Apuntes

Introducción y parecidos

Hecho por

DAVID GÓMEZ

Estudiante de Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia

Conjuntos: lo básico

Operaciones y definiciones:

Unión: tiene como resultado un conjunto con todas las componentes tanto de A como de B

$$A \cup B := (\exists x \,|\, x \in A \,\vee\, x \in B)$$

Intersección: tiene como resultado un conjunto con las componentes que se encuentran en ambos conjuntos a la vez

$$A \cap B := (\exists x \,|\, x \in A \,\wedge\, x \in B)$$

Subconjunto/ Contenencia: da a entender que todas las componentes de A se encuentran dentro de B , la diferencia entre una y la otra es que en la contenencia cabe la posibilidad de que A sea igual a B

$$A \subseteq B := (\exists x \,|\, x \in A \,:\, x \in B)$$

Conjunto de partes: tiene como resultado un conjunto el cual se compone de todos los conjuntos contenidos en A

$$\mathscr{P}(A) := (\mathbb{X} \,|\, \mathbb{X} \subseteq A)$$

Complemento: Da como resultado un conjunto el cual tiene todas las componentes del conjunto referencial a excepción de las componentes de A

$$A\text{'} := (\exists x \,|\, x \notin A)$$

Resta: da como resultado un conjunto el cual tiene los elementos de A que no están en B

$$\begin{aligned} A - B &:= (\exists x \,|\, x \in A \,\wedge\, x \notin B) \\ &\equiv (\exists x \,|\, x \in A \wedge x \in B\text{'}) \\ &\equiv A \cap B\text{'} \end{aligned}$$

Diferencia simétrica ($A \triangle B$): da como resultado un conjunto del que hacen parte las componentes de A que no están en B y las componentes de B que no están en A

$$\begin{aligned} &\equiv (A - B) \cup (B - A) \\ &\equiv (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

Producto cartesiano: el producto cartesiano da un conjunto de parejas entre todas las componentes de ambos conjuntos

$$A \times B := (\exists x, y \,|\, x \in A \wedge y \in B)$$

Propiedades y demostraciones:

Demostración. El complemento de una unión:

$$\begin{aligned} (A \cup B)\text{'} &\equiv (\exists x \,|\, \neg(x \in A \vee x \in B)) \\ &\equiv (\exists x \,|\, x \notin A \wedge x \notin B) \\ &\equiv A\text{'} \cap B\text{'} \end{aligned}$$

Para la intersección el resultado es:

$$(A \cap B)\text{'} \equiv A\text{'} \cup B\text{'}$$

□

Demostración. Comprobar que las dos definiciones dadas para la diferencia simétrica sean equivalentes:

$$\begin{aligned} A \triangle B &\equiv (A \cup B) - (A \cap B) \\ &\equiv (A \cup B) \cap (A\text{'} \cup B\text{'}) \\ &\equiv (\exists x \,|\, (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \\ &\equiv (\exists x \,|\, [(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A] \\ &\qquad \vee [(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B]) \\ &\equiv (\exists x \,|\, [\underbrace{(x \in A \wedge x \notin A)}_{\text{False}} \vee (x \in B \wedge x \notin A)]) \\ &\qquad \vee [(x \in A \wedge x \notin B) \vee \underbrace{(x \in B \wedge x \notin B)}_{\text{False}}] \\ &\equiv (\exists x \,|\, (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)) \\ &\equiv (B \cap A\text{'}) \cup (A \cap B\text{'}) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \end{aligned}$$

□

Demostración. Hay otra forma de definir la diferencia simétrica, la cual se puede obtener mediante las definiciones mencionadas:

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (B - A) \cup (A - B) \\ &\equiv (\exists x \,|\, (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)) \\ &\equiv (\exists x \,|\, \neg(\neg(x \in B \wedge x \notin A) \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B))) \\ &\equiv (\exists x \,|\, \neg((x \notin B \vee x \in A) \wedge (x \notin A \vee x \in B))) \\ &\equiv (\exists x \,|\, \neg((x \in B \Rightarrow x \in A) \wedge (x \in A \Rightarrow x \in B))) \\ &\equiv (\exists x \,|\, \neg(x \in A \equiv x \in B)) \end{aligned}$$

□

Relaciones: Las relaciones se pueden denotar de varias maneras ($\prec$, $\sim$), se basa en el producto cartesiano, y su diferencia está en que se puede dar una condición para cada pareja del conjunto resultante, por lo general mediante algún operador ($\blacksquare$) mediante el cual se vean involucradas las variables.

$$x \sim y := (x, y \in A \times B \,|\, f(x) \blacksquare f(y))$$

Ejemplo:

$$A = \mathbb{N}\ ,\ B = \mathbb{R}$$
$$x \sim y \equiv (x, y \in A \times B \,|\, 2x < 3y - 1)$$

En este caso $f(x) = 2x$, $\blacksquare$ $=<$, $f(y) = 3y - 1$ Se dice función a aquellas relaciones las cuales cumplen que solo existe una pareja para cada elemento del primer conjunto:

$$\{a, b\}\ ,\ \{a, c\} \Rightarrow b = c$$

Se dice que una relación es "equivalente"si cumple ser: Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Reflexiva: La relación se puede aplicar al mismo elemento

$$(\forall x : x \sim x)$$

Simétrica: Si la relación se puede aplicar de un valor a otro, se puede hacer de regreso

$$(\forall x, y : x \sim y \Rightarrow y \sim x)$$

Transitiva: Si la relación aplica de un valor a otro, y este último se relaciona con un tercero, el primero se relaciona con el tercero

$$(\forall x, y, z : (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z)$$