Principio de Inducción Matemática

Si A es un conjunto tal que

1. $0 \in A$ → H.I
2. $n \in A$ implica $n+1 \in A$ — P.I

Entonces $A = \mathbb{N}$

Si $B = \{ n \in \mathbb{N} \mid n$ cumple la propiedad $P \}$

y probamos 1 y 2 ent

P: $8^n - 3^n$ es $\underbrace{\text{divisible}}_{\exists m \in \mathbb{N} \text{ t.q. } 8^n - 3^n = 5m}$ entre 5, con $n \in \mathbb{N}$.

P.D $\forall n \in \mathbb{N}$, $8^n - 3^n$ es div. entre 5.

* CASO BASE: P.D. $8^0 - 3^0$ es div ent 5.

$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0 = 5 \cdot 0$ $\quad \exists\, 0 \in \mathbb{N}$ t.q. $8^0 - 3^0 = 5 \cdot 0$ ✓

* H.I Sup que para n se cumple que $8^n - 3^n$ es div. entre 5, es decir $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q. $8^n - 3^n = 5m$

* P.I P.d $8^{n+1} - 3^{n+1}$ es div entre 5, es decir,

$\exists\, m' \in \mathbb{N}$ t.q. $8^{n+1} - 3^{n+1} = 5m'$

$$8^{n+1} - 3^{n+1} = 8^n \cdot 8 - 3^n \cdot 3 = 8^n(5+3) - 3^n \cdot 3 =$$

$$= 8^n \cdot 5 + 8^n \cdot 3 - 3^n \cdot 3 = 8^n \cdot 5 + 3(8^n - 3^n)$$

$$\underset{\text{H.I}}{=} 8^n \cdot 5 + 3 \cdot 5m = 5(\underbrace{8^n + 3m}_{m' \in \mathbb{N}})$$

$\therefore$ $8^{n+1} - 3^{n+1} = 5m'$, con $m' \in \mathbb{N}$.

$\therefore$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $8^n - 3^n$ es div. entre 5.

Principio de Inducción Estructural

Todo conjunto definido recursivamente tiene un principio de inducción, llamado inducción estructural

¿Cómo se define un conjunto recursivo?

1. Se define un conjunto de elementos base, son los objetos más simples donde la definición se da directamente.

2. Se define un conjunto de reglas recursivas donde se define un nuevo elemento en términos de elementos anteriores (más pequeños) ya definidos.

3. La cláusula que afirma que los dos puntos anteriores son las únicas formas de generar elementos del conjunto.

LISTAS DE ELEMENTOS DE A.

1. [] es una lista de elementos de A.
2. Si $a \in A$ y xs es una lista de elem de A, ent
   $(a:xs)$ es una lista de elem. de A
3. Son todas.

¿Cómo hacemos inducción estructural?

Si P es una propiedad que queremos demostrar para todos los elementos de un conjunto A definido recursivamente, debemos:

1. Mostrar que P se cumple para todos los elementos base de la definición de A.

2. Si x es un elemento de A construido a partir de $x_1, \ldots, x_n$, suponer que P se cumple para $x_1, \ldots, x_n$ y probar que P se cumple para x. (se debe probar para todas las reglas recursivas)

H.I P.I

Inducción Estructural de Listas.

Sea P una propiedad sobre listas. Para probar que P es verdadera para todas las listas basta:

1. BASE: Probar que P es verdadera para []

2. H.I: Suponer que si xs es una lista ent P se cumple para xs.

3. P.I: Si $a \in A$, probar que P es verdadera para la lista (a:xs).

Ej. Definición de la función de concatenación.

$[\,] \mathbin{++} ys = ys$

$(x:xs) \mathbin{++} ys = x:(xs \mathbin{++} ys)$

$[1,2,3] \mathbin{++} [4,5,6]$

$= 1:([2,3] \mathbin{++} [4,5,6])$

$= 1:(2:([3] \mathbin{++} [4,5,6]))$

$= [1,2,3,4,5,6]$

Definición de la función longitud.

$l([\,]) = 0$

$l((x:xs)) = 1 + l(xs)$

$l([1,2,3]) =$

$1 + l([2,3]) = \ldots$

$= 3$

Af. Para cualesquiera dos listas l_1 y l_2

$l(l_1 \mathbin{++} l_2) = l(l_1) + l(l_2)$.

Sean l_1 y l_2 listas. Procederemos por ind. estructural sobre l_1.

* CASO BASE: Sup. $l_1 = []$

P.d $\ell([] ++ l_2) = \ell([]) + \ell(l_2)$

$$\ell([] ++ l_2) \underset{\text{def de } ++}{=} \ell(l_2) = \ell(l_2) + 0 \underset{\text{def de } \ell}{=} \ell(l_2) + \ell([])$$

$$= \ell([]) + \ell(l_2)$$

* H.I. Si $l_1 = xs$, supongamos que

$$\ell(xs ++ l_2) = \ell(xs) + \ell(l_2)$$

* P.I Sea $a \in A$, P.d $\ell((a:xs) ++ l_2) = \ell((a:xs)) + \ell(l_2)$

$$\ell((a:xs) ++ l_2) \underset{\text{def } ++}{=} \ell(a:(xs ++ l_2)) \underset{\text{def } \ell}{=}$$

$$1 + \ell(xs ++ l_2) \underset{\text{H.I}}{=} 1 + \ell(xs) + \ell(l_2) \underset{\text{def } \ell}{=} \ell((a:xs)) + \ell(l_2)$$