Organización y Arquitectura de las Computadoras

Tarea 03: Lógica Digital

Bonilla Reyes Dafne
319089660

Mares Cruz Tlacaelel Horacio
319109474

Medina Guzmán Sergio
314332428

1. Preguntas

1. Demuestre que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

   Demostración. Por tabla de verdad.

   Hagamos la tabla de verdad de ambas expresiones, esto es, de $x \cdot (y \cdot z)$ y de $(x \cdot y) \cdot z$

x	y	z	$y \cdot z$	$x \cdot (y \cdot z)$	$x \cdot y$	$(x \cdot y) \cdot z$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

   Usando la tabla de verdad de la operación lógica AND cuya expresión algebraica booleana es el producto[1], obtenemos los posibles valores para cada combinación en la tabla. Notemos que los valores en la tabla para ambas expresiones, $x \cdot (y \cdot z)$ y $(x \cdot y) \cdot z$ son iguales para todas las combinaciones posibles.

   Por lo tanto, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. □

2. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $x(\overline{x} + y) = xy$

   De las identidades booleanas[2] tenemos:

$$\begin{aligned} \textit{Comienzo:} \quad & x(\overline{x} + y) \\ \textit{Ley distributiva} \; & = x\overline{x} + xy \\ \textit{Propiedad cero} \; & = 0 + xy \\ \textit{Ley conmutativa} & = xy + 0 \\ \textit{Ley identidad} & = xy \square \end{aligned} \tag{1}$$

3. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $(x + y)(\overline{x} + z)(y + z) = (x + y)(\overline{x} + z)$

De las identidades booleanas[2] tenemos: Desarrollamos el lado izquierdo de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\textit{Comienzo:} \quad & (x+y)(\overline{x}+z)(y+z) \\
\textit{Ley Distributiva} \ & = [(x+y)\overline{x}+(x+y)z](y+z) \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = [\overline{x}(x+y)+(x+y)z](y+z) \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = [\overline{x}(x+y)+z(x+y)](y+z) \\
\textit{Ley Distributiva} \ & = [(\overline{x}x+\overline{x}y)+z(x+y)](y+z) \\
\textit{Ley Distributiva} \ & = [(\overline{x}x+\overline{x}y)+(zx+zy)](y+z) \\
\textit{Propiedad cero} \ & = [(0+\overline{x}y)+(zx+zy)](y+z) \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = [(\overline{x}y+0)+(zx+zy)](y+z) \\
\textit{Ley Identidad} \ & = [\overline{x}y+(zx+zy)](y+z) \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = (y+z)[\overline{x}y+(zx+zy)] \\
\textit{Ley Distributiva} \ & = (y+z)\overline{x}y+(y+z)(zx+zy) \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = \overline{x}y(y+z)+(y+z)(zx+zy) \\
\textit{Ley Distributiva} \ & = (\overline{x}y)y+(\overline{x}y)z+(y+z)(zx+zy) \\
\textit{Ley Distributiva} \ & = (\overline{x}y)y+(\overline{x}y)z+(y+z)zx+(y+z)zy \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = (\overline{x}y)y+(\overline{x}y)z+zx(y+z)+(y+z)zy \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = (\overline{x}y)y+(\overline{x}y)z+zx(y+z)+zy(y+z) \\
\textit{Ley Distributiva} \ & = (\overline{x}y)y+(\overline{x}y)z+(zx)y+(zx)z+zy(y+z) \\
\textit{Ley Distributiva} \ & = (\overline{x}y)y+(\overline{x}y)z+(zx)y+(zx)z+(zy)y+(zy)z \\
\textit{Ejercicio 1} \ & = \overline{x}(yy)+(\overline{x}y)z+(zx)y+(zx)z+(zy)y+(zy)z \\
\textit{Ley de idempotencia} \ & = \overline{x}y+(\overline{x}y)z+(zx)y+(zx)z+(zy)y+(zy)z \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = \overline{x}y+(\overline{x}y)z+(zx)y+(xz)z+(zy)y+(zy)z \\
\textit{Ejercicio 1} \ & = \overline{x}y+(\overline{x}y)z+(zx)y+x(zz)+(zy)y+(zy)z \\
\textit{Ejercicio 1} \ & = \overline{x}y+(\overline{x}y)z+(zx)y+x(zz)+z(yy)+(zy)z \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = \overline{x}y+(\overline{x}y)z+(zx)y+x(zz)+z(yy)+(yz)z \\
\textit{Ejercicio1} \ & = \overline{x}y+(\overline{x}y)z+(zx)y+x(zz)+z(yy)+y(zz) \\
\textit{Ley de idempotencia} \ & = \overline{x}y+(\overline{x}y)z+(zx)y+xz+z(yy)+y(zz) \\
\textit{Ley de idempotencia} \ & = \overline{x}y+(\overline{x}y)z+(zx)y+xz+zy+y(zz) \\
\textit{Ley de idempotencia} \ & = \overline{x}y+(\overline{x}y)z+(zx)y+xz+zy+yz \\
\textit{Ejercicio 1} \ & = \overline{x}y+\overline{x}(yz)+(zx)y+xz+zy+yz \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = \overline{x}y+\overline{x}(yz)+(xz)y+xz+zy+yz \\
\textit{Ejercicio 1} \ & = \overline{x}y+\overline{x}(yz)+x(zy)+xz+zy+yz \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = \overline{x}y+\overline{x}(yz)+x(yz)+xz+zy+yz \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = \overline{x}y+(yz)\overline{x}+x(yz)+xz+zy+yz \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = \overline{x}y+(yz)\overline{x}+(yz)x+xz+zy+yz \\
\textit{Ley Distributiva} \ & = \overline{x}y+(yz)(\overline{x}+x)+xz+zy+yz \\
\textit{Propiedad unitaria} \ & = \overline{x}y+(yz)1+xz+zy+yz \\
\textit{Ley de identidad} \ & = \overline{x}y+yz+xz+zy+yz \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = \overline{x}y+yz+xz+yz+yz \\
\textit{Asociamos:} \ & = \overline{x}y+yz+xz+(yz+yz) \\
\textit{Ley de idempotencia} \ & = \overline{x}y+yz+xz+yz \\
\textit{Ley Conmutativa} \ & = \overline{x}y+xz+yz+yz \\
\textit{Asociamos:} \ & = \overline{x}y+xz+(yz+yz) \\
\textit{Ley de idempotencia} \ & = \overline{x}y+xz+yz
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Ahora desarrollamos el lado izquierdo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\textit{Comienzo:} \quad & (x+y)(\overline{x}+z) \\
\textit{Ley Distributiva} \quad & = (x+y)\overline{x} + (x+y)z \\
\textit{Ley Conmutativa} \quad & = \overline{x}(x+y) + (x+y)z \\
\textit{Ley Conmutativa} \quad & = \overline{x}(x+y) + z(x+y) \\
\textit{Ley Distributiva} \quad & = (\overline{x}x + \overline{x}y) + z(x+y) \\
\textit{Ley Distributiva} \quad & = (\overline{x}x + \overline{x}y) + (zx + zy) \\
\textit{Propiedad cero} \quad & = (0 + \overline{x}y) + (zx + zy) \\
\textit{Ley Conmutativa} \quad & = (\overline{x}y + 0) + (zx + zy) \\
\textit{Ley Identidad} \quad & = \overline{x}y + (zx + zy) \\
\textit{Ley Conmutativa} \quad & = \overline{x}y + (xz + zy) \\
\textit{Ley Conmutativa} \quad & = \overline{x}y + (xz + yz) \\
\textit{Eliminamos paréntesis:} \quad & = \overline{x}y + xz + yz
\end{aligned} \tag{3}$$

Así, al desarrollar ambos lados de la igualdad llegamos a que

$$\overline{x}y + xz + yz = \overline{x}y + xz + yz$$

Por lo que queda demostrado que la igualdad $(x+y)(\overline{x}+z)(y+z) = (x+y)(\overline{x}+z)$ es válida. □

4. Demuestra si la siguiente igualdad es válida $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

Demostración. Por tabla de verdad.

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$x \cdot y$	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0

De la tabla, trabajando de manera análoga al ejercicio 1, vemos que los valores para la expresión $\overline{x \cdot y}$ son distintos que aquellos para la expresión $\overline{x} \cdot \overline{y}$. De esto, la igualdad no es válida. De hecho, podemos verlo del hecho de que las leyes de DeMorgan[2] para expresiones booleanas trabajan con estas expresiones y claramente no son iguales para este caso. □

5. Verifica la siguiente igualdad usando los postulados de Huntington.

$$F(x,y,z) = x + x\,(\overline{x}+y) + \overline{x}y = x + y$$

Usemos los postulados de Huntington [3] para verificar la igualdad.

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
& F(x,y,z) = x + x\,(\overline{x}+y) + \overline{x}y & \\
& = x + x\cdot\overline{x} + x\cdot y + \overline{x}y & \text{P4a (Distributividad de la Suma)} \\
& = x + 0 + x\cdot y + \overline{x}y & \text{P5b (Complemento de x)} \\
& = x + x\cdot y + \overline{x}y & \text{P2a (Identidad de la Suma)} \\
& = x + y\cdot(x+\overline{x}) & \text{P4a (Distributividad de la Suma)} \\
& = x + y\cdot 1 & \text{P5a (Complemento de x)} \\
& = x + y & \text{P2b (Identidad del producto)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad $F(x,y,z) = x + x(\overline{x} + y) + \overline{x}y = x + y$.

6. Obtén los maxtérminos y mintérminos de la siguiente función.

$$F(x,y,z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot x + \overline{z} \cdot x + z \cdot x + y \cdot \overline{y} + \overline{z}$$

Primero, obtengamos la tabla de verdad de la función:

x	y	z	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \cdot x$	$\overline{z} \cdot x$	$z \cdot x$	$y \cdot \overline{y}$	$\overline{z}$	f
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

De esta manera, es posible obtener los maxitérminos y mintérminos de la función, por lo que tenemos:

- Mintérminos:

Mintérmino	Expresión
m_0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
m_1	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$
m_2	$x\,\overline{y}\,\overline{z}$
m_3	$x\,\overline{y}\,z$
m_4	$x\,y\,\overline{z}$
m_5	$x\,y\,z$

Por lo tanto, la forma canónica normal disyuntiva de la función será:

$$F(x,y,z)_m = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z$$

- Maxtérminos:

Maxtérmino	Expresión
M_0	$x + y + \overline{z}$
M_1	$x + \overline{y} + \overline{z}$

Por lo tanto, la forma canónica normal conjuntiva de la función será:

$$F(x,y,z)_M = (x + y + \overline{z})(x + \overline{y} + \overline{z})$$

7. Simplifica la siguiente función usando su tabla de verdad asociada.

$$F(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z + xyz$$

Primero, obtengamos la tabla de verdad de la función:

x	y	z	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{x}\,\overline{y}z$	$\overline{x}y\overline{z}$	$x\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{x}yz$	$x\overline{y}z$	xyz	f
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

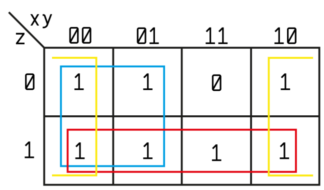
De esta manera, es posible obtener los mintérminos de la función:

Mintérmino	Expresión
m_0	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
m_1	$\overline{x}\,\overline{y}\,z$
m_2	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$
m_3	$\overline{x}\,y\,z$
m_4	$x\,\overline{y}\,\overline{z}$
m_5	$x\,\overline{y}\,z$
m_6	$x\,y\,z$

Por lo que la forma canónica normal disyuntiva de la función será:

$$F(x,y,z)_m = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,z$$

Por mapa de Karnaugh podemos simplificar más esta expresión, obteniendo así:



Lo que a su vez nos da la siguiente expresión:

$$F(x,y,z) = \overline{x} + \overline{y} + z$$

Por lo tanto, la función simplificada final por tabla de verdad y mapa de Karnaugh es $F(x,y,z) = \overline{x} + \overline{y} + z$.

8. Expande la siguiente función y da sus maxitérminos.

$$F(x,y,z) = (x + \overline{x}z)\cdot(\overline{y} + \overline{z})\cdot z$$

La forma expandida de una función booleana es aquella en donde cada término contiene todas las variables booleanas en su forma verdadera o complementada. A esta forma también se le conoce como forma canónica de la expresión.[5]

Teniendo esto en cuenta y usando los postulados de Huntington [3], expandamos la función:

$$\begin{aligned}
& F(x,y,z) = (x + \overline{x}z)\cdot(\overline{y} + \overline{z})\cdot z && \\
& = ((x+\overline{x})(x+z))\cdot(\overline{y}+\overline{z})\cdot z && \text{P4b}\\
& = (1\cdot(x+z))\cdot(\overline{y}+\overline{z})\cdot z && \text{P5a}\\
& = (x+z)\cdot(\overline{y}+\overline{z})\cdot z && \text{P2b}\\
& = (x+z+0)\cdot(\overline{y}+\overline{z}+0)\cdot(z+0) && \text{P2a}\\
& = (x+z+y\overline{y})\cdot(\overline{y}+\overline{z}+x\overline{x})\cdot(z+x\overline{x}) && \text{P5b}\\
& = (x+z+y)(x+z+\overline{y})\cdot(\overline{y}+\overline{z}+x)(\overline{y}+\overline{z}+\overline{x})\cdot(z+x)(z+\overline{x}) && \text{P4b}\\
& = (x+z+y)(x+z+\overline{y})\cdot(\overline{y}+\overline{z}+x)(\overline{y}+\overline{z}+\overline{x})\cdot(z+x+0)(z+\overline{x}+0) && \text{P2a}\\
& = (x+z+y)(x+z+\overline{y})\cdot(\overline{y}+\overline{z}+x)(\overline{y}+\overline{z}+\overline{x})\cdot(z+x+y\overline{y})(z+\overline{x}+y\overline{y}) && \text{P5b}\\
& = (x+z+y)(x+z+\overline{y})\cdot(\overline{y}+\overline{z}+x)(\overline{y}+\overline{z}+\overline{x})\cdot(z+x+y)(z+x+\overline{y})(z+\overline{x}+y)(z+\overline{x}+\overline{y}) && \text{P4b}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma canónica de la función es:

$$F(x,y,z) = (x+z+y)(x+z+\overline{y})\cdot(\overline{y}+\overline{z}+x)(\overline{y}+\overline{z}+\overline{x})\cdot(z+x+y)(z+x+\overline{y})(z+\overline{x}+y)(z+\overline{x}+\overline{y})$$

Y sus maxtérminos son:

Maxtérmino	Expresión
M_0	$x+z+y$
M_1	$x+z+\overline{y}$
M_2	$\overline{y}+\overline{z}+x$
M_3	$\overline{y}+\overline{z}+\overline{x}$
M_4	$z+x+y$
M_5	$z+x+\overline{y}$
M_6	$z+\overline{x}+y$
M_7	$z+\overline{x}+\overline{y}$

9. Utilizando mapas de Karnaugh simplifica la función.

   $F(x_0,x_1,x_2,x_3)=\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}+\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3+\overline{x_0}\,\overline{x_1}x_2x_3+x_0\overline{x_1}x_2x_3+x_0x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}+\overline{x_0}x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}+x_0x_1x_2x_3$

   Primero, obtengamos la tabla de verdad de la función:

x_0	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

   Usando los valores de la tabla, construimos el mapa de Karnaugh:

x_2x_3 \ x_0x_1	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	0	0	0
11	1	0	1	1
10	0	0	0	0

   Lo que a su vez nos da la siguiente expresión:

$$F(x,y,z)=\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}+\overline{x_0}\,\overline{x_1}x_3+x_0x_2x_3+x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

Por lo tanto, la función simplificada final por mapa de Karnaugh es $F(x, y, z) = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_3 + x_0x_2x_3 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$.

10. Para realizar un mapa de Karnaugh con más de 5 variables se mencionó que existe más de una forma de representarlo. Investiga ambos métodos y utiliza el que más se te acomode para reducir la siguiente función.

$F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,x_2x_3\,\overline{x_4} + x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_0\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 + \overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 + x_0x_1x_2x_3x_4$

Para este ejercicio, es posible usar el método de Petrick, el método de Karnaugh extendido (EK-MAP) o el método algorítmico de Quine–McCluskey, pero para más facilidad y practicidad usaremos el método de Quine-McCluskey:[6]

De esta manera, tenemos:

Mintérmino	Bits	Etiqueta	Cantidad de 1's	Asociaciones	Posición −	Cantidad 1's
$x_0x_1x_2x_3x_4$	11111	31	5	$31, 23$: 1_111	8	4
$x_0\overline{x_1}x_2x_3x_4$	10111	23	4	$25, 9$: _1001	16	2
$x_0x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	11001	25	3	$6, 2$: 00_10	4	1
$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,x_2x_3\,\overline{x_4}$	00110	6	2	$2, 0$: 000_0	2	0
$\overline{x_0}\,x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$	01001	9	2			
$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$	00010	2	1			
$\overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	00000	0	0			

Reducimos las asociaciones encontradas:

Tabla de Reducción Final							
Mintérmino	31	23	25	6	9	2	0
1_111	✓	✓					
_1001			✓		✓		
00_10				✓		✓	
000_0						✓	✓

Obteniendo así:

$$1\_111 = x_0x_2x_3x_4$$

$$\_1001 = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$$

$$00\_10 = \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_3\overline{x_4}$$

$$000\_0 = \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$$

Por lo tanto, la función simplificada final es:

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_0x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 + \overline{x_0}\,\overline{x_1}x_3\overline{x_4} + \overline{x_0}\,\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$$

Referencias

[1] Rules in Boolean Algebra

[2] Rosen, K. H. (2011). *Graphs. In Discrete Mathematics and Its Applications* (7th ed., pp. 815-843). McGraw-Hill.

[3] Galaviz, C. J. (n.d) *Lógica digital y diseño de circuitos digitales*, p.2.

[4] Canonical Form of Boolean Expressions

[5] SOP and POS Form : Non Canonical to Canonical Form Conversion of Boolean Expression

[6] Simplificación Quine-McCluskey