Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea Examen III

Lógica Computacional

Dafne Bonilla Reyes

Profesor: Javier Enríquez Mendoza

Ayudante: Kevin Axel Prestegui Ramos
Ayudante: Karla Denia Salas Jiménez
Ayudante Laboratorio: Ramón Arenas Ayala
Ayudante Laboratorio: Oscar Fernando Millán Pimentel

Mayo 2023

Tarea Examen 3: Cálculo de Secuentes

1. Deriva los siguientes secuentes respetando el nivel de negación indicado y usando exclusivamente las reglas de inferencia para negación de cada sistema:

a) $\vdash_m (A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$

Usando lógica minimal, derivemos el secuente dado:

$$\begin{array}{c l}
\hline & (Hip) \\
A \to B, A \to B \to \bot, A \vdash_m A & \\
\hline & (\to L) \\
A \to B, A \to B \to \bot, A \vdash_m B & \\
\hline & (\to R) \\
A \to B, A \to B \to \bot, A \vdash_m A \to B & \\
\hline & (\to L) \\
A \to B, A \to B \to \bot, A \vdash_m \bot & \\
\hline & (\to R) \\
A \to B, A \to B \to \bot \vdash_m A \to \bot & \\
\hline & (\neg A =_{def} A \to \bot) \\
A \to B, A \to \neg B \vdash_m \neg A & \\
\hline & (\to R) \\
A \to B \vdash_m (A \to \neg B) \to \neg A & \\
\hline & (\to R) \\
\vdash_m (A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A &
\end{array}$$

b) $\vdash_i (A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to \neg A)$

Para este ejercicio veamos que es necesario encontrar una equivalencia lógica para la doble implicación, ya que carecemos de una regla de inferencia específica para este conectivo lógico.

De esta manera, recordemos que $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv \varphi \to \psi \wedge \psi \to \varphi$, por lo que aplicando esta equivalencia lógica a nuestro secuente obtendremos:

$$\vdash_i (A \to \neg B) \leftrightarrow (B \to \neg A)$$

$$\equiv \vdash_i \big((A \to \neg B) \to (B \to \neg A)\big) \wedge \big((B \to \neg A) \to (A \to \neg B)\big)$$

Notemos que el conectivo lógico principal del secuente es un $\wedge$, así que por la regla de inferencia derecha de la conjunción, tendremos que probar dos cosas:

1. $\vdash_i (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
2. $\vdash_i (B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$

Derivemos 1:

$$\begin{array}{c l}
\hline & (Hip) \\
A \to B \to \bot, B, A \vdash_i B & \\
\hline & (\to R) \\
A \to B \to \bot, B, A \vdash_i A \to B & \\
\hline & (\to L) \\
A \to B \to \bot, B, A \vdash_i \bot & \\
\hline & (\to R) \\
A \to B \to \bot, B \vdash_i A \to \bot & \\
\hline & (\neg A =_{def} A \to \bot) \\
A \to \neg B, B \vdash_i \neg A & \\
\hline & (\to R) \\
A \to \neg B \vdash_i B \to \neg A & \\
\hline & (\to R) \\
\vdash_i (A \to \neg B) \to (B \to \neg A) &
\end{array}$$

Derivemos 2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \to A \to \bot, A, B \vdash_i A}\,(Hip)}{B \to A \to \bot, A, B \vdash_i B \to A}\,(\to R)}{B \to A \to \bot, A, B \vdash_i \bot}\,(\to L)}{B \to A \to \bot, A \vdash_i B \to \bot}\,(\to R)}{B \to \neg A, A \vdash_i \neg B}\,(\neg A =_{def} A \to \bot)}{B \to \neg A \vdash_i A \to \neg B}\,(\to R)}{\vdash_i (B \to \neg A) \to (A \to \neg B)}\,(\to R)$$

Dado que probamos 1 y 2, podemos afirmar que el secuente $\vdash_i (A \to \neg B) \to (B \to \neg A) \wedge (B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$ es derivable.

c) $\vdash_c \neg\neg A \leftrightarrow A$

Para este ejercicio, nuevamente veamos que es necesario encontrar una equivalencia lógica para la doble implicación, ya que carecemos de una regla de inferencia específica para este conectivo lógico.

De esta manera, aplicando la misma equivalencia lógica el inciso b) a nuestro secuente obtendremos:

$$\vdash_c \neg\neg A \leftrightarrow A$$
$$\equiv \vdash_c (\neg\neg A \to A) \wedge (A \to \neg\neg A)$$

Notemos que el conectivo lógico principal del secuente es un $\wedge$, así que por la regla de inferencia derecha de la conjunción, tendremos que probar dos cosas:

1. $\vdash_c \neg\neg A \to A$
2. $\vdash_c A \to \neg\neg A$

Derivemos 1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg A, A \vdash_c A}\,(Hip) \qquad \dfrac{}{\neg(\neg A), \neg A \vdash_c A}\,(Expl)}{\neg\neg A, A \vee \neg A \vdash_c A}\,(\vee L)}{\neg\neg A \vdash_c A}\,(TEL)}{\vdash_c \neg\neg A \to A}\,(\to R)$$

Derivemos 2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \neg A \vdash_c \bot}\,(Expl)}{A \vdash_c \neg A \to \bot}\,(\to R)}{A \vdash_c \neg\neg A}\,(\neg A =_{def} A \to \bot)}{\vdash_c A \to \neg\neg A}\,(\to R)$$

2. Muestre lo siguiente mediante una derivación por tácticas, indica en cada paso la táctica usada.

a) $(r \lor p) \land q \to l, m \lor q \to s \land t, s \land t \land l \to r, p \to q \vdash m \land p \to r$

Sea $\Gamma = \{(r \lor p) \land q \to l, m \lor q \to s \land t, s \land t \land l \to r, p \to q\}$. Probemos que $\Gamma \vdash m \land p \to r$:

1	$\Gamma \vdash m \land p \to r$	$(\to R)$
2	$\Gamma, m \land p \vdash r$	$(\land L)$
3	$\Gamma, m, p \vdash r$	$(\to L)$
4	$\Gamma, m, p \vdash s \land t \land l$	$(Cut\ s \land t)$
5	$\Gamma, m, p \vdash s \land t \quad ; \quad \Gamma, m, p, s \land t \vdash s \land t \land l$	$(\to L)$
6	$\Gamma, m, p \vdash m \lor q \quad ; \quad \Gamma, m, p, s \land t \vdash s \land t \land l$	$(\lor R)$
7	$\Gamma, m, p \vdash m \quad ; \quad \Gamma, m, p, s \land t \vdash s \land t \land l$	(Hip)
8	$\Gamma, m, p, s \land t \vdash s \land t \land l$	$(\land L)$
9	$\Gamma, m, p, s, t \vdash s \land t \land l$	$(\land R)$
10	$\Gamma, m, p, s, t \vdash s \quad ; \quad \Gamma, m, p, s, t \vdash t \quad ; \quad \Gamma, m, p, s, t \vdash l$	(Hip)
11	$\Gamma, m, p, s, t \vdash t \quad ; \quad \Gamma, m, p, s, t \vdash l$	(Hip)
12	$\Gamma, m, p, s, t \vdash l$	$(\to L)$
13	$\Gamma, m, p, s, t \vdash (r \lor p) \land q$	$(\land R)$
14	$\Gamma, m, p, s, t \vdash r \lor p \quad ; \quad \Gamma, m, p, s, t \vdash q$	$(\lor R)$
15	$\Gamma, m, p, s, t \vdash p \quad ; \quad \Gamma, m, p, s, t \vdash q$	(Hip)
16	$\Gamma, m, p, s, t \vdash q$	$(\to L)$
17	$\Gamma, m, p, s, t \vdash p$	(Hip)
18	$\square$	

b) $(\neg P \lor Q) \land R, Q \to S \vdash_c P \to R \to S$

Probemos que $(\neg P \lor Q) \land R, Q \to S \vdash_c P \to R \to S$:

1	$(\neg P \lor Q) \land R, Q \to S \vdash_c P \to R \to S$	$(\to R)$
2	$(\neg P \lor Q) \land R, Q \to S, P \vdash_c R \to S$	$(\to R)$
3	$(\neg P \lor Q) \land R, Q \to S, P, R \vdash_c S$	$(\to L)$
4	$(\neg P \lor Q) \land R, Q \to S, P, R \vdash_c Q$	$(\land L)$
5	$\neg P \lor Q, Q \to S, P, R \vdash_c Q$	$(\lor L)$
6	$\neg P, Q \to S, P, R \vdash_c Q \quad ; \quad Q, Q \to S, P, R \vdash_c Q$	$(Expl)$
7	$Q, Q \to S, P, R \vdash_c Q$	(Hip)
8	$\square$	

3. Derive el siguiente secuente ya sea usando cálculo de secuentes o tácticas, justificando cada paso de la derivación correspondiente (mencione el nivel de negación usado y por qué prefiere el método utilizado):

$$(C \to M) \to (N \to P), (C \to N) \to (N \to M), (C \to P) \to \neg M, C \to N \vdash \neg C$$

Para este ejercicio derivaremos el secuente dado por cálculo de secuentes usando negación minimal. Preferí usar este método por 2 razones principalmente:

1. Se me facilita más trabajar con negación con cálculo de secuentes que con tácticas.
2. La estructura de árbol de derivación, al ser muy visual, me ayuda a comprender mejor que tengo como hipótesis, metas y como las puedo usar para llegar a la derivación deseada.

Tomando lo anterior en cuenta, sea $\Gamma = \{(C \to M) \to (N \to P), (C \to N) \to (N \to M), C \to N\}$. Probemos que $\Gamma, (C \to P) \to \neg M \vdash \neg C$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Hip)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \mathit{\Omega} \vdash_m C \to N$}
\RightLabel{$(\to L)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \mathit{\Omega} \vdash_m N \to M$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Hip)}
\UnaryInfC{$\Gamma, \mathit{\Omega}, N \to M \vdash_m C$}
\RightLabel{$(\to L)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \mathit{\Omega}, N \to M \vdash_m N$}
\RightLabel{$(\to L)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \mathit{\Omega}, N \to M \vdash_m M$}
\RightLabel{$(Cut\ N \to M)$}
\BinaryInfC{$\Gamma, (C \to P) \to M \to \bot, C, C \to P \vdash_m M$}
\RightLabel{$(\to R)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, (C \to P) \to M \to \bot, C \vdash_m (C \to P) \to M$}
\RightLabel{$(\to L)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, (C \to P) \to M \to \bot, C \vdash_m \bot$}
\RightLabel{$(\to R)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, (C \to P) \to M \to \bot \vdash_m C \to \bot$}
\RightLabel{$(\neg A =_{def} A \to \bot)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, (C \to P) \to \neg M \vdash_m \neg C$}
\end{prooftree}
$$

Es importante mencionar que para facilitar la notación, a partir de la aplicación de la regla de inferencia $(Cut\ N \to M)$, consideramos a $\Omega = \{(C \to P) \to M \to \bot, C, C \to P\}$