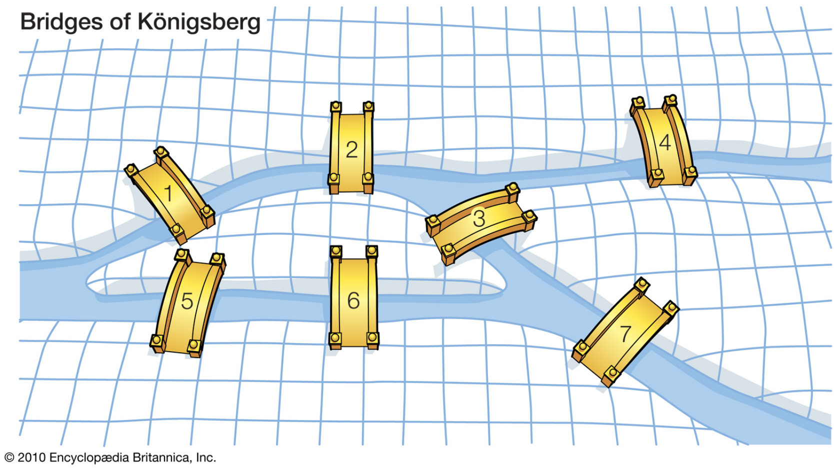
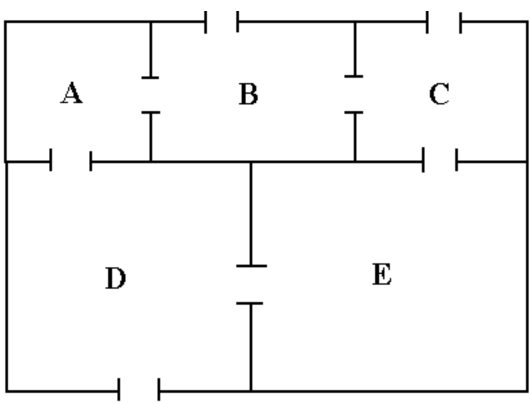
Домашнее задание

Теорема Эйлера. Граф содержит цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз тогда и только тогда, когда валентности всех вершин четные.

1. Кёнигсбергские мосты. Перед вами 7 мостов через реку Преголя. Можно ли начав прогулку с какого-то берега, пройти по каждому мосту ровно один раз и вернуться на исходный берег?



2. При проектировании музея планировалось, что посетители смогут обойти музей так, чтобы через каждую дверь пройти ровно один раз (возможно, выйдя на улицу и зайдя через другую дверь обратно в музей). Проверьте, можно ли это сделать. Если нет, укажите строителям, в каких стенах нужно проломать дополнительные двери, но не усердствуйте, дополнительных дверей должно быть как можно меньше.



3. Какое наименьше число раз необходимо оторвать ручку от бумаги, чтобы нарисовать единичный куб, не проводя никакое ребро дважды?

4. Решите предыдущую задачу в случае а) n-мерного куба, б) n-мерного симплекса.

5. Найдите количество остовных деревьев в графе V_5 (полный граф на 5 вершинах).

6. Сколько различных гамильтоновых циклов можно построить в графе V_5?

7. Задачку обсудим на семинаре, но можно попробовать подобрать ответ. Будем говорить, что слово циклическое, если его можно читать, мысленно склеив первую и последнюю буквы. То есть, например, циклическое слово $aabab$ можно читать бесконечно: $aababaababaabab\ldots$.

Требуется придумать кратчайшее слово над алфавитом из двух символов $\{a, b\}$, в котором найдется любое подслово из двух букв. Легко видеть, что ответ: $aabb$, это слово содержит все слова из двух букв: aa, bb, ab и ba (в циклическом слове после последней буквы читается первая).

Придумайте кратчайшее циклическое слово, содержащее все 3-х буквенные слова над алфавитом $\{a, b\}$.

Любопытно взглянуть на кратчайшее циклическое слово, содержащее все 3-х буквенные слова над алфавитом $\{a, b, c\}$.

8. Найдите количество путей длины $1000\,000$ по модулю $10^9 + 7$ от левой до правой отмеченной вершины в графе Петерсена.