Оглавление

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
(3 семестр)
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Основные сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уравнение вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

или, в разрешенном относительно старшей производной виде,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \qquad (2)$$

называется *дифференциальным уравнением n-го порядка. Решением* уравнения (1) (или (2)) называется функция, определенная и n раз непрерывно дифференцируемая на некотором интервале $x \in (a, b)$, при подстановке которой в уравнение получается тождество, выполненное при всех $x \in (a, b)$. В общем случае уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, которые описываются *общим решением* $y = y(x, C_1, C_2, \dots C_n)$ или *общим интегралом* $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots C_n) = 0$ (общее решение в неявном виде), где $C_1, C_2, \dots C_n$ — произвольные константы. Дополняя уравнение (2) начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, где $x_0, y_0, \dots, y_{n-1}$ — заданные числа, приходим к *задаче Коши.*

Дифференциальные уравнения первого порядка.

1. *Уравнения с разделяющимися переменными* — это уравнения, имеющие вид (или приводящиеся к виду)

$$y' = f(x)g(y). \qquad (3)$$

Заменив производную отношением дифференциалов dy/dx, умножив обе части на dx и разделив на $g(y)$, приходим к уравнению с разделенными переменными $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, беря интегралы от обеих частей которого, получаем общий интеграл уравнения (3).

2. *Уравнения с однородной правой частью, или однородные уравнения* — это уравнения вида (или приводящиеся к виду)

$$y' = f(y/x). \tag{4}$$

Заменой $y = ux$, где u — новая неизвестная функция, уравнение (4) сводится к уравнению с разделяющимися переменными $u'x + u = f(u)$.

3. *Линейные уравнения и уравнения Бернулли.* Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}, \tag{5}$$

где α — некоторая действительная константа. При $\alpha = 0$ уравнение Бернулли превращается в линейное уравнение

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{6}$$

Уравнение (5) (и, соответственно, (6)) может быть решено методом вариации произвольной постоянной или методом Бернулли. По сути, оба метода реализуют один и тот же способ решения, сводящий решение уравнения (5) (или(6)) к решению двух уравнений с разделяющимися переменными. Приведем описание метода Бернулли.

Будем искать решение уравнения (5) в виде произведения двух функций $y = uv$. Подстановка этого произведения в (5) приводит к уравнению $u'v + uv' + a(x)uv = b(x)u^{\alpha}v^{\alpha}$, или

$$u'v + u(v' + a(x)v) = b(x)u^{\alpha}v^{\alpha}. \tag{7}$$

Находим функцию $v(x) \neq 0$ такую, что $(v' + a(x)v) = 0$ (последнее уравнение, называемое *линейным однородным уравнением*, допускает, как легко видеть, разделение переменных). Подставляя найденную функцию в (7), приходим к уравнению с разделяющимися переменными относительно $u:\ u'v(x) = b(x)v^\alpha(x)u^\alpha$.

4. *Уравнения в полных дифференциалах* — это уравнения вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{8}$$

где функции P и Q удовлетворяют условию $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Как известно, выполнение указанного условия обеспечивает существование функции $U(x, y)$ такой, что $\partial U/\partial x = P$ и $\partial U/\partial y = Q$. Заменяя P и Q в уравнении (8) на $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$, получаем: $dU(x, y) = 0$, откуда $U(x, y) = C$. Последнее равенство представляет собой общий интеграл уравнения (8).

Дифференциальные уравнения высших порядков.

1. *Линейное уравнение n-го порядка* — это уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{9}$$

где коэффициенты $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ и правая часть $b(x)$ представляют собой определенные на некотором интервале $x \in (a, b)$ непрерывные функции. Если $b(x) = 0\ \forall x$, уравнение (9) называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным.* Любое решение уравнения (9) определено на всем интервале (a, b).

а) *Однородные линейные уравнения:*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$, где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные константы, а $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений (ФСР) уравнения (10), т.е. совокупность любых n линейно независимых его решений.

Для уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{11}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n = \mathrm{const}$, ФСР может быть найдена с помощью *характеристического уравнения*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{12}$$

Именно, пусть λ_0 — действительный корень (12) кратности k. Тогда уравнение (11) имеет k линейно независимых решений вида $y_1 = e^{\lambda_0 x}, y_2 = xe^{\lambda_0 x}, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$. Далее, если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — пара комплексно сопряженных корней кратности k (отметим, что мы рассматриваем только уравнения с действительными коэффициентами), то уравнение (11) имеет $2k$ линейно независимых решений $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots$, $y_{2k-1} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$. Отыскав все корни характеристического уравнения (12) (напомним, что их ровно n с учетом кратности) и построив по ним решения дифференциального уравнения (12) в соответствии с описанными правилами, получим ФСР.

б) *Неоднородные линейные уравнения.* Общее решение неоднородного линейного уравнения имеет вид $y(x) = y_0(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$, где $y_0(x)$ — некоторое частное решение уравнения (9) (произвольное), а $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (10).

Для нахождения частного решения $y_0(x)$ уравнения (9) используются различные методы, среди которых отметим метод вариации произвольных постоянных, метод подбора решения в случае, когда $b(x)$ является квазимногочленом, и использование преобразования Лапласа (операторный метод). Достаточно громоздкое описание перечисленных методов выходит за рамки настоящего краткого пособия. Мы отсылаем читателя, например, к задачнику ....., где принят, как и у нас, конспективный способ изложения.

2. *Уравнения, допускающие понижение порядка.*

а) Уравнение, не содержащее y, т.е. уравнение вида $F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, сводится к уравнению $(n-1)$-го порядка путем замены $y' = z(x)$ (соответственно, $y'' = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-1)}$).

б) Уравнение, не содержащее x, т.е. уравнение вида $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, сводится к уравнению $(n-1)$-го порядка путем замены $y' = p(y)$ (соответственно, $y'' = \dfrac{d}{dx}p(y) = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$, $y''' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dp}{dy}p\right) = p^2\dfrac{d^2p}{dy^2} + p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2$ и т.д.) В получаемом уравнении роль неизвестной функции играет p, а независимой переменной — y.

в) Уравнение, однородное относительно функции y и ее производных — это уравнение вида $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где функция F удовлетворяет для некоторого k условию $F(x, tz_0, tz_1, \ldots, tz_n) = t^k F(x, z_0, z_1, \ldots, z_n)$ $\forall t > 0$, $x, z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$. Заменой $y' = yz$ (соответственно, $y'' = y(z^2 + z')$ $y''' = y(z^3 + 3zz' + z'')$ и т.д.) сводится к уравнению $(n-1)$-го порядка относительно новой неизвестной функции z.

г) Уравнение, приводящееся к виду $\frac{d}{dx}(G(x, y, y', \ldots, y^{(n)})) = 0$. Интегрированием по x сводится к уравнению $(n-1)$-го порядка $G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = C$.

Решение типовых задач

Задача 1

Найти общее решение линейного уравнения $y' + 4y = e^{-4x} + \sin x$ двумя способами:

1) методом вариации произвольной постоянной или Бернулли;

2) с помощью характеристического уравнения и подбора частного решения по правой части.

Найти также частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = -1$.

Решение

1) Общее решение будем искать методом Бернулли в виде $y(x) = u(x)v(x)$. После подстановки в уравнение получим равенство

$$u'v + uv' + 4uv = e^{-4x} + \sin x,$$

или

$$u'v + u(v' + 4v) = e^{-4x} + \sin x.$$

Функцию v определим из условия $v' + 4v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его решение:

$$\int \frac{dv}{v} = \int -4\,dx, \quad \ln|v| = -4x + \ln C, \quad v = Ce^{-4x}.$$

В качестве $v(x)$ возьмем функцию $v(x) = e^{-4x}$. Тогда для нахождения $u(x)$ нужно решить уравнение

$$e^{-4x}u' = e^{-4x} + \sin x,$$

или

$$u' = 1 + e^{4x}\sin x.$$

Таким образом,

$$u(x) = \int (1 + e^{4x} \sin x)\, dx = x - \frac{1}{17} e^{4x} (\cos x - 4 \sin x) + C,$$

окончательно имеем

$$y(x) = u(x)v(x) = Ce^{-4x} + xe^{-4x} - \frac{1}{17}(\cos x - 4 \sin x).$$

Интеграл $\int e^{4x} \sin x\, dx$ вычислен путем двукратного интегрирования по частям.

2) Пользуясь линейностью уравнения, его общее решение $y_{\text{он}}(x)$ будем искать в виде $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_1(x) + y_2(x)$, где

$y_{\text{оо}}(x)$ – общее решение однородного уравнения $y' + 4y = 0$,
$y_1(x)$ – частное решение неоднородного уравнения $y' + 4y = e^{-4x}$,
$y_2(x)$ – частное решение неоднородного уравнения $y' + 4y = \sin x$.

Общее решение однородного уравнения найдем, вычислив корни характеристического многочлена $\lambda + 4 = 0$, $y_{\text{оо}} = Ce^{-4x}$.

Частные решения y_1, y_2 будем искать методом подбора при помощи неопределенных коэффициентов исходя из вида правой части.

Так как $\lambda = -4$ – корень характеристического многочлена, то $y_1 = Axe^{-4x}$. Подставляя y_1 в уравнение, получим

$$Ae^{-4x} - 4Axe^{-4x} + 4Axe^{-4x} = e^{-4x},$$

откуда

$$A = 1,$$

и следовательно

$$y_1 = xe^{-4x}.$$

Решение y_2 имеет вид $y_2 = a\sin x + b\cos x$, подставляя в уравнение будем иметь

$$a\cos x - b\sin x + 4a\sin x + 4b\cos x = \sin x,$$

откуда после приведения подобных слагаемых получим

$$(a+4b)\cos x + (4a-b-1)\sin x = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, получаем систему уравнений для нахождения a и b:

$$\begin{cases} a+4b=0 \\ 4a-b=1, \end{cases}$$

решением которой являются числа

$$a = \frac{4}{17}, \quad b = -\frac{1}{17}.$$

Таким образом,

$$y_2 = \frac{4}{17}\sin x - \frac{1}{17}\cos x.$$

Окончательно имеем

$$y_{\text{он}}(x) = Ce^{-4x} + xe^{-4x} + \frac{4}{17}\sin x - \frac{1}{17}\cos x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = -1$:

$$-1 = y(0) = C - \frac{1}{17}, \quad \text{откуда } C = -1 + \frac{1}{17} = -\frac{16}{17}.$$

Окончательно имеем

$$y_{\text{чн}}(x) = -\frac{16}{17}e^{-4x} + xe^{-4x} + \frac{4}{17}\sin x - \frac{1}{17}\cos x.$$

Задача 2

Найти общее решение уравнения второго порядка $yy'' - (y')^2 = 2y^3y'$.

Решение

Так как в уравнение не входит независимая переменная x, можно сделать замену $y'(x) = p(y)$. Так как при этом

$$y''(x) = p'(y)p(y) \quad \left(p'(y) = \frac{dp}{dy}\right),$$

получим уравнение для $p(y)$:

$$yp'p - p^2 = 2y^3p.$$

Функция $p = 0$ является решением этого уравнения, а значит функции $y = \mathrm{const}$ входят в общее решение.

Разделим полученное уравнение на $p \neq 0$. Получим линейное неоднородное уравнение первого порядка:

$$yp' - p = 2y^3,$$

решив которое методом Бернулли, будем иметь

$$p = y^3 + C_1y \quad \text{или} \quad y' = y^3 + C_1y.$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и его решение выражается из равенства

$$\int \frac{dy}{y^3 + C_1y} = \int dx.$$

Значение интеграла в левой части равенства зависит от значения произвольной постоянной C_1. Рассмотрим два случая:

1) $C_1 = 0$, тогда

$$\int \frac{dy}{y^3 + C_1y} = \int \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{2y^2} + C.$$

Окончательно получаем

$$-\frac{1}{2y^2} = x + C_2.$$

2) $C_1 \neq 0$, тогда

$$\int \frac{dy}{y^3 + C_1 y} = \frac{1}{C_1} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2 + C_1} \right) dy =$$
$$= \frac{1}{C_1} \ln|y| - \frac{1}{2C_1} \ln|y^2 + C_1| + C.$$

Окончательно получаем

$$\frac{1}{C_1} \ln|y| - \frac{1}{2C_1} \ln|y^2 + C_1| = x + C_2.$$

Задача 3

Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = \frac{\mathrm{tg}^2\, 3x}{e^{2x}}$, используя характеристическое уравнение и метод вариации произвольных постоянных.

Решение

Общее решение $y_{\text{оо}}(x)$ однородного уравнения $y''+4y'+13y = 0$ получим, найдя корни характеристического многочлена

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0, \quad \lambda_{12} = -2 \pm 3i.$$
$$y_{\text{оо}}(x) = C_1 e^{-2x} \sin 3x + C_2 e^{-2x} \cos 3x, \quad C_1 = \text{const}, \quad C_2 = \text{const}\,.$$

Решение $y_{\text{он}}(x)$ неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{он}}(x) = C_1(x) e^{-2x} \sin 3x + C_2(x) e^{-2x} \cos 3x.$$

Составим линейную систему для нахождения функций $C_1'(x)$, $C_2'(x)$

$$\begin{cases} C_1' e^{-2x} \sin 3x + C_2' e^{-2x} \cos 3x = 0 \\ C_1' e^{-2x} (3\cos 3x - 2\sin 3x) - C_2' e^{-2x} (3\sin 3x + 2\cos 3x) = \dfrac{\mathrm{tg}^2\, 3x}{e^{2x}}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1' \sin 3x + C_2' \cos 3x = 0 \\ 3C_1' \cos 3x - 3C_2' \sin 3x = \operatorname{tg}^2 3x. \end{cases}$$

Решением этой системы являются функции

$$C_1'(x) = \frac{\sin^2 3x}{3\cos 3x}, \quad C_2'(x) = -\frac{\sin^3 3x}{3\cos^2 3x}.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(x) = \frac{1}{3}\int \frac{\sin^2 3x}{\cos 3x}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}\,d\sin 3x =$$
$$= \frac{1}{9}\int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt = -\frac{t}{9} + \frac{1}{9}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{t}{9} + \frac{1}{18}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \widetilde{C}_1 =$$
$$= -\frac{\sin 3x}{9} + \frac{1}{18}\ln\left|\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}\right| + \widetilde{C}_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{3}\int \frac{\sin^3 3x}{\cos^2 3x}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}\,d\cos 3x =$$
$$= \frac{1}{9}\int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{9}\int dt = -\frac{1}{9t} - \frac{t}{9} + \widetilde{C}_2 =$$
$$= -\frac{1}{9\cos 3x} - \frac{\cos 3x}{9} + \widetilde{C}_2.$$

Окончательно получим

$$y_{\text{он}}(x) = C_1(x)e^{-2x}\sin 3x + C_2(x)e^{-2x}\cos 3x =$$
$$= \widetilde{C}_1 e^{-2x}\sin 3x + \widetilde{C}_2 e^{-2x}\cos 3x -$$
$$- \frac{2}{9}e^{-2x} + \frac{1}{18}e^{-2x}\sin 3x \ln\left|\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}\right|.$$

Задача 4

1) Проверить, что $y_1(x) = x^3$ есть частное решение однородного

уравнения $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$. Зная это, найти общее решение этого уравнения.
2) Найти общее решение неоднородного уравнения $x^2y'' - 6xy' + 12y = 6x^5$, предположив, что одно из частных решений этого уравнения является многочленом.

Решение

1)Обозначим через $L(y) = x^2y'' - 6xy' + 12y$. Так как $y_1'(x) = 3x^2$, $y_1''(x) = 6x$, то

$$L(y_1) = 6x^3 - 18x^3 + 12x^3 = 0$$

и следовательно функция $y_1(x) = x^3$ является частным решением однородного уравнения $L(y) = 0$.

Найдем второе частное решение однородного уравнения $y_2(x)$. Для этого заметим, что

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W}{y_1^2},$$

где $W = y_1y_2' - y_1'y_2$– определитель Вронского системы функций y_1, y_2. Применяя формулу Лиувилля-Остроградского и учитывая, что $y_1(x) = x^3$, получим

$$\left(\frac{y_2}{x^3}\right)' = \frac{W}{x^6} = \frac{e^{\int \frac{6x}{x^2}\,dx}}{x^6} = 1$$

и следовательно

$$y_2(x) = x^4.$$

Так как функции $y_1(x) = x^3$ и $y_2(x) = x^4$ линейно независимы, то они образуют фундаментальную систему решений для линейного однородного уравнения второго порядка, а значит

$$y_{oo} = C_1x^3 + C_2x^4.$$

2) Будем искать частное решение неоднородного уравнения $y_{\text{чн}}(x)$ в виде многочлена 5-ой степени, поскольку при подстановке в левую часть уравнения многочлена степени $k \neq 3, 4$ получаем многочлен той же степени, а в правой части стоит многочлен степени 5:

$$y_{\text{чн}}(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F.$$

Подставив в уравнение, получим

$$\begin{aligned} x^2(20Ax^3 + 12Bx^2 + 6Cx + 2D)- \\ - 6x(5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E)+ \\ + 12(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) = 6x^5, \end{aligned}$$

Приведем подобные слагаемые

$$(2A - 6)x^5 + 2Dx^2 + 6Ex + 12F \equiv 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях x, получим $A = 3$, $D = E = F = 0$, B и C – произвольные. Таким образом, в качестве частного решение $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения $L(y) = 6x^5$ можно взять функцию

$$y_{\text{чн}}(x) = 3x^5,$$

а его общее решение $y_{\text{он}}(x)$ равно

$$y_{\text{он}}(x) = C_1x^3 + C_2x^4 + 3x^5.$$

Задача 5

Решить задачу Коши

$$y'' + 4y' = e^{4x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

а) с помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши

$$z'' + 4z' = 1,\ z(0) = 0,\ z'(0) = 0;$$

б) методом неопределенных коэффициентов (подбором частного решения неоднородного уравнения по правой части).

Решение

а) По формуле Дюамеля имеем

$$y(x) = e^{4x} * z'(x),$$

где $z(x)$– решение вспомогательной задачи

$$z'' + 4z' = 1,\ z(0) = 0,\ z'(0) = 0.$$

Функцию $z'(x)$ будем искать операторным методом. Для этого обозначим $z(x) \doteqdot Z(p)$. Так как

$$z(0) = 0,\ z'(0) = 0,\ \text{то}\ z'(x) \doteqdot pZ(p),\ z''(x) \doteqdot p^2 Z(p).$$

Функция $Z(p)$ удовлетворяет уравнению

$$p^2 Z + 4pZ = \frac{1}{p},$$

откуда

$$pZ = \frac{1}{p^2 + 4p} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+4}\right)$$

и следовательно, так как $z'(x) \doteqdot pZ(p)$,

$$z'(x) \doteqdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+4}\right).\ \text{Отсюда}\ z'(x) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4x}).$$

Окончательно получим

$$y(x) = e^{4x} * z'(x) = e^{4x} * \left(\frac{1}{4} - \frac{e^{-4x}}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^x e^{4(x-\tau)}(1 - e^{-4\tau})\,d\tau =$$

$$= \frac{e^{4x}}{4}\int\limits_0^x (e^{-4\tau} - e^{-8\tau})\,d\tau =$$

$$= \frac{e^{4x}}{4}\left(\frac{e^{-8\tau}}{8} - \frac{e^{-4\tau}}{4}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=x} =$$

$$= \frac{e^{4x}}{4}\left(\frac{e^{-8x}}{8} - \frac{e^{-4x}}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{e^{4x}}{32} + \frac{e^{-4x}}{32} - \frac{1}{16}.$$

б) Найдем сначала $y_{\text{он}}(x)$– общее решение неоднородного уравнения. Оно равно

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Общее решение однородного уравнения $y_{\text{оо}}(x)$ найдем, составив характеристический многочлен и вычислив его корни:

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0,\ \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 0,\ y_{\text{оо}} = C_1e^{-4x} + C_2.$$

Частное решение неоднородного уравнения $y_{\text{чн}}(x)$ найдем методом подбора, при помощи неопределенных коэффициентов, исходя из вида правой части. Так как $\gamma = 4$ – не корень характеристического многочлена, то $y_{\text{чн}}(x)$ может быть найдено в виде

$$y_{\text{чн}}(x) = ae^{4x}.$$

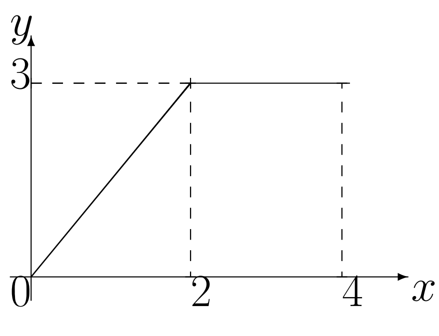
Подставим эту функцию в неоднородное уравнение, получим

$$16ae^{4x} + 16ae^{4x} = e^{4x}.$$

Отсюда
$$a = \frac{1}{32},\ \text{а}\ y_{\text{чн}}(x) = \frac{e^{4x}}{32}.$$
Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид
$$y_{\text{он}}(x) = \frac{e^{4x}}{32} + C_1 e^{-4x} + C_2.$$
Так как
$$y'(x) = \frac{e^{4x}}{8} - 4C_1 e^{-4x},$$
то для нахождения решения задачи Коши с начальными условиями $y(0) = y'(0) = 0$ получим систему уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\dfrac{1}{32} \\ 4C_1 = \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$
Отсюда
$$C_1 = \frac{1}{32}, \quad C_2 = -\frac{1}{16},$$
и значит
$$y(x) = \frac{e^{4x}}{32} + \frac{e^{-4x}}{32} - \frac{1}{16}.$$

Задача 6

Найти изображение периодического оригинала с периодом $T = 4$. На рисунке указан вид его графика на одном периоде.



Решение

По свойству преобразования Лапласа изображение $F(p)$ периодического оригинала $f(t)$ вычисляется по формуле

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int\limits_0^T e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Для функции $f(t)$, изображенной на рисунке, будем иметь

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-4p}} \left(\int\limits_0^2 \frac{3}{2} t e^{-pt}\, dt + \int\limits_2^4 3e^{-pt}\, dt \right) = \frac{1}{1 - e^{-4p}} \left(I_1 + I_2 \right).$$

Вычислим интегралы I_1 и I_2.

$$I_1 = \int\limits_0^2 \frac{3}{2} t e^{-pt}\, dt = -\frac{3}{2p} t e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=2} + \frac{3}{2p} \int\limits_0^2 e^{-pt}\, dt =$$

$$= -\frac{3}{p} e^{-2p} - \frac{3}{2p^2} e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t=2} =$$

$$= -\frac{3}{p} e^{-2p} + \frac{3}{2p^2} (1 - e^{-2p}),$$

$$I_2 = 3 \int\limits_2^4 e^{-pt}\, dt = -\frac{3}{p} e^{-pt} \Big|_{t=2}^{t=4} = -\frac{3}{p} e^{-4p} + \frac{3}{p} e^{-2p}.$$

Окончательно получим

$$F(p) = \frac{3}{2p^2(1 + e^{-2p})} - \frac{3e^{-4p}}{p(1 - e^{-4p})}.$$

Задача 7

Операторным методом найти решение задачи Коши

$$y'' + 6y' = xe^{-3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Решение

Обозначим преобразование Лапласа функции $y(x)$ через $Y(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала будем иметь

$$y''(x) \doteqdot p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - p + 1,$$
$$y'(x) \doteqdot pY - y(0) = pY - 1,$$

а по теореме о дифференцировании изображения

$$xe^{-3x} \doteqdot \frac{1}{(p+3)^2}.$$

Таким образом, функция $Y(p)$ находится из уравнения

$$p^2Y - p + 1 + 6pY - 6 = \frac{1}{(p+3)^2}$$

и равна

$$Y(p) = \frac{p+5}{p^2+6p} + \frac{1}{(p^2+6p)(p+3)^2}.$$

Разлагая полученные дроби в сумму простейших, получим

$$Y(p) = \frac{23}{27}\frac{1}{p} + \frac{4}{27}\frac{1}{p+6} - \frac{1}{9}\frac{1}{(p+3)^2},$$

откуда

$$y(x) = \frac{23}{27} + \frac{4}{27}e^{-6x} - \frac{1}{9}xe^{-3x}.$$

Задача 8

Используя теорему сравнения Штурма, оценить сверху и снизу число нулей решений уравнения $y'' + 2\sin(2x)y' + 2xy = 0$ на отрезке $[6, 17]$.

Решение

Заменой

$$y = ze^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx}$$

уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

приводится к виду

$$z'' + Q(x)z = 0,$$

где

$$Q(x) = -\frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p' + q.$$

Таким образом, уравнение $y'' + 2\sin(2x)y' + 2xy = 0$ после соответствующей замены приводится к виду

$$z'' + (2x - \sin^2 2x - 2\cos 2x)z = 0.$$

Заметим, что так как

$$e^{-\frac{1}{2}\int p(x)\,dx} \neq 0,$$

то нули функций $y(x)$ и $z(x)$ совпадают.

Функция $2x - \sin^2 2x - 2\cos 2x$ оценивается на отрезке $[6, 17]$

$$9 \leqslant 2x - \sin^2 2x - 2\cos 2x \leqslant 36.$$

Таким образом, количество нулей n решений уравнения $y'' + 2\sin(2x)y' + 2xy = 0$ на отрезке $[6, 17]$ оценивается сверху и снизу через количество нулей решений уравнений

$$y'' + 9y = 0 \quad \text{и} \quad y'' + 36y = 0$$

на отрезке $[6, 17]$ соответственно. Следовательно

$$10 \leqslant n \leqslant 22.$$

Действительно, общее решение $y_1(x)$ уравнения $y'' + 9y = 0$ выражается формулой

$$y_1(x) = C_1 \sin(3x + \varphi_1),$$

а общее решение $y_2(x)$ уравнения $y'' + 36y = 0$ формулой

$$y_2(x) = C_2 \sin(6x + \varphi_2).$$

Так как расстояние между двумя соседними нулями у функции $y_1(x)$ равно $\frac{\pi}{3}$, а у функции $y_2(x)$ – $\frac{\pi}{6}$, то у функция $y_1(x)$ на отрезке $[6, 17]$ имеет либо 10 либо 11 нулей, а функция $y_2(x)$ – либо 21 либо 22. Отсюда следует полученная оценка.

Практические задания

Задача 1. Найти общее решение линейного уравнения 1-го порядка двумя способами:

1) методом вариации произвольной постоянной или Бернулли;

2) с помощью характеристического уравнения и подбора частного решения по правой части.

Найти также частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = y_0$.

№	Уравнение	y_0	№	Уравнение	y_0
1	$y' - 2y = x^2 + x$	-1	16	$y' - 6y = xe^{-2x} + e^x$	-2
2	$y' + y = e^{-x} + 2x$	1	17	$y' + 4y = x^2 + 3x$	3
3	$y' - 3y = \sin x + e^x$	-1	18	$y' - 3y = e^{3x} - x$	-3
4	$y' - y = xe^{-x} + e^{2x}$	2	19	$y' - 4y = e^{4x} + \sin x$	-1
5	$y' + 3y = x^2 - 2x$	-2	20	$y' + 6y = x^2 + 1$	2
6	$y' + 3y = e^{-2x} + \sin x$	-3	21	$y' + 5y = e^{-5x} + \cos x$	1
7	$y' + 2y = e^{-2x} - xe^x$	3	22	$y' + y = e^{-x} - x$	4
8	$y' - y = e^{-x} - xe^{-2x}$	1	23	$y' + 6y = e^{2x} + \cos x$	-2
9	$y' - y = e^x + \cos x$	2	24	$y' - 6y = 3 - xe^{3x}$	-4

Продолжение задачи 1					
№	Уравнение	y_0	№	Уравнение	y_0
10	$y' + y = xe^{2x} - e^{-x}$	-1	25	$y' + 2y = 2x^2 + 2x$	2
11	$y' + 3y = x + e^{-3x}$	-2	26	$y' + y = xe^{x} + e^{2x}$	1
12	$y' - 4y = xe^{-3x} - e^{2x}$	3	27	$y' - y = xe^{2x} - e^{x}$	1
13	$y' + 4y = e^{-4x} + xe^{x}$	2	28	$y' - 4y = e^{4x} + xe^{x}$	2
14	$y' + 5y = e^{4x} + x$	-3	29	$y' + 6y = xe^{-2x} + e^{x}$	-2
15	$y' - 5y = \sin 2x - e^{-x}$	1	30	$y' + 4y = e^{-4x} + \sin x$	-1

Задача 2. Найти общее решение уравнения второго порядка.

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$yy'' = y'(y' + 4)$	16	$yy'' - (y')^2 = y^2 y'$
2	$yy'' + (y')^2 = \ln x$	17	$yy'' + 4y' = (y')^2$
3	$xy^2 y'' = y'(1 - y^2)$	18	$yy'' + yy' \operatorname{tg} x + 2(y')^2 = 0$
4	$xy'' - y' = x^2 e^{y} y'$	19	$1 + (y')^2 = 2yy''$

Продолжение задачи 2			
№	Уравнение	№	Уравнение
5	$y''\sin y=(y')^2$	20	$yy''-2(y')^2=4y^2(y')^3$
6	$yy''=(y')^2+2$	21	$x^2yy''=(xy'+y)^2$
7	$y''(e^x+1)+y'=1$	22	$xy''+x(y')^2+y'=0$
8	$yy''=2(y')^2-(y')^3$	23	$xy''\ln x=y'$
9	$2yy''=4y^2+(y')^2$	24	$xyy''+x(y')^2+yy'=0$
10	$x^2y''+xy'=e^{xy'}$	25	$yy''=y'(y'+1)$
11	$y''=y'/x+4x^2+(y')^2$	26	$xy''-2y'=x^3e^yy'$
12	$yy''+3y=(y')^2$	27	$y''(e^x+1)-y'=1$
13	$xyy''-(x+1)yy'=x(y')^2$	28	$x^2y''+xy'=e^{-xy'}$
14	$yy''-(y')^2+y^2\sin x=0$	29	$xyy''+x(y')^2=(x+2)yy'$
15	$5y''y(y')^3=(y')^5+4$	30	$yy''-(y')^2=2y^3y'$

Задача 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

используя характеристическое уравнение и метод вариации произвольных постоянных.

№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
1	0	-1	$\dfrac{e^x}{e^x - 1}$	16	0	-1	$\dfrac{1}{e^x + 1}$
2	-2	1	$\dfrac{e^x}{\sqrt{x}} \ln x$	17	-2	1	$e^x x \ln x$
3	-5	6	$\dfrac{e^{3x}}{e^x + 2}$	18	5	6	$\dfrac{1}{e^{3x} - e^{4x}}$
4	0	1	$\dfrac{1}{\sin 2x}$	19	0	4	$\dfrac{1}{\sin 4x}$
5	-1	0	$\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$	20	1	0	$\dfrac{1}{e^{2x}\sqrt{e^{2x} + 1}}$
6	-2	2	$\dfrac{e^x}{\sin^2 x}$	21	-2	5	$e^x \operatorname{tg} 2x$
7	0	-4	$\dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$	22	0	-4	$\dfrac{1}{e^{2x} - 1}$
8	2	1	$\dfrac{\ln(x + 1)}{e^x}$	23	2	1	$\dfrac{x \ln(1 - x)}{e^x}$
9	-7	12	$\dfrac{e^{4x}}{e^x - 3}$	24	7	12	$\dfrac{1}{e^{4x} + 2e^{5x}}$
10	0	9	$\dfrac{1}{\cos^3 3x}$	25	0	16	$\operatorname{tg}^2 4x$
11	-2	0	$e^{2x}\sqrt{1 - e^{4x}}$	26	2	0	$\sqrt{e^{4x} + 1}$

Продолжение задачи 3							
№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
12	2	2	$\dfrac{1}{e^x\cos^2 x}$	27	2	5	$\dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{e^x}$
13	0	-9	$\dfrac{e^{3x}}{2-e^{3x}}$	28	0	-9	$\dfrac{1}{2e^{3x}+1}$
14	-6	9	$e^{3x}\ln(x^2+1)$	29	6	9	$\dfrac{\ln(x^2-2)}{e^{3x}}$
15	-4	13	$\dfrac{e^{2x}}{\cos^2 3x}$	30	4	13	$\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{e^{2x}}$

Задача 4. $L(y) = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y$.
1) Проверить, что $y_1(x)$ есть частное решение однородного уравнения $L(y) = 0$. Зная это, найти общее решение уравнения $L(y) = 0$.
2) Найти общее решение неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ с заданной правой частью $f(x)$, предположив, что одно из частных решений уравнения $L(y) = f(x)$ является многочленом.

№	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$y_1(x)$	$f(x)$
1	x^2	$-4x$	6	x^2	$2x^4$
2	x^2	x	-1	x	$3x^2-1$
3	x^2+1	$-2x$	2	x	$2x^3+6x$
4	$x-1$	$-x$	1	x	x^3-3x

Продолжение задачи 4					
№	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$y_1(x)$	$f(x)$
5	x^2	$-x$	1	x	$4x^3-x^2$
6	x	2	x	$(\sin x)/x$	x^3
7	x	2	$-x$	e^x/x	x^3+2x
8	x^4	0	-1	$xe^{1/x}$	$2x^4-x^2$
9	x^4	$2x^3$	-1	$e^{1/x}$	$6x^4-x^2$
10	x^2	$-2x$	2	x	$3x^4-1$
11	x^2	$-x$	-3	x^3	x^2-1
12	x^2	0	-2	x^2	$2x^3-x$
13	x^2	x	-4	$1/x^2$	$5x^3+3x$
14	x^2	$4x$	2	$1/x$	$3x^2-2x$
15	x^4	0	1	$x\sin(1/x)$	$6x^5+x^3$
16	x^2	$-4x$	6	x^3	$2x^4+2x$
17	x^2	x	-1	$1/x$	$-3x^2-1$
18	x^2+1	$-2x$	2	x^2-1	$6x^4+12x^2$
19	$x-1$	$-x$	1	e^x	x^2-2x
20	x^2	$-x$	1	$x\ln x$	x^2+1

Продолжение задачи 4					
№	$a(x)$	$b(x)$	$c(x)$	$y_1(x)$	$f(x)$
21	x	2	x	$(\cos x)/x$	x^2+2
22	x	2	$-x$	e^{-x}/x	x^2-2
23	x^4	0	-1	$xe^{-1/x}$	$6x^5-x^3$
24	x^4	$2x^3$	-1	$e^{-1/x}$	$12x^5-x^3$
25	x^2	$-2x$	2	x^2	x^3
26	x^2	$-x$	-3	$1/x$	$3x^2+4x$
27	x^2	0	-2	$1/x$	$5x^4-x$
28	x^2	x	-4	x^2	$5x^3-4$
29	x^2	$4x$	2	$1/x^2$	x^2+2x
30	x^2	$-6x$	12	x^3	$6x^5$

Задача 5. Решить задачу Коши

$$y''+ay'+by=f(x),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$$

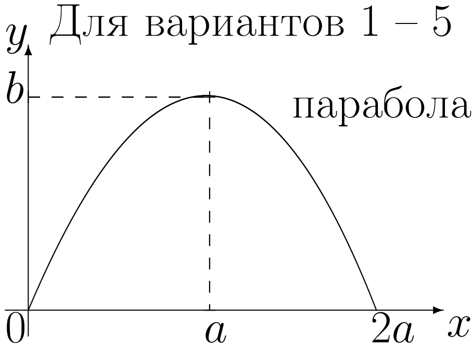
а) с помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши

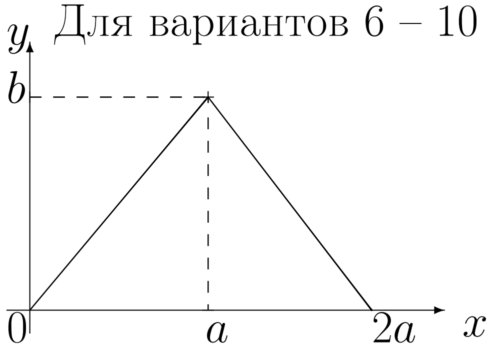
$$z''+az'+bz=1,\ z(0)=0,\ z'(0)=0;$$

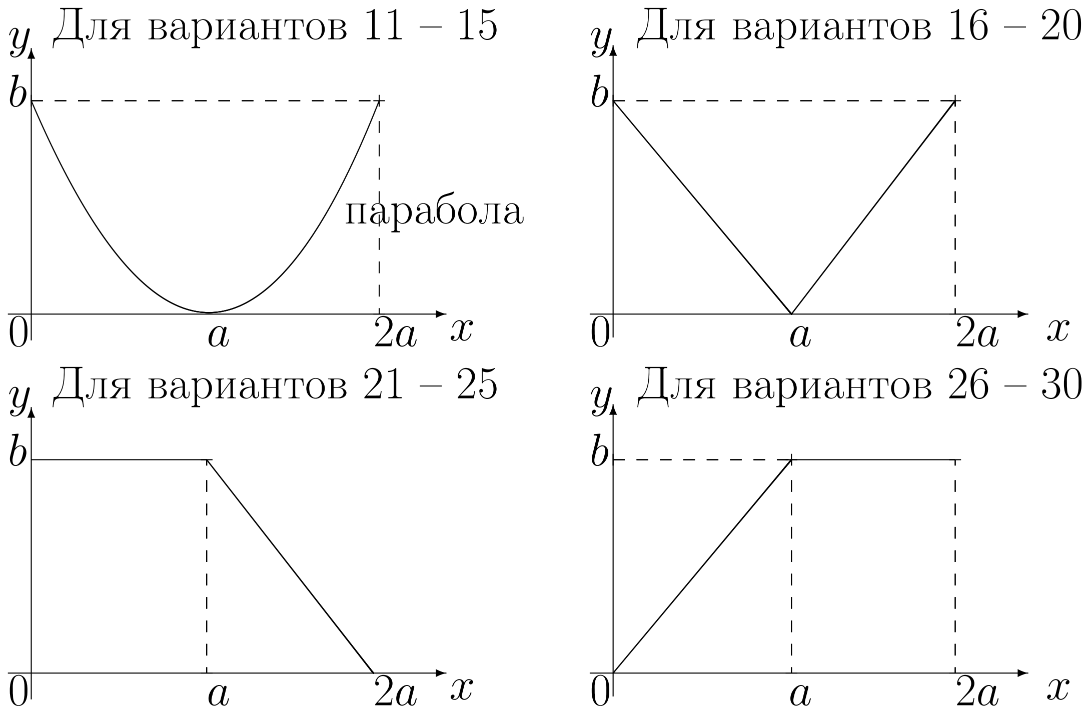
б) методом неопределенных коэффициентов (подбором частного решения неоднородного уравнения по правой части).

№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$	№	a	b	$f(x)$
1	-3	2	e^x	11	-1	-2	e^{-x}	21	-7	10	e^x
2	3	-4	x^2+1	12	0	-4	$\cos x$	22	1	-6	x^2+2x
3	3	2	e^{3x}	13	0	-1	x^2+x	23	0	-9	e^{3x}
4	0	-1	$\cos x$	14	1	0	x^2-1	24	1	-2	e^{2x}
5	3	0	xe^x	15	6	-7	e^{-4x}	25	-1	-2	x^2+1
6	0	-9	e^{-3x}	16	-2	1	e^x	26	-1	-30	e^{-x}
7	-1	0	e^{2x}	17	-2	-3	e^{2x}	27	0	1	$\sin x$
8	2	-3	$x+1$	18	-5	6	e^{-x}	28	0	-4	e^{2x}
9	0	-1	xe^x	19	-3	-4	e^{3x}	29	1	-2	$x+1$
10	3	-4	$\sin x$	20	0	-9	x^2	30	4	0	e^{4x}

Задача 6. Найти изображение периодического оригинала с периодом $T = 2a$. На рисунках указан вид его графика на одном периоде.







Выбор чисел a и b:

номера вариантов	a	b
$1, 6, 11, 16, 21, 26$	1	2
$2, 7, 12, 17, 22, 27$	1	1
$3, 8, 13, 18, 23, 28$	2	1
$4, 9, 14, 19, 24, 29$	2	2
$5, 10, 15, 20, 25, 30$	2	3

Задача 7. Операторным методом найти решение задачи Коши.

Для нечетных вариантов:

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = e^{\gamma x}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

Для четных вариантов:

$$y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 - \beta^2)y = xe^{\gamma x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

№	α	β	γ	№	α	β	γ	№	α	β	γ
1,16	1	2	2	6,21	-2	1	-1	11,26	-1	3	2
2,17	-2	2	-1	7,22	1	1	2	12,27	-3	1	3
3,18	2	3	-2	8,23	-3	2	2	13,28	-1	2	2
4,19	-1	1	-1	9,24	3	2	-3	14,29	2	1	1
5,20	3	1	-1	10,25	2	2	-1	15,30	3	3	-3

Задача 8. Используя теорему сравнения Штурма, оценить сверху и снизу число нулей решений уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ на отрезке $[a, b]$.

№	$p(x)$	$q(x)$	a	b	№	$p(x)$	$q(x)$	a	b
1	-1	$2x$	5	20	16	3^{-x}	3^x	4	6
2	$1/x$	x^2	5	9	17	$2x$	$3x^2$	5	10
3	$-\sin x$	$-x$	-20	-10	18	$-2x$	$(x-2)^2$	-12	-6
4	e^x	e^{2x}	3	4	19	-3	x	12	22
5	$2x$	$2x^2$	4	7	20	$3/x^2$	$3x^2$	4	7
6	$2x$	$(x-1)^2$	-15	-5	21	$-\operatorname{arctg} x$	$-2x$	-20	-8
7	2	x^2	5	8	22	x	2^{-x}	-10	-8
8	$-2/x$	$-x/2$	-30	-20	23	$-x$	$x^2/2$	6	12
9	$\cos^2 x$	$x+1$	10	25	24	$-4x$	$(2x-1)^2$	-16	-10

Продолжение задачи 8									
№	$p(x)$	$q(x)$	a	b	№	$p(x)$	$q(x)$	a	b
10	$-x$	2^x	6	8	25	-2	$2x$	5	13
11	$-x$	x^2	-10	-6	26	$2\sin x$	x	3	8
12	$4x$	$(2x+1)^2$	8	16	27	$2x$	$2x^2+1$	1	5
13	5	$-4x$	-15	-5	28	$2\cos^2 x$	x	3	8
14	$1/x^2$	$2x$	12	20	29	$2x$	$(x+1)^2$	2	8
15	$\sin 2x$	$-3x$	-20	-10	30	$2\sin 2x$	$2x$	6	17

Теоретические вопросы к экзамену по дифференциальным уравнениям

1. Дифференциальное уравнение первого порядка. Частное и общее решение, общий интеграл, интегральная кривая. Поле направлений.

2. Методы решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными и уравнений с однородной правой частью.

3. Методы решения линейных уравнений 1-го порядка и уравнений Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.

4. Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка методом последовательных приближений.

5. Глобальная теорема единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.

6. Непродолжаемые решения, их свойства. Теорема о существовании непродолжаемых решений.

7. Нормальная система дифференциальных уравнений 1-го порядка. Формулировка основных теорем о существовании и единственности решений.

8. Сведение дифференциального уравнения n-го порядка к нормальной системе уравнений 1-го порядка. Формулировка основных теорем о существовании и единственности решений уравнения n-го порядка. Общее решение и общий интеграл уравнения n-го порядка.

9. Дифференциальные уравнения высших порядков. Методы понижения порядка.

10. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, теорема о продолжении его решений.

11. Определитель Вронского, его свойства. Формула Лиувилля.

12. Теорема о множестве решений линейного однородного уравнения n-го порядка. Фундаментальная система решений и общее решение.

13. Линейное неоднородное уравнение n-го порядка. Структура общего решения. Принцип суперпозиции.

14. Метод вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного уравнения n-го порядка.

15. Комплексные функции действительного аргумента, действия с ними. Комплексная экспонента, ее свойства.

16. Действие линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами на функции вида $x^m e^{\lambda x}$.

17. Описание множеств комплексных и действительных решений линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

18. Теорема о существовании решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами, являющегося квазимногочленом (случаи комплексного и действительного квазимногочленов в правой части).

19. Оригинал, его показатель роста. Действия над оригиналами.

20. Преобразование Лапласа. Область определения изображения и его поведение при $p \to +\infty$. Свойства смещения и запаздывания.

21. Свойства преобразования Лапласа: дифференцирование оригинала и изображения. Теорема об изображении свертки.

22. Схема решения линейного дифференциального уравнения операторным методом. Интеграл Дюамеля и его использование.

23. Нули решений линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка, теорема о конечности их числа на конечных промежутках. Сведение трехчленного уравнения к двучленному.

24. Теорема Штурма.

25. Следствия из теоремы Штурма. Теорема Кнезера.

26. Краевые задачи для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. Корректные и некорректные краевые задачи. Теорема об альтернативе.

Вопросы к экзамену могут быть уточнены и дополнены лектором потока.

Список литературы

1. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 208 с. — Электронный ресурс: http://e.lanbook.com/book/59554

2. Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2011. — 344 с.

3. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: ЛИБРОКОМ, 2013. — 237 с.