Guía de Ejercicios 10: Recursión algorítmica

Objetivos:

- Presentar la recursión algorítmica como una forma de encarar la resolución de problemas.
- Identificar los casos base y recursivo en problemas sencillos sobre enteros y listas.

Ejercicio 1. Escribir funciones recursivas para resolver los siguientes problemas.

(a) `pot2(n)`: Dado un entero `n` ≥ 0, calcular 2^{n}. Ejemplos: `pot2(0)` $\to 1$; `pot2(7)` $\to 128$.

(b) `pot_a(a, n)`: Dados dos enteros `n` ≥ 0 y `a`, calcular a^{n}. Ejemplos: `pot_a`$(3, 0) \to 1$; `pot_a`$(-2, 7) \to -128$. Además, en particular `pot_a`$(0, 0)$ debe devolver 1.

(c) `producto(n, m)`: Dados dos enteros `n` $\geq 0, m \geq 0$, calcular `n` $*$ `m`. Sugerencia: hacer la recursión sobre el parámetro `n`, dejando fijo el valor de `m`.

(d) `es_par(n)`: Determinar si un entero `n` ≥ 0 es par (o sea, debe devolver `True` si es par y `False` en caso contrario). Sugerencia: pensar cómo podría ayudar restarle 2 a `n`.

Ejercicio 2. Escribir funciones recursivas para resolver los siguientes problemas.

(a) `productoria(xs)`: Dada una lista no vacía de enteros `xs`, calcular el resultado de multiplicar todos los números de `xs`.

(b) `cantidad_ocurrencias(x, xs)`: Dada una lista de enteros `xs` y un entero `x`, devolver la cantidad de veces que aparece `x` en `xs`.

(c) `max_pos(xs)`: Dada una lista no vacía de enteros `xs`, devolver la posición del elemento más grande. En caso de empate, devolver la posición de la primera aparición.

(d) `contar_coincidencias(xs)`: Dada una lista de enteros `xs`, contar cuántas veces es cierto que la `i`-ésima posición tiene el número `i` (es decir, cuántas veces `xs[i]==i`).

(e) `sumar_posiciones_pares(xs)`: Dada una lista de enteros, sumar los elementos en sus posiciones pares. Ejemplo: `sumar_posiciones_pares([1,2,9,4,3])` devuelve $13 = 1 + 9 + 3$.

Ejercicio 3. La sucesión de Fibonacci es una sucesión en la cual cada término se define como la suma de los dos anteriores, comenzando con 0 y 1. A continuación se observan los primeros diez términos de la sucesión:

$$F_0 = 0; F_1 = 1; F_2 = 1; F_3 = 2; F_4 = 3; F_5 = 5; F_6 = 8; F_7 = 13; F_8 = 21; F_9 = 34; \ldots$$

(a) Escribir una función recursiva `fibonacci(n)` que dado un entero `n` ≥ 0, devuelva el término F_n de la sucesión de Fibonacci.

(b) Ejecutar `fibonacci(50)`. ¿Por qué tarda tanto? (Probablemente sea necesario cortar la ejecución después de un tiempo.) Para buscar una respuesta (informal), hacer un seguimiento de la evaluación de un ejemplo chico, como `fibonacci(6)`.

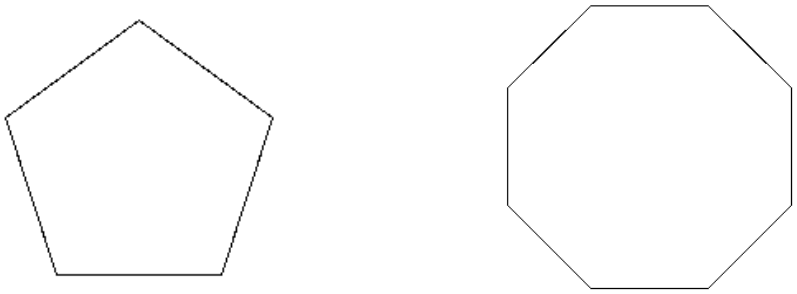
Módulo `turtle` de Python

En estos ejercicios, recomendamos ejecutar lo siguiente al comienzo de cada programa:

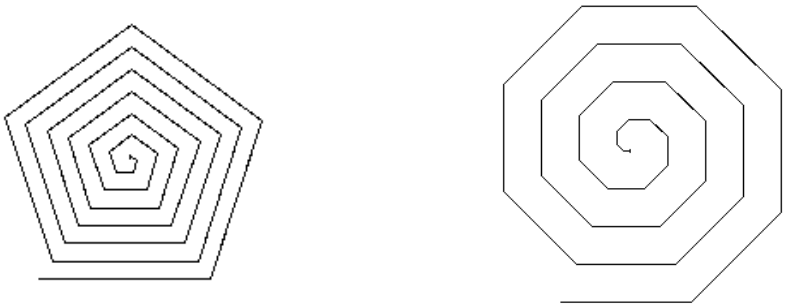
```
import turtle as t          # importar el módulo de la tortuga
t.clearscreen()             # limpiar la pantalla
t.speed(0)                  # pedirle a la tortuga que vaya a máxima velocidad
```

Ejercicio 4.

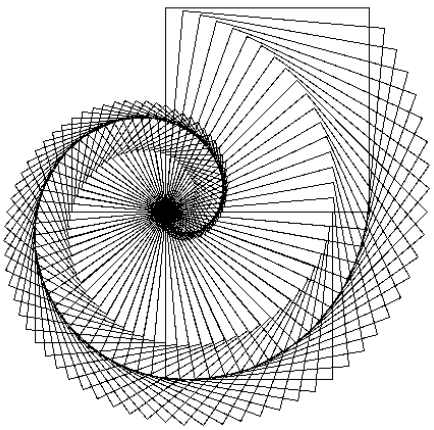
(a) Definir una función iterativa que, dados `d:float` y `n:int`, dibuje un polígono regular con `n` lados de longitud `d`. Por ejemplo, para `n=5` y `n=8`:



(b) Definir una función recursiva que, dados `d:float`, `n:int` e `incr:float`, dibuje una espiral con `n` lados, comenzando con longitud `d` y reduciéndose en `incr` cada vez hasta llegar a 0. Por ejemplo, para `n=5` y `n=8`:



Ejercicio 5. Definir una función que dibuje la siguiente espiral de cuadrados. Escribir una variante iterativa y otra recursiva.



Ejercicio 6. Sea la función `arbol` definida de la siguiente manera:

```
1  import turtle as t
2  def arbol(altura:float, nivel:int):
3      t.forward(altura)
4      if nivel>0:
5          t.left(30)
6          arbol(altura/2, nivel-1)
7          t.right(2 * 30)
8          arbol(altura/2, nivel-1)
9          t.left(30)
10     t.backward(altura)
```

(a) Ejecutar a mano `arbol(100,0)`, `arbol(100,1)` y `arbol(100,2)`, suponiendo que se empieza en cada caso con la tortuga apuntando hacia arriba.

(b) Ejecutar esas instrucciones en Python, y comparar con los resultados del punto anterior. Antes hacer que la tortuga apunte hacia arriba con el método `t.setheading(90)`.

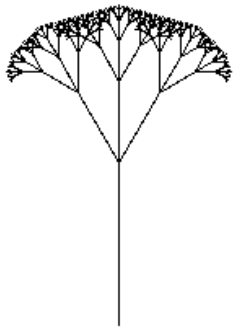
(c) ¿En qué consiste el caso base en esta función recursiva?

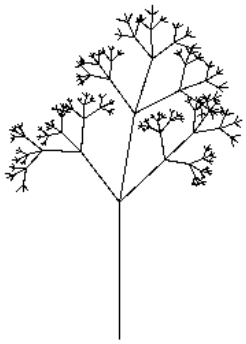
(d) Ejecutar `arbol(100,8)`. Para acelerar la ejecución, reemplazar la línea 4 por `if nivel>0 and altura>1:`, así la tortuga no pierde el tiempo dibujando cosas imperceptibles. ¿Cómo cambia la definición del caso base al hacer ese cambio?

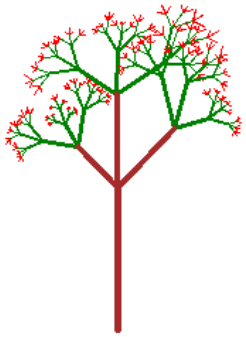
(e) Modificar la función `arbol`, para que dibuje árboles con ramificaciones triples, en lugar de dobles. Por ejemplo, ver la figura de abajo a la izquierda.

(f) Randomizar la función `arbol`, de modo que los ángulos y longitudes sean elegidos al azar de ciertos intervalos (para esto, usar el método `random.uniform(a,b)`[1]). Por ejemplo, ver la figura de abajo en el centro.

(g) Modificar la función `arbol`, de modo cambie el color (ej: `t.pencolor('brown')`) y el grosor (ej: `t.pensize(3)`) del trazo, para dibujar árboles en colores como el de la figura de abajo a la derecha.







[1] `https://docs.python.org/es/3/library/random.html`