**54.1.** Ассоциативна ли операция $*$ на множестве $M$, если

а) $M = \mathbb{N}$, $x * y = x^y$; б) $M = \mathbb{N}$, $x * y = \text{НОД}(x, y)$;

в) $M = \mathbb{N}$, $x * y = 2xy$; г) $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x - y$;

д) $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x^2 + y^2$; е) $M = \mathbb{R}$, $x * y = \sin x \cdot \sin y$;

ж) $M = \mathbb{R}^*$, $x * y = x \cdot y^{x/|x|}$?

**54.2.** Пусть $S$ — полугруппа матриц $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$, с операцией умножения. Найти в этой полугруппе левые и правые нейтральные элементы, элементы, обратимые слева или справа относительно этих нейтральных.

**54.3.** На множестве $M$ определена операция $\circ$ по правилу $x \circ y = x$. Доказать, что $(M, \circ)$ — полугруппа. Что можно сказать о нейтральных и обратимых элементах этой полугруппы? В каких случаях она является группой?

**54.4.** На множестве $M^2$, где $M$ — некоторое множество, определена операция $\circ$ по правилу $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$. Является ли $M^2$ полугруппой относительно этой операции? Существует ли в $M^2$ нейтральный элемент?

**54.5.** Сколько элементов содержит полугруппа, состоящая из всех степеней матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Является ли эта полугруппа группой?

**54.6.** Доказать, что полугруппы $(2^M, \cup)$ и $(2^M, \cap)$ изоморфны.

**54.7.** Сколько существует неизоморфных между собой полугрупп порядка 2?

# 1 Л1

**Примеры.** Множество матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{N}$ (натуральные числа), рассматриваемое с операцией умножения, является полугруппой (поскольку умножение ассоциативно).

Множество матриц $n \times n$, элементы которых суть целые неотрицательные числа, является моноидом. Единичным элементом является единичная матрица.

Множество целочисленных матриц $n \times n$ является моноидом.

Множество $\mathrm{Map}(X, X)$ отображений $X$ в себя с операцией взятия композиции отображений является моноидом. Единицей является тождественное отображение $\mathrm{id} = \mathrm{id}_X$.

Подмоноидами в $\mathrm{Map}(X, X)$ являются подмножества инъективных и сюръективных отображений.

Подмножества неинъективных и несюръективных отображений в $\mathrm{Map}(X, X)$ являются полугруппами, но не моноидами (нет единицы).

$\square$