|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | Министерство образования и науки РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ | | |  Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  **«МИРЭА – Российский технологический университет»** | |
|  | |
|  | |
|  |  |

ИНСТИТУТ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Лабораторная работа 1

 по курсу «**Случайные процессы**»

**ВАРИАНТ 6**

Тема: \_\_\_\_\_\_\_ **Цепи Маркова**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Выполнил:

Студент 4-го курса

Едренников Д.А.

Группа: КМБО-01-20

МОСКВА – 2023

# Задание

Каждому состоянию системы соответствует определенная последовательность из трёх нулей и двух единиц. Состояния системы нумеруются следующим образом:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | состояние | № | состояние |
| 1 | 00011 | 6 | 01100 |
| 2 | 00101 | 7 | 10001 |
| 3 | 00110 | 8 | 10010 |
| 4 | 01001 | 9 | 10100 |
| 5 | 01010 | 10 | 11000 |
|  |  |  |  |

На каждом шаге один из нулей превращается в единицу, и, одновременно, одна из единиц превращается в нуль. При этом, вероятность превращения в ’1’ для 1-го ’0’ (считая слева направо) равна p1, для 2-го ’0’ –p2 , для 3-го ’0’ –p3 , вероятность превращения в ’0’ для левой ’1’ равна q1, для правой ’1’ −q2.

При этом p1 + p2 + p3 = 1 и q1 + q2 + q3 = 1.

**Следуя Указаниям, нужно:**

1. Составить таблицу всех возможных переходов между состояниями.
2. Построить матрицу переходных вероятностей P и граф состояний цепи Маркова.
3. Выявить существенные и несущественные состояния.
4. Проверить эргодичность цепи Маркова.
5. Найти стационарное распределение вероятностей состояний = (r1, r2, …, r10).
6. Найти K = min(k| < 0,001), = max(|pij(k) –rj|; i,j = 1, … , 10) и матрицу P(K) вероятностей перехода за K шагов, сравнить ее строки с вектором .
7. Для каждого состояния l = i10, взятого в качестве начального, сгенерировать последовательность номеров состояний il1, …, ilk, …, il100 через k шагов (k=1, ..,100). Найти для каждого l, l = 1, …,10, относительные частоты пребывания системы в каждом состоянии vli = (i = 1, …, 10), где fli  равно числу таких k , что ilk = i, k = 1, …, 100). Сравнить vli с ri.

Вывод результатов проводить с округлением до 0,000001.

# Краткие теоретические сведения

Цепь Маркова — последовательность случайных событий с конечным или счётным числом исходов, где вероятность наступления каждого события зависит только от состояния, достигнутого в предыдущем событии.

Однородной называют цепь Маркова, для которой условная вероятность pij(s) перехода из состояния i в состояние j не зависит от номера испытания. Для однородных цепей вместо pij(s) используют обозначение pij.

(∞) = (m) = (0)Pm – называется предельным распределением вероятностей с начальным распределением (0).

=(r1, r2, …) = (0) – стационарное распределение вероятностей, если для распределения вероятностей (0) = (r1(0), r2(0), …) выполняется условие (m) = (0) для всех m1.

Существенное состояние — это такое состояние цепи Маркова, покинув которое, она всегда может в него вернуться.

Состояние i называется несущественным, если для него существует такое состояние j, что j достижимо из состояния i, но i не достижимо из j.

Период состояния i называется ki = НОД(k: pii(k)>0).

Цепь Маркова неприводима, если S = S(i) для всех i S. (S – множество всех состояний цепи Маркова).

Цепь Маркова называется апериодической, если все ее состояния апериодичны. Состояние называется апериодическим, если его период равен 1.

Эргодическая цепь Маркова - это такая цепь, для которой вероятность перехода из одного состояния в другое не зависит от того, когда происходит переход.

Формула нахождения стационарного распределения:

r = () – стационарное распределение.

Цепь Маркова эргодична, если она:

1. Неприводима
2. Апериодична

Используемые функции из языка python:

numpy.linalg.solve(r, ro) – решение системы уравнений

# Результаты расчетов

Для всех заданий вариант равен 6.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| p1 | p2 | p3 | q1 | q2 |
| 0,599 | 0,069 | 0,332 | 0 | 1 |

Задание 1:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ состояний** | **Состояние** | **Список возможных состояний на следующем шаге** |
| 1 | 00011 | 10010(8), 01010(5), 00110(3) |
| 2 | 00101 | 10100(9), 01100(6), 00110(3) |
| 3 | 00110 | 10100(9),  01100(6),  00101(2) |
| 4 | 01001 | 11000(10),  01100(6),  01010(5) |
| 5 | 01010 | 11000(10),  01100(6),  01001(4) |
| 6 | 01100 | 11000(10),  01010(5),  01001(4) |
| 7 | 10001 | 11000(10),  10100(9),  10010(8) |
| 8 | 10010 | 11000(10),  10100(9),  10001(7) |
| 9 | 10100 | 11000(10),  10010(8),  10001(7) |
| 10 | 11000 | 10100(9), 10010(8), 10001(7) |

Задание 2:

Матрица переходных вероятностей P:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 0 | 0 |  | 0 |  |  | 0 | 0.599 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |  | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 0.599 | 0 |
| 3 | 0 |  | 0 | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 0.599 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  | 0 | 0 | 0 | 0.599 |
| 5 | 0 | 0 | 0 |  | 0 |  | 0 | 0 | 0 | 0.599 |
| 6 | 0 | 0 | 0 |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.599 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  | 0.599 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  | 0 |  | 0.599 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  | 0 | 0.599 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  | 0.599 | 0 |

=1, для от 1, до 10.

Граф состояний цепи Маркова:

0.069

0.599

0.599

0.322

0.322

0.069

0.322

0.599

0.069

0.322

0.322

0.069

0.069

0.599

0.069

0.322

0.599

0.599

0.322

0.322

0.599

0.599

0.069

0.069

0.069

0.322

0.069

0.322

0.599

0.599

Задание 3:

|  |  |
| --- | --- |
| Существенные | 7,8,9,10 |
| Несущественные | 1,2,3,4,5,6 |

Задание 4:

Данная цепь Маркова не является эргодической, так как существуют несущественные состояния (состояния 1, 2, 3 и т.д.), в которые нельзя вернутся.

Задание 5:

Стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125868 | 0.250274 | 0.374609 | 1 |

Задание 6:

K = 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125867 | 0.2502 | 0.374683 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125867 | 0.2502 | 0.374683 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125867 | 0.2502 | 0.374683 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125867 | 0.250377 | 0.374506 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125867 | 0.250377 | 0.374506 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125867 | 0.250377 | 0.374506 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125868 | 0.250377 | 0.374506 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125868 | 0.250377 | 0.374506 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125868 | 0.250377 | 0.374506 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.249249 | 0.125868 | 0.250102 | 0.374781 |

Таблица сравнения строк P(K) с вектором .

|  |  |
| --- | --- |
| i | max(|pij(k) – rj|; j=1, …10) |
| 1 | 0.000074 |
| 2 | 0.000074 |
| 3 | 0.000074 |
| 4 | 0.000103 |
| 5 | 0.000103 |
| 6 | 0.000103 |
| 7 | 0.000103 |
| 8 | 0.000103 |
| 9 | 0.000103 |
| 10 | 0.000172 |
|  | Max = 0.000172 |

Задание 7:

Таблицы сравнения vli c ri

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | ri | v1i | |v1i - ri| | v2i | |v2i - ri| |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0.01 | 0.01 |
| 7 | 0.249249 | 0.26 | 0.010751 | 0.23 | 0.019249 |
| 8 | 0.125868 | 0.09 | 0.035868 | 0.16 | 0.034132 |
| 9 | 0.250274 | 0.25 | 0.000274 | 0.24 | 0.010274 |
| 10 | 0.374609 | 0.4 | 0.025391 | 0.36 | 0.014609 |
|  |  |  | 0.035868 |  | 0.034132 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | ri | v3i | |v3i - ri| | v4i | |v4i - ri| |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0.01 | 0.01 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0.01 | 0.01 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0.01 | 0.01 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.249249 | 0.24 | 0.009249 | 0.29 | 0.040751 |
| 8 | 0.125868 | 0.14 | 0.014132 | 0.1 | 0.025868 |
| 9 | 0.250274 | 0.24 | 0.010274 | 0.2 | 0.050274 |
| 10 | 0.374609 | 0.37 | 0.004609 | 0.39 | 0.015391 |
|  |  |  | 0.014132 |  | 0.050274 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | ri | v5i | |v5i - ri| | v6i | |v6i - ri| |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.249249 | 0.25 | 0.000751 | 0.2 | 0.049249 |
| 8 | 0.125868 | 0.14 | 0.014132 | 0.07 | 0.055868 |
| 9 | 0.250274 | 0.23 | 0.020274 | 0.3 | 0.049726 |
| 10 | 0.374609 | 0.38 | 0.005391 | 0.43 | 0.055391 |
|  |  |  | 0.020274 |  | 0.055391 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | ri | v7i | |v7i - ri| | v8i | |v8i - ri| |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.249249 | 0.21 | 0.039249 | 0.28 | 0.030751 |
| 8 | 0.125868 | 0.13 | 0.004132 | 0.12 | 0.005868 |
| 9 | 0.250274 | 0.29 | 0.039726 | 0.25 | 0.000274 |
| 10 | 0.374609 | 0.37 | 0.004609 | 0.35 | 0.024609 |
|  |  |  | 0.039726 |  | 0.030751 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | ri | v9i | |v9i - ri| | v10i | |v10i - ri| |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.249249 | 0.29 | 0.040751 | 0.29 | 0.040751 |
| 8 | 0.125868 | 0.08 | 0.045868 | 0.08 | 0.014132 |
| 9 | 0.250274 | 0.24 | 0.010274 | 0.24 | 0.030274 |
| 10 | 0.374609 | 0.39 | 0.015391 | 0.39 | 0.024609 |
|  |  |  | 0.045868 |  | 0.040751 |

## Список литературы

1. Случайные процессы [Электронный ресурс]: методические указания / А. А. Лобузов. — М.: РТУ МИРЭА, 2021 — 36с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. - М.: Кнорус, 2018 - 488 с.
3. Бородин А.Н. Случайные процессы. - СПб.: Лань, 2021 - 640с.

## Приложение

import numpy

import random

from decimal import Decimal

f = open('answer.txt', 'r+')

r = [[-2, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1],

[0, -1, 0, 0.332, 0, 0, 0, 0, 0, 0],

[0.332, 0.332, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],

[0, 0, 0, -1, 0.332, 0.332, 0, 0, 0, 0],

[0, 0, 0.332, 0, -1, 0.069, 0, 0, 0, 0],

[0.069, 0.069, 0.069, 0.069, 0.069, -1, 0, 0, 0, 0],

[0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0.332, 0.332, 0.332],

[0.599, 0, 0, 0, 0, 0, 0.332, -1, 0.069, 0.069],

[0, 0.599, 0.599, 0, 0, 0, 0.069, 0.069, -1, 0.599],

[0, 0, 0.599, 0.599, 0.599, 0.599, 0.599, 0.599, 0.599, -1],

]

ro = [-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

rA = numpy.linalg.solve(r, ro)

print(rA)

print(sum(rA))

P = [[0, 0, 0.332, 0, 0.069, 0, 0, 0.599, 0, 0],

[0, 0, 0.332, 0, 0, 0.069, 0, 0, 0.599, 0],

[0, 0.332, 0, 0, 0, 0.069, 0, 0, 0.599, 0],

[0, 0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0, 0, 0, 0.599],

[0, 0, 0, 0.332, 0, 0.069, 0, 0, 0, 0.599],

[0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0, 0, 0, 0, 0.599],

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0.599],

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.332, 0, 0.069, 0.599],

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0, 0.599],

[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.332, 0.069, 0.599, 0]]

pk = P

delt = 1

K = 1

deltak = [0]\*10

while delt > 0.001:

delt = 0

pk = numpy.dot(pk, pk)

for i in range(0, 10):

for j in range(0, 10):

delt = max((abs(pk[i][j] - rA[j])), delt)

K += 1

for i in range(0, 10):

for j in range(0, 10):

deltak[i] = Decimal(max((abs(pk[i][j] - rA[j])), deltak[i]))

v = numpy.zeros((10, 10), dtype=float, order='C')

vn = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

for i in range(0, 10):

t = i

for j in range(0, 100):

k = random.choices(vn, P[t])

v[i][k[0] - 1] += 1

t = k[0]-1

v = v / 100

vr = numpy.zeros((10, 10))

for i in range(0, 10):

for j in range(0, 10):

vr[i][j] = abs(v[i][j] - rA[j])

f.write(str(numpy.around(rA, 6)))

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write(str(K))

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write(str(numpy.around(pk, 6)))

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write(str(deltak))

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write(str(numpy.around(v, 6)))

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write('\n')

f.write(str(numpy.around(vr, 6)))

f.write('\n')