Matemática 2 - Primer semestre 2023
Práctica 5: Funciones de dos Variables

1. Preliminares

Cónicas

1. Dibujar las siguientes curvas definidas por las ecuaciones:

   a) $x^2 + y^2 = 36$.

   b) $(x+5)^2 + (y-8)^2 = 4$.

   c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

   d) $x^2 + 4y^2 = 4$.

   e) $x^2 - y^2 = 1$.

   f) $-x^2 + 4y^2 = 1$.

2. Completando cuadrados, graficar las curvas que quedan definidas por las siguientes ecuaciones, y decidir si son circunferencias, elipses, hipérbolas o parábolas.

   a) $x^2 - 4x + y^2 = 5$.

   b) $x^2 - 2x + y = -1$.

   c) $y^2 - y + x = 6$.

   d) $-x^2 + 2x - y^2 - 8y = 16$.

   e) $x^2 - 2x + 3 + y^2 = 2$.

   f) $-x^2 + y^2 - 10y = -16$.

Vectores y Teorema del coseno

1. Dados los vectores $\vec{v} = (2, -3)$ y $\vec{w} = (2, 1)$, hallar

   a) $2\vec{v} - 3\vec{w}$

   b) $\vec{v} \cdot \vec{w}$

   c) $\vec{v} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w})$

   d) $\|\vec{v}\|$

   e) $\|\vec{v} - 2\vec{w}\|$

   f) Hallar la distancia entre los puntos $(2, 4)$ y $(3, -5)$.

2. Si se recorre una distancia de 25 desde el punto $(-4, 5)$ en dirección $(3, -4)$, ¿a qué **punto** se llega?

3. Hallar el ángulo α (en radianes y en grados) entre los vectores $\vec{v} = (2, -3)$ y $\vec{w} = (2, 1)$.

4. Hallar un vector perpendicular a $\vec{v} = (2, -3)$.
5. Hallar todos los vectores $\vec{w}$ perpendiculares a $\vec{v} = (2, -3)$ con norma 3.
6. Hallar todos los vectores $\vec{v}$ tales que $\vec{v} \cdot (1, 0) = 2$ y el ángulo entre $\vec{v}$ y $(1, 1)$ sea igual a $\pi/4$.

Rectas en el plano

1. Graficar todos los puntos del plano que pueden escribirse de la forma $(x, y) = t(2, 3)$ para algún $t \in \mathbb{R}$. ¿Qué gráfico se obtiene?
2. ¿Pertenece el punto $(1, 5)$ a la recta $t(1, -2) + (2, 2)$?
3. ¿Pertenece el punto $(1, 5)$ a la recta $\mathbb{L} : 4x + 2y = 10$?
4. Graficar una recta que tenga dirección paralela al vector $(-1, 2)$. Dar dos ecuaciones distintas para ella.
5. Hallar una recta paralela a la anterior que pase por el punto $(-3, -5)$. ¿Cuál es su ecuación?
6. Dar la ecuación de una recta perpendicular a la anterior que pasa por el origen.
7. Decidir si el vector $(3, -2)$ es perpendicular a la recta $\mathbb{L} : t(2, -3) + (1, 1)$. Idem con el vector $(1, \frac{2}{3})$.
8. Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $(1, 4)$ y $(-2, -4)$.
9. Hallar la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos $(1, -4)$ y $(-2, -4)$.
10. Escribir la ecuación paramétrica de la recta $4x - 2y = 7$.
11. Escribir la ecuación implícita de la recta $t(-1, 2) + (2, 3)$
12. Decidir si las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son la misma recta

    a) $\mathbb{L}_1 : 4x + 2y = 10$ y $\mathbb{L}_2 : t(-1, 2) + (2, 3)$.

    b) $\mathbb{L}_1 : t(1, -2) + (4, -1)$ y $\mathbb{L}_2 : t(-1, 2) + (2, 3)$.

    c) $\mathbb{L}_1 : t(1, -2) + (3, -1)$ y $\mathbb{L}_2 : t(-1, 2) + (2, 3)$

    d) $\mathbb{L}_1 : 4x + 2y = 6$ y $\mathbb{L}_2 : t(1, -2) + (2, 2)$

Conjuntos en el plano

Graficar todos los puntos del plano que pueden escribirse de la siguiente forma

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \geq y\}$.
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y = x^2 - 2\}$.
3. $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x < y^2 - 2\}$.
4. $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $2x - 3 \geq 3 - y\}$.
5. $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + (y - 1)^2 < 1$ con $y \neq 2\}$.
6. $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) = t(2, -1) + (1, 2)$ con $t \geq 0\}$.
7. $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) = t(2, -1) + (1, 2)$ con $t \in [0, 1]\}$.
8. $A_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $xy < 0\}$.

2. Funciones de dos variables

Curvas de Nivel

1. Dada las funciones de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, calcular el **dominio** de f

$$\begin{array}{llll}
(a) & f(x,y) = x^2 + y^2 & (b) & f(x,y) = 4x^2 + y^2 \\
(c) & f(x,y) = x - 3y + 1 & (d) & f(x,y) = 2x + 3y \\
(e) & f(x,y) = x^2 - y^2 & (f) & f(x,y) = x^2 - y \\
(g) & f(x,y) = |x - y| & (h) & f(x,y) = \ln(2x - y + 1) \\
(i) & f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2} & (j) & f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}
\end{array}$$

2. Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ del punto anterior, hallar las **curvas de nivel** $(f = 1)$, $(f = 0)$ y $(f = -1)$.

3. Describir **todas** las curvas de nivel de las funciones del punto 1.

4. La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esá definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \geq y \\ \\ -1 & \text{si} \quad x < y \end{cases}$$

Hallar y graficar los conjuntos $(f = 2)$, $(f = 0)$ y $(f = -1)$.

5. Escribir (si es posible) el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } yx^2 = yx - 3\}$ como

   a) Gráfico de una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   b) Curva de nivel $(f = M)$ para una cierta función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y algún $M \in \mathbb{R}$.

6. **Verdadero o Falso (gráficos y curvas de nivel):**

   Determinar y justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) Las **curvas de nivel** de la función $f(x,y) = yx^2 + 2y + 3$ son **gráficos** de funciones **acotadas**.

   b) Las **curvas de nivel** de la función $f(x,y) = 4yx^2 + 3y + 2$ son **gráficos** de funciones **cóncavas**.

   c) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $M \neq N$, no puede ser que el punto (a,b) esté en las curvas de nivel $(f = M)$ y $(f = N)$.

   d) Si $f(x,y) = \frac{x^2-y}{xy}$ y $g(x) = \frac{e^{x-2}-2}{x^2-5}$, entonces la curva de nivel $(f = \frac{3}{2})$ y el gráfico de g se cortan en el punto $(2,1)$.

   e) Si $f(x,y) = x^2 - 3xy$ y $g(x) = \frac{x+1}{x}$ entonces la curva de nivel $(f = -5)$ se corta con el gráfico de g únicamente en el punto $(1,2)$.

   f) No puede ser que una recta **vertical** sea el grafico de un función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   g) No puede ser que una recta **vertical** sea la curva de nivel $(f = 2)$ de un función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Derivadas Direccionales y Derivadas Parciales

1. Determinar donde están definidas y hallar las derivadas parciales $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$

   b) $f(x,y) = x - y^2 + 3xy$

   c) $f(x,y) = x^2y + 2y^3$

   d) $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$

e) $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$

f) $f(x, y) = e^{x+2y}$

g) $f(x, y) = \ln(3x + y)$

h) $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x) \cos(2x - y)$

2. La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida como $f(x, y) = \dfrac{8x - 3y}{xy}$, ¿es verdad que f **crece más** si uno se aleja un poco del punto $(2, 1)$ en la dirección $(2, 3)$ que en la dirección $(1, 1)$?

3. Si una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cumple que $\dfrac{\partial f}{\partial(4,3)}(1, 4) = 3$ y $\dfrac{\partial f}{\partial(3,4)}(1, 4) = -5$, calcular $f_y(1, 4)$.

4. Si una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cumple que $\dfrac{\partial f}{\partial(1,1)}(1, 0) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial(3,1)}(1, 0) = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, calcular $\dfrac{\partial f}{\partial(1,3)}(1, 0)$.

5. Si una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cumple que $\dfrac{\partial f}{\partial(4,3)}(3, 7) = 2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial(3,-4)}(3, 7) = -3$, ¿es verdad que f **crece** cuando nos alejamos un poco del punto $(3, 7)$ en dirección $(-2, 0)$?.

Gradientes y direcciones de crecimiento

1. ¿En qué dirección debemos movernos desde $(0, 1)$ para que crezca más rápido la función $f(x, y) = x^2 - y^2$?

2. Idem desde $(1, 1)$ con la función $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.

3. Idem desde $(1, 0)$ con la función $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

4. Para los ítems anteriores: en qué dirección decrecen más rápido desde el punto indicado?

5. Un insecto se halla en un medio ambiente tóxico donde el nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. Si el insecto está parado en el punto $(-1, 2)$, ¿en qué dirección deberá moverse para disminuir lo más rápido posible la toxicidad?

6. Dada la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $g(x, y) = 3y - x^2 + 2y^2$. Decidir si la recta tangente a la curva de nivel $(g = 1)$ en el punto $(2, 1)$ pasa por el punto $(-2, 3)$.

7. Sean $f(x,y) = \frac{yx^2}{2}$ y $g(x,y) = -3x + y^3$.

   a) Decidir si $(2,-1)$ pertenece a la curva de nivel $(f = 1)$ o $(f = -2)$.

   b) Calcular la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(2,-1)$ y la derivada direccional de f en $(2,-1)$ en la dirección $\vec{v} = (-3,-4)$.

   c) Decidir si existe una dirección $\vec{v}$ de norma 1 tal que la derivada direccional de f en el punto $(2,-1)$ es -2 .

   d) Decidir si la recta tangente a la curva de nivel de f en el punto $(2,-1)$ y la recta tangente a la curva de nivel de g en el punto $(1,1)$ son paralelas.

8. Sea $f(x,y) = \frac{xy}{x-3}$

   a) Calcular el dominio de f.

   b) Dibujar justificando las curva de nivel correspondiente a $M = 0$, la curva de nivel $M = 1$ y la curva de nivel $M = -1$. Determinar cuáles de estas curvas de nivel son gráficos de funciones de una variable.

   c) Calcular una dirección de máximo crecimiento en el punto $(1,3)$ y calcular la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto $(1,3)$.

9. Dadas funciones $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas como $f(x,y) = x^2y - 4y$, $g(x,y) = x - 3$.

   a) Dibujar la curva de nivel $(f = 1)$.

   b) Hallar la intersección de las curvas de nivel $(g = 2)$ y $(f = 1)$.

   c) ¿Cuál de las funciones f ó g crece más cuando me alejo un poco del punto $(1,2)$ en dirección $(3,-4)$.

Máximos y Mínimos locales

1. Hallar los puntos críticos de la siguientes funciones y decidir si son máximo local, mínimo local o punto silla.

   a) $f(x,y) = x^3 - 3y^2 + 12y - 3x - 8$.

   b) $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

   c) $f(x,y) = x^3 - x^2 - 2xy - 2y^2$.

   d) $f(x,y) = 3x^2y - x^2 - 3y^2 - y + 2$.

2. Sea $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - ax^2 - ay + 2$. Sabiendo que f tiene un punto crítico en $(1,1)$,

   (a) Hallar el valor de a.

   (b) Hallar todos los puntos críticos de f y clasificarlos.

Máximos y Mínimos con restricciones

1. Encontrar los puntos de tangencia (x,y) de la función $f(x,y) = y - \frac{1}{2}x^2$ sujeta a la restricción $\Phi(x,y) = xy - 8 = 0$. Dibujar las curvas de nivel que corresponden a los máximos o mínimos encontrados y dibujar la restricción. ¿Qué se puede concluir?

2. Dada la función $f(x,y) = x^3\ y^2$,

   a) Hallar el **máximo** y el **mínimo** (si existen) de f en la restricción

   $$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x + 3y - 6 = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\Big\}.$$

   b) Hallar el **máximo** y el **mínimo** (si existen) de f en la restricción

   $$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\Big\}.$$

3. Dada la función $f(x,y) = 3x + 2y + 7$,

   a) Hallar el **máximo** y el **mínimo** (si existen) de f en la restricción

   $$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y + x^2 - 4x = 5\Big\}.$$

   b) Hallar el **máximo** y el **mínimo** (si existen) de la función f en la restricción

   $$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y + x^2 - 4x = 5,\ y \leq 0\Big\}.$$

4. Hallar el **máximo** y el **mínimo** (si existen) de la función $f(x,y) = 3x + 4y - 2$ en la restricción

   $$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y + x^2 - 3x + 8 = 6,\ y \geq 0\Big\}.$$

5. Hallar el **máximo** y el **mínimo** (si existen) de la función $f(x,y) = 3x + 3y + 2$ en la restricción

   $$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x+y)^2 = 4\Big\}.$$

6. Sea la función $f(x, y) = -4x - 2y + 6$ y su restricción a $(g = 0)$, donde $g(x, y) = y - 2x + \frac{1}{4-x}$.

   a) Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de f restringida a $(g = 0)$.

   b) Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo de f restringida a $(g = 0)$ con $y \in [0, 8)$.

7. Sean $f(x, y) = \frac{x}{y} - 1$ y $g(x, y) = x^2 + 1 - y$. Hallar, si existen, el máximo y mínimo de f restricta a la condición $(g = 0)$.

8. Sean $f(x, y) = x - y^2 + 2$ y $g(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 1$.

   a) Hallar, si existen, el máximo y mínimo de f restringida a la condición $(g = 0)$.

   b) Hallar, si existen, el máximo y mínimo de f restringida al a condición $(g = 0)$ con $x \leq 1$.

9. Sea $f(x, y) = -x^2 - y^2$.

   a) Hallar, si existen, el máximo y el mínimo absoluto de $f(x, y)$ sujeto a la restricción:
   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\}.$$

   b) Hallar, si existen, el máximos y el mínimos absoluto de $f(x, y)$ sujeto a la restricción:
   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1, \ x \geq 2\}.$$

10. Si $g(1, 1) = 3$ y $\nabla g(1, 1) = (3, -4)$, demostrar que el **máximo** de la función $f(x, y) = y^2 - x + 3$ en la restricción $g(x, y) = 3$ **no** puede ser 3.

11. Si $g(1, 2) = 3$, $\nabla g(1, 2) = (3, -4)$, $f(1, 2) = -1$, $\nabla f(1, 2) = (2, 5)$, demostrar que **existe un punto** (x_0, y_0) en la curva de nivel $(g = 3)$ tal que $f(x_0, y_0) < -1$.

12. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \frac{2x^2 - 2y}{xy}$$

Demostrar que

a) El punto $(2,1)$ está en la **curva de nivel** $(f = 3)$.

b) La **recta tangente** a la curva de nivel $(f = 3)$ en el punto $(2,1)$ pasa por el punto $(-22,-14)$.

c) f crece **más** si uno se aleja un poco del punto $(2,1)$ en la dirección $(3,-2)$ que en la dirección $(2,-1)$.

d) La curva de nivel $(f = 3)$ es el gráfico de una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es **creciente** en $(0,+\infty)$.

Problemas

1. Hallar dos números positivos cuyo producto sea máximo y su suma sea igual a uno.

2. La Cía. Internacional de Chucherías usa aluminio y hierro para producir chucherías de alta calidad. La cantidad de paquetes de chucherías que se puede producir usando x kilos de aluminio e y kilos de hierro es de $Q(x,y) = xy$. El costo de la materia prima es: 6$ el kilo de aluminio y 3$ el kilo de hierro.

   ¿Cuántos kilos de aluminio y hierro deberán usarse para manufacturar 800 paquetes de chucherías si se desea minimizar las costos de produccion?

3. Sea la función de utilidad $U(x,y) = (x+2)(y+1)$ donde x e y representan distintos bienes. Sabiendo que los precios de los bienes representados por x e y son 2 pesos y 5 pesos respectivamente, y que el consumidor desea gastar exactamente 51 pesos entre estos dos bienes. Determinar la utilidad máxima.

4. La producción diaria de pantalones (P) en una fabrica textil depende de la cantidad de metros de tela (T) ue se usan como materia prima y de la cantidad de obreros (O) que trabajan ese día según la fórmula

$$P = 2TO^2$$

   Un metro de tela cuesta 40$ y el sueldo diario de cada trabajador es de 200$. Si la fabrica tiene un presupuesto de 24000$ diarios, hallar cual es la **producción diaria máxima** de pantalones.

5. La producción diaria de pantalones (P) en una fabrica textil depende de la cantidad de metros de tela (T) que se usan como materia prima y de la cantidad de obreros (O) que trabajan ese día según la fórmula

$$P = 2TO^2$$

Un metro de tela cuesta 40$ y el sueldo diario de cada trabajador es de 200$. Si la fábrica quiere producir 2560 pantalones diarios, ¿cuantos metros de tela debe comprar y cuantos trabajadores debe contratar para que su **costo sea mínimo**?.

6. Un fabricante de gaseosas sabe que la venta diaria V de latas de gaseosa depende de la cantidad t de minutos de propaganda en los canales de TV y de la cantidad r de páginas de publicidad en las revistas según la siguiente fórmula:

$$V = 200r + 40rt.$$

El precio de cada minuto de publicidad en televisión es de 4000$ y el precio de cada página de publicidad es de 500$.

a) ¿Cuál es el **mínimo presupuesto** que se debe gastar en publicidad en televisión y en la revistas para lograr una venta diaria de 32000 latas?

b) Si el director de publicidad dice que ya hizo arreglos para contratar **por lo menos** 20 minutos de propaganda en la TV. ¿Cuál es el **mínimo presupuesto** que se debe gastar en publicidad en televisión y en las revistas para una venta diaria de 32000 latas?

Verdadero o Falso

Determinar y justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. La dirección de máximo decrecimiento de $f(x,y) = x^3 \sin(y) - \frac{1}{x+y+1}$ desde el punto $(0,0)$ está dada por $(-1,-1)$.

2. La función $f(x,y) = x^2 e^{-yx}$ crece más rápidamente a partir del punto $(1,0)$ si nos movemos en la dirección $(4,-2)$.

3. Si una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cumple que $f_x(1,1) = -2$, que $f_y(1,1) = 1$ y que $f(1,1) = 0$, entonces $y = x$ es la recta tangente a la curva de nivel ($f = 0$) en el punto $(1,1)$.

4. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función tal que la recta tangente a la curva de nivel $(f = 0)$ en el punto $(2,1)$ es $x - y = 1$, entonces $\nabla f(2,1) = (1,-1)$.

5. Si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x,y) = \frac{2x - 3y}{xy}$$

entonces f crece más rápido si uno se aleja un poco del punto $(1,1)$ en dirección $(3,-1)$ que si uno se aleja en dirección $(1,-1)$.

6. Si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x,y) = \ln(3x^2 - 2y)$$

entonces f crece más rápido si uno se aleja un poco del punto $(1,1)$ en dirección $(1,3)$ que si uno se aleja en dirección $(2,1)$.

7. El **valor** máximo de $f(x,y) = x^2 - y^2$ en la curva $x^2 + y^2 = 1$ es igual a 1.

8. La curva de nivel 0 de $g(x,y) = xy + 3x$ es la recta $x = 0$.

9. La curva de nivel 2 de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ es una circunferencia de radio $\sqrt{3}$.

10. La función $f(x,y) = y\ e^{2x^2+y}$ decrece más rápidamente desde el origen si nos movemos en dirección $(0,-2)$.

3. Multiple Choice

1. Sean $\mathbb{L}_1$ la recta que pasa por los puntos $P = (3,4)$ y $Q = (2,1)$ y $\mathbb{L}_2 : (x,y) = \lambda(k+2, -3k) + (5,8)$. Entonces los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la recta $\mathbb{L}_1$ es perpendicular a $\mathbb{L}_2$ son:

   a) $k = 4$

   b) $k = -4$

   c) $k = 1/4$

   d) $k = -1/4$

2. Sea $f(x,y) = x^2 - 4y^2 + 6x + 8y$.

   Entonces la recta la curva de nivel $(f = -6)$ es una:

a) Hipérbola vertical con centro $(-3, 1)$

b) Hipérbola vertical con centro $(3, 1)$

c) Hipérbola horizontal con centro $(-3, 1)$

d) Hipérbola horizontal con centro $(3, 1)$

3. Sea $f(x, y) = \ln(x^4 + e^{xy^2}).(3x^2 - 2y) - 3y^2$

   Entonces la dirección en la que f crece más a partir del punto $(0, 3)$ es

   a) $(-18, -9)$

   b) $(-6, -2)$

   c) $(54, 18)$

   d) Ninguna es correcta

4. Sea
$$f(x, y) = \frac{y^2 + 1 - x}{x - 1}$$

   Entonces:

   a) El punto $(1, 0)$ pertenece a la curva de nivel 0 de f.

   b) Si nos movemos a partir del punto $(0, 1)$, $f(x, y)$ crece más en dirección $(-1, 0)$ que en dirección $(1, -1)$.

   c) La curva de nivel $(f = 0)$ es tangente a la recta $y = -2x + 1$

   d) La dirección de máximo crecimiento de $f(x, y)$ en el punto $(0, 1)$ es $(1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

5. Si
$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 - 1)(y - x)}{y}$$

   Entonces la recta tangente a la curva de nivel $(f = 0)$ en el punto $(1/2, 1/2)$ y la recta tangente a la curva de nivel $(f = 0)$ en el punto $(0, 1)$:

   a) Se cortan el el punto $(0, 1)$

   b) Se cortan el el punto $(0, 0)$

   c) Se cortan el el punto $(1, 1)$

   d) No se cortan

6. Si
$$f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{x}{y}$$
Entonces la recta tangente a la curva de nivel ($f = 9/2$) en el punto $P = (4,8)$ corta a los ejes en:

   a) Se cortan el el punto $(0,1)$
   b) $(-\frac{16}{3}, 0)$ y $(0, \frac{32}{7})$.
   c) Se cortan el el punto $(0,0)$
   d) No se cortan

7. Si $f_x(1,3) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(1,3) = \frac{3}{\sqrt{2}}$, y $f(1,3) = 7$, entonces la recta normal a la curva de nivel ($f = 7$) en el punto $(1,3)$ es:

   a) $-x + 4y = 11$
   b) $2x - 4y = -10$
   c) $y = 4x - 1$
   d) $4x + y = 7$