Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea Examen II

Lógica Computacional

Dafne Bonilla Reyes

Profesor: Javier Enríquez Mendoza

Ayudante: Kevin Axel Prestegui Ramos
Ayudante: Karla Denia Salas Jiménez
Ayudante Laboratorio: Ramón Arenas Ayala
Ayudante Laboratorio: Oscar Fernando Millán Pimentel

Mayo 2023

Tarea Examen 2: Lógica de Primer Orden

1. Decide si los siguientes argumentos lógicos son correctos o exhibe un contraejemplo mostrando paso a paso la prueba o construcción del contraejemplo.

   - $\exists x\,(Ax \wedge \neg Bx), \exists x\,(Bx \wedge \neg Ax) \;/\; \therefore \forall x\,(Ax \vee Bx)$

     Sea M el universo de discurso que se construye como $M = \{\text{armadillo, colibrí, nutria, tortuga}\}$ e $\mathcal{I}$ la función de interpretación en M que interpreta los siguientes predicados como se indica:

     1. Ax: x puede volar.
     2. Bx: x puede nadar.

     Veamos cuáles son las interpretaciones para las hipótesis y la conclusión dada. Para facilitar la notación usaremos la primera letra de cada animal para representarlo en las fórmulas. Así tenemos:

     - $\exists x\,(Ax \wedge \neg Bx)$

       La interpretación $\mathcal{I}(\exists x\,(Ax \wedge \neg Bx)) = 1$ si exhibimos una $x \in M$ tal que cumpla la fórmula. Observemos que esta x es:
       $$\mathcal{I}(Ac \wedge \neg Bc) = 1$$
       Ya que el colibrí puede volar, pero no puede nadar.
       $$\therefore \mathcal{I}(\exists x\,(Ax \wedge \neg Bx)) = 1$$

     - $\exists x\,(Bx \wedge \neg Ax)$

       La interpretación $\mathcal{I}(\exists x\,(Bx \wedge \neg Ax)) = 1$ si exhibimos una $x \in M$ tal que cumpla la fórmula. Observemos que esta x es:
       $$\mathcal{I}(Bn \wedge \neg An) = 1$$
       Ya que la nutria puede nadar, pero no puede volar.
       $$\therefore \mathcal{I}(\exists x\,(Bx \wedge \neg Ax)) = 1$$

     - $\forall x\,(Ax \vee Bx)$

       Finalmente, para la interpretación $\mathcal{I}(\forall x\,(Ax \vee Bx)) = 0$ si exhibimos una $x \in M$ tal que no cumpla la fórmula. Observemos que esta x es:
       $$\mathcal{I}(Aa \vee Ba) = 0$$
       Ya que el armadillo no puede volar y tampoco puede nadar.
       $$\therefore \mathcal{I}(\forall x\,(Ax \vee Bx)) = 0$$

     $\therefore$ Dado que las hipótesis fueron verdaderas y la conclusión falsa, podemos decir que el argumento es incorrecto.

   - $\exists x\,(Ax \to (Bx \vee Cx)), \exists x\,Ax \;/\; \therefore \exists x\,Bx$

     Sea M el universo de discurso tal que $M = \{\text{computólogo, ingeniero, internacionalista}\}$ e $\mathcal{I}$ la función de interpretación en M que interpreta los siguientes predicados como se indica:

     1. Ax: x puede programar en Haskell.
     2. Bx: x puede resolver el problema del paro.
     3. Cx: x puede pasar con 10 el laboratorio de lógica computacional.

     Veamos cuáles son las interpretaciones para las hipótesis y la conclusión dada. Para facilitar la notación usaremos las letras c para representar a un computólogo, in para representar a un ingeniero e it para representarlo a un internacionalista. Así tenemos:

- $\exists x\,(Ax \to (Bx \lor Cx))$

  La interpretación $\mathcal{I}(\exists x\,(Ax \to (Bx \lor Cx))) = 1$ si exhibimos una $x \in M$ tal que cumpla la fórmula. Observemos que esta x es:

  $$\mathcal{I}(Ac \to (Bc \lor Cc)) = 1$$

  Ya que si un computólogo puede programar en Haskell, entonces también puede pasar con 10 el laboratorio de lógica computacional.

  $$\therefore \mathcal{I}(\exists x\,(Ax \to (Bx \lor Cx))) = 1$$

- $\exists x\, Ax$

  La interpretación $\mathcal{I}(\exists x\, Ax) = 1$ si exhibimos una $x \in M$ tal que cumpla la fórmula. Observemos que esta x es:

  $$\mathcal{I}(Ac) = 1$$

  Ya que un computólogo puede programar en Haskell.

  $$\therefore \mathcal{I}(\exists x\, Ax) = 1$$

- $\exists x\, Bx$

  Finalmente, la interpretación $\mathcal{I}(\exists x\, Bx) = 0$ si ninguna $x \in M$ cumpla la fórmula. Esto es:

  $$\mathcal{I}(Bc) = 0 \quad \mathcal{I}(Bin) = 0 \quad \mathcal{I}(Bit) = 0$$

  Ya que nadie no puede resolver el problema del paro.

  $$\therefore \mathcal{I}(\exists x\, Bx) = 0$$

$\therefore$ Dado que las hipótesis fueron verdaderas y la conclusión falsa, podemos decir que el argumento es incorrecto.

2. Realiza las siguientes sustituciones indicando los pasos más importantes, en particular aquellos donde se usa la α-equivalencia:

   - $\big(\forall x\,(Ruvw \lor Px) \to \exists y\,(Pfy \lor Ryxa)\big)[u, v, w, x, y := fa, gx, y, hu, fa]$

     Sean $\{u, v, w, x, y\} = \vec{x}$, $\{fa, gx, y, hu, fa\} = \vec{t}$ y para facilitar la notación en el proceso de sustitución $[u, v, w, x, y := fa, gx, y, hu, fa] = \tau$.

     Comencemos la sustitución haciendo una α-equivalencia de x con $[x := k]$. Esto porque x está ligada y $x \in \vec{x}$, obteniendo así:

     $$\sim_\alpha \big(\forall k\,(Ruvw \lor Pk) \to \exists y\,(Pfy \lor Ryxa)\big)\,\tau$$

     Debido a que y también es una variable ligada y $y \in \vec{x}$, entonces hagamos otra α-equivalencia con $[y := n]$:

     $$\sim_\alpha \big(\forall k\,(Ruvw \lor Pk) \to \exists n\,(Pfn \lor Rnxa)\big)\,\tau$$

     Notemos qué, de esta manera, ya es posible aplicar las reglas de sustitución para cada variable ligada y libre. Recordemos que la sustitución no puede reconocer en si misma en donde se encuentran las variables, por lo que desarrollando tenemos:

     $$= \forall k\,(Ruvw \lor Pk)\,\tau \to \exists n\,(Pfn \lor Rnxa)\,\tau$$

     $$= \forall k\,(Ruvw\,\tau \lor Pk\,\tau) \to \exists n\,(Pfn\,\tau \lor Rnxa\,\tau)$$

     Por lo que, finalmente al aplicar la sustitución τ a cada variable obtenemos:

     $$= \forall k\,(Rfagxy \lor Pk) \to \exists n\,(Pfn \lor Rnhua)$$

- $\forall x\,(Sx \to (\neg Qyx \lor \exists z\, Rzx)[y \coloneqq z] \land \forall y\, Qxy)[z \coloneqq x]$

  Sean $\{y, z\} = \vec{x}$, $\{z, x\} = \vec{t}$ y para facilitar la notación en el proceso de sustitución $[y \coloneqq z] = \tau$ y $[z \coloneqq x] = \tau'$.

  Comencemos la sustitución haciendo una α-equivalencia de z con $[z \coloneqq k]$. Esto porque z está ligada y $z \in \vec{x}$ y $Var(\vec{t})$, obteniendo así:

$$\sim_\alpha \forall x\,(Sx \to (\neg Qyx \lor \exists k\, Rkx)\tau \land \forall y\, Qxy)\tau'$$

  Debido a que x también es una variable ligada y $x \in Var(\vec{t})$, entonces hagamos otra α-equivalencia con $[x \coloneqq n]$:

$$\sim_\alpha \forall n\,(Sn \to (\neg Qyn \lor \exists k\, Rkn)\tau \land \forall y\, Qny)\tau'$$

  Notemos qué, de esta manera, ya es posible aplicar las reglas de sustitución para cada variable ligada y libre. Recordemos que la sustitución no puede reconocer en si misma en donde se encuentran las variables, por lo que tendremos que desarrollar. Comencemos por la sustitución τ:

$$= (\neg Qyn \lor \exists k\, Rkn)\tau$$
$$= \neg Qyn\, \tau \lor \exists k\, Rkn\, \tau$$
$$= \neg (Qyn\tau) \lor \exists k\, Rkn$$
$$= \neg (Qzn) \lor \exists k\, Rkn$$
$$= \neg Qzn \lor \exists k\, Rkn$$

  Y siguiendo con la sustitución τ' tenemos:

$$= \forall n\,(Sn \to (\neg Qzn \lor \exists k\, Rkn) \land \forall y\, Qny)\tau'$$
$$= \forall n\,\big((Sn \to (\neg Qzn \lor \exists k\, Rkn) \land \forall y\, Qny)\tau'\big)$$
$$= \forall n\,(Sn\tau' \to (\neg Qzn \lor \exists k\, Rkn)\tau' \land \forall y\, Qny\tau')$$
$$= \forall n\,(Sn\tau' \to (\neg Qzn\tau' \lor \exists k\, Rkn\tau') \land \forall y\, Qny\tau')$$

  Por lo que, finalmente al aplicar la sustitución τ' a cada variable obtenemos:

$$= \forall n\,(Sn \to (\neg Qxn \lor \exists k\, Rkn) \land \forall y\, Qny)$$

- $(\forall v\, \exists y\, Svyz \lor \exists z\, Pfvgyz)[w \coloneqq fu, u \coloneqq hyz, y \coloneqq b]$ en donde $f^{(1)}, g^{(1)}$

  Sean $\{w, u, y\} = \vec{x}$, $\{fu, hyz, b\} = \vec{t}$ y para facilitar la notación en el proceso de sustitución $[w, u, y \coloneqq fu, hyz, b] = \tau$.

  Usando la aridad de las funciones dada, reescribimos:

$$(\forall v\, \exists y\, Svyz \lor \exists z\, P(f(v), g(y), z))\tau$$

  Comencemos la sustitución haciendo una α-equivalencia de y con $[y \coloneqq k]$. Esto porque y está ligada y $y \in \vec{x}$, obteniendo así:

$$\sim_\alpha (\forall v\, \exists k\, Svkz \lor \exists z\, P(f(v), g(y), z))\tau$$

  Debido a que z también es una variable ligada y $z \in Var(\vec{t})$, entonces hagamos otra α-equivalencia con $[z \coloneqq n]$:

$$\sim_\alpha (\forall v\, \exists k\, Svkz \lor \exists n\, P(f(v), g(y), n))\tau$$

Notemos qué, de esta manera, ya es posible aplicar las reglas de sustitución para cada variable ligada y libre. Recordemos que la sustitución no puede reconocer en si misma en donde se encuentran las variables, por lo que desarrollando tenemos:

$$= (\forall v\, \exists k\, Svkz)\, \tau \vee (\exists n\, P(f(v), g(y), n))\tau$$

$$= \forall v\, \exists k\, Svkz\tau \vee \exists n\, P(f(v), g(y), n)\tau$$

Por lo que, finalmente al aplicar la sustitución τ a cada variable obtenemos:

$$= \forall v\, \exists k\, Svkz \vee \exists n\, P(f(v), g(b), n)$$

3. Sea $M = \{1, 3, 5, 15\}$ e $\mathcal{I}$ la función de interpretación en M que interpreta los siguientes predicados como se indica:

   - Ex: x es par.
   - Mxy: x es múltiplo de y.
   - Lxy: x es menor que y.

   Verifica si se cumple lo siguiente o en caso contrario da un contraejemplo:

   a) $\models \exists y\, Ey \vee \forall x \neg Ex$

   Dadas las interpretaciones de fórmulas con respecto a un estado de variable, notemos que la interpretación $\mathcal{I}(\exists y\, Ey \vee \forall x \neg Ex) = 1$ si y solo si $\mathcal{I}(\exists y\, Ey) = 1$ ó $\mathcal{I}(\forall x \neg Ex) = 1$.

   Primero, veamos que la interpretación $\mathcal{I}(\exists y\, Ey) = 0$, ya que no existe ningún número par en nuestro universo de discurso M.

   Por otro lado, para $\mathcal{I}(\forall x \neg Ex)$ tendremos que verificar que la interpretación se cumpla para cada x en el universo de discurso, es decir:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{I}(\neg E1) = 1 & \mathcal{I}(\neg E3) = 1 \\ \mathcal{I}(\neg E5) = 1 & \mathcal{I}(\neg E15) = 1 \end{array}$$

   Con esto, podemos afirmar que $\mathcal{I}(\forall x \neg Ex) = 1$, por lo que, $\mathcal{I}(\exists y\, Ey \vee \forall x \neg Ex) = 1$.
   $\therefore M \models \exists y\, Ey \vee \forall x \neg Ex$

   b) $\models \forall x\, \forall y\, (Lxy \to \neg Lyx)$

   Dadas las interpretaciones de fórmulas con respecto a un estado de variable, notemos que la interpretación $\mathcal{I}(\forall x\, \forall y\, (Lxy \to \neg Lyx)) = 0$ si y solo si $\mathcal{I}(\forall x\, \forall y\, Lxy) = 1$ y $\mathcal{I}(\forall x\, \forall y\, \neg Lyx) = 0$.

   Primero, para $\mathcal{I}(\forall x\, \forall y\, Lxy)$ tendremos que verificar que la interpretación se cumpla para cada x y para cada y en el universo de discurso. Sin embargo, podemos exhibir al menos un caso en el que esta interpretación no se cumple:

$$\mathcal{I}(L15, 1) = 0$$

   Esto rompe con el criterio para la interpretación de un $\mathcal{I}(\forall x\, \varphi)$, por lo que podemos afirmar que $\mathcal{I}(\forall x\, \forall y\, Lxy) = 0$, y, dado que la hipótesis de la implicación es falsa, sin importar la interpretación de la conclusión, la implicación se hace verdadera, es decir, $\mathcal{I}(\forall x\, \forall y\, (Lxy \to \neg Lyx)) = 1$.
   $\therefore M \models \forall x\, \forall y\, (Lxy \to \neg Lyx)$

   c) $\models \forall x\, \exists y\, Lxy \wedge \forall x\, \exists y\, Mxy$

   Dadas las interpretaciones de fórmulas con respecto a un estado de variable, notemos que la interpretación $\mathcal{I}(\forall x\, \exists y\, Lxy \wedge \forall x\, \exists y\, Mxy) = 1$ si y solo si $\mathcal{I}(\forall x\, \exists y\, Lxy) = 1$ y $\mathcal{I}(\forall x\, \exists y\, Mxy) = 1$.

   Primero, para $\mathcal{I}(\forall x\, \exists y\, Lxy)$ tendremos que verificar que la interpretación se cumpla para cada x y para cada y en el universo de discurso. Sin embargo, podemos exhibir al menos un caso en el que esta interpretación no se cumple:

$$\mathcal{I}(L15, 3) = 0$$

En el caso de $x = 15$ no existe ninguna y que haga verdadera esta interpretación, por lo que podemos afirmar que $\mathcal{I}(\forall x\, \exists y\, Lxy) = 0$, y, dado que uno de los 2 argumentos del $\wedge$ es falso, la interpretación completa se hará falsa, es decir, $\mathcal{I}(\forall x\, \exists y\, Lxy \wedge \forall x\, \exists y\, Mxy) = 0$.
$\therefore M \not\models \forall x\, \exists y\, Lxy \wedge \forall x\, \exists y\, Mxy$

d) $\models \forall x\, (Ex \to Mxa) \to \neg\exists x\, Lxa$ en donde $\mathcal{I}(a) = 1$

Dadas las interpretaciones de fórmulas con respecto a un estado de variable, notemos que la interpretación $\mathcal{I}(\forall x\, (Ex \to Mxa) \to \neg\exists x\, Lxa) = 0$ si y solo si $\mathcal{I}(\forall x\, (Ex \to Mxa)) = 1$ y $\mathcal{I}(\neg\exists x\, Lxa) = 0$.

Primero, para $\mathcal{I}(\neg\exists x\, Lxa)$ tendremos que verificar que la interpretación se cumpla para alguna x en el universo de discurso. Sin embargo, primero veamos como se comporta la negación de un $\exists x$ usando equivalencias lógicas:

$$\mathcal{I}(\neg\exists x\, Lxa) = \mathcal{I}(\forall x\, \neg Lxa)$$

Ahora, veamos que esta interpretación es verdadera, ya que para todo x en el universo de discurso, todos son mayores o iguales que 1, esto es:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{I}(\neg L1, 1) = 1 & \mathcal{I}(\neg L3, 1) = 1 \\ \mathcal{I}(\neg L5, 1) = 1 & \mathcal{I}(\neg L15, 1) = 1 \end{array}$$

Con esto, podemos afirmar que $\mathcal{I}(\neg\exists x\, Lxa) = 1$, y dado que la conclusión de la implicación es verdadera, entonces sin importar la interpretación de la hipótesis, la implicación será verdadera, es decir, $\mathcal{I}(\forall x\, (Ex \to Mxa) \to \neg\exists x\, Lxa) = 1$.
$\therefore M \models \forall x\, (Ex \to Mxa) \to \neg\exists x\, Lxa$ en donde $\mathcal{I}(a) = 1$

4. Decide si los siguientes conjuntos son unificables mediante el algoritmo de Martelli-Montanari, haciendo explícito el proceso de composición de sustituciones para calcular el **umg** final en cada caso.

- $W = \{Paxfgy,\ Pzfzfw\}$ con $P^{(3)}, f^{(1)}, g^{(1)}$.

Usando la aridad de las funciones reescribimos W:

$$W = \{P(a, x, f(g(y)),\ P(z, f(z), f(w))\}$$

Sea μ el **umg** de W. Comencemos el algoritmo de Martelli-Montanari:

1.	$\{P(a, x, f(g(y)) = P(z, f(z), f(w))\}$	Entrada
2.	$\{a = z, x = f(z), f(g(y)) = f(w)\}$	$\text{DESC}, 1$
3.	$\{z = a, x = f(z), f(g(y)) = f(w)\}$	$\text{SWAP}, 2$
4.	$\{x = f(a), f(g(y)) = f(w)\}$	$\text{SUST}, 3,\ [z := a]$
5.	$\{x = f(a), g(y) = w\}$	$\text{DESC}, 4$
6.	$\{g(y) = w\}$	$\text{SUST}, 5,\ [x := f(a)]$
7.	$\{w = g(y)\}$	$\text{SWAP}, 6$
8.	$\varnothing$	$\text{SUST}, 7, [w := g(y)]$

El unificador se obtiene de componer las sustituciones utilizadas desde el inicio, por lo que podemos decir que:

$$\mu = [z := a, x := f(a), w := g(y)]$$

- $W = \{Qfahzwwhwzzu,\ Qfxwwyuz\}$ con $Q^{(4)}, f^{(3)}, h^{(2)}$.

Usando la aridad de las funciones reescribimos W:

$$W = \{Q(f(a, h(z, w), w), h(w, z), z, u),\ Q(f(x, w, w), y, u, z)\}$$

Sea μ el **umg** de W. Comencemos el algoritmo de Martelli-Montanari:

1.	$\{Q(f(a,h(z,w),w),h(w,z),z,u) = Q(f(x,w,w),y,u,z)\}$	Entrada
2.	$\{f(a,h(z,w),w) = f(x,w,w), h(w,z) = y, z = u, u = z\}$	DESC, 1
3.	$\{f(a,h(z,w),w) = f(x,w,w), h(w,z) = y, z = z\}$	SUST, 2, $[u := z]$
4.	$\{f(a,h(z,w),w) = f(x,w,w), h(w,z) = y\}$	ELIM, 3
5.	$\{a = x, h(z,w) = w, w = w, h(w,z) = y\}$	DESC, 4
6.	$\{a = x, h(z,w) = w, h(w,z) = y\}$	ELIM, 5
7.	`X`	SFALLA, 6

Obtuvimos `fail` al realizar el algoritmo de unificación, por lo que podemos decir que W no es unificable, y, por lo tanto, no tiene **umg**.

5. Transforma las siguientes fórmulas a su forma clausular, indica todas las formas normales necesarias por separado.

   a) $\forall x\, \exists y\, \big(Pgfaxx \to \neg(Qafxz \vee Pxfx)\big) \to \exists z\, Qaxfz$

   Para llegar a la forma clausular de la fórmula primero es necesario seguir una serie de pasos. Comencemos el proceso:

   1. Rectificación

      Hacemos una α-equivalencia de z con $[z := k]$. Esto porque hay presencia libre y ligada de z, obteniendo así:
      $$\forall x\, \exists y\, \big(Pgfaxx \to \neg(Qafxz \vee Pxfx)\big) \to \exists k\, Qaxfk$$
      Debido a que x también es una variable con presencia libre y ligada, hacemos otra α-equivalencia con $[x := w]$:
      $$\forall w\, \exists y\, \big(Pgfaww \to \neg(Qafwz \vee Pwfw)\big) \to \exists k\, Qaxfk$$
      Y eliminamos los cuantificadores vacuos:
      $$\forall w\, \big(Pgfaww \to \neg(Qafwz \vee Pwfw)\big) \to \exists k\, Qaxfk$$

   2. Forma Normal Negativa

      Usando equivalencias lógicas obtenemos:
      $$\forall w\, \big(\neg Pgfaww \vee \neg(Qafwz \vee Pwfw)\big) \to \exists k\, Qaxfk$$
      $$\forall w\, \big(\neg Pgfaww \vee (\neg Qafwz \wedge \neg Pwfw)\big) \to \exists k\, Qaxfk$$
      $$\neg \forall w\, \big(\neg Pgfaww \vee (\neg Qafwz \wedge \neg Pwfw)\big) \vee \exists k\, Qaxfk$$
      $$\exists w \neg\, \big(\neg Pgfaww \vee (\neg Qafwz \wedge \neg Pwfw)\big) \vee \exists k\, Qaxfk$$
      $$\exists w\, \big(Pgfaww \wedge \neg(\neg Qafwz \wedge \neg Pwfw)\big) \vee \exists k\, Qaxfk$$
      $$\exists w\, \big(Pgfaww \wedge (Qafwz \vee Pwfw)\big) \vee \exists k\, Qaxfk$$

   3. Forma Normal Prenex

      Pasamos todos los cuantificadores al principio de la fórmula usando equivalencias lógicas:
      $$\exists w\, \exists k\, \big(Pgfaww \wedge (Qafwz \vee Pwfw) \vee Qaxfk\big)$$

   4. Skolemización

      Eliminamos los cuantificadores existenciales y omitimos los universales:
      $$\exists w\, \big(Pgfaww \wedge (Qafwz \vee Pwfw) \vee Qaxfc\big)$$
      $$Pgfabb \wedge (Qafbz \vee Pbfb) \vee Qaxfc$$

5. Forma Clausular

   Finalmente, obtenemos la forma clausular de la fórmula haciendo sustitución sobre las variables repetidas, esto es $[a := d]$, $[a := e]$, $[b := h]$, $[b := j]$, $[b := h]$, $[f := m]$, $[f := n]$, $[f := o]$.

$$Pgfabb \wedge (Qdmhz \vee Pbfb) \vee Qaxfc$$

$$Pgfabb \wedge (Qdmbz \vee Pjnj) \vee Qexfc$$

$$Pgfabb \wedge (Qdmbz \vee Pjnj) \vee Qexoc$$

$$Pgfabb \wedge Qdmbz \vee Pgfabb \wedge Pjnj \vee Qexoc$$

   Por lo que la forma clausular de la fórmula es:

$$Pgfabb \wedge (Qdmbz \vee Pgfabb) \wedge (Pjnj \vee Qexoc)$$

b) $\forall x \, \exists y \, \forall y \, Pagxy \wedge \neg\big(\forall x \, Qxfza \vee \forall x \, Qxfzb\big)$

Para llegar a la forma clausular de la fórmula primero es necesario seguir una serie de pasos. Comencemos el proceso:

1. Rectificación

   Eliminamos los cuantificadores de las mismas variables con alcances ajenos:

$$\forall x \, \forall y \, Pagxy \wedge \neg\big(\forall x \, Qxfza \vee \forall x \, Qxfzb\big)$$

   Hacemos una α-equivalencia de x con $[x := k]$ y $[x := w]$. Esto porque hay presencia libre y ligada de x, obteniendo así:

$$\forall k \, \forall y \, Pagky \wedge \neg\big(\forall x \, Qxfza \vee \forall w \, Qwfzb\big)$$

2. Forma Normal Negativa

   Usando equivalencias lógicas obtenemos:

$$\forall k \, \forall y \, Pagky \wedge \neg\forall x \, Qxfza \wedge \neg\forall w \, Qwfzb$$

$$\forall k \, \forall y \, Pagky \wedge \exists x \, \neg Qxfza \wedge \exists w \, \neg Qwfzb$$

3. Forma Normal Prenex

   Pasamos todos los cuantificadores al principio de la fórmula usando equivalencias lógicas:

$$\forall k \, \forall y \, \exists x \, \exists w \, (Pagky \wedge \neg Qxfza \wedge \neg Qwfzb)$$

4. Skolemización

   Eliminamos los cuantificadores existenciales y omitimos los universales:

$$\forall k \, \forall y \, \exists x \, (Pagky \wedge \neg Qxfza \wedge \neg Qh(k,y)fzb)$$

$$\forall k \, \forall y \, (Pagky \wedge \neg Qj(k,y)fza \wedge \neg Qh(k,y)fzb)$$

$$Pagky \wedge \neg Qj(k,y)fza \wedge \neg Qh(k,y)fzb$$

5. Forma Clausular

   Finalmente, obtenemos la forma clausular de la fórmula haciendo sustitución sobre las variables repetidas, esto es $[k := w]$, $[k := m]$, $[y := u]$ y $[y := m]$.

$$Pagky \wedge \neg Qj(w,u)fza \wedge \neg Qh(k,y)fzb$$

$$Pagky \wedge \neg Qj(w,u)fza \wedge \neg Qh(m,n)fzb$$

   Por lo que la forma clausular de la fórmula es:

$$Pagky \wedge \neg Qj(w,u)fza \wedge \neg Qh(m,n)fzb$$

c) $\neg\forall x\,\big(Pxz \vee \exists z\, Qxyz\big) \vee \exists y\, Pfay$

Para llegar a la forma clausular de la fórmula primero es necesario seguir una serie de pasos. Comencemos el proceso:

1. Rectificación

   Hacemos una α-equivalencia de z con $[z := w]$. Esto porque hay presencia libre y ligada de z, obteniendo así:

   $$\neg\forall x\,\big(Pxz \vee \exists w\, Qxyw\big) \vee \exists y\, Pfay$$

   Debido a que y también es una variable con presencia libre y ligada, hacemos otra α-equivalencia con $[y := k]$:

   $$\neg\forall x\,\big(Pxz \vee \exists w\, Qxyw\big) \vee \exists k\, Pfak$$

2. Forma Normal Negativa

   Usando equivalencias lógicas obtenemos:

   $$\exists x \neg\big(Pxz \vee \exists w\, Qxyw\big) \vee \exists k\, Pfak$$

   $$\exists x\,\big(\neg Pxz \wedge \neg\exists w\, Qxyw\big) \vee \exists k\, Pfak$$

   $$\exists x\,\big(\neg Pxz \wedge \forall w\, \neg Qxyw\big) \vee \exists k\, Pfak$$

3. Forma Normal Prenex

   Pasamos todos los cuantificadores al principio de la fórmula usando equivalencias lógicas:

   $$\exists x\, \forall w\, \exists k\,\big(\neg Pxz \wedge \neg Qxyw \vee Pfak\big)$$

4. Skolemización

   Eliminamos los cuantificadores existenciales y omitimos los universales:

   $$\exists x\, \forall w\,\big(\neg Pxz \wedge \neg Qxyw \vee Pfag(w)\big)$$

   $$\forall w\,\big(\neg Pcz \wedge \neg Qcyw \vee Pfag(w)\big)$$

   $$\neg Pcz \wedge \neg Qcyw \vee Pfag(w)$$

5. Forma Clausular

   Finalmente, obtenemos la forma clausular de la fórmula haciendo sustitución sobre las variables repetidas, esto es $[w := u]$ y $[c := b]$.

   $$\neg Pcz \wedge \neg Qcyw \vee Pfag(u)$$

   $$\neg Pcz \wedge \neg Qbyw \vee Pfag(u)$$

   Por lo que la forma clausular de la fórmula es:

   $$\neg Pcz \wedge (\neg Qbyw \vee Pfag(u))$$

6. Considere la siguiente información:

   - Cualquier objeto es rojo, verde o azul.
   - Los objetos rojos están a la izquierda de los objetos verdes.
   - La palangana está a la derecha del huacal.
   - El huacal es verde pero la palangana no.

Realice lo siguiente:

- Verifique si la palangana es azul de manera informal, es decir argumentando en español.

  Dado que los objetos rojos están a la izquierda de los verdes y el huacal es verde, entonces los objetos rojos están a la izquierda del huacal. Tenemos que la palangana está a la derecha del huacal, por lo que no es roja; además, la palangana no es verde. Como cualquier objeto es rojo, verde o azul y la palangana no es ni roja ni verde, entonces la palangana es azul.

- ¿Qué información implícita, es decir, diferente a las cuatro premisas dadas, utilizó en el argumento informal?

  a) Si un objeto es de un color, entonces no puede ser al mismo tiempo de otro color. Esto lo obtenemos del primer punto.
  b) Los objetos a la derecha de los objetos verdes no pueden ser rojos; esto es información implícita del segundo punto.
  c) Del cuarto punto, la palangana es roja o es azul.

- Verifique lo mismo pero de manera formal mediante resolución binaria. Defina claramente el glosario a utilizar y muestre la transformación de cada enunciado por separado. En particular debe agregar las fórmulas correspondientes a la información implícita usada en el argumento informal.

  Glosario:

  - p: palangana
  - h: huacal
  - $A(x)$: x es azul
  - $V(x)$: x es verde
  - $R(x)$: x es rojo
  - $D(x, y)$: x está a la derecha de y

  Para indicar que un objeto está a la izquierda de otro, usaremos la negación $\neg D(x, y)$. Por otro lado, la traducción de las premisas y la información implícita será:

  - $\forall x(A(x) \to (\neg V(x) \land \neg R(x)))$
  - $\forall x(V(x) \to (\neg A(x) \land \neg R(x)))$
  - $\forall x(R(x) \to (\neg V(x) \land \neg A(x)))$
  - $\forall x \forall y((R(x) \land V(y)) \to I(x, y))$
  - $\forall x \forall y((D(x, y) \land V(y)) \to \neg R(x))$
  - $D(p, h)$
  - $V(h) \land (A(p) \lor R(p))$

  Vemos que todas las fórmulas están rectificadas, ya que ninguna tiene presencias libres y ligadas de una misma variable ni cuantificadores sobre una misma variable con alcances ajenos, ni cuantificadores repetidos ni vacíos.

  Ahora, pasamos cada fórmula a su forma normal negativa, eliminando implicaciones de las fórmulas que tenemos presentes y asegurándonos que las negaciones solo afecten a fórmulas atómicas, quedando así nuestras fórmulas:

  - $\forall x(\neg A(x) \lor (\neg V(x) \land \neg R(x)))$
  - $\forall x(\neg V(x) \lor (\neg A(x) \land \neg R(x)))$
  - $\forall x(\neg R(x) \lor (\neg V(x) \land \neg A(x)))$
  - $\forall x \forall y(\neg(R(x) \land V(y)) \lor I(x, y)) \equiv \forall x \forall y(\neg R(x) \lor \neg V(y) \lor I(x, y))$
  - $\forall x \forall y(\neg(R(x) \land V(y)) \lor I(x, y)) \equiv \forall x \forall y(\neg D(x, y) \lor \neg V(y) \lor \neg R(x))$
  - $D(p, h)$
  - $V(h) \land (A(p) \lor R(p))$

Como todos los cuantificadores están al inicio de cada fórmula, ya tenemos cada fórmula en Forma Normal Prenex y dado que ningún cuantificador tiene cuantificadores existenciales, ya tenemos las fórmulas en forma normal Skolem. Además, ya que únicamente tenemos cuantificadores universales, entonces los omitimos:

- $\neg A(x) \vee (\neg V(x) \wedge \neg R(x))$
- $\neg V(x) \vee (\neg A(x) \wedge \neg R(x))$
- $\neg R(x) \vee (\neg V(x) \wedge \neg A(x))$
- $\neg R(x) \vee \neg V(y) \vee I(x, y)$
- $\neg D(x, y) \vee \neg V(y) \vee \neg R(x)$
- $D(p, h)$
- $V(h) \wedge (A(p) \vee R(p))$

Por el principio de equisatisfacibilidad, podemos hacer resolución binaria sobre nuestras fórmulas skolemnizadas, obteniendo así que si tenemos una fórmula satisfacible, la fórmula original es también satisfacible.

Finalmente, distribuimos disyunciones sobre conjunciones y obtenemos:

- $(\neg A(x) \vee \neg V(x)) \wedge (\neg A(x) \vee \neg R(x))$
- $(\neg V(x) \vee \neg A(x)) \wedge (\neg V(x) \vee \neg R(x))$
- $(\neg R(x) \vee \neg V(x)) \wedge (\neg R(x) \vee \neg A(x))$
- $\neg R(x) \vee \neg V(y) \vee I(x, y)$
- $\neg D(x, y) \vee \neg V(y) \vee \neg R(x)$
- $D(p, h)$
- $V(h) \wedge (A(p) \vee R(p))$

Con esto obtenemos el conjunto de cláusulas, al cual agregamos la negación de lo que queremos demostrar: $A(p)$, y comenzamos la resolución binaria:

1.	$\neg A(x) \vee \neg V(x)$	
2.	$\neg A(x) \vee \neg R(x)$	
3.	$\neg V(x) \vee \neg R(x)$	
4.	$\neg R(x) \vee \neg V(y) \vee I(x, y)$	
5.	$\neg D(x, y) \vee \neg V(y) \vee \neg R(x)$	
6.	$D(p, h)$	
7.	$V(h)$	
8.	$A(p) \vee R(p)$	
9.	$\neg A(p)$	
10.	$\neg V(h) \vee \neg R(p)$	Res$(5, 6, [x :=, y := h])$
11.	$\neg R(p)$	Res(7, 10)
12.	$A(p)$	Res(8, 11)
13.	$\square$	Res(9, 14)

Como llegamos a la cláusula vacía, el conjunto es insatisfacible, por lo que el argumento que concluye que la palangana es azul a partir de las premisas y la información implícita en ellas, es correcto.

$\therefore$ La palangana es azul.

- ¿Puede resolverse este problema en `PROLOG`? Justifique su respuesta.

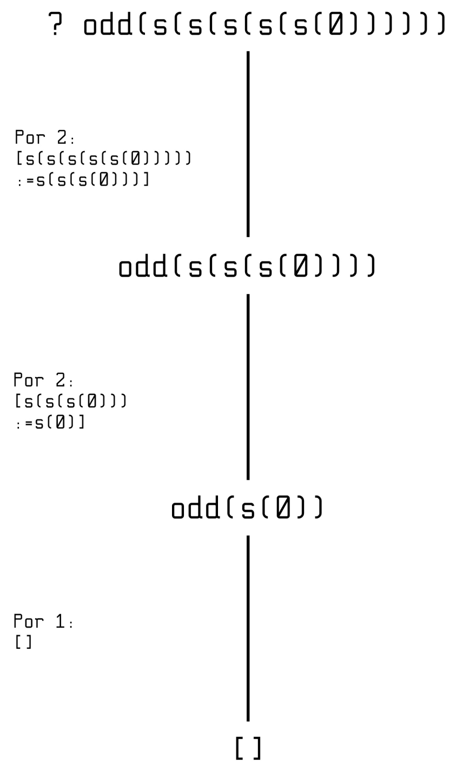
Sí, se vio en clase que `PROLOG` es un caso de uso o implementación de la resolución binaria en FOL; la sintaxis de `PROLOG` es la forma clausular de FOL y su semántica es el algoritmo de resolución binaria sobre FOL.

7. Considera el siguiente programa lógico $\mathbb{P}_1$.

```
1.  odd(s(0)).
2.  odd(s(s(X)):-odd(X).
```

   a) Construya el árbol SLD (árbol binario) para la siguiente meta: $G_1 =? - odd(s(s(s(s(s(0))))))$.

   El árbol se verá de la siguiente forma:



8. Verifique la validez del siguiente argumento mediante resolución binaria, donde $f^{(2)}, g^{(1)}$:

$$\begin{array}{l} Lfxygz \lor \neg Lyz \\ \neg Lfxfcfdaw \\ \hline \therefore \neg Lab \end{array}$$

Usando la aridad de las funciones dada, reescribimos las fórmulas:

$$\{L(f(x,y),g(z)) \lor \neg L(y,z), \neg L(f(x,f(c,f(d,a)),w), \neg L(a,b)\}$$

Para resolver por resolución binaria, primero usemos el principio de refutación, obteniendo así:

$$\{L(f(x,y),g(z)) \lor \neg L(y,z), \neg L(f(x,f(c,f(d,a)),w), L(a,b)\}$$

Notemos que el conjunto ya está en FNC, por lo que es posible resolver por resolución binaria. Entonces resolviendo tenemos:

1.	$L(f(x,y),g(z)) \lor \neg L(y,z)$	Hipótesis
2.	$\neg L(f(x,f(c,f(d,a)),w)$	Hipótesis
3.	$L(a,b)$	Hipótesis
4.	$L(f(x,a),g(z))$	$\text{Res}(1,3,[y,w := a,b])$
5.		

Veamos que a partir de este punto ya no es posible seguir la resolución binaria, ya que necesitamos hacer la sustitución de una constante para continuar, lo cual no es posible. Incluso, de ser posible, la constante pertenece a los argumentos de la función por la que la queremos sustituir, lo cual nuevamente no nos permite avanzar.

Por otro lado, si hacemos backtracking y optamos por otro camino, veremos que llegamos a una situación similar:

1. $L(f(x,y),g(z)) \vee \neg L(y,z)$ Hipótesis
2. $\neg L(f(x,f(c,f(d,a)),w)$ Hipótesis
3. $L(a,b)$ Hipótesis
4. $\neg L(f(c,f(d,a)),z)$ $\text{Res}(1,2,[y,w := f(c,f(d,a)),g(z)])$
5.

Nuevamente, aquí surge el mismo problema de sustitución que con la opción anterior. Por lo que finalmente, podemos decir que no es posible llegar a la cláusula vacía.