

Домашнее задание

1. Докажите, что при всех натуральных n :

а) $5^n + 3 \div 4$, б) $15^n + 6 \div 7$, в) $29^n + 5^{n+1} \div 6$.

2. Найдите остаток от деления

а) $6^{93} \cdot 8^{90} + 50^{12} \cdot 90^{10}$ на 47, б) $(77 \cdot 59)^{21} + (92 \cdot 17)^{19}$ на 15.

3. Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей будем называть просто *кольцом*.

4. Порядком по сложению элемента a кольца A называется наименьшее число $k > 0$ такое, что $\underbrace{a + a + \dots + a}_k = 0$. Например, порядок по сложению

$2 \in \mathbb{Z}_6$ равен 3. Найдите порядки по сложению элементов: $18 \in \mathbb{Z}_{24}$, $252 \in \mathbb{Z}_{1960}$.

5. Элемент $a \neq 0$ называется делителем нуля, если найдется элемент $b \neq 0$ такой, что $ab = 0$. Например, элемент 2 является делителем нуля в \mathbb{Z}_6 , т.к. $2 \cdot 3 = 0$. Найдите делители нуля в \mathbb{Z}_{22} .

6. Определите количество делителей нуля в \mathbb{Z}_{70} .

7. Элемент a , не равный 0 и 1, называется идемпотентом, если $a^2 = a$. Найдите идемпотенты в кольцах \mathbb{Z}_{10} , \mathbb{Z}_{16} .

8. Элемент $a \neq 0$ называется нильпотентом, если при возведении в некоторую степень он станет равным нулю. Найдите нильпотенты в \mathbb{Z}_{12} , \mathbb{Z}_{126} .

9. Обратным элементом к a называется такой элемент a^{-1} , что $a \cdot a^{-1} = 1$. Например, в кольце \mathbb{Z}_9 обратным к элементу 5 является 2, то есть $5^{-1} = 2$. Найдите $4^{-1} \in \mathbb{Z}_7$, $25^{-1} \in \mathbb{Z}_{41}$.

10. Напишите программы для задач «Сочетания», «Обратный элемент», «Идемпотенты»: <https://drive.google.com/drive/folders/1w0GUP784IoLvB1MypEs3zS0tvxQfFUHT?usp=sharing>