# Introducción a la teoría de grafos

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos
Universidad Torcuato Di Tella

# Bienvenidos!

- **Objetivos.** Conocer técnicas de diseño de algoritmos que nos permitan resolver problemas más difíciles que los que resolvimos hasta ahora.

  1. Introducción a la teoría de grafos.
  2. Técnicas algorítmicas: backtracking, programación dinámica, heurísticas y metaheurísticas, algoritmos aproximados, etc.
  3. Introducción a la teoría de NP-completitud.
  4. Aplicaciones. Cómo usar estas técnicas para modelar y resolver problemas prácticos.

# Sobre la cursada

- **Clases.**
  - Dos módulos de clases teóricas y dos módulos de clases prácticas por semana.
  - Las disposición de clases prácticas / teóricas puede cambiar debido al calendario.

- **Régimen de cursada.**
  - Dos parciales escritos e individuales. Se aprueban con 60/100.
  - Dos trabajos prácticos grupales (uno en cada mitad de la materia). Se aprueban con 60/100.
  - Un trabajo práctico optativo adicional grupal, en la segunda mitad de la materia y con nota entre 0 y 10. Se aprueba con 6/10.

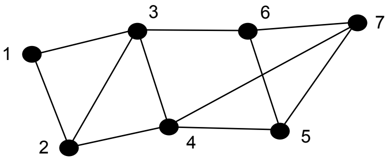
$$\text{nota final} = \min\left\{100, \frac{30(\text{parcial}_1 + \text{parcial}_2) + 20(\text{TP}_1 + \text{TP}_2)}{100} + \text{TP}_3\right\}$$

- **Comunicación.** El material de las clases y las consultas se canalizan a través del campus virtual.

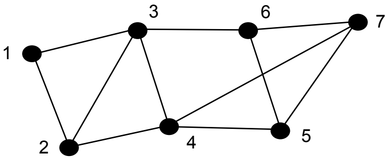
**Definición**

Un grafo es un par $G = (V, E)$ tal que ...

1. $V$ es un conjunto finito (llamado el conjunto de vértices de $G$), y
2. $E \subseteq \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\}$ es un conjunto de aristas.




- En este ejemplo, $V = \{1, \ldots, 7\}$ y
  $E = \{12, 13, 23, 24, 34, 36, 45, 47, 56, 57, 67\}$.

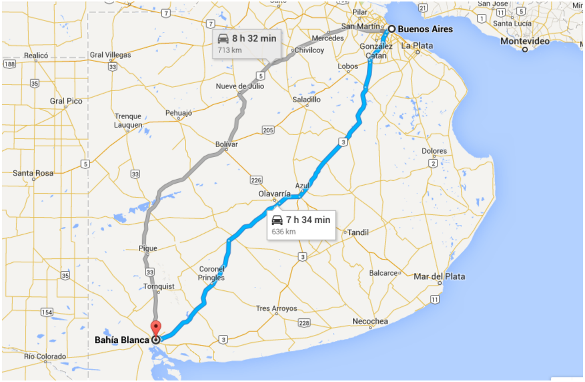



- El orden de los extremos de una arista no es importante. Nos referimos indistintamente a la arista 34 como 43 o bien $\{3, 4\}$.

## Definiciones

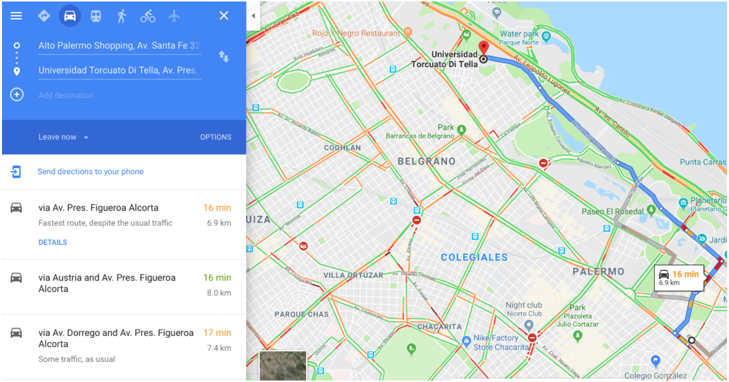
1. Si $ij \in E$, decimos que los vértices $i$ y $j$ son vecinos.
2. Dado $i \in V$, definimos el vecindario de $i$ como $N(i) = \{j \in V : ij \in E\}$.
3. El grado de un vértice $i \in V$ es $d(i) = |N(i)|$.

# Motivación (1/6)




## Red vial I

Representamos con grafos un mapa de rutas entre un grupo de ciudades (los vértices representan las ciudades y los cruces de caminos).

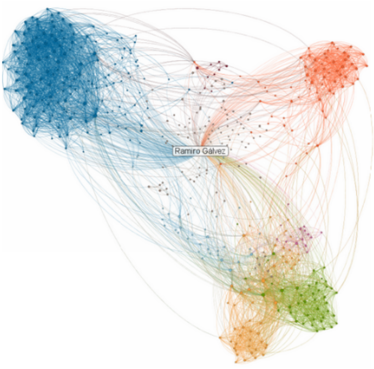



## Red vial II

Cambiando la interpretación, con grafos podemos representar mapas de ciudades (los vértices representan las esquinas!).

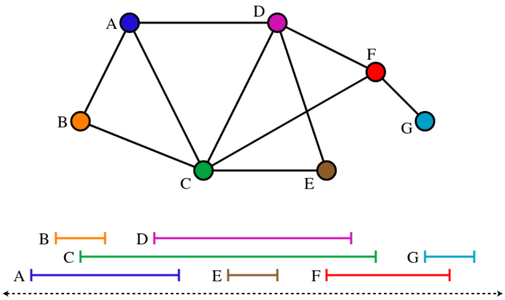
### Red de transporte

Podemos representar una red de transporte con grafos (los vértices representan las estaciones/paradas).




## Redes sociales

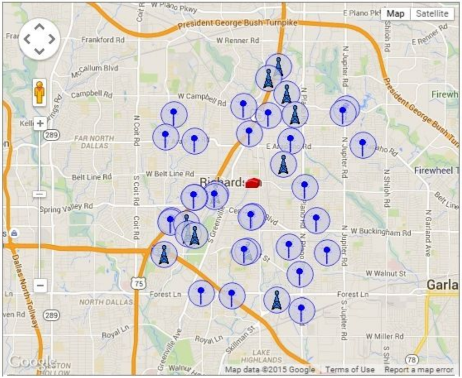
Podemos representar relaciones entre usuarios de una red social (los vértices representan los usuarios).




**Conflictos de horarios**

Cursos a dictar y superposiciones entre cursos (dos vértices son vecinos si sus cursos se solapan).

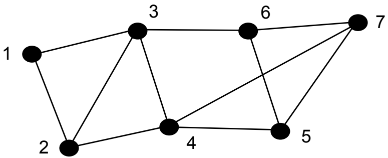
# Motivación (6/6)




## Conflictos espaciales

Antenas en una red de telefonía celular (dos vértices son vecinos si sus antenas tienen áreas de cobertura superpuestas).

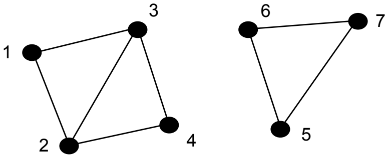
# Definiciones




## Definiciones

- Un camino entre dos vértices $i$ y $j$ es una secuencia de aristas desde $i$ hasta $j$.
- La distancia entre dos vértices es la cantidad de aristas del camino más corto entre ellos.
- Un grafo es conexo si existe un camino entre todo par de vértices.

# Definiciones




## Definiciones

- Una componente conexa es un subconjunto de vértices conexo, maximal con esta propiedad.
- Un vértice aislado es un vértice $i$ con $d(i) = 0$ (que conforma una componente conexa de tamaño 1).

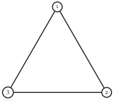
1. Un grafo conexo tiene exactamente una componente conexa.
2. Si $i$ y $j$ están en componentes conexas distintas, decimos que hay una distancia infinita entre ellos.

# Grafos completos

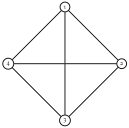
## Definición

Un grafo se dice completo si todos los vértices son adyacentes entre sí.
Dado $n \in \mathbb{N}$, $K_n$ es el grafo completo de $n$ vértices.

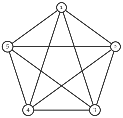
(a) $K_2$



(b) $K_3$



(c) $K_4$



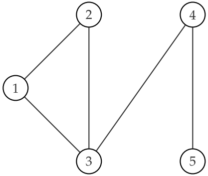
(d) $K_5$

## Pregunta

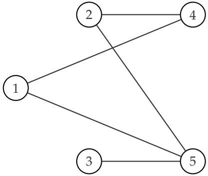
¿Cuántas aristas tiene un grafo completo de $n$ vértices?

## Definición

Dado un grafo $G = (V, E)$, el grafo complemento de $G$, que notamos como $\bar{G} = (V, \bar{E})$, tiene el mismo conjunto de vértices que $G$ y cada par de vértices es adyacente en $\bar{G}$ si y solo si no es adyacente en $G$ (es decir, $ij \in E$ si y solo si $ij \notin \bar{E}$).




(a) $G = (V, E)$




(b) $\bar{G} = (V, \bar{E})$

## Pregunta

Si $G$ tiene $n$ vértices y $m$ aristas, ¿cuántas aristas tiene $\bar{G}$?

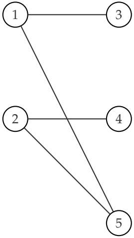
# Grafos bipartitos

## Definición

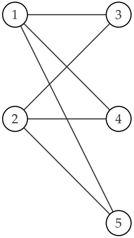
Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartito si existe una partición $V_1, V_2$ del conjunto de vértices $V$, es decir,

1. $V = V_1 \cup V_2$,
2. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
3. $V_1 \neq \emptyset$,
4. $V_2 \neq \emptyset$

tal que todas las aristas de $G$ tienen un extremo en $V_1$ y otro en $V_2$.




(a) $G = (V, E)$




(b) $K_{2,3}$

### Definición

Un grafo bipartito $G = (V, E)$ con partición $V_1, V_2$ es bipartito completo si todo vértice en $V_1$ es adyacente a todo vértice en $V_2$. Si $|V_1| = n_1$ y $|V_2| = n_2$, notamos a este grafo como $K_{n_1,n_2}$.

### Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene circuitos simples (i.e., caminos que empiezan y terminan en el mismo vértice y no repiten vértices salvo el primero) de longitud impar.

### Pregunta

¿Cuántas aristas tiene un grafo bipartito completo?