Matemática 2 - Primer semestre 2023
Práctica 3: Determinante

1. Calculo de Determinantes:

Calcular los determinantes de las siguientes matrices

1. Determinantes de 2×2:

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{(c)} \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix} \qquad \textbf{(d)} \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a-1 & a \end{pmatrix}$$

2. Determinantes de 3×3 :

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{(c)} \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(d)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinantes de $n \times n$

$$\textbf{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **Determinantes usando Gauss-Jordan:**

   Calcular los determinantes de las siguientes matrices aplicando Gauss-Jordan:

$$(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{c}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{d}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Propiedades del determinante

1. Sea A una matriz de 5×5 con $\det(A) = 3$, calcular

   a) $\det(2A)$

   b) $\det(A^2)$

   c) $\det\left(4\,(2A)^{-1}\right)$

2. Sea A una matriz inversible de tipo $n \times n$, decidir si las siguientes matrices son inversibles,

   a) A^4

   b) $7A$

   c) αA, para cualquier valor de α

   d) $A + \mathbf{I}_n$.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 5$, calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 6a & 9b & 3c+3b \\ 2d & 3e & f+e \\ 2g & 3h & i+h \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} e & 2d & f+d \\ b & 2a & c+a \\ h & 2g & i+g \end{pmatrix}.$$

4. Hallar los valores de α para que la matriz

$$\begin{pmatrix} 12 & -9 & \alpha^2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$

no sea inversible.

5. **Verdadero o Falso:**

Determinar y justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si A es una matriz de $n \times n$ con una fila de ceros, entonces A no es inversible.

b) Si A es una matriz de $n \times n$ con una columna de ceros, entonces A no es inversible.

c) Si A es una matriz de $n \times n$ con una fila de unos, entonces A no es inversible.

d) Si A es una matriz de $n \times n$ con dos filas iguales, entonces A no es inversible.

e) Si A es una matriz de $n \times n$ que satisface que una fila es un múltiplo de otra, entonces A no es inversible.

f) Si A es una matriz de $n \times n$ que satisface que una columna es un múltiplo de otra, entonces A no es inversible.

g) Si A es una matriz de $n \times n$ que satisface que una fila es igual a una columna, entonces A no es inversible.

h) El producto de dos matrices inversibles de $n \times n$ inversibles es inversible.

i) Si A y B son dos matrices de $n \times n$ satisfaciendo que A inversible y que B no inversible, entonces AB no es inversible.

j) Si A es una matriz de $n \times n$, entonces $\det(A) = \det(-A)$.

k) Si A es una matriz de $n \times n$, entonces $\det(4A) = 4\det(A)$.

l) Si A es una matriz de $n \times n$ satisfaciendo que $A^2 = 0$, entonces $\det(A) = 0$.

m) Si A es una matriz de $n \times n$ satisfaciendo que A^5 es la matriz identidad, entonces $\det(A) = 1$.

n) Si A y B son dos matrices de $n \times n$ satisfaciendo que AB es inversible, entonces BA también es inversible.

ñ) Si A y B son dos matrices de $n \times n$ satisfaciendo que el sistema de ecuaciones $(AB)\vec{x} = \vec{0}$ tiene una única solución, entonces el sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{0}$ también tiene una única solución.

o) Si una matriz A de 3×3 satisfface $A\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, entonces $\det(A)=0$.

p) Si una matriz A de 2×2 satisface $A^7=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$, entonces la matriz A tiene rango menor a 2.

q) Si una matriz A de 2×2 satisface que $A\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3&2\\-1&1\end{pmatrix}$, entonces el $\det(A)=0$.

r) Si A es tal que $\det(A)=-2$, entonces existe un coeficiente de A que es negativo.

s) Si A,B son matrices inversibles y se define $C=ABA^{-1}B^{-1}$, entonces $\det(C)=1$.

t) Si A es una matriz 4×4 con $\det(A)=-3$ y B la siguiente matriz:

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&7&-3&1\\1&-1&2&2\\0&-1&1&-11\end{pmatrix},$$

entonces AB tiene rango 4.

u) Si A, B son matrices 5×5 tales que $\det(A)=4$ y $\det(B)=-\frac{1}{2}$, el determinante de $C=\frac{1}{2}A^4B^{-1}A^{-1}$ vale -4.

3. Determinantes y Sistemas de ecuaciones

1. Hallar los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$ para los que el sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ tiene solución, siendo

a) $A=\begin{pmatrix}1&5&6\\1&-1+\alpha&-3\\-1&3&5+\alpha\end{pmatrix}$ y $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

b) $A=\begin{pmatrix}1-\alpha&-1&-2\\1&3-\alpha&2\\-1&-1&-\alpha\end{pmatrix}$ y $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

c) $A=\begin{pmatrix}12&8&\alpha^2\\3&1&1\\6&2&\alpha\end{pmatrix}$ y $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$

2. Calcular, *si es posible*, las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando la regla de Cramer.

$$\textbf{(a)}\ \left\{\begin{array}{rcr} 3y &=& 4-2x \\ 4x-3y-5 &=& 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{(b)}\ \left\{\begin{array}{rcr} 3x+5 &=& -4y \\ 2x &=& 4-y \end{array}\right.$$

$$\textbf{(c)}\ \left\{\begin{array}{rcr} 3x-y &=& 4 \\ 2x+y &=& -z \\ 2y+2z+1 &=& 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{(d)}\ \left\{\begin{array}{rcr} x-2z-1 &=& -y \\ 2x-y+z &=& 2 \\ x-2y &=& -4+4z \end{array}\right.$$

$$\textbf{(e)}\ \left\{\begin{array}{rcr} x-3y+z &=& 4 \\ 2x &=& -2+y \\ 4x-3z &=& 0 \end{array}\right. \qquad \textbf{(f)}\ \left\{\begin{array}{rcr} x-3y+z &=& 0 \\ 2x-y &=& 2 \\ 4x-3z &=& 1 \end{array}\right.$$

3. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & \alpha^2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   a) Hallar los valores de α para que el sistema de ecuaciones tenga **una única solución**. En estos casos resolver el sistema **usando la Regla de Cramer**.

   b) Hallar los valores de α para que el sistema de ecuaciones tenga **infinitas soluciones**. En estos casos hallar todas las soluciones usando **su método favorito**.

   c) Hallar los valores de α para que el sistema de ecuaciones **no tenga soluciones**.

   d) Hallar los valores de α para que el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema.

4. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+8y &=& 4-10x-\alpha^2 z \\ 3x+z &=& 1-y \\ 2y+\alpha z-1 &=& 1-6x \end{array}\right.$$

   a) Hallar los valores de α para que el sistema de ecuaciones tenga **una única solución**. En estos casos resolver el sistema **usando la Regla de Cramer**.

   b) Hallar los valores de α para que el sistema de ecuaciones tenga **infinitas soluciones**. En estos casos hallar todas las soluciones usando **su método favorito**.

c) Hallar los valores de α para que el sistema de ecuaciones **no tenga soluciones**.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\alpha \\ 2 & 0 & \alpha \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar todos los valores de α para los cuáles el sistema

$$A \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

tiene infinitas soluciones y calcularlas.

4. Multiple Choice

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tal que $det(A) = 6$. Entonces el determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 5c + a & c & 3b \\ 10f + 2d & 2f & 6e \\ 5i + g & i & 3h \end{pmatrix}$$

es igual a:

a) -36

b) 36

c) 1

d) -1

2. Sea A una matriz de 4×4 tal que $det(2A^3) = 54$. Entonces $det(3(2A^t)^{-1})$ es igual a

a) 3/2

b) 81/16

c) 9/4

d) 27/8

3. Sean A, B matrices de 7×7 inversibles tales que

$$A^3.B^{-1} + A^2 = 3B^2(A^t)^{-1}$$

Si $det(A) = det(B)$, entonces $det(A+B)$ es igual a:

a) 3^7

b) 3

c) 3^2

d) 0

4. Sean A, B matrices de 3×3 tales que $det(A) = 2$ y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a \neq 5$. Entonces

a) $det(3A^{-1}BA) = 27(a-5)$ y el sistema $(3A^{-1}BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución única.

b) $det(3A^{-1}BA) = 3(5-a)$ y el sistema $(3A^{-1}BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución única.

c) $det(3A^{-1}BA) = 27(5-a)$ y el sistema $(3A^{-1}BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución única.

d) El sistema $(3A^{-1}BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones o no tiene solución.

5. Sean A y B matrices de 3×3 tales que $\det(A) = 4$ y $AB\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Entonces

   a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b) $\det(B - 2I) = 1/4$

   c) $Rg(B - 2I) < 3$

   d) El sistema $(B - 2I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ tiene solución única

6. Sean A y B matrices de 3×3 con $\det(B) = 2$ y A inversible, tales que

$$A^2B - AB^2 = 3AB^{-1}.$$

   Entonces:

   a) El sistema $(A - B)\vec{x} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones

   b) Existe algún $\vec{b}$ tal que el sistema $(A - B)\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución

   c) $\det(A - B) = 3/4$

   d) $\det(B - A) = -27/4$

7. Consideremos el siguiente sistema de eciaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & k^2-1 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ k^2-k-2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces todos los valores $k \in \mathbb{R}$ para los que el sistema tiene infinitas soluciones son:

   a) $k = 2$

   b) $k = -2$

   c) $k \in \{-2, 2\}$

   d) $k \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$