Rapport ACP

```python
np.random.seed(42)

n = 100  # nombre d'individus

X1 = np.random.normal(10, 2, n)                        # variable 1
X2 = 0.5 * X1 + np.random.normal(0, 1, n)              # variable 2 corrélée à X1
X3 = np.random.normal(50, 10, n)                       # variable 3
X4 = 0.3 * X3 + np.random.normal(0, 5, n)              # variable 4 corrélée à X3
X5 = np.random.normal(0, 1, n)                         # variable 5 peu corrélée

data = pd.DataFrame({
    "X1": X1,
    "X2": X2,
    "X3": X3,
    "X4": X4,
    "X5": X5
})

data.head() #lire les 5 premiere lignes du tableau
```

✓ 0.0s Python

	X1	X2	X3	X4	X5
0	10.993428	4.081343	53.577874	11.928387	-1.594428
1	9.723471	4.441090	55.607845	13.881448	-0.599375
2	11.295377	5.304974	60.830512	21.985622	0.005244
3	13.046060	5.720753	60.538021	21.213257	0.046981

Ce code sert à **générer un jeu de données artificiel** avec des **corrélations contrôlées**, très utile pour s'entraîner à l'ACP.(creation des 100 individus , les 5 variables

```python
scaler = StandardScaler() #centre reduit les donnees
X_norm = scaler.fit_transform(data) #normalisation des donnees (fit : calcule les moyennes et écarts-types de

print("Moyennes après normalisation :", X_norm.mean(axis=0)) #axis=0 pour les colonnes
print("Variances après normalisation :", X_norm.var(axis=0, ddof=1)) #ddof=1 pour échantillon
```

✓ 0.0s Python

```
Moyennes après normalisation : [-1.69309011e-16  1.97619698e-16  5.30686606e-16 -7.32747196e-17
 -8.88178420e-18]
Variances après normalisation : [1.01010101 1.01010101 1.01010101 1.01010101 1.01010101]
```

Ce code sert à **centrer et réduire** ton jeu de données avant de faire une ACP.

```python
pca = PCA() #initialisation de l'objet PCA de sklearn sans limiter le nombre de composantes
X_pca = pca.fit_transform(X_norm) #application de l'ACP sur les données normalisées

eigenvalues = pca.explained_variance_ #valeurs propres λ1, λ2, ...
explained_var_ratio = pca.explained_variance_ratio_ #pourcentages d'inertie expliquée : λ / somme(λ)=5
cum_explained = np.cumsum(explained_var_ratio) #inertie cumulée : somme des pourcentages d'inertie expliquée

print("Valeurs propres :", eigenvalues)
print("Pourcentages d'inertie expliquée :", explained_var_ratio)
print("Inertie cumulée :", cum_explained)
```

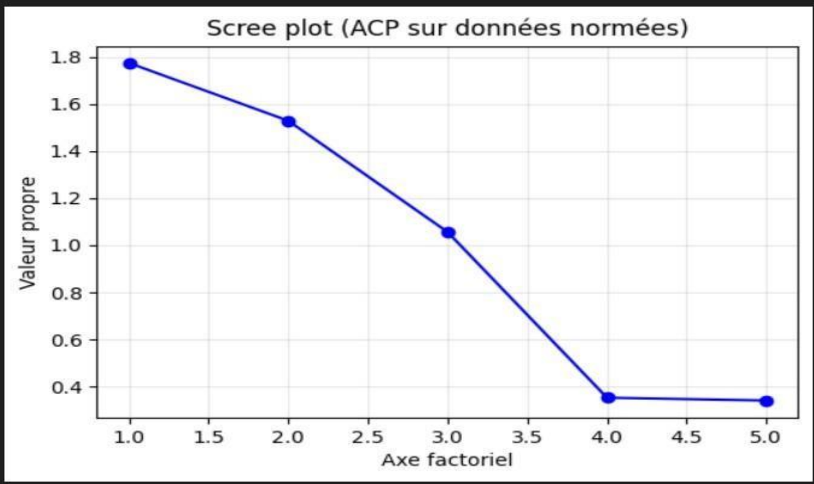
✓ 0.0s Python

```
Valeurs propres : [1.77419543 1.5285879  1.05583206 0.35191844 0.33997121]
Pourcentages d'inertie expliquée : [0.3512907  0.3026604  0.20905475 0.06967985 0.0673143 ]
Inertie cumulée : [0.3512907  0.6539511  0.86300585 0.9326857  1.        ]
```

Ce code sert à calculer les **valeurs propres** , **pourcentages d'inertie expliquée** , **L'inertie cumulée**

```python
plt.figure(figsize=(6,4)) #taille de la figure
plt.plot(range(1, len(eigenvalues)+1), eigenvalues, 'o-', color='blue') #trace des valeurs propres
plt.xlabel("Axe factoriel")
plt.ylabel("Valeur propre")
plt.title("Scree plot (ACP sur données normées)")
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()
```

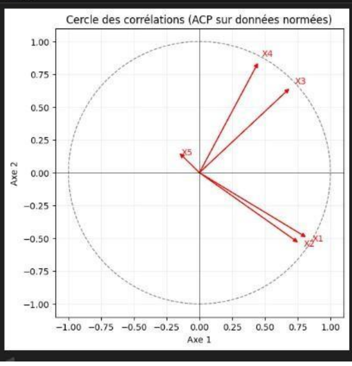
✓ 0.2s



Ce code sert a trace la figure qui représente les axes factoriels par rapport leur valeurs propres déjà calcule

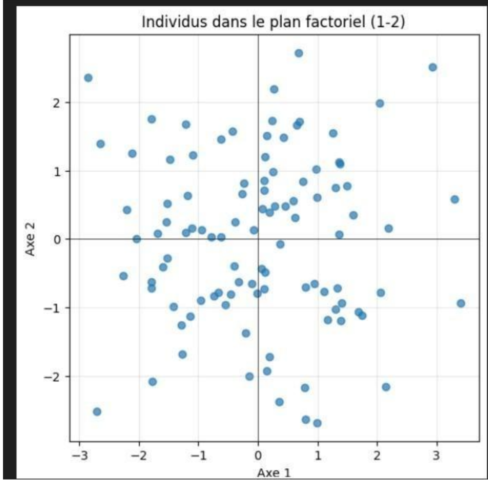
```python
loadings = pca.components_.T  # (p : variable, k : axe) matrice des loadings (vecteurs propres)
sqrt_eig = np.sqrt(eigenvalues) # racines des valeurs propres
corr = loadings * sqrt_eig  # Calcul des corrélations entre variables et axes

fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,6)) # taille de la figure

# Tracé des flèches pour chaque variable
for i, var in enumerate(data.columns):
    x = corr[i, 0] # coordonnée sur le 1er axe
    y = corr[i, 1] # coordonnée sur le 2ème axe
    ax.arrow(0, 0, x, y, head_width=0.03, head_length=0.03, fc='red', ec='red') # flèche de l'origine à (x,y)
    ax.text(x*1.1, y*1.1, var, color='red') # étiquette de la variable légèrement décalée

circle = plt.Circle((0,0), 1, color='gray', fill=False, linestyle='--') # cercle unité
ax.add_artist(circle) # ajout du cercle à la figure

ax.set_xlim(-1.1, 1.1) # limites des axes
ax.set_ylim(-1.1, 1.1) # limites des axes
ax.set_xlabel("Axe 1")
ax.set_ylabel("Axe 2")
ax.set_title("Cercle des corrélations (ACP sur données normées)")
ax.axhline(0, color='black', linewidth=0.5) # axes x=0 et y=0
ax.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
ax.set_aspect('equal', 'box') # aspect égal
plt.grid(alpha=0.2)
plt.show()
```

[20] ✓ 0.3s



Ce code génère **le cercle des corrélations ,** et **Tracé des flèches pour chaque variable** sur le plan ainsi que montre les variables les plus proche du cercle les bien corréler.

```python
F1 = X_pca[:, 0] # coordonnées des individus sur le 1er composante principale
F2 = X_pca[:, 1] # coordonnées des individus sur le 2ème composante principale 1

plt.figure(figsize=(6,6)) # taille de la figure
plt.scatter(F1, F2, alpha=0.7) # nuage de points
plt.xlabel("Axe 1")
plt.ylabel("Axe 2")
plt.title("Individus dans le plan factoriel (1-2)")
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5) # axes x=0 et y=0
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5) # axes x=0 et y=0
plt.grid(alpha=0.3) # grille
plt.show()
```
✓ 0.2s



Ce graphique représente **le nuage des individus projetés sur les deux premiers axes de l'ACP**.

```python
print("Contributions des 100 premiers individus à l'axe 1 (%) :")
# print(ctr_ind_1[:100])

# ================================
# Qualité de représentation (cos²)
# ================================
dist2 = (X_norm**2).sum(axis=1)

cos2_1 = F1**2 / dist2
cos2_2 = F2**2 / dist2
cos2_12 = (F1**2 + F2**2) / dist2

print("\ncos² sur l'axe 1 (100 premiers) :")
print(cos2_1[:10])

print("\ncos² sur l'axe 2 (100 premiers) :")
print(cos2_2[:10])

print("\ncos² cumulés sur le plan (axes 1▯2) (100 premiers) :")
print(cos2_12[:100])

best_index = cos2_12.argmax()
best_value = cos2_12[best_index]

print("Individu avec la meilleure qualité de représentation sur le plan (1▯2) :")
print("Index de l'individu :", best_index)
print("cos² cumulé (axes 1▯2) :", best_value)
```
✓ 0.0s

```
Contributions des 100 premiers individus à l'axe 1 (%) :

cos² sur l'axe 1 (100 premiers) :
[0.00115967 0.00623936 0.74467591 0.86400866 0.46299302 0.27451535
 0.78218983 0.62571647 0.01390648 0.52094671]

cos² sur l'axe 2 (100 premiers) :
[0.05235222 0.02412883 0.1999885  0.00471103 0.45377927 0.37555653
 0.05985728 0.30253828 0.89780676 0.38254728]

cos² cumulés sur le plan (axes 1-2) (100 premiers) :
[0.05351189 0.03036819 0.94466442 0.86871969 0.91677228 0.65007188
 0.84204712 0.92825475 0.91171324 0.90349399 0.6067472  0.70603472
 0.53983356 0.37777365 0.96005656 0.42160454 0.57253768 0.31255562
 0.24369859 0.75387246 0.68063356 0.5140711  0.57989729 0.79066449
 0.65097307 0.32695879 0.73108638 0.26195526 0.45047053 0.25754103
 0.55284153 0.79901167 0.29107987 0.78270973 0.75744655 0.26209363
 0.70614099 0.66083476 0.30639058 0.15558284 0.89916317 0.64643551
 0.12606507 0.29560214 0.72829636 0.35019112 0.68504328 0.67595724
 0.74920529 0.62815347 0.82930239 0.74509786 0.8546625  0.78898558
 0.92575149 0.77868327 0.41912467 0.58500284 0.26545437 0.82279052
 0.41125802 0.35092337 0.90913367 0.97341916 0.79269198 0.9724808
 0.7983663  0.75735883 0.68343965 0.53250789 0.78202268 0.51506553
 0.63107331 0.57598047 0.83522895 0.9338732  0.42976674 0.38624269
 0.19256043 0.32643554 0.48374207 0.09159774 0.45407537 0.95617859
...
 0.07750052 0.67202802 0.41642807 0.47755569]
Individu avec la meilleure qualité de représentation sur le plan (1-2) :
Index de l'individu : 63
cos² cumulé (axes 1-2) : 0.973419158411491
```

Les contributions (CTR) mesurent l'importance de chaque individu dans la construction d'un axe. Elles sont proportionnelles au carré de leurs coordonnées factorielles. Les cos² représentent la qualité de représentation : ils indiquent la part de l'information de l'individu captée par l'axe (ou le plan). Un cos² élevé signifie une bonne représentation. L'individus 63 avec (0,97) bon qlt.

Exercice 1 :

1. **Nombre d'axes conservés :** les trois premiers axes car sont >= 1
2. **Justification :** selon la règle de Kaiser (valeurs propres > 1) et un pourcentage d'inertie cumulée proche du seuil minimal de 70 %.

Exercice 2 :

1. **Axe 1 :** défini par X1 , X2 , X3 et X4 , fortement corrélées et orientées positivement.
2. **Axe 2 :** défini par X3 et X4, très corrélées entre elles.
3. **Description :** axe 1 = dimension X1–X2 ; axe 2 = dimension X3–X4.

Exercice 3 :

1. **Individus bien représentés :** ceux avec un cos² élevé (ex : individu 63 = 0,97).
2. **Interprétation :** ils sont bien alignés et liée avec les variables principales des axes.
3. **Individus mal projetés :** cos² faible c'est proches du centre et mal décrits par le plan (individus 1 : 0,03).

Exercice 4 : l'ajout de X6

1. **Effet sur les valeurs propres :** l'axe 1 augmente car X6 renforce X1–X2.
2. **Interprétation des axes :** axe 1 = X1–X2- X3-X4–X6 ; axe 2 reste X3–X4.
3. **Cercle des corrélations :** X6 se superpose presque à X1 → forte redondance.

Exercice 5 : ACP sans normalisation

1. **Comparaison :** l'axe 1 domine (≈85 %) car les variances sont différentes.
2. **Influence des échelles :** les grandes échelles écrasent les petites → ACP faussée.
3. **Quand normaliser :** indispensable si les variables n'ont pas la même unité ou dispersion.