Universidad Torcuato Di Tella

Matemática II

Final - Tema 1

14/12/2022

Nombre y Apellido: ....

	Ptos. del ejercicio	**Ptos. obtenidos**
Ejercicio 1	24	
Ejercicio 2	24	
Ejercicio 3	24	
Ejercicio 4	28	
Total	**100**	

Consejos:

- En algunos de los ejercicios de este examen, Ud. puede chequear si su respuesta es la correcta: hágalo!
- Toda afirmación que forme parte de la resolución de los problemas debe ser debidamente justificada.
- Antes de realizar el ejercicio lealo completamente. Si tiene ítems, sígalos.

Ejercicio 1: *(24 puntos)* Una empresa coloca en un fondo de inversión un capital inicial de 50 millones de dólares. La función de inversión/desiversión medida en millones de dólares por año viene dada por

$$I(t) = \begin{cases} 4t & si \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 2t^2 - 18t + 36 & si \quad 2 < t \leq 7 \\ 8e^{-t+7} & si \quad t > 7. \end{cases}$$

(a) Calcular cuál será el capital de la empresa al cabo de 3 años.

(b) Determinar, si existe, el momento en que el capital fue mínimo y calcularlo.

(c) Determinar si en algún momento el capital supera el valor calculado en (a)

Ejercicio 2: *(24 puntos)* En un espectáculo se sabe que la cantidad de entradas vendidas depende de $\boldsymbol{x}$ cantidad de repeticiones de la publicidad en hora pico en televisión, e $\boldsymbol{y}$ cantidad de publicidad en páginas de internet según la fórmula

$$V(x, y) = x^3 y^3.$$

Si el costo de cada repetición de publicidad en televisión en hora pico es de \$10800 y cada página con publicidad en internet cuesta \$6480.

1. ¿Cuál es el costo mínimo en publicidad para vender 216000 entradas?
2. Si el jefe de publicidad del espectáculo quiere contratar a lo sumo 6 páginas de intenet. ¿Cuál sería el costo mínimo en publicidad para vender 216000 entradas?

Ejercicio 3: *(24 puntos)* Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & a-1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el que la matriz

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & a \\ -2 & a+1 & -1 \end{pmatrix}$$

resulte la inversa de A.

(b) Sea

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k-1 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & k+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para el valor de a hallado, determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que el sistema

$$AB\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tenga infinitas soluciones.

Ejercicio 4: *(28 puntos)* Determinar la validez de las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas, explicar por qué, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo **Justificar las respuestas**.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivada continua tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2023$, $f(0) = 0$ y que satisface:
$$\int_{-\infty}^{0} f(x)e^{2022x}\, dx = \frac{1}{2022}.$$
Entonces
$$\int_{0}^{-\infty} f'(x)e^{2022x}\, dx = 1.$$

2. Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tal que A es inversible y
$$AB^2\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
no tiene solución. Entonces el sistema $B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones.

3. Sea A una matriz cuadrada que verifica $(A - I)^2 = 0$, entonces $A^{-1} = 2I - A$.

4. Sea $f(x, y) = \dfrac{e^{xy^2-2}}{y^2+1}$, emtonces la recta tangente a la curva $(f = \frac{1}{2})$ en el punto $P = (2, -1)$ es perpendicular a la recta de ecuación $x - 3y = 1$.