

Lógica de Primer Orden: Introducción y Sintaxis

Lógica Computacional 2022-I, Nota de clase 5

Favio Ezequiel Miranda Perea Araceli Liliana Reyes Cabello
Lourdes Del Carmen González Huesca Pilar Selene Linares Arévalo

18 de enero de 2022
Facultad de Ciencias UNAM

1. Introducción

La lógica ha sido estudiada desde los tiempos de Aristóteles. En sus inicios se dedicó a fundamentar de manera sólida el análisis del razonamiento humano, formalizando las “leyes del pensamiento”, es decir, las nociones de argumento válido o inválido. Aristóteles aisló principios lógicos llamados *silogismos* los cuales fueron utilizados para analizar y verificar argumentos hasta la edad media por lógicos como Peter Abelard o Guillermo de Ockham.

En el siglo 19 George Boole y otros desarrollaron versiones algebraicas de la lógica debido a las limitaciones de la teoría del silogismo para manejar relaciones binarias, por ejemplo “ x es hijo de y ”. Esto dio nacimiento a la lógica algebraica, formalismo que aun existe aunque ha perdido popularidad.

Al final del siglo 19 Gottlob Frege desarrollo la lógica cuantificada sentando así los cimientos de gran parte de la lógica moderna, aún cuando Bertrand Russell le mostró que su sistema era inconsistente. Al mismo tiempo Charles S. Pierce de manera independiente, propuso una lógica similar.

La *paradoja de Russell* generó una crisis en los fundamentos de la matemática la cual se resolvió al inicio del siglo XX usando la lógica de primer orden, la cual funge hasta la actualidad como un fundamento de las matemáticas modernas. Debido a su gran poder, la lógica de primer orden también tiene grandes limitaciones que fueron descubiertas en los años 1930 por Kurt Gödel, Alan Turing y Alonzo Church, entre otros. Gödel dio un sistema deductivo completo y correcto para la lógica de primer orden, Alfred Tarski le dio la semántica formal que estudiaremos y que es la base para el estudio de las semánticas denotacionales de los actuales lenguajes de programación y Gerhard Gentzen y otros desarrollaron la teoría de la demostración. A partir de este punto la lógica de primer orden toma su forma actual.

Durante la siguiente parte del curso nos dedicaremos a estudiar los siguientes aspectos de la lógica de primer orden:

- Su sintaxis y semántica formal.
- El proceso de especificación formal del español a la lógica.
- Los métodos para establecer validez de argumentos:

1. Argumentación semántica (método útil pero prácticamente imposible de implementar de manera eficaz).
2. Tableaux semánticos (método fácilmente implementable)
3. Resolución binaria (método fundamental de la programación lógica)
4. Deducción natural (método completo y correcto, fundamento de los sistemas de tipos para lenguajes de programación).

1.1. Lógica proposicional: expresividad vs. decidibilidad

Por un lado, observemos que la lógica proposicional no es lo suficientemente expresiva. Considérese por ejemplo el siguiente razonamiento:

*Algunas personas van al teatro. Todos los que van al teatro se divierten.
De manera que algunas personas se divierten.*

La intuición nos dice que el argumento es correcto. Sin embargo la representación correspondiente en lógica proposicional es:

$p, q / \therefore r$ ¡Incorrecto!

Otros ejemplos de expresiones que no pueden ser formalizadas adecuadamente en la lógica proposicional son:

La lista está ordenada.

Cualquier empleado tiene un jefe.

Si los caballos son animales entonces las cabezas de caballos son cabezas de animales.

Este problema de expresividad se soluciona al introducir la lógica de predicados.

Por otro lado, la lógica proposicional es decidible, es decir, existen diversos algoritmos para responder a las preguntas

$\mathcal{I} \models \varphi ?$, \mathcal{I} Existe \mathcal{I} tal que $\mathcal{I} \models \varphi ?$,
 Γ Es Γ satisfacible?, $\Gamma \models \varphi ?$

Como vimos anteriormente, su estudio es de gran importancia en la teoría de complejidad computacional (problema SAT). Esta propiedad, de gran importancia desde el punto de vista computacional, se pierde en la lógica de predicados.

Así, la lógica proposicional nos ofrece decidibilidad de algunas propiedades pero nos limita respecto a la expresividad. La lógica de predicados o de primer orden que estudiaremos, nos ofrecerá mayor expresividad para formalizar expresiones más complejas.

Antes de empezar el estudio formal de la lógica de primer orden discutiremos con detalle un ejemplo de especificación no trivial en lógica de proposiciones. De aquí podremos observar una aplicación directa del problema SAT fuera del ámbito de la lógica. Esta clase de representaciones son típicas de los métodos de reducción de problemas en teoría de la complejidad.

2. Lógica de predicados de manera informal

En la lógica proposicional debemos representar a ciertas frases del español como por ejemplo

Algunos programas usan ciclos anidados

mediante fórmulas proposicionales atómicas, es decir mediante una simple variable proposicional p . En la lógica de predicados descomponemos a este tipo de frases distinguiendo dos categorías: objetos y relaciones entre objetos. Ambas categorías construidas sobre un universo de discurso fijo el cual varía según el problema particular que se desee representar. Estudiemos con mas detalle estas categorías:

2.1. Objetos y universo de discurso

*Algunas **personas** van al teatro*
*Todos los **programas** en Java usan clases.*

- Universo o dominio de discurso: conjunto de objetos que se consideran en el razonamiento, pueden ser cosas, personas, datos, objetos abstractos, etc.
- En el caso de los enunciados anteriores en el universo podemos tener personas y programas en Java, y posiblemente el teatro y las clases.

2.2. Relaciones entre objetos

- Las propiedades o relaciones atribuibles a los objetos del dominio de discurso se representan con predicados.
- En el caso de los enunciados anteriores tenemos *ir al teatro*, *usar clases*.

2.3. Cuantificadores

Los cuantificadores especifican el número de individuos que cumplen con el predicado. Por ejemplo:

- *Todos* los estudiantes trabajan duro.
- *Algunos* estudiantes se duermen en clase.
- *La mayoría* de los maestros están locos
- *Ocho de cada diez* gatos prefieren croquetas Michi Miau.
- *Nadie* es más tonto que yo.
- *Al menos seis* estudiantes están despiertos.
- *Hay una infinidad* de números primos.
- *Hay más* PCs que Macs.

En lógica de primer orden sólo consideraremos dos cuantificadores: *todos* y *algunos*.

2.4. Proposiciones vs. Predicados

El uso de predicados en lugar de proposiciones podría parecer simplemente otra manera de escribir las cosas, por ejemplo, la proposición:

Chubaka recita poesía nordica

se representa con predicados como

Recita(Chubaka, poesía nordica)

La gran ventaja es que el predicado puede cambiar de argumentos, por ejemplo

Recita(Licantropo, odas en sánscrito)

o en el caso general podemos usar variables para denotar individuos:

Recita(x, y)

Obsérvese que esta última expresión no es una proposición. En este sentido un mismo predicado está representando un número potencialmente infinito de proposiciones.

Reconozcamos ahora las componentes anteriores en un argumento particular:

*Todos los matemáticos estudian algún teorema. Los teoremas son elementales o trascendentes.
Giuseppe es matemático. Luego entonces, Giuseppe estudia algo elemental o trascendente.*

- Universo: *matemáticos y teoremas*
 - Predicados: *estudiar, elemental, trascendente.*
 - Cuantificadores: *todos, los, algo.*
 - Los individuos se representarán formalmente mediante dos categorías:
 - Constantes: las cuales denotan individuos particulares, como Giuseppe.
 - Variables: las cuales denotan individuos genéricos o indeterminados como los matemáticos o el teorema.
- Obsérvese que** las variables no figuran en el lenguaje natural como el español, pero son necesarias para la formalización y representación de individuos no fijos.

Formalicemos ahora todos los conceptos discutidos anteriormente.

3. Sintaxis de la lógica de primer orden

En contraposición al lenguaje de la lógica proposicional que está determinado de manera única, no es posible hablar de un solo lenguaje para la lógica de predicados. Dependiendo de la estructura semántica que tengamos en mente será necesario agregar símbolos particulares para denotar objetos y relaciones entre objetos. De esta manera el alfabeto consta de dos partes ajenas entre sí, la parte común a todos los lenguajes está determinada por los símbolos lógicos y auxiliares y la parte particular, llamada tipo de semejanza o signatura del lenguaje. La parte común a todos los lenguajes consta de:

- Un conjunto infinito de variables $\text{Var} = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$

- Constantes lógicas: \perp, \top
- Conectivos u operadores lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Cuantificadores: \forall, \exists .
- Símbolos auxiliares: $(,)$ y $,$ (coma).
- Si se agrega el símbolo de igualdad $=$, decimos que el lenguaje tiene igualdad.

La signatura de un lenguaje en particular está dada por:

- Un conjunto \mathcal{P} , posiblemente vacío, de símbolos o letras de predicado: P_1, \dots, P_n, \dots
A cada símbolo se le asigna un índice ¹ o número de argumentos m , el cual se hace explícito escribiendo $P_n^{(m)}$ que significa que el símbolo P_n necesita de m argumentos.
- Un conjunto \mathcal{F} , posiblemente vacío, de símbolos o letras de función: f_1, \dots, f_n, \dots
Análogamente a los símbolos de predicado cada símbolo de función tiene un índice asignado, $f_n^{(m)}$ significará que el símbolo f_n necesita de m argumentos.
- Un conjunto \mathcal{C} , posiblemente vacío, de símbolos de constante: c_1, \dots, c_n, \dots
En algunos libros los símbolos de constante se consideran como parte del conjunto de símbolos de función, puesto que pueden verse como funciones de índice cero, es decir, funciones sin argumentos.

Dado que un lenguaje de primer orden queda determinado de manera única por su signatura, abusaremos de la notación y escribiremos $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ para denotar al lenguaje dado por tal signatura.

3.1. Términos

Los términos del lenguaje son aquellas expresiones que representarán objetos en la semántica y su definición es:

- Los símbolos de constante c_1, \dots, c_n, \dots son términos.
- Las variables x_1, \dots, x_n, \dots son términos.
- Si $f^{(m)}$ es un símbolo de función y t_1, \dots, t_m son términos entonces $f(t_1, \dots, t_m)$ es un término.
- Son todos.

Es decir, los términos están dados por la siguiente gramática:

$$t ::= x \mid c \mid f(t_1, \dots, t_m)$$

Y el conjunto de términos de un lenguaje dado se denota con $\text{TERM}_{\mathcal{L}}$, o simplemente TERM si es claro cuál es el lenguaje.

En algunas ocasiones se encuentra una definición de términos que no incluye constantes. Esta omisión no existe en realidad puesto que las constantes se consideran casos particulares de símbolos de función de índice cero como hemos mencionado antes, es decir un símbolo de función que no recibe argumentos. Considerando lo anterior, presentamos la siguiente implementación.

¹Este índice suele llamarse también “aridad”, pero dado que tal palabra no existe en el diccionario de la lengua española, trataremos de evitar su uso.

3.1.1. Implementación

Emplearemos la siguiente representación en HASKELL:

```
type Nombre = String
```

```
data Term = V Nombre | F Nombre [Term]
```

Veamos algunos ejemplos:

- c se implementa como `F 'c' []`
- $f(x, y)$ se implementa como `F 'f' [V 'x', V 'y']`
- $g(a)$ se implementa como `F 'g' [F 'a' []]`
- $h(f(x))$ se implementa como `F 'h' [F 'f' [V 'x']]`
- $h(b, f(a), z)$ se implementa como `F 'h' [F 'b' [], F 'f' [F 'a' []], V 'z']`

3.2. Fórmulas

El siguiente paso es determinar las expresiones o fórmulas atómicas, dadas por:

- Las constantes lógicas \perp, \top .
- Las expresiones de la forma: $P_1(t_1, \dots, t_n)$ donde t_1, \dots, t_n son términos
- Las expresiones de la forma $t_1 = t_2$, si el lenguaje cuenta con igualdad

El conjunto de expresiones atómicas se denotará con $\text{ATOM}_{\mathcal{L}}$.

Así el conjunto $\text{FORM}_{\mathcal{L}}$ de expresiones compuestas aceptadas en un lenguaje \mathcal{L} , llamadas usualmente fórmulas, se define recursivamente como sigue:

- Si $\varphi \in \text{ATOM}_{\mathcal{L}}$ entonces $\varphi \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$. Es decir, toda fórmula atómica es una fórmula.
- Si $\varphi \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$ entonces $(\neg\varphi) \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$.
- Si $\varphi, \psi \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$ entonces $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$.
- Si $\varphi \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$ y $x \in \text{Var}$ entonces $(\forall x\varphi), (\exists x\varphi) \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$.
- Son todas.

La gramática para las fórmulas en forma de Backus-Naur es:

$$\begin{aligned}\varphi &::= at \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \mid (\varphi \leftrightarrow \psi) \mid (\forall x\varphi) \mid (\exists x\varphi) \\ at &::= \perp \mid \top \mid P(t_1, \dots, t_m) \mid t_1 = t_2\end{aligned}$$

Cada lenguaje definido a partir de una signatura y con forme a la gramática recién descrita será un *lenguaje de primer orden*.

Las siguientes observaciones son de suma importancia:

- Los términos y las fórmulas son dos categorías sintácticas ajenas, es decir **ningún** término es fórmula y **ninguna** fórmula es término.
- Los términos denotan exclusivamente individuos u objetos.
- Las fórmulas atómicas denotan proposiciones o propiedades acerca de los términos.
- **Sólo** los individuos u objetos son cuantificables y **únicamente** sobre ellos se puede “predicar”. Esta característica justifica la denominación “primer orden”.

3.3. Precedencia

Si bien los cuantificadores no son propiamente operadores entre fórmulas y por lo tanto no se puede hablar de una precedencia en el sentido usual, usamos la siguiente convención:

Los cuantificadores se aplican a la *mínima* expresión sintácticamente posible.

de manera que

$$\begin{array}{ll} \forall x\varphi \rightarrow \psi & \text{es } (\forall x\varphi) \rightarrow \psi \\ \exists y\varphi \wedge \forall w\psi \rightarrow \chi & \text{es } (\exists y\varphi) \wedge (\forall w\psi) \rightarrow \chi \end{array}$$

3.4. Implementación

La implementación de fórmulas es la siguiente:

```
data Form = TrueF | FalseF | Pr Nombre [Term] | Eq Term Term |
          Neg Form | Conj Form Form | Disy Form Form | Imp Form Form |
          Equi Form Form | All Nombre Form | Ex Nombre Form
```

Algunos ejemplos son:

- $P(x, y)$ se implementa como `Pr ‘‘P’’ [V ‘‘x’’, V ‘‘y’’]`
- $Q(a, h(w))$ se implementa como `Pr ‘‘Q’’ [F ‘‘a’’ [], F ‘‘h’’ [V ‘‘w’’]]`
- $R(x) \rightarrow x = b$ se implementa como `Imp (Pr ‘‘R’’ [V ‘‘x’’]) (Eq (V ‘‘x’’) (F ‘‘b’’ []))`
- $\neg R(z) \vee (S(a) \wedge f(x) = z)$ se implementa como

```
Disy (Neg (Pr ‘‘R’’ [V ‘‘z’’]))
    (Conj (Pr ‘‘S’’ [F ‘‘a’’ []])
          (Eq (F ‘‘f’’ [V ‘‘x’']) (V ‘‘z’’)))
    )
```

- $\forall x Q(x, g(x))$ se implementa como `All ‘‘x’’ (Pr ‘‘Q’’ [V ‘‘x’’, F ‘‘g’’ [V ‘‘x’’]])`
- $\forall x \exists y P(x, y)$ se implementa como `All ‘‘x’’ (Ex ‘‘y’’ (Pr ‘‘P’’ [V ‘‘x’’, V ‘‘y’’]))`

4. Inducción y Recursión

Las definiciones recursivas para los elementos del lenguaje generan principios de inducción. Dado que ahora tenemos dos categorías sintácticas, términos y fórmulas, tenemos también principios de inducción correspondientes a cada categoría.

Definición 1 (Principio de Inducción Estructural para $\text{TERM}_{\mathcal{L}}$) Sea \mathcal{P} una propiedad acerca de términos. Para demostrar que \mathcal{P} es válida para todos los términos, basta seguir los siguientes pasos:

- *Base de la inducción: mostrar que*
 1. Si $x \in \text{Var}$ entonces \mathcal{P} es válida para x .
 2. Si $c \in \mathcal{C}$ entonces \mathcal{P} es válida para c .
- *Hipótesis de inducción: suponer \mathcal{P} para cualesquiera $t_1, \dots, t_n \in \text{TERM}_{\mathcal{L}}$.*
- *Paso inductivo: usando la Hipótesis de inducción mostrar que*
 1. Si $f \in \mathcal{F}$ es un símbolo de función de índice n entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ cumple \mathcal{P} .

Definición 2 (Principio de Inducción Estructural para $\text{FORM}_{\mathcal{L}}$) Sea \mathcal{P} una propiedad acerca de fórmulas. Para probar que toda fórmula $\varphi \in \text{FORM}_{\mathcal{L}}$ tiene la propiedad \mathcal{P} basta seguir los siguientes pasos:

- *Caso base: mostrar que toda fórmula atómica tiene la propiedad \mathcal{P} .*
- *Hipótesis de inducción: suponer que φ y ψ cumplen \mathcal{P} .*
- *Paso inductivo: mostrar usando la Hipótesis de inducción que*
 1. $(\neg\varphi)$ también cumple \mathcal{P} .
 2. $(\varphi \star \psi)$ tiene la propiedad \mathcal{P} , donde $\star \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$
 3. $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ cumplen \mathcal{P} .

Con respecto a la recursión, también podemos definir funciones sobre los términos y las fórmulas usando los siguientes principios:

Definición Recursiva para Términos Para definir una función $h : \text{TERM}_{\mathcal{L}} \rightarrow A$, basta definir h como sigue:

- Definir $h(x)$ para $x \in \text{Var}$.
- Definir $h(c)$ para cada constante $c \in \mathcal{C}$.
- Suponiendo que $h(t_1), \dots, h(t_n)$ están definidas, definir $h(f(t_1, \dots, t_n))$ para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}$ de índice n , utilizando $h(t_1), \dots, h(t_n)$.

Definición Recursiva para Fórmulas . Para definir una función $h : \text{FORM}_{\mathcal{L}} \rightarrow A$, basta definir h como sigue:

- Definir h para cada fórmula atómica, es decir, definir $h(\perp)$, $h(\top)$, $h(P(t_1, \dots, t_n))$ y $h(t_1 = t_2)$ si el lenguaje tiene igualdad.
- Suponiendo definidas $h(\varphi)$ y $h(\psi)$, definir a partir de ellas a $h(\neg\varphi)$, $h(\varphi \vee \psi)$, $h(\varphi \wedge \psi)$, $h(\varphi \rightarrow \psi)$, $h(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $h(\forall x\varphi)$ y $h(\exists x\varphi)$.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.1 Definimos el conjunto de subtérminos de un término t recursivamente como sigue:

- $\text{Subt}(x) = \{x\}$
- $\text{Subt}(c) = \{c\}$
- $\text{Subt}(f(t_1, \dots, t_n)) = \{f(t_1, \dots, t_n)\} \cup \text{Subt}(t_1) \cup \dots \cup \text{Subt}(t_n)$

Ejemplo 4.2 Definimos recursivamente el número de conectivos y cuantificadores de una fórmula, conocido como el peso de una fórmula, como sigue:

- $\text{peso}(\perp) = \text{peso}(\top) = 0$.
- $\text{peso}(P(t_1, \dots, t_n)) = 0$.
- $\text{peso}(\neg\varphi) = \text{peso}(\varphi) + 1$.
- $\text{peso}(\varphi \wedge \psi) = \text{peso}(\varphi) + \text{peso}(\psi) + 1$
- $\text{peso}(\forall x\varphi) = \text{peso}(\varphi) + 1$