Primer parcial - Muestra 1

1. La inversión / desinversión de una empresa está dada por la siguiente función, donde t se mide en años e $I(t)$ en millones de pesos por año:

$$I(t) = \begin{cases} 8t - 16 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ \\ 4(t-1)e^{-t+3} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

Sabiendo que el capital a los 3 años es de 18 millones de pesos,

a) Hallar el capital inicial.

b) Hallar, si existe, el valor mínimo alcanzado por el capital.

c) ¿En cuántos momentos el capital es la mitad del capital inicial?

d) Determinar, si existen, todos los momentos donde el capital es igual al capital inicial (además del momento inicial)

2. Un grupo de amigos alquilar una quinta para pasar el verano. La pileta cuenta con una bomba con capacidad de llenar o vaciar. La velocidad de llenado/vaciado esta dada por

$$V(t) = \begin{cases} 200 - 200e & \text{si } 0 \leq t \leq 2, \\ \\ 200 - 200e^{-t+3} & \text{si } t > 2, \end{cases}$$

(a) Si dos horas después se llega a una marca que indica que la pileta tiene 300 litros de agua. ¿Cuánta agua había inicialmente en la pileta?

(b) ¿Cuándo se alcanza la mínima cantidad de agua en la pileta?,¿Cuánta agua es?

(c) Si la pileta se considera llena al llegar a los 30000 litros. ¿Se llega a llenar?

3. *a*) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(4-x^2)^{1/3}}\, dx.$

b) Hallar el área encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3\sqrt{x+1}$ y de $g(x) = 2x$ y el eje x.

4. Un gran hotel adquirió un total de 240 almohadas, 110 mantas y 135 edredones. Quiere renovar sus habitaciones repartiendo estos nuevos productos entre las habitaciones (sin que sobre nada). Para ello los debe distribuir en los siguientes tipos de habitaciones:

`Habitacion Comun: 1 almohada, 1 manta`

`Habitacion Superior : 2 almohadas, 1 edredon`

`Habitacion Premium : 3 almohadas, 1 manta, 1 edredon`

`Habitacion Familiar: 4 almohadas, 2 mantas, 3 edredones`

a) Determinar todas las formas en que se pueden renovar las habitaciones con la condición de que se renueven 10 o más habitaciones de cada tipo y además que se renueven más habitaciones superiores que premium.

b) Determinar cúal de todas las opciones del item anterior es la que permite renovar la mayor cantidad de habitaciones.

5. Una empresa envasa jugo de naranja, pomelo y manzana. La empresa dispone de tres tipos de camiones que trasladan cajas de los tres tipos de jugos al centro de distribución. Los camiones de tipo I trasladan 50 cajas de jugo de naranja, 100 cajas de jugo de pomelo y 50 de jugo de manzana, los camiones de tipo II trasladan 50 cajas de jugo de naranja, 50 cajas de jugo de pomelo y 100 de jugo de manzana, y los camiones de tipo III trasladan 100 cajas de jugo de naranja y 300 de jugo de manzana.

   Se requiere transportar 1600 cajas de jugo de naranja, 1200 cajas de jugo de pomelo y 3600 cajas de jugo de manzana con la condición que se utilice al menos un camión de cada tipo y que los camiones deben ir llenos.

   a) ¿Cuántas opciones distintas hay?

   b) Si los camiones de tipo I cuestan la mitad de los de tipo III y el doble de los de tipo II. ¿Cuántos camiones de cada tipo debemos usar para que el costo de traslado sea mínimo?

6. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ a+1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & a-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema de ecuaciones tenga **una única solución**. Para alguno de los valores hallados resolver el sistema **usando la Regla de Cramer**.

   b) Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema de ecuaciones tenga **infinitas soluciones**. En estos casos hallar todas las soluciones usando **su método favorito**.

   c) Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema de ecuaciones **no tenga soluciones**.

7. Sea A una matriz de 3×3 con $\det(A) = 3$ y $B = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sea una de las infinitas soluciones del sistema

$$AB \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. Determinar la validez de las siguientes afirmaciones. En caso de que sean verdaderas, explicar por qué, y en caso de que sean falsas dar un contraejemplo **Justificar las respuestas**.

a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva, entonces

$$F(x) = \int_{-x^5}^{e^{3x}} f(2\cos(t))\, dt,$$

no tiene mínimo absoluto.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivada continua tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2023$, $f(0) = 0$ y que satisface:

$$\int_{-\infty}^{0} f(x) e^{2022x}\, dx = \frac{1}{2022}.$$

Entonces

$$\int_{0}^{-\infty} f'(x) e^{2022x}\, dx = 1.$$

c) Si A es una matriz de tamaño 4×3 tal que el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene solución única, entonces el sistema $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ tiene solución única.

d) Si A es una matriz de 3×3 tal que el sistema $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones, entonces el sistema $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones.

e) Sean A y B dos matrices de 2×2. Si B es inversible y el sistema $(BA - A)\vec{x} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones, entonces $\det(A) = 0$.

f) Sean A y B dos matrices de 3×3 tales que $\det(A) = 2$ y $2A + AB = 5A^3(A^t)^{-1}$, entonces $\det(2I + B) = 500$.