



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»

ИНСТИТУТ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Лабораторная работа 1

по курсу «Случайные процессы»

ВАРИАНТ 6

Тема: _____ **Цепи Маркова** _____

Выполнил:
Студент 4-го курса
Едренников Д.А.

Группа: КМБО-01-20

МОСКВА – 2023

Задание

Каждому состоянию системы соответствует определенная последовательность из трёх нулей и двух единиц. Состояния системы нумеруются следующим образом:

№	состояние	№	состояние
1	00011	6	01100
2	00101	7	10001
3	00110	8	10010
4	01001	9	10100
5	01010	10	11000

На каждом шаге один из нулей превращается в единицу, и, одновременно, одна из единиц превращается в нуль. При этом, вероятность превращения в '1' для 1-го '0' (считая слева направо) равна p_1 , для 2-го '0' – p_2 , для 3-го '0' – p_3 , вероятность превращения в '0' для левой '1' равна q_1 , для правой '1' – q_2 .

При этом $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ и $q_1 + q_2 + q_3 = 1$.

Следуя Указаниям, нужно:

- 1) Составить таблицу всех возможных переходов между состояниями.
- 2) Построить матрицу переходных вероятностей P и граф состояний цепи Маркова.
- 3) Выявить существенные и несущественные состояния.
- 4) Проверить эргодичность цепи Маркова.
- 5) Найти стационарное распределение вероятностей состояний $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_{10})$.
- 6) Найти $K = \min(k | \delta_k < 0,001)$, $\delta_k = \max(|p_{ij}(k) - r_j|; i, j = 1, \dots, 10)$ и матрицу $P(K)$ вероятностей перехода за K шагов, сравнить ее строки с вектором \vec{r} .
- 7) Для каждого состояния $l = i_{10}$, взятого в качестве начального, сгенерировать последовательность номеров состояний $i_{11}, \dots, i_{1k}, \dots, i_{1100}$ через k шагов ($k=1, \dots, 100$). Найти для каждого l , $l = 1, \dots, 10$, относительные частоты пребывания системы в каждом состоянии $v_{li} = \frac{f_{li}}{100}$ ($i = 1, \dots, 10$), где f_{li} равно числу таких k , что $i_{1k} = i$, $k = 1, \dots, 100$). Сравнить v_{li} с r_i .

Вывод результатов проводить с округлением до 0,000001.

Краткие теоретические сведения

Цепь Маркова — последовательность случайных событий с конечным или счётным числом исходов, где вероятность наступления каждого события зависит только от состояния, достигнутого в предыдущем событии.

Однородной называют цепь Маркова, для которой условная вероятность $p_{ij}(s)$ перехода из состояния i в состояние j не зависит от номера испытания. Для однородных цепей вместо $p_{ij}(s)$ используют обозначение p_{ij} .

$\vec{p}(\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{p}(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{p}(0)P^m$ — называется предельным распределением вероятностей с начальным распределением $\vec{p}(0)$.

$\vec{r} = (r_1, r_2, \dots) = \vec{r}(0)$ — стационарное распределение вероятностей, если для распределения вероятностей $\vec{r}(0) = (r_1(0), r_2(0), \dots)$ выполняется условие $\vec{r}(m) = \vec{r}(0)$ для всех $m \geq 1$.

Существенное состояние — это такое состояние цепи Маркова, покинув которое, она всегда может в него вернуться.

Состояние i называется несущественным, если для него существует такое состояние j , что j достижимо из состояния i , но i не достижимо из j .

Период состояния i называется $k_i = \text{НОД}(k: p_{ii}(k) > 0)$.

Цепь Маркова неприводима, если $S = S(i)$ для всех $i \in S$. (S — множество всех состояний цепи Маркова).

Цепь Маркова называется апериодической, если все ее состояния апериодичны. Состояние называется апериодическим, если его период равен 1.

Эргодическая цепь Маркова — это такая цепь, для которой вероятность перехода из одного состояния в другое не зависит от того, когда происходит переход.

Формула нахождения стационарного распределения:

$$\begin{cases} r_1 = r_1 p_{11} + r_2 p_{21} + \dots + r_n p_{n1} \\ r_2 = r_1 p_{12} + r_2 p_{22} + \dots + r_n p_{n2} \\ \dots \\ r_n = r_1 p_{1n} + r_2 p_{2n} + \dots + r_n p_{nn} \\ 1 = r_1 + r_2 + \dots + r_n \end{cases}$$

$r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ — стационарное распределение.

Цепь Маркова эргодична, если она:

- А. Неприводима
- В. Апериодична

Используемые функции из языка python:

`numpy.linalg.solve(r, ro)` — решение системы уравнений

Результаты расчетов

Для всех заданий вариант равен 6.

p_1	p_2	p_3	q_1	q_2
0,599	0,069	0,332	0	1

Задание 1:

№ состояний	Состояние	Список возможных состояний на следующем шаге
1	00011	10010(8), 01010(5), 00110(3)
2	00101	10100(9), 01100(6), 00110(3)
3	00110	10100(9), 01100(6), 00101(2)
4	01001	11000(10), 01100(6), 01010(5)
5	01010	11000(10), 01100(6), 01001(4)
6	01100	11000(10), 01010(5), 01001(4)
7	10001	11000(10), 10100(9), 10010(8)
8	10010	11000(10), 10100(9), 10001(7)
9	10100	11000(10), 10010(8), 10001(7)

10	11000	10100(9), 10010(8), 10001(7)
----	-------	---------------------------------

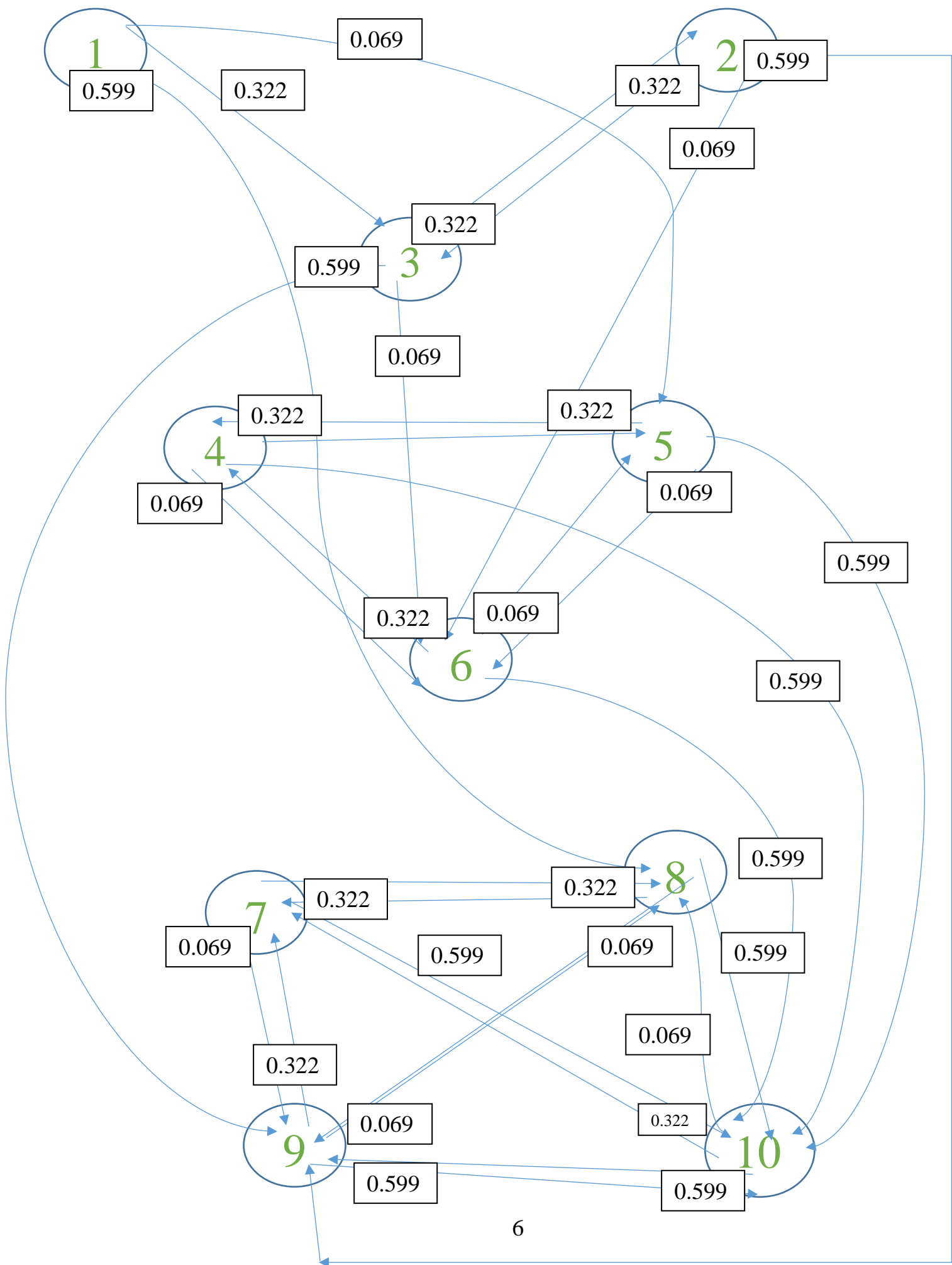
Задание 2:

Матрица переходных вероятностей P:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0.332	0	0.069	0	0	0.599	0	0
2	0	0	0.332	0	0	0.069	0	0	0.599	0
3	0	0.332	0	0	0	0.069	0	0	0.599	0
4	0	0	0	0	0.332	0.069	0	0	0	0.599
5	0	0	0	0.332	0	0.069	0	0	0	0.599
6	0	0	0	0.332	0.069	0	0	0	0	0.599
7	0	0	0	0	0	0	0	0.332	0.069	0.599
8	0	0	0	0	0	0	0.332	0	0.069	0.599
9	0	0	0	0	0	0	0.332	0.069	0	0.599
10	0	0	0	0	0	0	0.332	0.069	0.599	0

$$\sum_{j=1}^{10} p_{ij} = 1, \text{ для } i \text{ от } 1, \text{ до } 10.$$

Граф состояний цепи Маркова:



Задание 3:

Существенные	7,8,9,10
Несущественные	1,2,3,4,5,6

Задание 4:

Данная цепь Маркова не является эргодической, так как существуют несущественные состояния (состояния 1, 2, 3 и т.д.), в которые нельзя вернуться.

Задание 5:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_2 = 0.332r_3 \\ r_3 = 0.332r_1 + 0.332r_2 \\ r_4 = 0.332r_5 + 0.332r_6 \\ r_5 = 0.069r_1 + 0.332r_4 + 0.069r_6 \\ r_6 = 0.069r_2 + 0.069r_3 + 0.069r_4 + 0.069r_5 \\ r_7 = 0.332r_8 + 0.332r_9 + 0.332r_{10} \\ r_8 = 0.599r_1 + 0.069r_{10} + 0.332r_7 + 0.069r_9 \\ r_9 = 0.599r_2 + 0.599r_3 + 0.599r_{10} + 0.069r_7 + 0.069r_8 \\ r_{10} = 0.599r_4 + 0.599r_5 + 0.599r_6 + 0.599r_7 + 0.599r_8 + 0.599r_9 \\ 1 = r_1 + r_2 + \dots + r_{10} \end{array} \right.$$

Стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125868	0.250274	0.374609	1

Задание 6:

K = 5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125867	0.2502	0.374683
2	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125867	0.2502	0.374683
3	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125867	0.2502	0.374683
4	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125867	0.250377	0.374506
5	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125867	0.250377	0.374506
6	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125867	0.250377	0.374506
7	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125868	0.250377	0.374506
8	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125868	0.250377	0.374506
9	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125868	0.250377	0.374506
10	0	0	0	0	0	0	0.249249	0.125868	0.250102	0.374781

Таблица сравнения строк $P(K)$ с вектором \vec{r} .

i	$\max(p_{ij}(k) - r_j ; j=1, \dots, 10)$
1	0.000074
2	0.000074
3	0.000074
4	0.000103
5	0.000103
6	0.000103
7	0.000103
8	0.000103
9	0.000103
10	0.000172
	Max = 0.000172

Задание 7:

Таблицы сравнения v_{li} с r_i

i	r_i	v_{li}	$ v_{li} - r_i $	v_{2i}	$ v_{2i} - r_i $
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0

3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0.01	0.01
7	0.249249	0.26	0.010751	0.23	0.019249
8	0.125868	0.09	0.035868	0.16	0.034132
9	0.250274	0.25	0.000274	0.24	0.010274
10	0.374609	0.4	0.025391	0.36	0.014609
			0.035868		0.034132

i	r_i	v_{3i}	$ v_{3i} - r_i $	v_{4i}	$ v_{4i} - r_i $
1	0	0	0	0	0
2	0	0.01	0.01	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.01	0.01
5	0	0	0	0.01	0.01
6	0	0	0	0	0
7	0.249249	0.24	0.009249	0.29	0.040751
8	0.125868	0.14	0.014132	0.1	0.025868
9	0.250274	0.24	0.010274	0.2	0.050274
10	0.374609	0.37	0.004609	0.39	0.015391
			0.014132		0.050274

i	r_i	v_{5i}	$ v_{5i} - r_i $	v_{6i}	$ v_{6i} - r_i $
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0.249249	0.25	0.000751	0.2	0.049249
8	0.125868	0.14	0.014132	0.07	0.055868

9	0.250274	0.23	0.020274	0.3	0.049726
10	0.374609	0.38	0.005391	0.43	0.055391
			0.020274		0.055391

i	r_i	v_{7i}	$ v_{7i} - r_i $	v_{8i}	$ v_{8i} - r_i $
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0.249249	0.21	0.039249	0.28	0.030751
8	0.125868	0.13	0.004132	0.12	0.005868
9	0.250274	0.29	0.039726	0.25	0.000274
10	0.374609	0.37	0.004609	0.35	0.024609
			0.039726		0.030751

i	r_i	v_{9i}	$ v_{9i} - r_i $	v_{10i}	$ v_{10i} - r_i $
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0.249249	0.29	0.040751	0.29	0.040751
8	0.125868	0.08	0.045868	0.08	0.014132
9	0.250274	0.24	0.010274	0.24	0.030274
10	0.374609	0.39	0.015391	0.39	0.024609
			0.045868		0.040751

Список литературы

1. Случайные процессы [Электронный ресурс]: методические указания / А. А. Лобузов. — М.: РТУ МИРЭА, 2021 — 36с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. - М.: Кнорус, 2018 - 488 с.
3. Бородин А.Н. Случайные процессы. - СПб.: Лань, 2021 - 640с.

Приложение

```
import numpy
import random
from decimal import Decimal

f = open('answer.txt', 'r+')

r = [[-2, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1],
      [0, -1, 0, 0.332, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0.332, 0.332, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, -1, 0.332, 0.332, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0.332, 0, -1, 0.069, 0, 0, 0, 0],
      [0.069, 0.069, 0.069, 0.069, 0.069, -1, 0, 0, 0, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0.332, 0.332, 0.332],
      [0.599, 0, 0, 0, 0, 0, 0.332, -1, 0.069, 0.069],
      [0, 0.599, 0.599, 0, 0, 0, 0.069, 0.069, -1, 0.599],
      [0, 0, 0.599, 0.599, 0.599, 0.599, 0.599, 0.599, 0.599, -1],
      ]

ro = [-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

rA = numpy.linalg.solve(r, ro)

print(rA)
print(sum(rA))

P = [[0, 0, 0.332, 0, 0.069, 0, 0, 0.599, 0, 0],
      [0, 0, 0.332, 0, 0, 0.069, 0, 0, 0.599, 0],
      [0, 0.332, 0, 0, 0, 0.069, 0, 0, 0.599, 0],
      [0, 0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0, 0, 0, 0.599],
      [0, 0, 0, 0.332, 0, 0.069, 0, 0, 0, 0.599],
      [0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0, 0, 0, 0, 0.599],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0.599],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0.332, 0, 0.069, 0.599],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0, 0.599],
      [0, 0, 0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0.599, 0]]

pk = P
delt = 1
K = 1
deltak = [0]*10
while delt > 0.001:
    delt = 0
    pk = numpy.dot(pk, pk)
```

```

    for i in range(0, 10):
        for j in range(0, 10):
            delt = max((abs(pk[i][j] - rA[j])), delt)
        K += 1

for i in range(0, 10):
    for j in range(0, 10):
        deltak[i] = Decimal(max((abs(pk[i][j] - rA[j])), deltak[i]))

v = numpy.zeros((10, 10), dtype=float, order='C')
vn = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
for i in range(0, 10):
    t = i
    for j in range(0, 100):
        k = random.choices(vn, P[t])
        v[i][k[0] - 1] += 1
        t = k[0]-1

v = v / 100
vr = numpy.zeros((10, 10))

for i in range(0, 10):
    for j in range(0, 10):
        vr[i][j] = abs(v[i][j] - rA[j])

f.write(str(numpy.around(rA, 6)))
f.write('\n')
f.write('\n')
f.write('\n')
f.write(str(K))
f.write('\n')
f.write('\n')
f.write('\n')
f.write(str(numpy.around(pk, 6)))
f.write('\n')
f.write('\n')
f.write('\n')
f.write(str(deltak))
f.write('\n')
f.write('\n')
f.write('\n')
f.write(str(numpy.around(v, 6)))
f.write('\n')
f.write('\n')

```

```
f.write('\n')  
f.write(str(numpy.around(vr, 6)))  
f.write('\n')
```