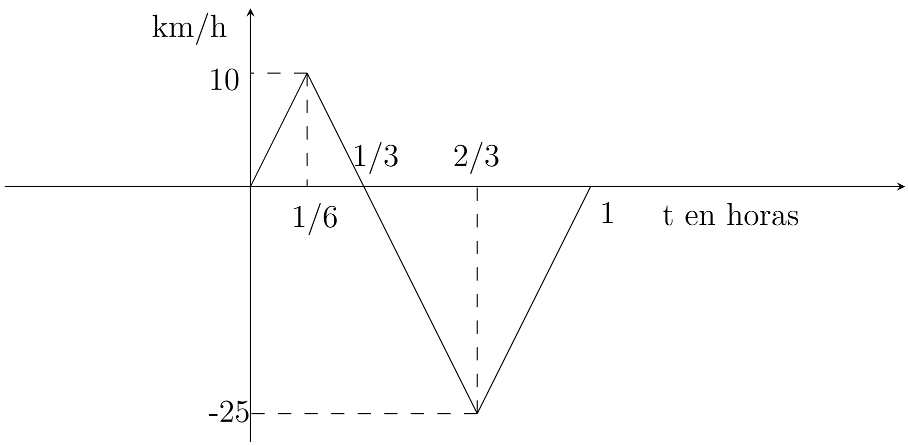
Matemática 2 - Primer semestre 2023
Práctica 1: Integrales

1. Problemas I (Conceptuales, sin integrales).

1. Una ciclista pedalea en un camino recto durante una hora con una velocidad medida en km por hora dada por la figura:



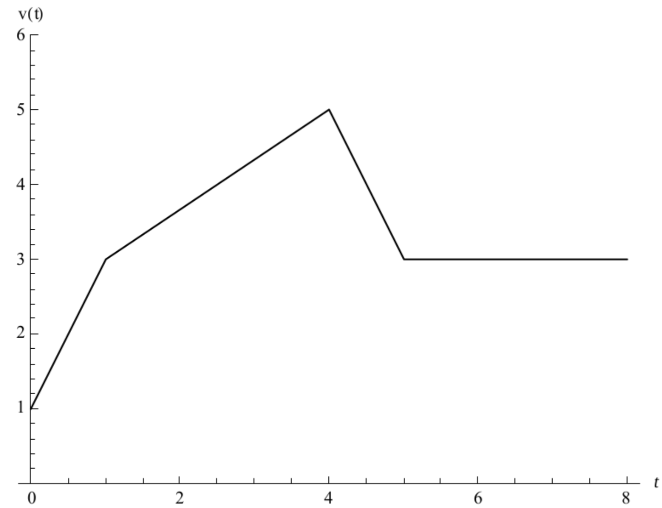
Si comienza a 5 km de un lago; la velocidad negativa la aleja del lago y la velocidad positiva la acerca al lago :

a) ¿La ciclista cambia el sentido de marcha alguna vez?, ¿en qué momentos?

b) ¿En qué momento va más rápido? En ese momento ¿se acerca o se aleja del lago?

c) ¿En qué momento la ciclista está en el punto más cercano al lago y a qué distancia se encuentra (aproximadamente)?

2. La velocidad $v(t)$ de descarga de internet (en GB por hora) varió esta mañana (dependiendo de la hora) según el siguiente gráfico



Por ejemplo, la velocidad *instantánea* de descarga a las 4 de la mañana fue de 5 GB por hora.

a) Si hubiese puesto a descargar un archivo de 10 GB a medianoche, ¿a qué hora habría finalizado la descarga?

b) ¿Cual fue la velocidad de descarga promedio entre medianoche y las 8 de la mañana?

c) Si hubiese puesto a descargar un archivo de 50 GB a medianoche, ¿qué porcentaje del archivo habría descargado a las 4 de la mañana?, ¿y a las 8 de la mañana?

3. Un tanque tiene inicialmente 800 litros de agua. Encontrar cuánto tarda en vaciarse totalmente si:

a) Se vacía con una velocidad constante de 200 litros por hora.

b) La velocidad de vaciado (medida en litros por hora) tiene la siguiente fórmula:

$$v(t) = \begin{cases} 200 & t \leq 1 \\ \\ 300 & t > 1 \end{cases}$$

c) La velocidad de vaciado (medida en litros por hora) tiene la siguiente fórmula:

$$v(t) = 100 + 100t$$

2. Cálculo de Primitivas.

1. Hallar las primitivas de las siguientes funciones, por el método indicado:

- A ojo:

  a) $\cos(2x+3)$

  b) $\dfrac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}$

  c) $e^x + \sin(x) + x^3 + \dfrac{1}{x}$

  d) $\dfrac{1-x^2}{x\sqrt{x}}$

- Por sustitución:

  a) $\sin^2(x)\cos(x)$

  b) $\dfrac{x}{x^2+2}$

  c) $e^{x^3+x}(3x^2+1)$

  d) $\dfrac{x^2+2+3x}{x^2+2}$

  e) $\dfrac{x\ln(x^2+2)}{x^2+2}$

  f) $\dfrac{2x}{\tan(x^2)}$

  g) $\dfrac{\ln(3x)^2}{4x}$

  h) $\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$.

- Por partes:

  a) $x\cos(x)$

  b) $\frac{1}{2}x(e^x + xe^x)$

  c) $x^2(x+4)^{-\frac{1}{2}}$

  d) $x^2\sin(x)$

  e) $e^{2x}\cos(3x)$

  f) $\ln(x)$

2. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = e^x . \tan(e^x)$

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^3(2x)}$

   c) $f(x) = \dfrac{1+\tan^2(x)}{\tan^3(x)}$

   d) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x) \ - \ 4}$

   e) $f(x) = x^2 \ \ln(x)$

   f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

   h) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^9}{(x^5-1)^{12}}$

3. Integrales Definidas.

1. Calcular las siguientes integrales definidas:

   a) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-4}\, dx$

   b) $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^2\cos(x) + \ln(x))}{x}\, dx$

   c) $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} x\,(\sin(x) + \ln(x)\,)\ dx$

   d) $\displaystyle\int_1^2 (x\cos(x) + 1)\, dx$

   e) $\displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^2\ dx$

   f) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x+1}\, dx$

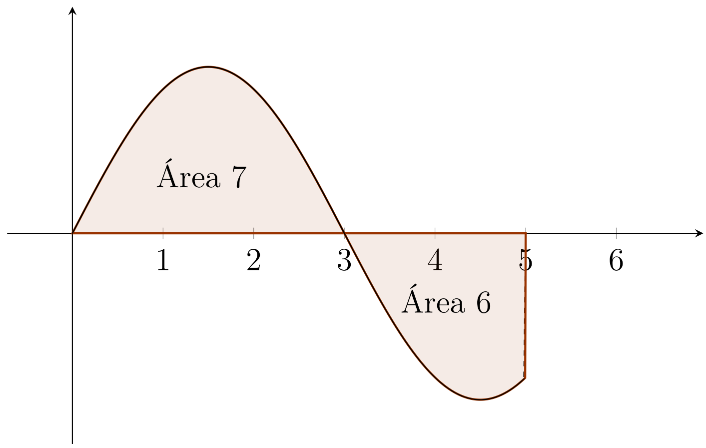
2. Calcular las integrales definidas entre -2 y 3 de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 4 - |2x|$

   b) $g(x) = \begin{cases} xe^x + x & \text{si } x < 0 \\ x + x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

4. Áreas.

1. Dada una función cuyo gráfico es

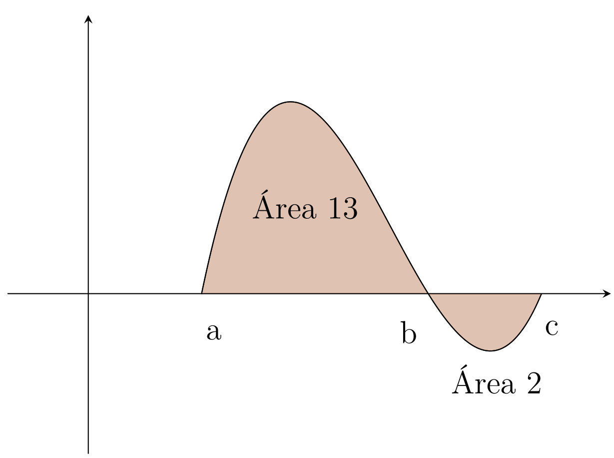


   Hallar los valores de

   a) El área de la región comprendida entre el gráfico de f y el eje X entre 0 y 5.

   b) $\int_0^5 f(x)\,dx$

2. Dada una función cuyo gráfico es



Hallar los valores de

a) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

b) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

c) $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

d) $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$

e) $\int_a^c |f(x)|\,\mathrm{d}x$

f) $\int_a^c (-f(x))\,\mathrm{d}x$.

3. Hallar el área comprendida entre los gráficos de las siguientes funciones

   a) $f(x) = x^2 - x - 3$ y $g(x) = -3x + 12$, para $0 \leq x \leq 5$

   b) $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$

   c) $f(x) = x^2 \ln(x)$ y $g(x) = (6x - 9)\ln(x)$

   d) $f(x) = xe^{2x}$ y $g(x) = xe^{x+3}$

5. Problemas II (con Integrales).

1. La función de costo marginal $C'(x)$ se define como la derivada de la función de costo C respecto de la cantidad de bienes x fabricada. Si el costo marginal de fabricar x bienes es $C'(x) = 0{,}006x^2 - 1{,}5x + 8$ en pesos por unidad y el costo fijo de arranque es $C(0) = 1{,}500{,}000$ pesos calcular el costo de producción de las primeras 2000 unidades.

2. Si la inversión de una empresa cambia en el tiempo segun la fórmula

$$I(t) = 10000e^{-t},$$

   sabiendo que el capital inicial $K(0) = 5000$ pesos, determinar el tiempo T tal que el capital duplique al capital inicial, es decir $K(T) = 2K(0)$.

3. Un tanque tiene inicialmente 800 litros de agua. Si la velocidad de vaciado es de $v(t) = 200e^{-t}$ (medida en litros por hora), decidir si el tanque llega a vaciarse totalmente.

4. Si la inversión de una empresa cambia en el tiempo segun la fórmula

$$I(t) = 2t^2 - 4.$$

Determinar,

a) Cuanto varió el capital entre $t = 0$ y $t = 2$

b) Cuanto varió el capital entre $t = 2$ y $t = 4$

c) En que intervalos del tiempo creció el capital.

d) En que intervalos del tiempo decreció el capital.

e) El capital en $t = 6$, si el capital en $t = 3$ fue de \$100000.

5. Una empresa tiene un capital inicial de 115 millones de pesos. La inversión/desinversión está dada por la siguiente función, donde $I(t)$ está medida en millones de pesos por año.

$$I(t) = \begin{cases} e^t(t-4) & 0 \leq t \leq 4 \\ \\ \dfrac{640(t-4)}{(t^2-8t+20)^3} & t > 4 \end{cases}$$

a) Determinar los períodos de inversión y de desinversión.

b) ¿Cuál es el mínimo alcanzado por el capital?

c) Hallar, si existen, todos los momentos en los cuales el capital es el doble del capital inicial

6. Una empresa dispone de un capital que coloca en una institución financiera. A lo largo del tiempo la inversión/desinversión esta dada por

$$I(t) = \begin{cases} -2t + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 3, \\ \\ \frac{1}{4}(t-3)^3 - 2 & \text{si } t > 3, \end{cases}$$

medida en millones de pesos por año. Sabiendo que al año el capital es de 30 millones de pesos.

a) Determinar el capital inicial.

b) Hallar, si existe, el mínimo alcanzado por el capital.

c) ¿cuántas veces el capital alcanza los 31 millones de pesos?

6. Integrales Impropias.

1. Decidir si existen las siguientes integrales impropias, y en caso que así sea calcularlas.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^2\cos(x)+\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x + \ln x)\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^3 xe^x\,\mathrm{d}x.$

j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

7. Aplicaciones del TFC.

1. Halle las derivadas de las siguientes funciones.

a) $\displaystyle f(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

b) $\displaystyle g(x)=\int_0^{\sin x} \frac{u}{2+u^3}\,du$

c) $\displaystyle h(x)=\int_x^{x^3} \cos t^2\,dt$

2. Halle máximos y mínimos locales de la función

$$f(x)=\int_0^x t^3(4-2t^2)e^{-t^2}dt$$

3. Se sabe que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Encontrar los **límites** de la función cuando x tiende a *cero*, a *mas infinito* y a *menos infinito* para cada una de las siguientes funciones:

$$1)\quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad 2)\quad F(x) = \int_0^{1/x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

4. Encontrar el área de la figura delimitada por el eje X positivo, el eje Y negativo y el gráfico de $f(x) = \ln(x)$.

5. Dada la función

$$F(x) = \int_0^x t\ e^{\left(t^2-4t+1\right)}\,dt$$

Encontrar:

a) El **dominio**.

b) Los **límites** de la función cuando x tiende a *mas infinito* y a *menos infinito*.

c) Los valores de x donde la función es **continua**.

d) Los valores de x donde la función es **derivable**.

e) La **derivada primera** de la función.

f) Los valores de x donde la función es **dos veces derivable**.

g) La **derivada segunda** de la función.

h) Los valores de x donde se **anula** la función.

i) Los intervalos donde la función es **positiva** o **negativa**.

j) Los intervalos donde la función es **creciente** o **decreciente**.

k) Los **máximos** y **mínimos** locales.

l) Los intervalos donde la función es **convexa** o **cóncava**.

m) Los puntos de **inflexión**.

n) La **imagen.**

Y usando estos datos, **dibujar** la función lo mejor posible.

8. Problemas III (con integrales impropias).

1. Un avión vuela a una velocidad de $V(t) = \frac{600}{t+2}$, medida en kilómetros por hora.

   a) Calcular qué distancia recorrió entre las 0 y las 4 horas de empezado el vuelo y qué distancia recorrió desde las 4 horas hasta las 8 horas de empezado el vuelo.

   b) Calcular el límite de la distancia recorrida si t tiende a $+\infty$.

2. Suponga que la tasa $R(t)$ de extracción de petróleo de un país es $R(t) = 10^7 e^{-kt}$ medida en toneladas/año. Suponga, además, que la reserva total actual es de 2×10^9 toneladas. Encontrar todas las posibles constantes $k > 0$ de forma tal que la reserva total de petróleo dure para siempre.

3. Un auto viaja desde Junín de los Andes en dirección a Esquel, que está a una distancia de 500 km. Durante las dos primeras horas viaja a velocidad constante de 80 km/h. Las dos horas posteriores aumenta la velocidad linealmente desde 80 km/h a 120 km/h. Luego de las 4hs, viaja a velocidad $v(t) = 30te^{-t+4}$ km/h.¿Cuánto tarda el auto en recorrer la mitad del camino?. ¿El auto llega alguna vez a Esquel?

9. Verdadero o Falso

Decidir si las siguientes enunciados son **V**erdaderos o **F**alsos, en caso que sean **V**erdaderos **explicar por qué**, y en caso que sean **F**alsos **dar un contraejemplo**.

1. Si $f(x)$ es una función continua y derivable con derivada continua que satisface $f(0) = 1$ y $f'(x) \geq 4\,x$ para todo valor de x, entonces $f(2) \geq 9$.

2. Si $f(x)$ es una función continua y derivable con derivada continua que satisface $f(0) = 1$ y $f'(x) \geq x + 1$ para todo valor de x, entonces $f(2) \geq 5$.

3. Si $f'(x) \geq g'(x)$ para todo valor de x, entonces $f(x)$ es **siempre** mayor o igual a $g(x)$.

4. Hay una sola función $f(x)$ que satisface $f'(x) = 2x$.

5. Si $f(x)$ es una función continua con $\int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo x en el intervalo $(-1, 1)$..

6. Si $x > 0$, entonces vale que

$$\int_x^1 \frac{1}{t^2+1} dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{t^2+1} dt$$

10. Multiple Choice

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivada continua que cumple

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} f(x).\ \cos(x)\, dx = 2 \qquad y \qquad f(-\pi/2) = 5$$

Entonces $\int_{\pi}^{-\pi/2} f'(x).\operatorname{sen}(x)\, dx$ es igual a:

   a) 3
   b) -3
   c) 7
   d) -7

2. Si llamamos $A = \int_0^1 x^{2020} e^x\, dx$ y $B = \int_0^1 x^{2021} e^x\, dx$ entonces:

   a) $B = e - 2020A$
   b) $B = e - 2021A$
   c) $A = e - 2020B$
   d) $A = e - 2021B$

3. Si $m > 0$ es un número tal que el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} mx & \text{si } x \geq 0 \\ \\ 4x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad , \qquad g(x) = 4x^3$$

es igual a 5, entonces:

a) $m = 1$

b) $m = 4$

c) $m = 8$

d) $m = 10$

4. El área de la región del primer cuadrante encerrada por los gráficos de $f(x) = 7x^2$, $g(x) = \frac{1}{7}x^2$ y la recta de ecuación $y = 7$ vale

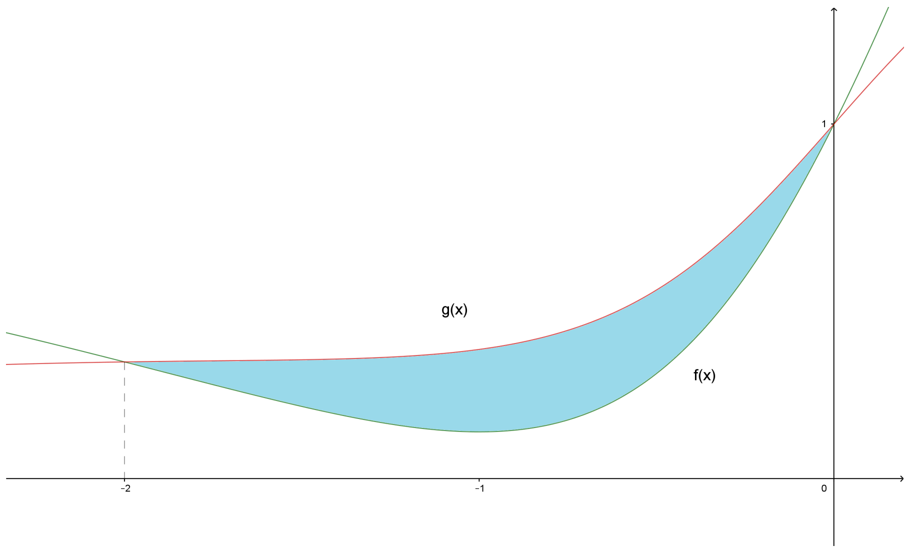
a) $\frac{12}{7}$

b) 24

c) 28

d) 36

5. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $g(x) = 1 + xe^x + \dfrac{x}{1+x^2}$. Sabemos que el área pintada en el dibujo mide $1 - 5e^{-2}$.



Podemos asegurar que el valor de la integral $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)dx$ es:

a) $8e^{-2} - \dfrac{\ln(5)}{2}$.

b) $3e^{-2} - 1 - \dfrac{\ln(5)}{2}$.

c) $-8e^{-2} + \dfrac{\ln(5)}{2}$.

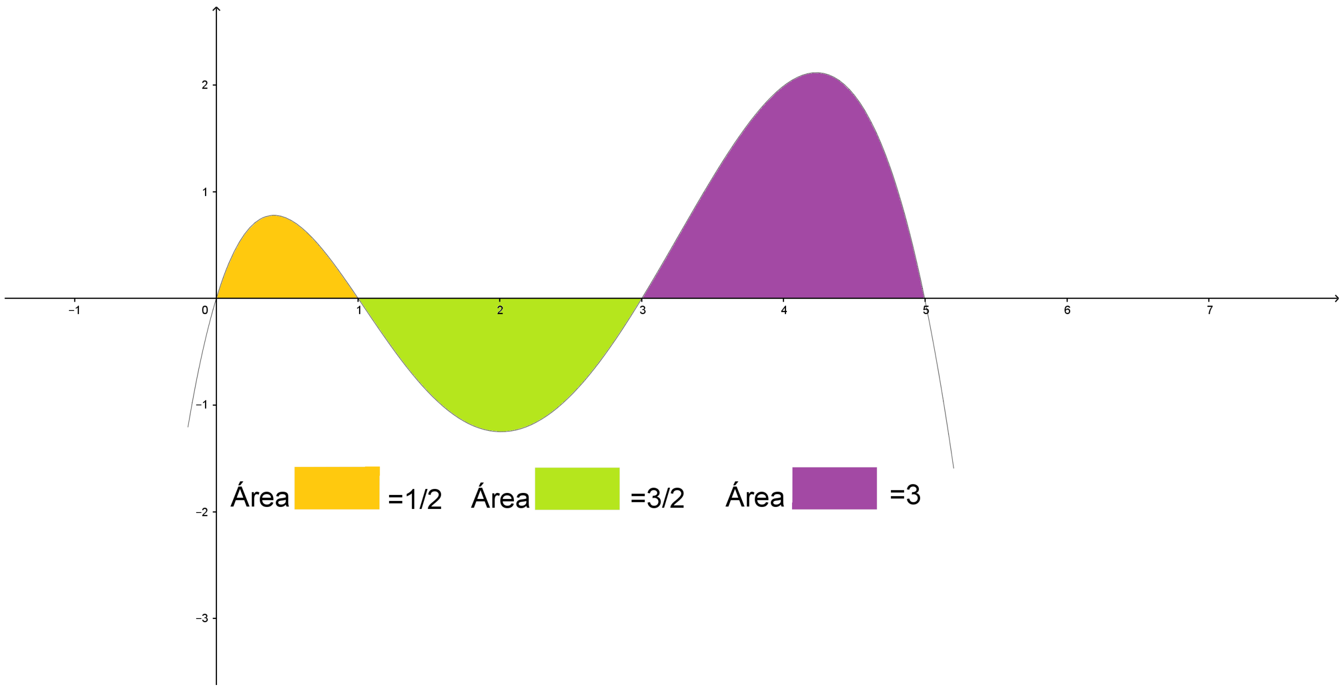
d) $8e^{-2} + \dfrac{\ln(5)}{2}$.

e) Ninguna opción es correcta.

f) $3e^{-2} - 1 + \dfrac{\ln(5)}{2}$.

g) $3e^{-2} + \dfrac{\ln(5)}{2}$.

6. Considere la función $f(x)$ cuyo gráfico se muestra a continuación:



Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ tal que $F(1) = 7/2$, entonces:

a) $F(0) = 3, F(3) = 2$ y $F(5) = 5$.

b) $F(0) = 3, F(3) = 5$ y $F(5) = 8$.

c) $F(0) = 4, F(3) = 5$ y $F(5) = 8$.

d) $F(0) = 3, F(3) = 3$ y $F(5) = 7/2$.

e) Ninguna opción es correcta.

f) $F(0) = 3, F(3) = 5$ y $F(5) = 5$.

g) $F(0) = 4, F(3) = 2$ y $F(5) = 5$.

7. Si $F(x) = \int_0^{\operatorname{tg}(x)} e^{t^2}\, dt$, entonces $F(x)$ tiene:

   a) ninguna raíz
   b) una única raíz
   c) infinitas raices
   d) Ninguna es correcta

8. Sea
$$F(x) = 3 + \int_{x^2}^{x^3} \frac{1+\sin(t-1)}{2+t^2} dt$$
   Entonces la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, F(1))$ es:

   a) $y = 3x + \frac{8}{3}$
   b) $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$
   c) $y = 3$
   d) $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

9. Si $a < 0 < b$ y $f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{1+e^x}$. Entonces el área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x)$ y el eje x para x entre a y b es:

   a) $\int_a^b f(x)\, dx$
   b) $\int_a^b -f(x)\, dx$
   c) $\int_a^0 -f(x)\, dx + \int_0^b f(x)\, dx$
   d) $\int_a^0 f(x)\, dx + \int_0^b -f(x)\, dx$

10. Sea $f(t)$ una función continua tal que $f(0) = 5$.

    Definimos $F(x) = \int_{x^4}^{8x} f(3t)\, dt$. Entonces $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x)}{x}$ es igual a:

    a) 30

    b) 40

    c) 50

    d) Ninguna es correcta

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, creciente y positiva.

    Definimos $F(x) = \int_{x^2}^{5} f(t)\, dt$. Entonces $F(x)$ tiene:

    a) 0 puntos de inflexión

    b) 1 puntos de inflexión

    c) 2 puntos de inflexión

    d) 3 puntos de inflexión

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, cuya única raíz es $x = 0$ y con derivada continua.

    Entonces: $\int_{-1}^{1} \ln\Big(f(x)\Big) . \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx =$

    a) $\dfrac{\ln^2\Big(f(-1)\Big)}{2} - \dfrac{\ln^2\Big(f(1)\Big)}{2}$

    b) 0

    c) $\dfrac{\ln^2\Big(f(1)\Big)}{2} - \dfrac{\ln^2\Big(f(-1)\Big)}{2}$

    d) Ninguna es correcta

13. Sea $f(x) = \ln(x)$. Entonces el área de la región encerrada entre el gráfico de f, el eje y y la recta tangente al gráfico de f que pasa por el origen de coordenadas es igual a:

  a) e

  b) $e/2$

  c) $2e$

  d) $1/2e$

14. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define la integral

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\frac{a}{x} - \sqrt{x} \right) x^{-3} \, dx$$

Entonces:

  a) I converge a un número positivo para todo $a \in \mathbb{R}$.

  b) I converge a un número negativo para todo $a \in \mathbb{R}$.

  c) Existen valores de a para los que I converge a un número positivo y existen valores de a para los que I converge a un número negativo.

  d) Existen valores de a para los que I diverge.