

Universidad Torcuato Di Tella

Matemática II

Final - Tema 1

Martes 16 de Julio de 2019.

Apellido y Nombre:

Sección:

Ej 1 (26 pts)	Ej 2 (26 pts)	Ej 3 (24 pts)	Ej 4 (24 pts)	Nota

Advertencia:

1. Si obtiene una solución errónea en algún problema en que se puede chequear la solución, se le quitarán puntos.
2. Toda afirmación que forme parte de la resolución de los problemas debe ser debidamente justificada.

Ejercicio 1: La inversión/desinversión de una empresa está dada por la siguiente función, donde t está medido en años e $I(t)$ en millones de pesos/año:

$$I(t) = \begin{cases} -4t + 8 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 10 & \text{si } 3 \leq t \leq 9 \end{cases}$$

Suponiendo que el capital inicial es de 10 millones de pesos,

- (a) Determinar en qué períodos de tiempo el capital crece y en qué períodos decrece, durante los primeros 9 años
- (b) Determinar en qué momento el capital es mínimo y en qué momento es máximo, durante los primeros 9 años. Dar los respectivos valores.
- (c) Determinar en cuántos momentos, durante los primeros 9 años, el capital es igual a 15 millones de pesos. Justificar

Sugerencia: hacer un gráfico de la función Inversión y de la función Capital para guiarse con las respuestas.

Ejercicio 2: Sea $f(x, y) = -x^2 - y^2$.

Determinar los extremos de $f(x, y)$ sujetos a la restricción

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 = 1\}$.
- (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 = 1, -2 \leq x \leq -1\}$.

Importante: Resolver el ejercicio usando el método de Lagrange (o tangencia) y justificar con detalle. Graficar las curvas de nivel de $f(x, y)$ necesarias y la restricción.

Ejercicio 3: Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Clasificar el sistema $ABx = b$ en términos del valor de $k \in \mathbb{R}$. Es decir, dar los valores de k para los que el sistema tiene **solución única**, los valores de k para los

que tiene **infinitas soluciones** y los valores de k para los que **no tiene solución**. Hallar las soluciones del sistema en los casos en que el sistema tenga infinitas soluciones.

Ejercicio 4:

Decidir si los siguientes enunciados son **Verdaderos o Falsos**. Justificar adecuadamente.

- (a) La siguiente integral vale -1

$$\int_1^9 \frac{1}{(\sqrt{x}-3)\sqrt{x}} dx.$$

- (b) Si $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$, entonces todas las derivadas direccionales de f en el punto $(2/3, -4/3)$ valen 0.
- (c) Si $f(x, y) = (x - 3xy)^3$ entonces la recta tangente a la curva de nivel de f en el punto $(1, 0)$ contiene al punto $(-1, 2)$.
- (d) Si A es una matriz de 3×3 tal que el sistema $Ax = 0$ tiene solución única y B está dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

entonces el rango de AB es menor que 3.