# Métodos Computacionales - TP1

Josefina Jahde, Dafydd Jenkins

September 28, 2024

## Introducción

El siguiente informe detalla las tareas realizadas para la resolución del trabajo práctico: cómo fueron resueltas las consignas, los desarrollos de las mismas, los resultados de los experimentos y conclusiones.

## Ejercicio 1

Las función solicitada en el primer ítem se encuentra en el archivo .ipynb adjunto, definida como f0(t, puntos). Para el segundo ítem, se partió de la formula:

$$g(t) = (1-t)f_0(t) + tf_1(t)$$

La desarrollamos como se muestra en la imágen:

1b) $g(t) = (1-t)\,f_0(t) + t \cdot f_1(t)$

$$g(t) = (1-t)\cdot((1-t)\cdot p_0 + tp_1) + t\cdot((1-t)p_1 + tp_2) =$$
$$= (1-t)\cdot(p_0 - tp_0 + tp_1) + t(p_1 - tp_1 + tp_2) =$$
$$= p_0 - tp_0 + tp_1 - tp_0 + t^2p_0 - t^2p_1 + tp_1 - t^2p_1 + t^2p_2 =$$
$$= p_0 - 2tp_0 + t^2p_0 - 2t^2p_1 + 2tp_1 + t^2p_2 =$$
$$= t^2(p_0 - 2p_1 + p_2) + t(-2p_0 + 2p_1) + p_0$$

Figure 1: Desarrollo de $g(t)$

Llegando a la fórmula final:

$$g(t) = t^2(p_0 - 2p_1 + p_2) + t(-2p_0 + 2p_1) + p_0$$

Como se puede ver, la fórmula obtenida es cuadrática con respecto a $t$, por lo tanto, $g(t)$ es una curva de Bézier cuadrática. Para el tercer inciso,el gráfico se generó con el código que se encuentra en la sección "Ejercicio 1". Como puntos de ejemplo se usaron $p_0 = (1, 2)$, $p_1 = (5, 6)$, $p_2 = (2, 10)$. El gráfico resultante se muestra a continuación:

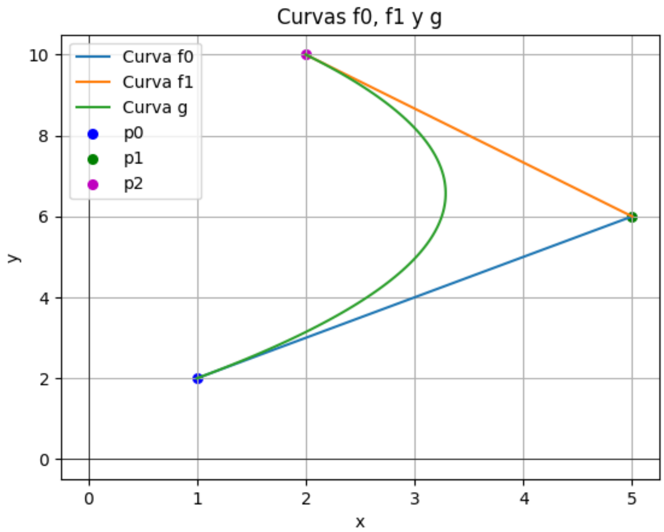



Figure 2: $f_0(t)$, $f_1(t)$ y $g(t)$ con puntos de ejemplo

Luego de construir $g(t)$ a partir de $f_0(t)$ y $f_1(t)$ podemos decir que estas dos últimaas "se combinan" para generar $g(t)$. A los resultados de $f_0(t)$ y $f_1(t)$ se les vuelve a aplicar la misma función (porque $f_0(t)$ y $f_1(t)$ son la misma función aplicada sobre distintos puntos).

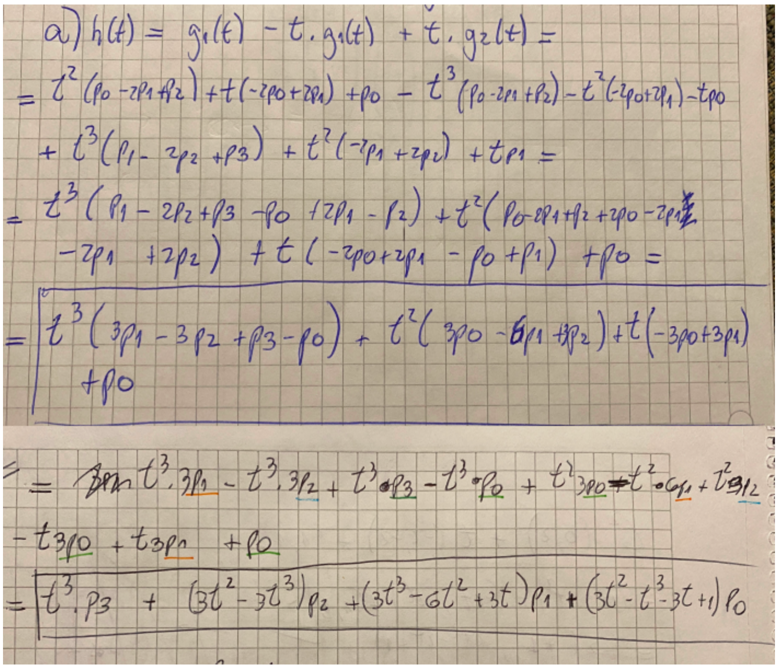
Decidimos definir "la función" como $f(t, p_i, p_j) = (1-t)p_i + tp_j$.

Entonces, $f_0(t) = f(t, p_0, p_1)$, $f_1(t) = f(t, p_1, p_2)$ y $g(t) = f(t, f_0(t), f_1(t))$.

Intuímos que para generar una curva de Bézier cúbica, se agregará un cuarto punto $p_3$. el mismo se combinará con $p_2$ para formar una $f_2(t) = f(t, p_2, p_3)$. El resultado de esa función se combinara con el de $f_1(t)$ para formar una función similar a $g(t)$. El resultado de estas dos "$g(t)$" serán utilizados como parámetros nuevamente de $f(t, p_i, p_j)$ para generar la curva de Bézier cúbica.

# Ejercicio 2

Para el primer ítem, partimos de la definición de $h(t) = (1-t)g_1(t) + tg_2(t)$. La desarrollamos como se muestra a continuación:



a) $h(t) = g_1(t) - t \cdot g_1(t) + t \cdot g_2(t) =$

$= t^2(p_0 - 2p_1 + p_2) + t(-2p_0 + 2p_1) + p_0 - t^3(p_0 - 2p_1 + p_2) - t^2(-2p_0 + 2p_1) - tp_0$

$+ t^3(p_1 - 2p_2 + p_3) + t^2(-2p_1 + 2p_2) + tp_1 =$

$= t^3(p_1 - 2p_2 + p_3 - p_0 + 2p_1 - p_2) + t^2(p_0 - 2p_1 + p_2 + 2p_0 - 2p_1$

$- 2p_1 + 2p_2) + t(-2p_0 + 2p_1 - p_0 + p_1) + p_0 =$

$= \boxed{t^3(3p_1 - 3p_2 + p_3 - p_0) + t^2(3p_0 - 6p_1 + p_2) + t(-3p_0 + 3p_1) + p_0}$

$= t^3 \cdot 3p_1 - t^3 \cdot 3p_2 + t^3 \cdot p_3 - t^3 \cdot p_0 + t^2 3p_0 - t^2 \cdot 6p_1 + t^2 3p_2$

$- t3p_0 + t3p_1 + p_0$

$= \boxed{t^3 \cdot p_3 + (3t^2 - 3t^3)p_2 + (3t^3 - 6t^2 + 3t)p_1 + (3t^2 - t^3 - 3t + 1)p_0}$

Figure 3: Desarrollo de $h(t)$

Llegando a la fórmula final:

$$h(t) = t^3 p_3 + (3t^2 - 3t^3)p_2 + (3t^3 - 6t^2 + 3t)p1 + (3t^2 - t^3 - 3t + 1)p0$$

Para el segundo ítem, utilizamos el código que se puede encontrar en la sección ”Ejercicio 2” del archivo .ipynb. El gráfico resultante es el siguiente:

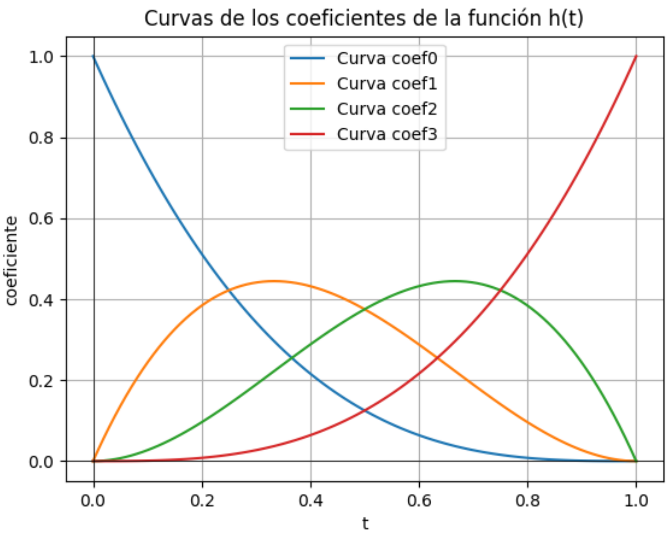



Figure 4: Coeficientes de $h(t)$

Para la suma de los coeficientes, vimos que con $t = 0.3, t = 0.5yt = 0.8$ dicha suma siempre daba 1. Por lo tanto decidimos ver que pasaba con un t genérico. La suma de los coeficientes será:

$$t^3 + 3t^2 - 3t^3 + 3t^3 - 6t^2 + 3t + 3t^2 - t^3 - 3t + 1$$

En dicha suma, los términos dependientes de t se cancelan para toda t, por lo que la suma siempre vale 1.

Para el tercer ítem, se obtuvo, a partir del código en el archivo .ipynb en la sección ”Ejercicio 2”, el siguiente gráfico:

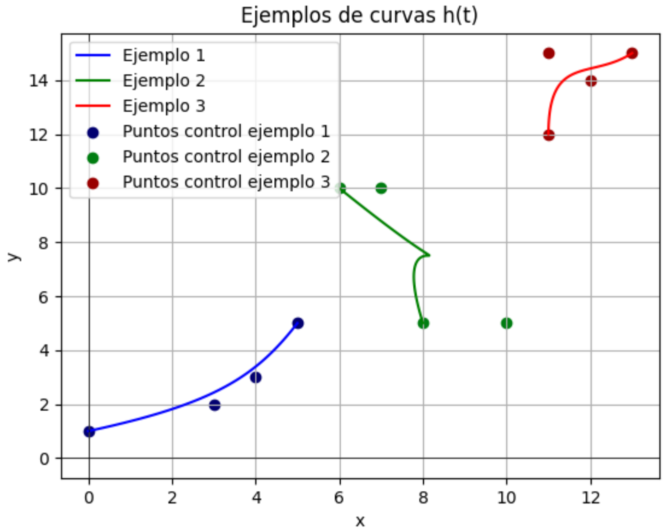



Figure 5: Ejemplos de $h(t)$ con puntos de control aleatorios

# Ejercicio 3:

## Primer ítem:

Para $S_1 = v_1$, las posibles combinaciones lineales son $c_1v_1$. Como la suma de los coeficientes debe ser 1, y solo hay un coeficiente, debe valer $c_1 = 1$. Por lo tanto, $conv(S_1) = v_1$. Visualización para $v_1 = (1, 2)$

Para $S_2 = v_1, v_2$, las posibles combinaciones lineales son $c_1v_1 + c_2v_2$. Como la suma de los coeficientes debe ser 1, debe valer $c_1 + c_2 = 1 \iff c_1 = 1 - c_2$. Por lo tanto, $conv(S_2) = \{c_1v_1 + c_2v_2 \in \mathbb{R}^2/c_1, c_2 > 0$ y $c_1 = 1 - c_2\} = \{[v_1, v_2][1 - c_2, c_2]^T\}$.

Para $S_3 = v_1, v_2, v_3$, las posibles combinaciones lineales son $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$. Como la suma de los coeficientes debe ser 1, debe valer $c_1 + c_2 + c_3 = 1 \iff c_1 = 1 - c_2 - c_3$ (hay dos variables libres). Por lo tanto, $conv(S_3) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \in \mathbb{R}^2/c_1, c_2, c_3 > 0$ y $c_1 = 1 - c_2 - c_3\} = \{[v_1, v_2, v_3][1 - c_2 - c_3, c_2, c_3]^T\}$.

Visualizaciiones:

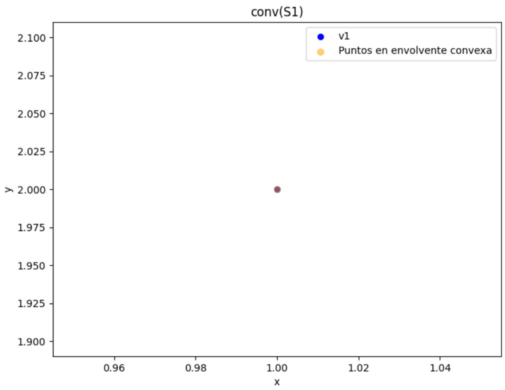



Figure 6: conv(s1)

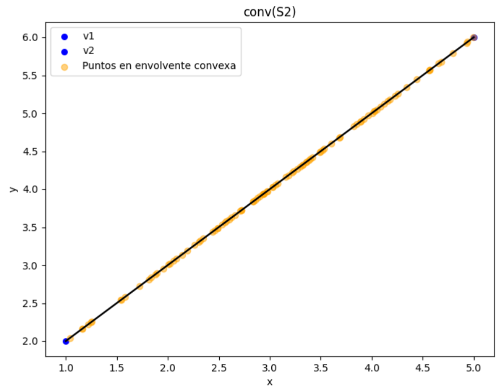



Figure 7: conv(s2)

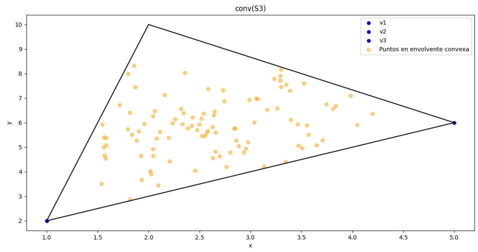



Figure 8: conv(s3)

## Segundo ítem:

Las curvas de Bézier son combinaciones convexas ya que, como demostramos en el ejercicio 2, la suma de los coeficientes que mutiplican a los puntos siempre suman 1 y son >= 0 para todo t entre 0 y 1.