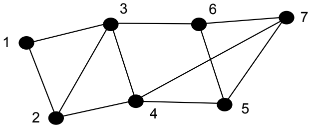
Representación de grafos

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos
Universidad Torcuato Di Tella

Nos interesa programar algoritmos que trabajen sobre grafos. Para esto, debemos representar adecuadamente grafos en C++ (cómo lo hacemos?).

Definición

La matriz de adyacencia de un grafo G es una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{|V|\times|V|}$ tal que $a_{ij} = 1$ si $ij \in E$ y $a_{ij} = 0$ en caso contrario.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
class Grafo
{
   public:

   Grafo(int n);
   ~Grafo();

   void agregarArista(int i, int j);
   void eliminarArista(int i, int j);
   bool existeArista(int i, int j);

   private:

   int _vertices;
   bool** _adj;
}
```

```
// Constructor
Grafo::Grafo(int n)
{
   _vertices = n;
   _adj = new bool*[n];

   for (int i=0; i<n; ++i)
       _adj[i] = new bool[n];

   for (int i=0; i<n; ++i)
      for (int j=0; j<n; ++j)
         _adj[i][j] = false;
}

// Destructor
Grafo::~Grafo()
{
   for (int i=0; i<_vertices; ++i)
      delete [] _adj[i];

   delete [] _adj;
}
```

```
// Agrega una arista
void Grafo::agregarArista(int i, int j)
{
    _adj[i][j] = _adj[j][i] = true;
}

// Elimina una arista
void Grafo::eliminarArista(int i, int j)
{
    _adj[i][j] = _adj[j][i] = false;
}

// Consulta por arista
bool Grafo::existeArista(int i, int j)
{
    return _adj[i][j];
}
```

- Ventajas de esta representación:

  1. Agregar una arista: $O(1)$.
  2. Eliminar una arista: $O(1)$.
  3. Consultar si existe arista: $O(1)$.

- Desventajas de esta representación:

  1. Agregar un vértice: $O(n^2)$.
  2. Eliminar un vértice: $O(n^2)$.
  3. Obtener todos los vecinos de un vértice: $O(n)$.

Definición.

La matriz de incidencia de un grafo G es una matriz $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{|V| \times |E|}$ tal que $m_{ie} = 1$ si el vértice i es uno de los extremos de la arista e, y $m_{ie} = 0$ en caso contrario.

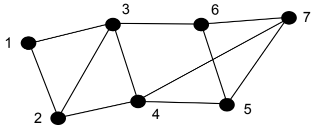
- En nuestro ejemplo, $E = \{12, 13, 23, 24, 34, 36, 45, 47, 56, 57, 67\}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta

¿Es una representación conveniente?

- Una tercera opción es por medio de listas/conjuntos de vecinos asociados con cada vértice:



$$
\begin{array}{lcl}
1 & \longrightarrow & \{2,3\} \\
2 & \longrightarrow & \{1,3,4\} \\
3 & \longrightarrow & \{1,2,4,6\} \\
4 & \longrightarrow & \{2,3,5,7\} \\
5 & \longrightarrow & \{4,6,7\} \\
6 & \longrightarrow & \{3,5,7\} \\
7 & \longrightarrow & \{4,5,6\}
\end{array}
$$

```
class Grafo
{
    ...

    private:
    vector< set<int> > _vecinos;
}

// Constructor
Grafo::Grafo(int n)
{
    for(int i=0; i<n; ++i)
        _vecinos.push_back(set<int>());
}
```

```
// Agrega una arista
void Grafo::agregarArista(int i, int j)
{
    _vecinos.at(i).insert(j);
    _vecinos.at(j).insert(i);
}

// Elimina una arista
void Grafo::eliminarArista(int i, int j)
{
    _vecinos.at(i).erase(j);
    _vecinos.at(j).erase(i);
}

// Consulta por arista
bool Grafo::existeArista(int i, int j)
{
    return _vecinos.at(i).find(j) != _vecinos.at(i).end();
}
```

- Ventajas de esta representación:

  1. Obtener todos los vecinos de un vértice: $O(1)$.
  2. Agregar un vértice: $O(n)$ en el peor caso, $O(1)$ amortizado.

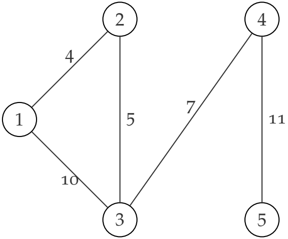
- Desventajas de esta representación:

  1. Agregar una arista: $O(\log n)$ (depende de la implementación de set).
  2. Eliminar una arista: $O(\log n)$.
  3. Consultar si existe arista: $O(\log n)$.
  4. Eliminar un vértice: $O(n^2)$.

Pregunta

¿Cómo representamos el grafo si cada arista tiene un peso asociado?

Grafo



Matriz de adyacencia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

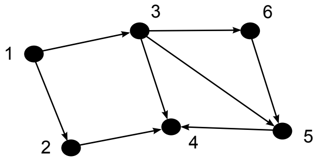
Lista de vecinos

$$\begin{array}{lll} 1 & \longrightarrow & \{\{2 \rightarrow 4\}, \{3 \rightarrow 10\}\} \\ 2 & \longrightarrow & \{\{1 \rightarrow 4\}, \{3 \rightarrow 5\}\} \\ 3 & \longrightarrow & \{\{1 \rightarrow 10\}, \{2 \rightarrow 5\}, \{4 \rightarrow 7\}\} \\ 4 & \longrightarrow & \{\{3 \rightarrow 7\}, \{5 \rightarrow 11\}\} \\ 5 & \longrightarrow & \{\{4 \rightarrow 11\}\} \end{array}$$

Definición

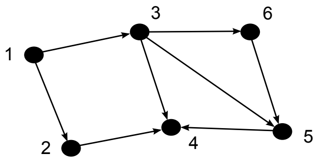
Un grafo dirigido (o digrafo) es un par $D = (N, A)$ tal que ...

1. N es un conjunto finito (llamado el conjunto de nodos de D), y
2. $A \subseteq \{(i,j) \in V \times V : i \neq j\}$ es un conjunto de pares ordenados, llamados arcos.



- A diferencia de los grafos (no dirigidos), ahora las aristas son pares ordenados.

Definiciones



- Diferenciamos entre el grado de entrada y el grado de salida de cada nodo.

  1. $d^-(i) = |N^-(i)| = |\{j \in N : (j, i) \in A\}|$.
  2. $d^+(i) = |N^+(i)| = |\{j \in N : (i, j) \in A\}|$.

- Un camino entre dos nodos es una secuencia de arcos entre ellos, respetando el sentido de los arcos.

Pregunta

¿Cómo representamos un grafo dirigido?