La conjetura de Goldbach

Un breve acercamiento

David Gómez & Daniel Pérez

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

Matemáticas
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Colombia
May 29, 2022

Introducción

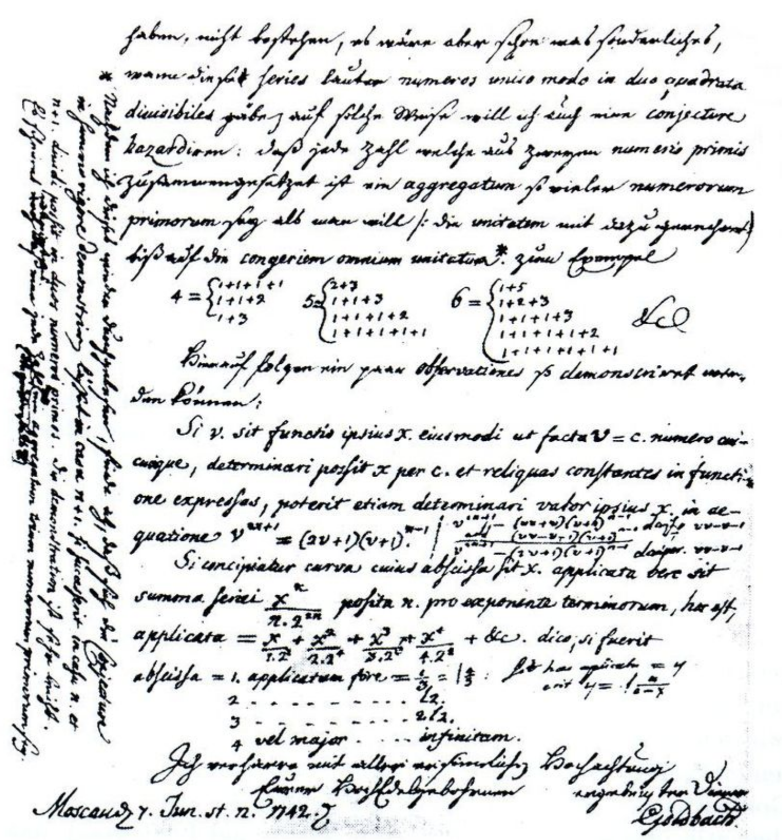
En 1742, la conjetura fue propuesta inicialmente por Christian Goldbach, en una carta a Leonard Euler, en la que enunciaba que cualquier número par mayor a 2, se podía expresar como la suma de tres números primos. Ahora, sucede que en aquella época, el número 1 se consideraba un número primo. La proposición equivalente en la actualidad dice que cualquier número par mayor a 2 se puede expresar como la suma de dos números primos.

En otras investigaciones al respecto, lo mejor que se ha podido hacer es usar la distribución de los números primos en los naturales. Lo encontrado en "*Some issues on Goldbach conjeture*", es que la función, la cual cuenta el número de pares ordenados de primos que cumplen la conjetura (de forma aproximada), es creciente y eventualmente el número de parejas aumenta conforme se toman naturales más grandes. Con base en otras funciónes las cuales son definidas en el artículo, esto último significa que hay más parejas donde los dos componentes son números primos que parejas en las que alguno de los dos componentes no es un número primo. [1]

Sin embargo, esta demostración, y otras similares, usan herramientas basadas en la probabilidad, (como es la función $\pi(x)$), es decir: no se ha logrado encontrar una demostración concreta de la conjetura, mas se tiene que conforme se tome un número par mayor, es más probable que existan combinaciones de números primos que al sumarse den como resultado este par.

El problema en sí con lograr dar una respuesta concreta a la conjetura está en que no se tiene un patrón definido para los números primos. En otras palabras, no existe una sucesión la cual logre generar el conjunto de los números primos. A diferencia de los pares por ejemplo, los cuales se pueden generar con un ínice natural y multiplicarlo por 2. Trabajar con números pares es mucho más sencillo, pues solo faltaríá expresar lo deseado en una forma la cual sea 2 multiplicado por un natural.

El acercamiento que se piensa dar en este ensayo, es con base en los conocimientos que se tienen sobre números en sí. Debido a que no se poseen conocimientos en materias avanzadas en la asignatura, el desarrollo que se dará del problema será bastante trivial.



https://www.wikiwand.com/es/Conjetura_débil_de_Goldbach

Part I

David Gómez

1 Primer Desarrollo

Para dar inicio al desarrollo de la conjetura, lo mejor es dar a entender la definición que se da de los conjuntos involucrados en esta:

Los naturales: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Este será el conjunto de referencia el cual se usará en todo el documento, a lo largo de este, cualquier variable la cual no se especifíque a qué conjunto pertenece, pertenecerá a $\mathbb{N}$.

Los pares: $\{s_n\} = \{x \,|\, x = 2n\}$

Los impares: $\{u_n\} = \{x \,|\, x = 2n + 1\}$

Los primos: $\mathbb{P} = \{p \,|\, p = a \cdot b \Leftrightarrow a = p \wedge b = 1\}$

Lo primero sería dar las características que tiene los primos fuera de lo definido en su conjunto. Se puede observar fácilmente que el único número primo par es el 2, debido a que todos los pares son divisibles entre 2, saliendo de la definición de número primo. Esto implica que todos los elementos de $\mathbb{P}$ diferentes al 2 son impares, es decir:

$$(\forall p \,|\, (p \in \mathbb{P} \wedge p > 2) \,:\, p \in u_n)$$

De esto se puede decir que la suma de dos números primos (exepto el 2), siempre es un número par:

Demostración:

Dados p_a, p_b diferentes de 2, entonces:

$$p_a + p_b = 2n_a + 1 + 2n_b + 1$$
$$p_a + p_b = 2n_a + 2n_b + 2$$
$$p_a + p_b = 2(n_a + n_b + 1)$$

ya que el resultado se pudo expresar de la forma $2n$, se dice que el resultado es par, es decir, la suma de dos primos diferentes de 2 da como resultado un número par $\square$

Sea $\mathbf{fact}(y)$ los factores primos de y ,
Sea x un número par,
entonces $\mathbf{fact}(x) = \{2, p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$
Por consiguiente:

$$x = 2 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdots p_n$$
$$x = \underbrace{p_k + p_k + p_k + \cdots + p_k}_{x/p_k \text{ veces}}$$
$$x = p_k + \underbrace{p_k + p_k + \cdots + p_k}_{x/p_k - 1 \text{ veces}}$$
$$x = p_k + np_k$$

Esto último significa que, a menos que x sea el doble de un primo, para que la conjetura se cumpla, no es posible usar uno de sus factores primos como término en la suma.

En torno a $\mathbf{fact}(x)$, también se puede decir que ningún elemento de este conjunto puede ser mayor a $x/2$.

Demostración:

Supongamos que existe un $a \in \mathbf{fact}(x)$ tal que $a > \frac{x}{2}$

$$x = a \cdot p_0 \cdot p_1 \cdots p_n$$
$$a \cdot p_0 \cdot p_1 \cdots p_n > \frac{x}{2} \cdot p_0 \cdot p_1 \cdots p_n$$
$$x > \frac{x}{2} \cdot p_0 \cdot p_1 \cdots p_n$$
$$1 > \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot p_1 \cdots p_n$$
$$2 > p_0 \cdot p_1 \cdots p_n$$

Esta última desigualdad es una contradicción, pues se sabe que $\boldsymbol{min}\{\mathbb{P}\} = 2$ y 2 no puede ser mayor a 2. El error está en asumir que existe dicho a factor de x $\square$

2 Desarrollo mediante intervalos en los naturales

Lo que inspiró este desarrollo fue el hallazgo en un contraejemplo a la pregunta obvia tras 1 (pág. 2):

Para la obtención de un par como la suma de dos números primos ¿Solo haría falta tomar cualquier número primo no factor de este par?

Comenzando por hacer algunas pruebas con números cuales quiera: $x = 18$, $\mathbf{fact}(x) = \{2, 3, 3\}$ Tomando $p_a = 5$ entonces $18 - 5 = 13$, $13 \in \mathbb{P}$. Pero ¿Qué sucede con un número como el 1084 ? Siguiendo el mismo procedimiento:

$$
\begin{aligned}
x &= 1084 \\
\mathbf{fact}(x) &= \{2, 2, 271\} \\
p_a &= 3 \\
1084 - 3 &= 1081 \notin \mathbb{P}
\end{aligned}
$$

Este resultado lo que quiere decir es que, no todos los primos no factores de x son válidos para cumplir la conjetura, y que el primo válido no se encuentra en el menor primo mayor al máximo valor de $\mathbf{fact}(x)$. Entonces, ¿Qué características deben tener los primos que cumplen la condición respecto a un x dado?

Otro acercamiento al problema es que de forma bastante obvia, cualquier x o bien es de la forma $2p$, en cuyo caso no hace falta comprobar nada pues $x = p + p$. O x es de la forma $2p + 2k$, $k \in \mathbb{N}$, ¿A qué se debe esta última igualdad?

$$
\begin{aligned}
\text{Sea } \mathbb{I}_{\mathbb{N}} &= \{p_a\,, \ldots\,, \frac{x}{2}\,, \ldots\,, p_{a+1}\} \\
&\Rightarrow \frac{x}{2} = p_a + k \\
\mathbb{I}_{\{s_n\}} &= \{2p_a\,, \ldots, x\,, \ldots\,, 2p_{a+1}\} \\
&\Rightarrow x = 2p_a + 2k
\end{aligned}
$$

Esto último es bastante evidente. Lo importante es lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
x &= p_a + \underbrace{(p_a + 2k)}_{\text{¿Es un primo?}} \\
x - p_a &= p_a + 2k
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
x &= 20 \\
\frac{x}{2} &= 10 \Rightarrow p_a = 7 \\
20 - 7 &= 13\,,\ 13 \in \mathbb{P}
\end{aligned}
$$

Pero resulta que no siempre es el caso:

$$
\begin{aligned}
x &= 28 \\
\frac{x}{2} &= 14 \Rightarrow p_a = 13 \\
28 - 13 &= 15\,,\ 15 \notin \mathbb{P}
\end{aligned}
$$

Para entender lo que está sucediendo acá, es necesario considerar las condiciones de k

Caso 1

$$
\begin{aligned}
\text{Sea } \mathbb{I}_{\mathbb{N}} &= \{p_a\,, p_a + 1\,, p_a + 2\}\,,\ p_a + 2 = p_{a+1} \\
\mathbb{I}_{\{s_n\}} &= \{2p_a\,, 2p_a + 2\,, 2p_a + 4\}
\end{aligned}
$$

Si se toma $x = 2p_a + 2$, entonces

$$
\begin{aligned}
x &= p_a + (p_a + 2) \\
x &= p_a + p_{a+1}
\end{aligned}
$$

Esto quiere decir que cualquier número par, cuya mitad esté entre dos números primos, necesariamente se puede escribir como la suma de dos primos □

Caso 2

$$
\begin{aligned}
\text{Sea } \mathbb{I}_{\mathbb{N}} &= \{p_a\,, \frac{x}{2}\,, \ldots\,, p_{a+1}\}\ ,\ p_a + 2 \notin \mathbb{P} \\
&\Rightarrow \frac{x}{2} = p_a + 1 \\
\mathbb{I}_{\{s_n\}} &= \{2p_a\,, x\,, \ldots\,, 2p_{a+1}\} \\
&\Rightarrow x = 2p_a + 2 \\
x &= p_a + \underbrace{(p_a + 2)}_{\text{no es primo}}
\end{aligned}
$$

Esto quiere decir que, si $\frac{x}{2}$ está inmediatamente después de un primo (p_a), pero el siguiente número no es primo, no es posible usar p_a como término en la suma que cumple la conjetura. □

En base a esto último, uno podría llegar a pensar dos cosas. (1) Si x cumple las condiciones del **Caso 2** entonces bastará con usar p_{a-1}. Resulta que no, más adelante se demostrará el por qué. (2) Si x no está inmediatamente después del doble de un primo en $\{s_n\}$, entonces se puede usar p_a para que se cumpla la conjetura. La razón por la que esto tampoco se cumple es la misma que en (1).

Para llegar a la justificación de la negación de las proposiciones que se acaban de mostrar, es pertinente mostrar un último caso, el cual resulta aplicar para todos los anteriores.

Caso 3

$$\text{Sea } \mathbb{I}_{\mathbb{N}} = \{p_a\,,\,\dots\,,\,\frac{x}{2}\,,\,\dots\,,\,p_{a+1}\}$$

$$p_a + k = \frac{x}{2} = p_{a+1} - k$$

$$\mathbb{I}_{\{s_n\}} = \{2p_a\,,\,\dots\,,\,x\,,\,\dots\,,\,2p_{a+1}\}$$

$$\Rightarrow x = 2p_a + 2k$$

$$x = p_a + (p_a + 2k)$$

$$x = p_a + \left(\frac{x}{2} + k\right)$$

$$x = p_a + p_{a+1}$$

La razón por la que este caso aplica para todos los anteriores, y lo tan interesante que implicaría la conjetura en base a esto es lo siguiente:

Aplica a todos los casos anteriores por una razón en extremo evidente: Si se cumple la conjetura, entonces para todos los x existen p_a y p_b tales que $x = p_a + p_b$, por consiguiente, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{p_a + p_b}{2}$.

Ahora, fijandonos únicamente en la parte derecha de la igualdad se tiene $\dfrac{p_a + p_b}{2}$. Esto no es otra cosa que el promedio entre estos primos. Recordando lo que significa el promedio: El promedio es el valor que se encuentra equidistante a los valores a promediar, al estar trabajando únicamente con dos números, esto es lo mismo que decir que este valor al sumarle una cantidad resulta en alguno de los dos valores, y al restarle esta misma cantidad resulta en el otro:

$$\frac{a+b}{2} = c \Rightarrow c + k = a \wedge c - k = b\ ,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Ahora, como se demostró al principio del documento, la suma de dos primos diferentes a 2 es un par, y por ende, el promedio será un natural. La cuestión es si el promedio de todos los primos genera todos los naturales desde el 3, o si para cualquier natural y mayor que o igual a 2 existe un k tal que $y \pm k \in \mathbb{P}$.

Part II

Daniel Pérez

3 Los números primos como desigualdades

Después de analizar la dificultad de encontrar los números primos, se encontró una forma de representarlos como el complemento de un conjunto aparentemente trivial, los números no primos. Para comenzar, vamos a dividir el conjunto de los naturales en 10 conjuntos, que se diferencian entre sí por el último dígito de cada número (las unidades), que puede ser $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ o 9. cada conjunto representara los números de la forma $k + 10n$, $0 \leq k \leq 9$. luego, obtenemos 10 conjuntos, cuyos elementos conforman los naturales:

se definirá la notación $\bar{k}$, para los conjuntos de números, cuyo último dígito es k, y $\bar{k}_i$ es algun elemento de $\bar{k}$

$$\bar{0} = \{x \,|\, x = 10n\}$$
$$\bar{1} = \{x \,|\, x = 1 + 10n\}$$
$$\bar{2} = \{x \,|\, x = 2 + 10n\}$$
$$\bar{3} = \{x \,|\, x = 3 + 10n\}$$
$$\bar{4} = \{x \,|\, x = 4 + 10n\}$$
$$\bar{5} = \{x \,|\, x = 5 + 10n\}$$
$$\bar{6} = \{x \,|\, x = 6 + 10n\}$$
$$\bar{7} = \{x \,|\, x = 7 + 10n\}$$
$$\bar{8} = \{x \,|\, x = 8 + 10n\}$$
$$\bar{9} = \{x \,|\, x = 9 + 10n\}$$

Sin embargo las funciónes de nuemeros pares se resumen en $Y_2 = 2x$. .Luego vamos a encontrar una serie de fórmulas que generen a todos los números compuestos.

Usando las fórmulas que definimos anteriormente para generalizar los números con el último dígito en común, podemos conseguir el conjunto de sus productos, igual a los productos de todos los naturales. vamos a dividir estos sistemas de ecuaciones en grupos, $ZT_k, 1 \leq K \leq 9$, donde el subíndice representa el último dígito de los números del conjunto.
El primero es el de los productos que da como resultado un número con último dígito igual a 1:
$ZT_1 = \{Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3\}$

$$Z_1 = (3 + 10x) * (7 + 10y)$$
$$Z_2 = (9 + 10x) * (9 + 10y)$$
$$Z_3 = (11 + 10x) * (11 + 10y)$$

Al desarrollar obtenemos un sistema de ecuaciones de 2 variables

$$Z_1 = 21 + 30y + 70x + 100yx$$
$$Z_2 = 81 + 90y + 90x + 100yx$$
$$Z_3 = 121 + 110y + 110x + 100yx$$

Como puede observarse, los resultados siempre terminan en 1, y como solo estas tres multiplicaciones obtienen un número cuyo último dígito sea este, es fácil demostrar que las soluciones del sistema conforman el conjunto de los números compuestos que terminan en 1, ya que son iguales a tener un $10k + 1$, siempre compuesto.
Los números que terminan en 3: $ZT_3 = \{Z_4 \cup Z_5\}$

$$Z_4 = (3 + 10x) * (11 + 10y)$$
$$Z_5 = (7 + 10x) * (9 + 10y)$$

Desarrollamos y obtenemos:

$$Z_4 = 33 + 30y + 110x + 100yx$$
$$Z_5 = 63 + 70y + 90x + 100yx$$

el conjunto del 5 puede resumirse en 1 sola función: $ZT_5 = \{Z_6\}$

$$Z_6 = (5 + 10x) * (n + 10y)$$

Donde $n \neq 1$ y $n \in 2k + 1$,$k \in \mathbb{N}$

Desarrollamos y obtenemos:

$$Z_6 = 5n + 50y + 10nx + 100yx$$

Resumiendo obtenemos $Z_6 = 10 + 5x$

El del 7: $ZT_7 = \{Z_7 \cup Z_8\}$

$$Z_7 = (3 + 10x) * (9 + 10y)$$
$$Z_8 = (7 + 10x) * (11 + 10y)$$

Desarrollamos y obtenemos:

$$Z_7 = 27 + 30y + 90x + 100yx$$
$$Z_8 = 77 + 70y + 110x + 100yx$$

El del 9: $ZT_9 = \{Z_9 \cup Z_0 \cup Z_1 1\}$

$$Z_9 = (3 + 10x) * (3 + 10y)$$
$$Z_0 = (7 + 10x) * (7 + 10y)$$
$$Z_1 1 = (9 + 10x) * (11 + 10y)$$

Desarrollamos y obtenemos:

$$Z_9 = 9 + 30y + 30x + 100yx$$
$$Z_0 = 49 + 70y + 70x + 100yx$$
$$Z_1 1 = 99 + 90y + 110x + 100yx$$

Finalmente la de los pares se resume en: $ZT_2 = \{Z_2\}$

$$Z_2 = 4 + 2x$$

Debido a que todos los pares exepto el 2, son números compuestos

Luego, definimos la función

$$ZT_k[\mathbb{N} \times \mathbb{N}] = \bar{k}_i$$

como las funciónes escritas anteriormente para cualquier subíndice.

Luego, el conjunto de números primos va a ser $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} = \{ & (\bar{1} - ZT_1) \cup (\bar{3} - ZT_3) \\ & \cup (\bar{5} - ZT_5) \cup (\bar{7} - ZT_7) \\ & \cup (\bar{9} - ZT_9) \cup (Y_2 - ZT_2)\} \end{aligned}$$

Cosa que trivialmente quiere decir:

$$TZ_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \mathbb{P}$$

Luego, esto se puede escribir como una serie de desigualdades, entre los conjuntos de números que terminan en un mismo número y los conjuntos de los compuestos que terminan en dicho número. Luego establecemos que:

$$(\nexists x, y | ZT_k(x, y) = \bar{k}_i \, , \, \bar{k}_i \in P)$$

Continuará. . .

Gracias a Ernesto Acosta Gempeler por ayudar a aclarar ideas a lo largo del desarrollo

References

[1] Emmanuel Markakis, Christopher Provatidis, and Nikiforos Markakis. "Some issues on goldbach conjecture". In: *Number Theory* 29 (2012).