

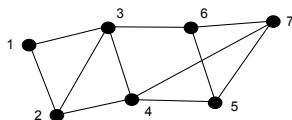
ALGORITMOS SOBRE GRAFOS: BFS, DFS.

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos

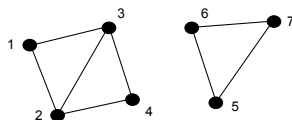
Universidad Torcuato Di Tella

Definiciones

- Un grafo es **conexo** si existe un camino entre todo par de vértices.
- Una **componente conexa** es un subconjunto de vértices conexo, maximal con esta propiedad.
- Un **vértice aislado** es un vértice i con $d(i) = 0$ (que conforma una componente conexa de tamaño 1).



Conexo



No conexo

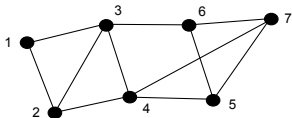
Preguntas

- Ideas para diseñar un algoritmo que verifique si un grafo es conexo?
- Podremos adaptarlo para obtener las componentes conexas de un grafo?

Idea intuitiva

Dado un grafo $G = (V, E)$

1. partimos de un vértice arbitrario $s \in V$;
2. identificamos todos los vecinos que se puede **alcanzar** desde s ;
3. si G es conexo existe un camino entre s y todos los demás vértices;
4. verificamos si los vértices **alcanzables** son todos los vértices (i.e., V).



Supongamos que iniciamos con $s = 1$

- Cómo podemos encontrar **todos** los vértices alcanzables desde 1 de forma sistemática?
- Qué situaciones particulares se pueden dar durante el proceso?

Recorrido de un grafo

RECORRIDO($G = (V, E), s \in V$)

estado = vector($|V|$)

for $v \in V$ **do**

 estado[v] = no descubierto

end for

estado[s] = descubierto

$L = [s]$ $\triangleright L$ tiene los vertices a procesar

while $L \neq \emptyset$ **do**

 Sea v el siguiente elemento en L

for $w \in N(v)$ **do**

if estado[w] = no descubierto **then**

 estado[w] = descubierto

 Agregar w a L

end if

end for

 estado[v] = procesado

 Eliminar a v de L

end while

return estado

En cada iteración, un vértice puede tener 1 de 3 posibles estados:

- no descubierto: todavía no ha sido visitado por el algoritmo.
- descubierto: visitado por ser vecino de otro vértice, pero no procesado.
- procesado: sus vecinos han sido descubiertos.

Al terminar el algoritmo, verificamos que estado[v] == procesado $\forall v \in V$.

Algunas propiedades

- En el ciclo **while**, L contiene solamente vértices $v \in V$ tales que $\text{estado}[v] = \text{descubierto}$.
- Al finalizar el algoritmo, $\text{estado}[v] \in \{\text{no descubierto}, \text{procesado}\}$.
- Los vértices $v \in V$ tales que $\text{estado}[v] = \text{procesado}$ conforman una componente conexa.

Preguntas

- Cuántas veces se ejecuta el ciclo **while** exterior en peor caso?
- Cuál es la complejidad de obtener los vecinos de v , $N(v)$?

Recorrido de un grafo: complejidad computacional

Sea $|V| = n$ y $|E| = m$.

RECORRIDO($G = (V, E), s \in V$)

estado = vector($|V|$)

for $v \in V$ **do**

▸ Inicialización.

 estado[v] = no descubierto

end for

estado[s] = descubierto

$L = [s]$

while $L \neq \emptyset$ **do**

▸ Vértices descubiertos a procesar.

 Sea v el siguiente elemento en L

▸ Procesamos el siguiente vértice.

for $w \in N(v)$ **do**

 ▸ Descubrimos los vecinos de v .

if estado[w] = no descubierto **then**

 estado[w] = descubierto

 Agregar w a L

end if

end for

 estado[v] = procesado

▸ Marcamos v como procesado.

 Eliminar a v de L

end while

Recorrido de un grafo: complejidad computacional

Sea $|V| = n$ y $|E| = m$. G implementado sobre matriz de adyacencia.

RECORRIDO($G = (V, E), s \in V$)

estado = vector($|V|$)

for $v \in V$ **do**

▷ $O(n)$.

 estado[v] = no descubierto

end for

estado[s] = descubierto

$L = [s]$

while $L \neq \emptyset$ **do**

▷ $O(n)$.

 Sea v el siguiente elemento en L

for $w \in N(v)$ **do**

▷ $O(n)$.

if estado[w] = no descubierto **then**

 estado[w] = descubierto

▷ $O(1)$.

 Agregar w a L

▷ $O(1)$.

end if

end for

 estado[v] = procesado

▷ $O(1)$.

 Eliminar a v de L

end while

Recorrido de un grafo: complejidad computacional

Sea $|V| = n$ y $|E| = m$. G implementado sobre **lista de vecinos**.

RECORRIDO($G = (V, E), s \in V$)

estado = vector($|V|$)

for $v \in V$ **do**

▷ $O(n)$.

 estado[v] = no descubierto

end for

estado[s] = descubierto

$L = [s]$

while $L \neq \emptyset$ **do**

▷ $O(n)$.

 Sea v el siguiente elemento en L

for $w \in N(v)$ **do**

 ▷ Obtener $N(v)$ es $O(1)$. Recorrerla, $O(d(v))$.

if estado[w] = no descubierto **then**

 estado[w] = descubierto

 ▷ $O(1)$.

 Agregar w a L

 ▷ $O(1)$.

end if

end for

 estado[v] = procesado

▷ $O(1)$.

 Eliminar a v de L

end while

Matriz de adyacencia

- Obtener los vecinos: $O(n)$
- Recorrer la lista de vecinos de v : $O(d(v))$
- Descubrir / procesar todos los vértices: $O(n^2)$
- Algoritmo completo: $O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

Lista de vecinos

- Obtener los vecinos: $O(1)$
- Recorrer la lista de vecinos de v : $O(d(v))$
- Descubrir / procesar todos los vértices: $\sum_{v \in V} d(v)$
- Algoritmo completo: $O(n) + O(\sum_{v \in V} d(v)) = ?$

Handshaking Lemma

Sea $G = (V, E)$ un grafo con $m = |E|$ la cantidad de aristas. Entonces,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Resumiendo:

1. $O(n^2)$ si el grafo está implementado sobre una matriz de adyacencia.
2. $O(m)$ si el grafo está implementado sobre listas de vecinos.

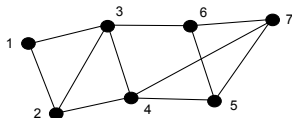
Es habitual escribir la complejidad de algoritmos sobre grafos en función de $n = |V|$ y $m = |E|$.

1. En general, $m = O(n^2)$, con lo cual el peor caso es el mismo para ambas implementaciones.
2. Si $m = O(n)$, decimos que el grafo es **poco denso** y entonces conviene la segunda implementación.

Ejemplo: sabemos que cada vértice está conectado con a lo sumo k vecinos, con k acotado.

Ejercicio (6, guía 2)

Cómo re-usamos `RECORRIDO(G, s)` para obtener todas las componentes conexas de un grafo?



- $\text{BFS}(G,v)$: Si la lista L se implementa con una **cola (queue)**, entonces el algoritmo recorre el grafo **a lo ancho** y se lo llama (*breadth-first search*).
- $\text{DFS}(G,v)$: Si la lista L se implementa con una **pila (stack)**, entonces el algoritmo recorre el grafo **en profundidad** y se lo llama (*depth-first search*).

Pregunta

Si quisiéramos calcular la distancia de un vértice v a otro w , que esquema nos convendría usar?

Recorrido de un grafo: complejidad computacional

BFS($G = (V, E), s \in V$)

estado = vector($|V|$), **dist** = vector($|V|$)

for $v \in V$ **do**

 estado[v] = no descubierto

dist[v] = ∞

end for

estado[s] = descubierto, **dist**[s] = 0

$L = \text{QUEUE}()$, Agregar s a L .

while $L \neq \emptyset$ **do**

 Sea v el siguiente elemento en L

for $w \in N(v)$ **do**

if estado[w] = no descubierto **then**

 estado[w] = descubierto

dist[w] = **dist**[v] + 1

 Agregar w a L

end if

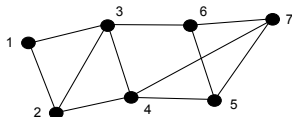
end for

 estado[v] = procesado

 Eliminar a v de L

end while

return estado, **dist**



- $\text{BFS}(G, v)$: Si la lista L se implementa con una **cola (queue)**, entonces el algoritmo recorre el grafo **a lo ancho** y se lo llama (*breadth-first search*).
Recorre los vértices en orden de distancia creciente desde s .
- $\text{DFS}(G, v)$: Si la lista L se implementa con una **pila (stack)**, entonces el algoritmo recorre el grafo **en profundidad** y se lo llama (*depth-first search*).
Encuentra primero el vértice más lejano a s .