tenemos que $C_i = (\neg l_{i_1} \vee \neg l_{i_2} \vee \cdots \vee \neg l_{i_n})$

Notemos que es posible construir un modelo que satisfaga a todas las cláusulas de H, usando la propia definición de la disyunción, en donde si existe una alguna l_{i_n} en C_i verdadera, entonces la disyunción completa se hace verdadera. Así pues, asignemos un valor de verdad `true` a una de las literales y el resto dejémoslas como `false`.

Por lo tanto, la conjunción de todas las disyunciones es verdadera y como encontramos un modelo que satisface a todas las cláusulas de H, entonces H es satisfacible.

□