

Matemática 2 - Primer semestre 2023

Práctica 4: Aplicaciones de Derivadas

1. Derivadas de funciones dadas en forma implícita.

1. Sea $f(x)$ una función dos veces derivable que satisface las siguientes condiciones:

- $x^2 + 5x f(x) + [f(x)]^2 - 2x + f(x) - 6 = 0.$
- $f(1) = 1.$

Hallar $f'(1)$ y $f''(1)$.

2. Sea $f(x)$ una función continua y derivable satisfaciendo:

$$f(x^2) + xf(x) + 2x^2 = 0.$$

- a) Hallar los valores de $f(1)$, $f'(1)$ y $f''(1)$.
- b) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de f en el punto $P = (1, f(1))$.
- c) ¿Puede encontrar alguna función $f(x)$ que satisfaga estas propiedades?.

3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable que cumple la siguiente ecuación para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + xf(x) - [f(x)]^3 = 9.$$

Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal al gráfico de f en el punto $(-3, f(-3))$.

4. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Suponga que se cumple que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que

$$\sin(f(x)) + 3f(x) = 1 - x^5.$$

- a) Probar que f es estrictamente decreciente.
- b) Probar que f no tiene asíntota oblicua a derecha.
- c) Probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^6} = 0$.

5. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale que

$$[f(x)]^3 + 2f(x) = -x^4 + 2.$$

Probar que f tiene un máximo absoluto en $x = 0$.

2. Multiple choice

1. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tales que para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface:

$$[f(x)]^2 (x - 1) + xf(x) + e^{f(x)+2\alpha} (x - 2) = x + 6$$

Sabiendo que $f'(2) = -1$, entonces:

- a) $\alpha = -1, f(2) = 2$.
- b) $\alpha = -1, f(2) = -2$.
- c) $\alpha = 1, f(2) = 2$.
- d) $\alpha = 1, f(2) = -2$.
- e) Ninguna es correcta.

2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(1) = 0$ y que para todo $x \in \mathbb{R}$ satisface que

$$\sin(f(x)) + 5f(x) + [f(x)]^3 - 6 = 6x^2 - 12x$$

entonces la ecuación $f(x) = -1$ tiene exactamente

- a) 1 solución.
- b) 2 soluciones.
- c) 3 soluciones.
- d) 4 soluciones.
- e) Ninguna solución.

3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable que satisface

$$-e^{f(x)} = 1 + f(x) - 2x$$

entonces

- a) La función f no tiene ni máximo ni mínimo.
- b) La función f no tiene máximo pero sí tiene mínimo.
- c) La función f no tiene mínimo pero sí tiene máximo.
- d) La función f tiene mínimo y máximo.
- e) No se puede saber si la función f alcanza extremos absolutos.

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable que satisface

$$[f(x)]^2 + 2 \cdot f(x^2) = x - 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces la ecuación de la recta tangente en $(0, f(0))$ es

- a) $y = -\frac{1}{2}x$
- b) $y = x - 1$
- c) $y = -\frac{1}{2}x - 1$
- d) $y = x + 1$

5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable que satisface

$$x \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x^2) = x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces la ecuación de la recta tangente en $(1, f(1))$ es

- a) $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$
- b) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$
- c) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$
- d) $y = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$

3. Problemas con derivadas y razón de cambio

1. Una escalera de 5 metros de largo está apoyada contra una pared vertical, con su extremo superior a 4 metros del piso. Si la parte inferior de la escalera empieza a resbalar sobre el piso a una velocidad de 1 m/seg . ¿A qué velocidad desciende el extremo superior en el momento en que comienza a deslizarse?.
2. Un hombre sobre la terraza de un edificio, tira de una cuerda de 10 metros de longitud en cuyo extremo está atado un peso P . El hombre se aleja del borde de la terraza con una velocidad constante de 2m/s hasta que sube el objeto. ¿Con qué velocidad se alejan o se acercan el hombre y el objeto en el instante en que el hombre está a 3m del borde de la terraza?
3. El área de un triángulo equilátero crece a razón de 5 cm^2 por minuto. Determinar la razón de cambio de los lados cuando el perímetro es de 12 cm .

Recuerdo: Un triángulo equilátero es un triángulo con sus tres lados iguales.

4. Una máquina descarga limadura de hierro por un tubo a una velocidad de $8\text{m}^3/\text{hora}$. La limadura de hierro cae formando un cono recto de base circular. Se sabe que en todo momento el diámetro de la base es igual a la altura del cono. Halle a qué velocidad crece la altura de este cono en el instante en el que el radio de la base es de $1,5 \text{ metros}$.

Ayuda: fórmula de volumen de un cono recto de base circular de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

5. Suponga que un incendio forestal se propaga en la forma de un círculo cuyo radio cambia a razón de $1,8\text{m/min}$. ¿A qué razón está creciendo el área de la región incendiada cuando el radio alcanza 60m ?
6. Sea L la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes x e y respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de $0,5\text{m/s}$ mientras que y disminuye con una rapidez de $0,25\text{m/s}$ ¿A qué velocidad está cambiando L cuando x mide 3m e y mide 4m ? ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?
7. Un avión que vuela a 650 km/h en dirección Norte pasa por encima de una torre de control a las 12 hs. Otro avión pasa por la misma torre una hora después pero volando en dirección Oeste a $\sqrt{2} \times 650 \text{ km/h}$. Hallar a qué velocidad se alejan a las 2 pm.

4. Multiple choice

1. Un globo esférico se infla y se desinfla. Si sabemos que en el momento en que el radio del globo es de $\frac{\alpha}{2} \text{ cm}$ (donde α es un número positivo), la velocidad a la que crece el volumen del globo es de $\pi\alpha^3 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$, entonces la velocidad con la que aumenta la superficie del globo en dicho momento es

Ayuda: las fórmulas del volumen y la superficie de una esfera son $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$ respectivamente

- a) $2\pi\alpha^2 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.
- b) $4\pi\alpha^2 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.
- c) $2\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.
- d) $4\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$.
- e) Ninguna es correcta

2. Una placa metálica con forma de rectángulo expuesta al calor se expande con el tiempo de forma tal que uno de sus lados siempre mide el **triple** que el otro. En un determinado momento, el lado más chico mide $\alpha \text{ cm}$ (donde α es un número positivo) y el perímetro de la placa crece a razón de 16 cm por minuto. En ese momento, la velocidad con la que aumenta el **área** de la placa es igual a

- a) $12\alpha \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$.
- b) $6\alpha \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$.
- c) $3\alpha \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$.
- d) $9\alpha \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$.
- e) Ninguna es correcta.

3. Un rectángulo, donde uno de sus lados es tres cuartas partes del otro, se está agrandando. Se sabe que su diagonal crece a razón de 10 cm/seg . Entonces en el instante donde la diagonal mide 5 cm:

- a) El perímetro del rectángulo crece a razón de 24 cm/seg
- b) El área del rectángulo crece a razón de $48 \text{ cm}^2/\text{seg}$
- c) Ni (a) ni (b) son correctas
- d) (a) y (b) son correctas