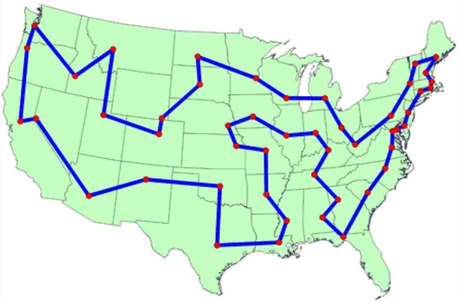
# Algoritmos aproximados

Tecnología Digital V: Diseño de Algoritmos
Universidad Torcuato Di Tella

## Problema del viajante de comercio (TSP)



### Problema del viajante de comercio

Dado un grafo completo $G = (V, X)$ con longitudes asignadas a las aristas, $l : X \to \mathbb{R}_+$, encontrar un circuito hamiltoniano en $G$ de longitud mínima.

# Heurística golosa: vecino más cercano

```
elegir un nodo v
orden(v) := 0
S := {v}
i := 0
mientras S ≠ V hacer
    i := i + 1
    elegir la arista (v, w) más barata con w ∉ S
    orden(w) := i
    S := S ∪ {w}
    v := w
fin mientras
retornar orden
```

```
elegir un nodo v
orden(v) := 0
S := {v}
i := 0
mientras S ≠ V hacer
    i := i + 1
    elegir la arista (v, w) más barata con w ∉ S
    orden(w) := i
    S := S ∪ {w}
    v := w
fin mientras
retornar orden
```

- Cuál es la complejidad computacional de este algoritmo?
- Qué se puede decir sobre la calidad de las soluciones que encuentra?

```
C := un circuito de longitud 3
S := {nodos de C}
mientras S ≠ V hacer
    ELEGIR un nodo v ∉ S
    S := S ∪ {v}
    INSERTAR v en C
fin mientras
retornar C
```

# Heurísticas de inserción

```
C := un circuito de longitud 3
S := {nodos de C}
mientras S ≠ V hacer
    ELEGIR un nodo v ∉ S
    S := S ∪ {v}
    INSERTAR v en C
fin mientras
retornar C
```

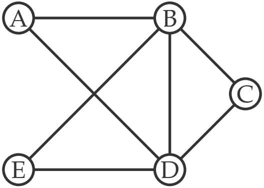
- Cómo ELEGIR?
- Cómo INSERTAR?

# Heurísticas de inserción

$C$ := un circuito de longitud 3
$S := \{$nodos de $C\}$
**mientras** $S \neq V$ **hacer**
    ELEGIR un nodo $v \notin S$
    $S := S \cup \{v\}$
    INSERTAR $v$ en $C$
**fin mientras**
**retornar** $C$

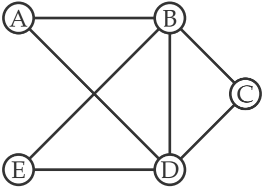
- Cómo ELEGIR?
- Cómo INSERTAR?
- Cuál es la complejidad computacional de este algoritmo?
- Qué se puede decir sobre la calidad de las soluciones que encuentra?

# Paréntesis: Grafos eulerianos




## Definición

Un grafo es euleriano si tiene un circuito que pasa exactamente una vez por cada arista.

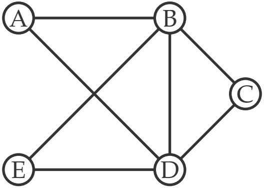



**Definición**

Un grafo es euleriano si tiene un circuito que pasa exactamente una vez por cada arista.

**Teorema (Euler, 1736 – Hierholzer, 1873)**

Un grafo es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.




**Definición**

Un grafo es euleriano si tiene un circuito que pasa exactamente una vez por cada arista.

**Teorema (Euler, 1736 – Hierholzer, 1873)**

Un grafo es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

**Algoritmo de Hierholzer.** Dado un grafo euleriano, se puede construir un circuito euleriano en $O(m)$.

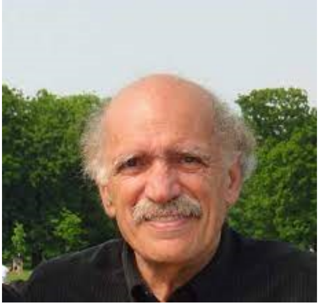
1. Encontrar un árbol generador mínimo $T$ de $G$.
2. Duplicar las aristas de $T$.
3. Armar un circuito euleriano $E$ con las aristas de $T$ y sus duplicados.
4. Recorrer $E$ y armar con "cortocircuitos" un circuito hamiltoniano de $G$.

1. Encontrar un árbol generador mínimo $T$ de $G$.
2. Duplicar las aristas de $T$.
3. Armar un circuito euleriano $E$ con las aristas de $T$ y sus duplicados.
4. Recorrer $E$ y armar con "cortocircuitos" un circuito hamiltoniano de $G$.

**Teorema**

Sea $C^H$ el circuito generado por la heurística del árbol generador y sea $C^*$ un circuito óptimo. Si las distancias cumplen la desigualdad triangular, entonces

$$\frac{l(C^H)}{l(C^*)} \leq 2.$$



Nicos Christofides
(1942–2019)

# TSP – Heurística de Christofides (1976)

1. Encontrar un árbol generador mínimo $T$ de $G$.
2. Encontrar un matching perfecto de peso mínimo $M$ en el grafo inducido por los vértices de grado impar en $T$.
3. Armar un circuito euleriano $E$ con las aristas de $T' = T + M$.
4. Recorrer $E$ y armar con "cortocircuitos" un circuito hamiltoniano de $G$.

# TSP – Heurística de Christofides (1976)

1. Encontrar un árbol generador mínimo $T$ de $G$.
2. Encontrar un matching perfecto de peso mínimo $M$ en el grafo inducido por los vértices de grado impar en $T$.
3. Armar un circuito euleriano $E$ con las aristas de $T' = T + M$.
4. Recorrer $E$ y armar con "cortocircuitos" un circuito hamiltoniano de $G$.

**Teorema**

Sea $C^H$ el circuito generado por la heurística de Christofides y sea $C^*$ un circuito óptimo. Si las distancias cumplen la desigualdad triangular, entonces

$$l(C^H)/l(C^*) \leq 3/2$$

.

# TSP – Heurística de Christofides (1976)

- La Heurística de Christofides es el mejor algoritmo aproximado conocido para el TSP métrico

# TSP – Heurística de Christofides (1976)

- La Heurística de Christofides es el mejor algoritmo aproximado conocido para el TSP métrico ... hasta 2020.


Anna Karlin


Nathan Klein


Shayan Gharan

- La Heurística de Christofides es el mejor algoritmo aproximado conocido para el TSP métrico … hasta 2020.

- En julio de 2020 Anna Karlin, Nathan Klein y Shayan Gharan presentaron un algoritmo $(3/2 - 10^{-36})$-aproximado para el TSP métrico.