

# Métodos Computacionales - Trabajo Práctico 1

Josefina Jahde, Dafydd Jenkins

November 19, 2024

## Introducción

### Ejercicio 1

Para demostrar que los polinomios de la forma  $y(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$  constituyen un espacio vectorial, debemos verificar que cumplen con las propiedades de un espacio vectorial sobre el campo de los números reales ( $\mathbb{R}$ ).

Debemos demostrar que los polinomios cumplen con las siguientes propiedades:

1. **Cerradura bajo la suma:** Sean  $p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$  y  $q(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n$ . La suma de estos polinomios es:

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n,$$

que es otro polinomio de grado  $n$ . Por lo tanto, el conjunto es cerrado bajo la suma.

2. **Cerradura bajo la multiplicación por un escalar:** Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  un escalar y  $p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ . El producto es:

$$\alpha \cdot p(t) = \alpha a_0 + \alpha a_1t + \cdots + \alpha a_nt^n,$$

que es otro polinomio de grado  $n$ . Por lo tanto, el conjunto es cerrado bajo la multiplicación por un escalar.

3. **Existencia del neutro aditivo:** El polinomio  $0(t) = 0 + 0t + \cdots + 0t^n$  es el polinomio nulo. Para cualquier polinomio  $p(t)$ , se cumple:

$$p(t) + 0(t) = p(t).$$

4. **Existencia del opuesto aditivo:** Para cada polinomio  $p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ , su opuesto es  $-p(t) = -a_0 - a_1t - \cdots - a_nt^n$ . Se cumple:

$$p(t) + (-p(t)) = 0(t).$$

5. **Asociatividad de la suma:** Para cualquier  $p(t), q(t), r(t)$ :

$$(p(t) + q(t)) + r(t) = p(t) + (q(t) + r(t)).$$

6. **Conmutatividad de la suma:** Para cualquier  $p(t)$  y  $q(t)$ :

$$p(t) + q(t) = q(t) + p(t).$$

7. **Existencia del neutro multiplicativo por escalares:** Para cualquier polinomio  $p(t)$ , se cumple:

$$1 \cdot p(t) = p(t).$$

8. **Distributividad del producto escalar:** Para escalares  $\alpha, \beta$  y polinomios  $p(t)$  y  $q(t)$ :

$$\alpha \cdot (p(t) + q(t)) = \alpha \cdot p(t) + \alpha \cdot q(t),$$

$$(\alpha + \beta) \cdot p(t) = \alpha \cdot p(t) + \beta \cdot p(t).$$

9. **Asociatividad del producto escalar:** Para un escalar  $\alpha$  y polinomios  $p(t)$  y  $q(t)$ :

$$\alpha \cdot (p(t) \cdot q(t)) = (\alpha \cdot p(t)) \cdot q(t),$$

Dado que los polinomios cumplen todas las propiedades necesarias, podemos concluir que los polinomios de la forma  $y(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$  constituyen un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

### Subespacio de Polinomios de Grado 3

Los polinomios de grado 3 forman un subespacio del espacio vectorial de polinomios de grado  $n$  ya que:

- Son cerrados bajo la suma y la multiplicación por un escalar.
- Contienen al polinomio nulo  $(0 + 0t + 0t^2 + 0t^3)$ .
- Cumplen con las mismas propiedades que los polinomios de grado  $n$ .

Por lo tanto, los polinomios de grado 3 constituyen un subespacio del espacio vectorial de todos los polinomios de grado  $n$ .

### Cambio de base de Bernstein a base Canónica

Sea  $B_B = \{B_1(t), B_2(t), B_3(t), B_4(t)\}$  la base de Bernstein y  $B_C = \{1, t, t^2, t^3\}$  la base Canónica.

- $B_1(t) = (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$   
 $\Rightarrow$  En la base canónica,  $B_1(t)$  tiene las coordenadas  $[1, -3, 3, -1]$ .
- $B_2(t) = 3t(1-t)^2 = 3t - 6t^2 + 3t^3$   
 $\Rightarrow$  En la base canónica,  $B_2(t)$  tiene las coordenadas  $[0, 3, -6, 3]$ .
- $B_3(t) = 3t^2(1-t) = 3t^2 - 3t^3$   
 $\Rightarrow$  En la base canónica,  $B_3(t)$  tiene las coordenadas  $[0, 0, 3, -3]$ .
- $B_4(t) = t^3$   
 $\Rightarrow$  En la base canónica,  $B_4(t)$  tiene las coordenadas  $[0, 0, 0, 1]$ .

De esta manera, la matriz de cambio de base  $B_B$  a  $B_C$   $M_{B_C \leftarrow B_B}$  es:

$$M_{B_C \leftarrow B_B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

### Coordenadas del monomio $t^2$ en $B_B$

Buscamos los coeficientes  $[c_1, c_2, c_3, c_4]$  tales que  $t^2 = c_1 B_1(t) + c_2 B_2(t) + c_3 B_3(t) + c_4 B_4(t)$ . Para ello planteamos:

$$M_{B_C \leftarrow B_B} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

- $c_1 = 0$
- $-3c_1 + 3c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$
- $3c_1 - 6c_2 + 3c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$
- $-c_1 + 3c_2 - 3c_3 + c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 1$

Así, las coordenadas de  $t^2$  en  $B_C$  son  $[0, 0, \frac{1}{3}, 1]$

## Ejercicio 2

Considerando  $Q(t) = MP$  y  $P = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$ , siendo los  $P_i$  bloques de  $2 \times 1$ , la dimensión de  $P$  es  $8 \times 1$ . Por otro lado,  $Q(t)$  tiene dimensión  $1 \times 1$ , por lo que  $M$  debe ser de dimensión  $1 \times 8$  para que el producto  $MP$  sea factible.

Com  $Q(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3$ , para escribirlo como  $M \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$ ,  $M$  debe ser:

$$M = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3(1-t)^2 t & 3(1-t)t^2 & t^3 \end{bmatrix}$$

Por simplicidad, en los siguientes ejercicios, como se trabajará con  $P$  como una matriz de  $4 \times 1$ , usaremos  $M$  de tamaño  $1 \times 4$  e igual a:

$$M = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3(1-t)^2 t & 3(1-t)t^2 & t^3 \end{bmatrix}$$

## Ejercicio 3

En este ejercicio se busca demostrar que la función objetivo para minimizar el error cuadrático total puede expresarse en forma matricial como:

$$E_{\text{total}} = \|D - MP\|^2,$$

donde:

- $D$  es un vector columna de dimensión  $N \times 2$ , que contiene los puntos objetivo  $D_i$ .
- $M$  es una matriz de dimensión  $N \times 4$ , donde cada fila contiene los valores de los polinomios de Bernstein evaluados en el parámetro  $t_i$ .
- $P$  es un vector columna de dimensión  $4 \times 2$ , que contiene los puntos de control  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

### Error cuadrático total

El error cuadrático total está definido como:

$$E_{\text{total}} = \sum_{i=0}^{N-1} \|D_i - Q(t_i)\|^2,$$

donde  $Q(t_i)$  es el valor de la curva de Bézier en el parámetro  $t_i$ .

Usando la forma matricial de  $Q(t)$  del punto anterior, tenemos:

$$Q(t_i) = M_i P,$$

donde:

- $M_i$  es la fila  $i$  de  $M$  y está dada por:

$$M_i = \begin{bmatrix} (1-t_i)^3 & 3(1-t_i)^2 t_i & 3(1-t_i)t_i^2 & t_i^3 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo  $Q(t_i)$  en la expresión del error total:

$$E_{\text{total}} = \sum_{i=0}^{N-1} \|D_i - M_i P\|^2,$$

De aquí, se puede ver que  $E_{\text{total}} = \|D_1 - M_1 P\|^2 + \dots + \|D_N - M_N P\|^2 = \|D - MP\|^2$

Así, se demostró que la función objetivo  $E_{\text{total}}$  se puede expresar en forma matricial como  $E_{\text{total}} = \|D - MP\|^2$

## Minimización del error

Para encontrar una curva de Bézier que describa los datos, lo ideal sería poder encontrar  $P$  que haga  $MP = D$ . Sin embargo, la mayor parte de las veces esto no es posible, ya sea porque los datos no se encuentran sobre una curva, o porque hay más datos que puntos de control (las dimensiones de las matrices no permiten el producto deseado).

Por eso, se busca  $P$  que minimice  $E_{\text{total}}$ . Para hallarlo, debemos resolver el sistema de ecuaciones normales asociado al problema de mínimos cuadrados:

$$M^T MP = M^T D,$$

donde:

- $M^T$  es la transpuesta de  $M$ ,
- $M^T M$  es una matriz  $4 \times 4$ ,
- $M^T D$  es un vector columna  $4 \times 2$  (de esta manera,  $P$  termina siendo un vector columna  $4 \times 2$ ).

Como las columnas de  $M$  son LI, sabemos que  $M^T M$  es invertible y resolvemos para  $P$ :

$$P = (M^T M)^{-1} M^T D.$$

De esta manera se consiguen la solución  $P$  que contiene los puntos de control  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , que definen la curva de Bézier cúbica que mejor ajusta a los puntos de datos  $D_i$ .

## Ejercicio 4

La curva de mejor ajuste para los datos dados está dada por  $Q(t) = M\hat{P}$ , donde:

- $\hat{P} = \begin{bmatrix} 1.27084129 & 4.49550443 \\ 7.4585432 & 14.17738292 \\ 17.5902167 & -16.26255991 \\ 19.71207913 & 4.19096308 \end{bmatrix}$
- $M = [(1-t)^3 \quad 3(1-t)^2t \quad 3(1-t)t^2 \quad t^3]$ .

Así, el error de aproximación  $E$  obtenido es:

$$E = \|D - M\hat{P}\|^2$$
$$E = 91.7137$$

Al graficar en los datos originales  $D_i$  y la curva de Bézier ajustada, la figura resultante es la siguiente:

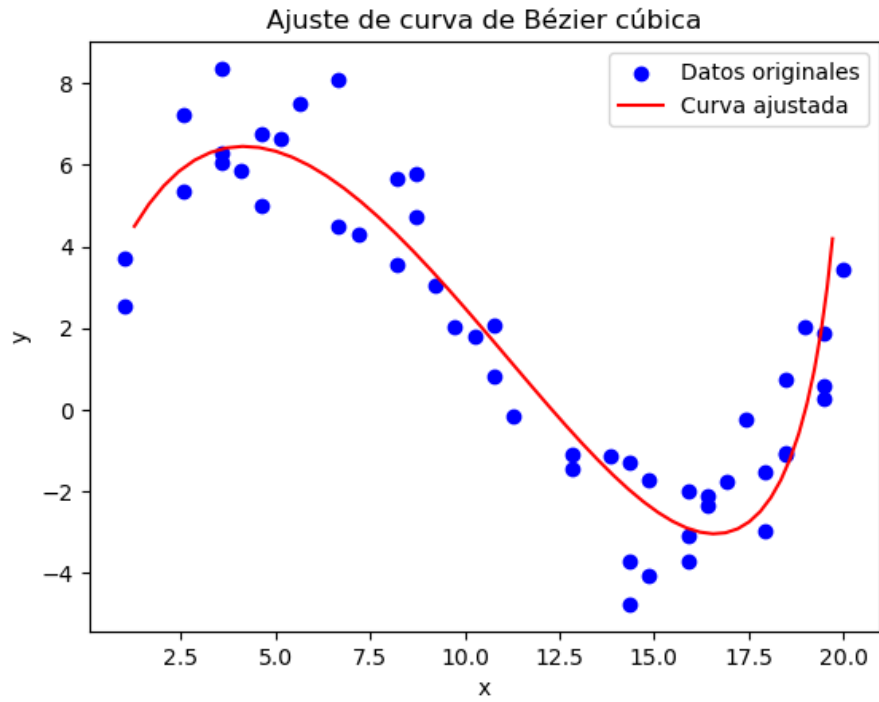


Figure 1: Curva de Bézier ajustada a los datos originales (ej4)

La implementación para la obtención de los resultados y la gráfica se encuentra la sección `TP2_Notebook.ipynb` en la sección de **Ejercicio 4**.

## 1 Ejercicio 5

Se repitieron los pasos del ejercicio anterior para otro set de datos y la curva obtenida (junto con los datos), se muestra en la siguiente figura:

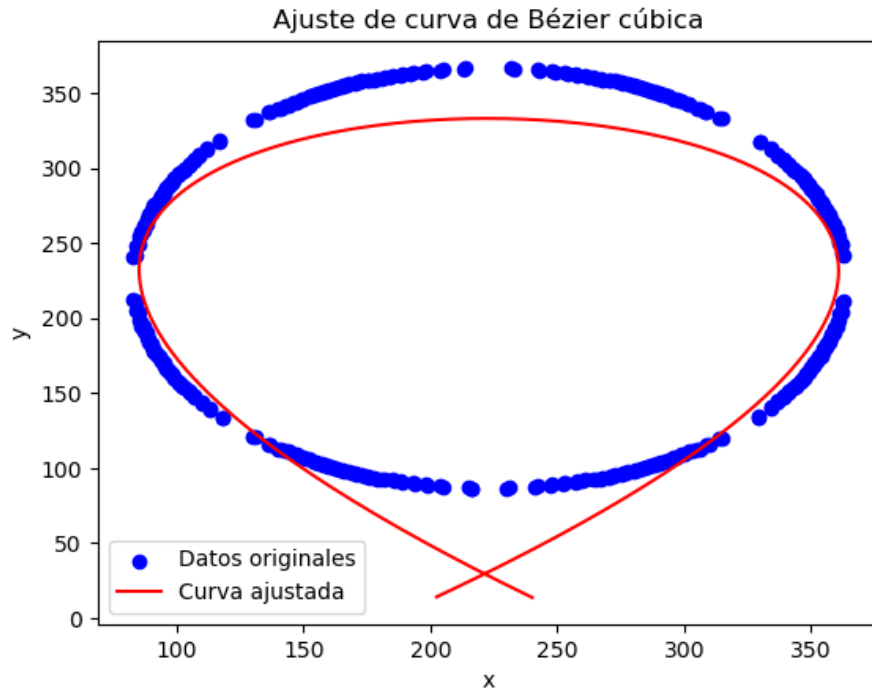


Figure 2: Curva de Bézier ajustada a los datos originales (ej5)

Como se ve, pareciera que los datos están distribuidos casi perfectamente como una elipse. Sin embargo, esta figura no parece ser replicable con sólo una curva de bézier. Por eso, se nos ocurrió que para ajustar mejor los datos, se pueden usar varias curvas de bézier (al menos 2), cada una ajustada a un subconjunto de los datos.