Segundo parcial - Muestra 1

1. Dos trenes parten de una estación con 2 horas de diferencia. El primero se dirige hacia el norte con una velocidad de 80km/h. El segundo se dirige hacia el este con una velocidad de 100km/h. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 3 horas después que partió el segundo tren?

2. El área de un rectángulo crece a razón de $9\,cm^2$ por minuto y se sabe que uno de sus lados mide siempre el triple que el otro. Hallar la razón de cambio del perímetro en el momento en que el lado más chico mide $2\,cm$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-2)^2$. Hallar, si existen, los valores máximos y mínimos de $f(x,y)$ sujeta a la restricción

   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 - 2y = 0\}$.

   (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 - 2y = 0 \ , \ 0 \leq x \leq 3, \ -1 \leq y \leq 1\}$.

   Importante: Resolver el ejercicio usando el método de Lagrange (o tangencia) y justificar con detalle. Graficar las curvas de nivel de $f(x,y)$ necesarias y la restricción.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. Hallar, si existen, los valores máximos y mínimos de $f(x,y)$ sujeta a la restricción

   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = -1\}$.

   (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = -1 \ , \ 1 \leq x \leq 3\}$.

   Importante: Resolver el ejercicio usando el método de Lagrange (o tangencia) y justificar con detalle. Graficar las curvas de nivel de $f(x,y)$ necesarias y la restricción.

5. En un espectáculo se sabe que la cantidad de entradas vendidas depende de x cantidad de repeticiones de la publicidad en hora pico en televisión, e y cantidad de publicidad en páginas de internet según la fórmula

   $$V(x,y) = x^3 y^3.$$

   Si el costo de cada repetición de publicidad en televisión en hora pico es de \$10800 y cada página con publicidad en internet cuesta \$6480.

   a) ¿Cuál es el costo mínimo en publicidad para vender 216000 entradas?

   b) Si el jefe de publicidad del espectáculo quiere contratar a lo sumo 6 páginas de intenet. ¿Cuál sería el costo mínimo en publicidad para vender 216000 entradas?

6. Sea $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 - x}$.

   (a) Graficar la curva de nivel $(f = 1)$ y verificar que el punto $(2, 2)$ pertenece a dicha curva.

   (b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $(f = 1)$ en el punto $(2, 2)$.

   (c) Determinar, si existen, los puntos de la curva $(f = 1)$ donde la recta tangente sea perpendicular a la recta hallada en el ítem anterior.

7. Sea $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x + 1}$.

   (a) Calcular el dominio de f y graficar las curva de nivel $M = 0$, $M = 1$ y $M = -1$. Determinar cuales son el gráfico de una función de una variable.

   (b) Verificar que el punto $P = (-2, 1)$ pertenece a la curva de nivel $M = -1$ de f y hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $(f = -1)$ en el punto $(-2, 1)$.

   (c) Hallar todos los (x, y) del dominio de f para los cuales $(0, 1)$ es una dirección de crecimiento.

8. Determinar la validez de las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas, explicar por qué, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo **Justificar las respuestas**.

   a) Sea f una función derivable y positiva que verifica

   $$f(x) = (x - 1)\ln(e.f(x)) - 2\,\mathrm{sen}(3x - 3) + 1.$$

   Entonces la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(1, f(1))$ tiene ecuación $y = -5x + 6$.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con $f(0) = 3$ que satisface

   $$e^{f(x)-3} + \frac{1}{3}[f(x)]^3 = 2x^2 + 10,$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f(x) \geq 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) La dirección dada por el vector $(0, -1)$ es una dirección de máximo decrecimiento de la función $f(x, y) = x\ln(1 + xy)$ en el punto $(2, 0)$.

   d) Sean $f(x, y) = x^2y - 2xy^3 + 1$ y $g(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{2x + y}$ dos funciones. Entonces las curvas de nivel $(f = 1)$ y $(g = 1)$ se cruzan en el punto $(2, 1)$.

   e) Sea $f(x, y) = \dfrac{x^2y + y + 1}{y^2 + 1}$. Entonces la curva de nivel $(f = 1)$ es el gráfico de una función de una variable $g(x)$.

f) Sea $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y$, entonces f no tiene ningún mínimo local en $\mathbb{R}^2$.

g) Las funciones $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{e^{x^2+y^2-1}-1}$ y $g(x,y) = \ln(4-4x^2-4y^2)$ tienen el mismo dominio.

h) Si $\dfrac{\partial f}{\partial(3,4)}(2,-1) = 1$ y $\dfrac{\partial f}{\partial(1,2)}(2,-1) = \sqrt{2}$. Entonces, si nos movemos a partir del punto $(2,-1)$, la dirección $(6,2)$ es una dirección de máximo crecimiento para $f(x,y)$.

i) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 2x^2 + y^2$. Consideremos el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; xy^2 = 1\}$. Entonces hay exactamente 4 puntos de tangencia entre alguna curva de nivel de f y la curva A.