МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 1

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ 5), \quad B = (-3,\ 2), \quad C = (9,\ -7), \quad D = (4,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ 0,\ -1), \quad B = (0,\ 2,\ -3), \quad C = (2,\ 4,\ -2), \quad D = (-2,\ 6,\ 2).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на плоскость ABC.

Задача 3. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (3,\ 4,\ 0), \quad L = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3}\right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P и через прямую L.

Задача 4. Даны прямые L_1 и L_2:

$$L_1 = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}\right\}, \quad L_2 = \{4x - y - z - 4 = 0,\ 2x - y - 1 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны.
2) Найти расстояние $d(L_1,\ L_2)$ между прямыми L_1 и L_2.

Задача 5. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \{x + z - 1 = 0,\ y - 2 = 0\}, \quad Q = \{y - z = 0\}.$$

1) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 6. Дана точка A и дано геометрическое место точек M:

$$A = (3,\ -5,\ 7), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB, \text{ конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oxy\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ -1,\ 1), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 1),$$
$$\Sigma = \left\{(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка S и дана сфера Σ:

$$S = (5,\ 0,\ 0), \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ_1, вершина которой находится в точке S, а образующие касаются сферы Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 2

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (7,\ -3), \quad B = (3,\ 9), \quad C = (-4,\ 8), \quad D = (-7,\ -1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ 1,\ 1), \quad B = (1,\ 3,\ 1), \quad C = (1,\ 1,\ 3), \quad D = (1,\ 2,\ 3).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на прямую AC (прямая L_1).

Задача 3. Даны точки P_1, P_2 и дана прямая L:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 5), \quad P_2 = (1,\ 2,\ 5), \quad L = \left\{\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+4}{0}\right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точки P_1 и P_2 и образующей угол 45° с прямой L.

Задача 4. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (-4,\ 3,\ 3), \quad L = \{x - 2y + z - 4 = 0,\ 2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точку P параллельно прямой L.

Задача 5. Даны прямые L_1 и L_2:

$$L_1 = \left\{\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}\right\}, \quad L_2 = \{x - 3z + 4 = 0,\ y - z - 2 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 пересекаются.
2) Найти точку P пересечения прямых L_1 и L_2.
3) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Задача 6. Дана точка A и дано геометрическое место точек M:

$$A = (-3,\ -5,\ 9), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB, \text{ конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oyz\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 1), \quad P_2 = (-1,\ -2,\ -2),$$

$$\Sigma = \{2(z+1) = 2x^2 + y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана сфера Σ:

$$\Sigma = \{(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ_1, вершина которой находится в начале координат O, а образующие касаются сферы Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 3

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ -2), \quad B = (7,\ 2), \quad C = (8,\ 9), \quad D = (-6,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (-1,\ 0,\ -4), \quad B = (1,\ 2,\ -3), \quad C = (1,\ 8,\ -6), \quad D = (-5,\ -3,\ 7).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно плоскости ABC.

Задача 3. Дана точка P и даны прямые L_1 и L_2:

$$P = (1,\ 1,\ 2), \quad L_1 = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P параллельно прямым L_1 и L_2.

Задача 4. Дана точка P и даны плоскости Q_1 и Q_2:

$$P = (0,\ 2,\ 1), \quad Q_1 = \{x - 2y = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L, которая проходит через точку P параллельно плоскости Q_1 и образует угол 60° с плоскостью Q_2.

Задача 5. Даны точки P_1, P_2, P_3 и дана прямая L:

$$P_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad P_2 = (1,\ 1,\ 2), \quad P_3 = (0,\ 1,\ 5),$$

$$L = \{x = 2t - 1,\ y = t + 2,\ z = -t + 1\}.$$

1) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точки P_1, P_2, P_3.
2) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.
3) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (2,\ 3,\ -5), \quad B = (2,\ -7,\ -5), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 - BP^2 = 13\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ 2,\ 0), \quad P_2 = (-1,\ 3,\ 0),$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка S и дан эллипсоид Σ:

$$S = (7,\ 0,\ -1), \quad \Sigma = \left\{ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1 \right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ_1, вершина которой находится в точке S, а образующие касаются эллипсоида Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 4

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (8,\ 3), \quad B = (-2,\ 8), \quad C = (-4,\ 7), \quad D = (7,\ -4).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ 2,\ 2), \quad B = (2,\ 2,\ 3), \quad C = (2,\ 3,\ 2), \quad D = (2,\ 2,\ 2).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно прямой AC (прямая L_1).

Задача 3. Даны точки P_1, P_2 и дана плоскость Q:

$$P_1 = (-1,\ -2,\ 0), \quad P_2 = (1,\ 1,\ 2), \quad Q = \{x + 2y + 2z - 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости Q_1, проходящей через точки P_1 и P_2 перпендикулярно плоскости Q.

Задача 4. Даны точки P_1, P_2 и дана плоскость Q:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 4), \quad P_2 = (2,\ 2,\ 0), \quad Q = \{x + y - z = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L, проходящей через точки P_1 и P_2.
2) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.
3) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 5. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (-4,\ 3,\ 0), \quad Q_1 = \{x - 2y + z = 0\}, \quad Q_2 = \{2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L, проходящей через точку P параллельно плоскостям Q_1 и Q_2.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (-1,\ 0,\ 0), \quad B = (1,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 4\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{12}{2 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 1),$$

$$\Sigma = \{9(x-1)^2 + 4y^2 - 36z^2 = 36\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дан вектор $\boldsymbol{a}$ и дана окружность Γ:

$$\boldsymbol{a} = (2,\ -3,\ 4), \quad \Gamma = \{x^2 + y^2 = 9,\ z = -1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ, образующие которой параллельны вектору $\boldsymbol{a}$, а направляющей служит окружность Γ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 5

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ -7), \quad B = (-7,\ 8), \quad C = (9,\ 8), \quad D = (9,\ -1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (5,\ 1,\ -2), \quad C = (2,\ -2,\ -2), \quad D = (2,\ 2,\ 8).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти уравнение прямой L_2, симметричной прямой AD (прямая L_1) относительно плоскости ABC.

Задача 3. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (-1,\ -1,\ 2), \quad Q_1 = \{x - 2y + z - 4 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - 2z + 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P перпендикулярно плоскостям Q_1 и Q_2.

Задача 4. Даны прямые L_1 и L_2:

$$L_1 = \{2x - y - 7 = 0,\ 2x - z + 5 = 0\}, \quad L_2 = \{3x - 2y + 8 = 0,\ 3x - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 скрещиваются.
2) Найти угол $\angle(L_1,\ L_2)$ между прямыми L_1 и L_2.

Задача 5. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \left\{\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}\right\}, \quad Q = \{2x + y - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямая L параллельна плоскости Q.
2) Найти расстояние $d(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 6. Пусть Σ — куб, центр которого находится в начале координат O, грани параллельны координатным плоскостям, а длина ребра равна 2. Дано геометрическое место точек M:

$$M = \{P \in \Omega \mid \text{сумма квадратов расстояний от точки } P$$
$$\text{до плоскостей граней куба } \Sigma \text{ равна } 8\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{3 - 4\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 2), \quad P_2 = (0,\ -1,\ 2),$$
$$\Sigma = \{x^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана плоскость Q и дана поверхность Σ:

$$Q = \{x + y + z = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 - y^2 = z\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой перпендикулярны плоскости Q, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 6

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (9,\ -5), \quad B = (-5,\ 2), \quad C = (-2,\ 6), \quad D = (0,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (-3,\ 2,\ 0), \quad B = (1,\ 1,\ 1), \quad C = (4,\ 4,\ 1), \quad D = (4,\ 1,\ 7).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию L_2 прямой AD (прямая L_1) на плоскость ABC.

Задача 3. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x-1}{6} = \frac{y-1/2}{5} = \frac{z-1}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2.

Задача 4. Даны плоскости Q_1, Q_2, Q_3:

$$Q_1 = \{3x - 4y = 0\}, \quad Q_2 = \{y = 0\}, \quad Q_3 = \{z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L, проходящей через начало координат O и образующей одинаковые углы с плоскостями Q_1, Q_2 и Q_3.

Задача 5. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (-1,\ 2,\ -3), \quad L = \{x - 2 = 0,\ y - z - 1 = 0\}.$$

1) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P перпендикулярно прямой L.
2) Найти точку P_1 пересечения прямой L и плоскости Q.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (3,\ 2,\ 1), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP = BP\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 2,\ 0), \quad P_2 = (0,\ 0,\ 2),$$

$$\Sigma = \{2(1 - z) = 2x^2 + y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана плоскость Q и дана сфера Σ:

$$Q = \{x + y - 2z - 5 = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой перпендикулярны плоскости Q и касаются сферы Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 7

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (7,\ 3), \quad B = (8,\ 1), \quad C = (5,\ -5), \quad D = (-1,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (-1,\ 1,\ -1), \quad B = (1,\ 3,\ 0), \quad C = (0,\ -1,\ 1), \quad D = (9,\ -3,\ -7).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на плоскость ABC.

Задача 3. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (1,\ 1,\ 1), \quad Q_1 = \{2x + 2y - z - 1 = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z + 3 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P и образующей угол 60° с плоскостями Q_1 и Q_2.

Задача 4. Даны прямые L_1, L_2 и дана плоскость Q:

$$L_1 = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}\right\}, \quad L_2 = \{3x + 2y + z - 6 = 0,\ 2x + y + z - 4 = 0\},$$

$$Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

1) Найти точку P_1 пересечения прямой L_1 и плоскости Q.
2) Найти точку P_2 пересечения прямой L_2 и плоскости Q.
3) Найти уравнение прямой L, проходящей через точки P_1 и P_2.

Задача 5. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (3,\ 4,\ 0), \quad L = \{2x + y - z + 4 = 0,\ x + 2y + z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точку P параллельно прямой L.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (0,\ 0,\ -4), \quad B = (0,\ 0,\ 4), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 10\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{144}{13 - 5\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (-1,\ 3,\ 4),$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4(y-1)^2 - z^2 = 0\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана прямая L и дана сфера Σ:

$$L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой параллельны прямой L и касаются сферы Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 8

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (8,\ 5), \quad B = (-6,\ 7), \quad C = (3,\ -2), \quad D = (5,\ -1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ 2,\ 3), \quad B = (1,\ 4,\ 3), \quad C = (1,\ 2,\ 5), \quad D = (1,\ 2,\ 3).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на прямую AC (прямая L_1).

Задача 3. Дана точка P:

$$P = (2,\ 3,\ -4).$$

Найти уравнение перпендикуляра L, опущенного из точки P на ось Oy.

Задача 4. Даны точки P_1, P_2 и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P_1 = (-1,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (3,\ 3,\ 3),$$

$$Q_1 = \{3x + y - z + 2 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 3y - z + 2 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L пересечения плоскостей Q_1 и Q_2.
2) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точки P_1 и P_2 параллельно прямой L.

Задача 5. Даны точки P_1, P_2 и дана прямая L:

$$P_1 = (-1,\ -1,\ -1), \quad P_2 = (0,\ -2,\ -2), \quad L = \{x - 2z + 1 = 0,\ y + 2z - 1 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точки P_1 и P_2.
2) Найти угол $\angle(L_1,\ L)$ между прямыми L_1 и L.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (0,\ -5,\ 0), \quad B = (0,\ 5,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 6\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{18}{4 - 5\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 4),$$

$$\Sigma = \{9x^2 + 4(y-1)^2 - 36z^2 = 36\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка A и дана прямая L:

$$A = (2,\ -1,\ 1), \quad L = \{x = 3t + 1,\ y = -2t - 2,\ z = t + 2\}.$$

Найти уравнение круговой цилиндрической поверхности Σ, проходящей через точку A, если осью этой поверхности является прямая L.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 9

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (5,\ -3), \quad B = (-1,\ 5), \quad C = (8,\ 5), \quad D = (8,\ 1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (0,\ -1,\ 2), \quad B = (1,\ 1,\ 4), \quad C = (3,\ -1,\ 5), \quad D = (2,\ 1,\ -4).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно плоскости ABC.

Задача 3. Дана плоскость Q:

$$Q = \{2x + y - \sqrt{5}\, z = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости Q_1, проходящей через ось Oz и образующей угол 60° с плоскостью Q.

Задача 4. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (1,\ 2,\ 8), \quad L = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \right\}.$$

Найти проекцию P_1 точки P на прямую L.

Задача 5. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (1,\ 2,\ 4), \quad Q_1 = \{2x - y + 3z - 6 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - z + 3 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L пересечения плоскостей Q_1 и Q_2.
2) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P и через прямую L.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (0,\ -2,\ 0), \quad B = (0,\ 2,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 5\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - 2\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ -4,\ 0), \quad P_2 = (3,\ -3,\ 2),$$

$$\Sigma = \{(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка S и дан эллипсоид Σ:

$$S = (1,\ 2,\ 3), \quad \Sigma = \{2x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ_1, вершина которой находится в точке S, а образующие касаются эллипсоида Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 10

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ -8), \quad B = (5,\ 3), \quad C = (-4,\ 6), \quad D = (-6,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (2,\ -1,\ -1), \quad B = (-1,\ -1,\ 2), \quad C = (-1,\ 2,\ -1), \quad D = (-1,\ -1,\ -1).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно прямой AC (прямая L_1).

Задача 3. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (2,\ 0,\ -3), \quad Q_1 = \{3x - y + 2z - 7 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 3y - 2z - 3 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L пересечения плоскостей Q_1 и Q_2.
2) Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точку P параллельно прямой L

Задача 4. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \{3x - y + 1 = 0,\ 3x + 2z - 2 = 0\}, \quad Q = \{2x + y + z - 4 = 0\}.$$

Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 5. Дана точка P, дана прямая L и дана плоскость Q:

$$P = (1,\ 5,\ 10), \quad L = \left\{\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}\right\}, \quad Q = \{x + 2y + 3z - 29 = 0\}.$$

1) Найти точку P_1 пересечения прямой L и плоскости Q.
2) Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точки P и P_1.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (0,\ -10,\ 0), \quad B = (0,\ 10,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 12\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{3}{2 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ 2,\ 3), \quad P_2 = (0,\ -3,\ 2),$$

$$\Sigma = \{36z = 4x^2 + 9(y+3)^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дан эллипсоид Σ:

$$\Sigma = \{(x-10)^2 + 3y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ_1, вершина которой находится в начале координат O, а образующие касаются эллипсоида Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 11

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (7,\ 2), \quad B = (8,\ 9), \quad C = (-9,\ 2), \quad D = (5,\ 0).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (2,\ -2,\ 1), \quad B = (1,\ -1,\ -1), \quad C = (2,\ 0,\ -1), \quad D = (-4,\ 4,\ 1).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти уравнение прямой L_2, симметричной прямой AD (прямая L_1) относительно плоскости ABC.

Задача 3. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{ \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \right\}, \quad L_2 = \{x - 2 = 0,\ y - 2 = 0\}.$$

1) Найти уравнение плоскости Q_1, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2.
2) Найти уравнение плоскости Q_2, проходящей через прямую L_2 параллельно прямой L_1.
3) Найти расстояние $d(Q_1,\ Q_2)$ между плоскостями Q_1 и Q_2.

Задача 4. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \{x - y + z - 4 = 0,\ 2x + y - 2z + 5 = 0\}, \quad L_2 = \{x + y + z - 4 = 0,\ 2x + 3y - z - 6 = 0\}.$$

Найти угол $\angle(L_1,\ L_2)$ между прямыми L_1 и L_2.

Задача 5. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (1,\ 0,\ -1), \quad L = \left\{ \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P перпендикулярно прямой L.

Задача 6. Дана точка A, дана плоскость Q и дано геометрическое место точек M:

$$A = (1,\ 2,\ 3), \quad Q = \{x + y + z = 0\}, \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой некоторого отрезка } AB,\ \text{конец } B \text{ которого лежит в плоскости } Q\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{4}{3 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 2), \quad P_2 = (1,\ 2,\ 3),$$

$$\Sigma = \{2(2 - z) = x^2 + 2y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка S и дана окружность Γ:

$$S = (3,\ 0,\ -1), \quad \Gamma = \left\{x^2 + y^2 = 9,\ z = 1\right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ, вершина которой находится в точке S, а направляющей служит окружность Γ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 12

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (5,\ 5), \quad B = (3,\ 7), \quad C = (-4,\ -7), \quad D = (6,\ -2).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (0,\ 5,\ 1), \quad B = (1,\ -2,\ -1), \quad C = (1,\ 1,\ 2), \quad D = (-7,\ -7,\ 8).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию L_2 прямой AD (прямая L_1) на плоскость ABC.

Задача 3. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{ \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2} \right\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны.
2) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Задача 4. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (3,\ 0,\ 4), \quad L = \{2x - y + 1 = 0,\ 2x - z = 0\}.$$

Найти расстояние $d(P,\ L)$ от точки P до прямой L.

Задача 5. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \{x + 2y + 3z - 13 = 0,\ 3x + y + 4z - 19 = 0\}, \quad Q = \{5x - 3y + z = 0\}.$$

1) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (-2,\ 0,\ 0), \quad B = (2,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 16\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 1), \quad P_2 = (3,\ -2,\ 1),$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4y^2 = (z-1)^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дан вектор $\boldsymbol{a}$ и дана парабола Γ:

$$\boldsymbol{a} = (0,\ -4,\ 1), \quad \Gamma = \{y = x^2,\ z = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ, образующие которой параллельны вектору $\boldsymbol{a}$, а направляющей служит парабола Γ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 13

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ -4),\quad B = (-2,\ 8),\quad C = (6,\ 2),\quad D = (6,\ 0).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ -2,\ 0),\quad B = (-2,\ 4,\ -2),\quad C = (0,\ 7,\ 4),\quad D = (5,\ 6,\ -3).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на плоскость ABC.

Задача 3. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \{x - z + 2 = 0,\ y - 2z - 1 = 0\},\quad L_2 = \left\{\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}\right\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 пересекаются.
2) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Задача 4. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}\right\},\quad L_2 = \{x - z - 1 = 0,\ y + z - 1 = 0\}.$$

Доказать, что прямые L_1 и L_2 перпендикулярны.

Задача 5. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}\right\},\quad Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

Найти проекцию L_1 прямой L на плоскость Q.

Задача 6. Дана точка A и дано геометрическое место точек M:

$$A = (3,\ -5,\ 7), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$

$$\text{некоторого отрезка } AB, \text{ конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oxy\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (2,\ 1,\ -1),$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - (z-1)^2 = 1 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана плоскость Q и дана поверхность Σ:

$$Q = \{x + 2y + 5z = 0\}, \quad \Sigma = \{x = y^2\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой перпендикулярны плоскости Q, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 14

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (9,\ -7), \quad B = (-1,\ 3), \quad C = (0,\ 5), \quad D = (2,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ 1,\ 4), \quad B = (-1,\ 3,\ 4), \quad C = (-1,\ 1,\ 6), \quad D = (-1,\ 1,\ 4).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на прямую AC (прямая L_1).

Задача 3. Дана точка P и даны векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

$$P = (1,\ 1,\ 1), \quad \boldsymbol{a}_1 = (0,\ 1,\ 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-1,\ 0,\ 1).$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P параллельно векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Задача 4. Дана точка P и даны прямые L_1, L_2:

$$P = (1,\ 1,\ 2), \quad L_1 = \left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{-1}\right\}, \quad L_2 = \{x - z + 2 = 0,\ y - 2z - 1 = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L, проходящей через точку P перпендикулярно прямым L_1 и L_2.

Задача 5. Даны прямые L_1, L_2 и дана плоскость Q:

$$L_1 = \left\{\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}\right\}, \quad L_2 = \left\{\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}\right\},$$

$$Q = \{x + y - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямая L_1 параллельна плоскости Q.
2) Доказать, что прямая L_2 лежит в плоскости Q.

Задача 6. Дана точка A и дано геометрическое место точек M:

$$A = (-3,\ -5,\ 9), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB,\ \text{конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oyz\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (2,\ 1,\ 8),$$
$$\Sigma = \left\{1 - z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана плоскость Q и дана сфера Σ:

$$Q = \{x + 2y - z = 0\}, \quad \Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой перпендикулярны плоскости Q и касаются сферы Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 15

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (5,\ 3), \quad B = (4,\ 6), \quad C = (-5,\ 9), \quad D = (1,\ -9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (0,\ 2,\ 3), \quad B = (2,\ 4,\ 4), \quad C = (1,\ 6,\ 2), \quad D = (-2,\ 10,\ 6).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно плоскости ABC.

Задача 3. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (3,\ 4,\ 5), \quad L = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P и через прямую L.

Задача 4. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2} \right\}, \quad L_2 = \{4x - y - z - 4 = 0,\ 2x - y - 1 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны.
2) Найти расстояние $d(L_1,\ L_2)$ между прямыми L_1 и L_2.

Задача 5. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \{x + z - 3 = 0,\ y - 2 = 0\}, \quad Q = \{y - z + 3 = 0\}.$$

1) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (2,\ 3,\ -5), \quad B = (2,\ -7,\ -5), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 - BP^2 = 13\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 3), \quad P_2 = (2,\ -1,\ 4),$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана прямая L и дан эллипсоид Σ:

$$L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}, \quad \Sigma = \{(x-1)^2 + 3y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой параллельны прямой L и касаются эллипсоида Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 16

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ -4), \quad B = (4,\ -6), \quad C = (6,\ 8), \quad D = (5,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (2,\ 4,\ -2), \quad B = (0,\ 2,\ -3), \quad C = (1,\ 0,\ -1), \quad D = (-2,\ 6,\ 2).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на плоскость ABC.

Задача 3. Даны точки P_1, P_2 и дана прямая L:

$$P_1 = (3,\ 2,\ 6), \quad P_2 = (2,\ 3,\ 6), \quad L = \left\{ \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точки P_1 и P_2 и образующей угол 45° с прямой L.

Задача 4. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (-4,\ 0,\ 3), \quad L = \{x - y + z - 4 = 0,\ 2x + y - 2z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точку P параллельно прямой L.

Задача 5. Даны прямые L_1 и L_2:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \right\}, \quad L_2 = \{x - 3z + 4 = 0,\ y - z - 2 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 пересекаются.
2) Найти точку P пересечения прямых L_1 и L_2.
3) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (-1,\ 0,\ 0), \quad B = (1,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 4\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{12}{2 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ -1,\ 1), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 1),$$

$$\Sigma = \left\{(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка A и дана прямая L:

$$A = (0,\ -1,\ 2), \quad L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}.$$

Найти уравнение круговой цилиндрической поверхности Σ, проходящей через точку A, если осью этой поверхности является прямая L.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2029/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 17

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (5,\ 8), \quad B = (-9,\ 8), \quad C = (-1,\ -7), \quad D = (5,\ 1).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ 1,\ 3), \quad B = (1,\ 3,\ 1), \quad C = (3,\ 1,\ 1), \quad D = (1,\ 2,\ 3).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на прямую AC.

Задача 3. Дана точка P и даны прямые L_1 и L_2:

$$P = (0,\ 1,\ 2), \quad L_1 = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{1} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P параллельно прямым L_1 и L_2.

Задача 4. Дана точка P и даны плоскости Q_1 и Q_2:

$$P = (0,\ 2,\ 1), \quad Q_1 = \{x - 2y = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L, которая проходит через точку P параллельно плоскости Q_1 и образует угол 45° с плоскостью Q_2.

Задача 5. Даны точки P_1, P_2, P_3 и дана прямая L:

$$P_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad P_2 = (1,\ 1,\ 2), \quad P_3 = (0,\ 1,\ 5),$$

$$L = \{x = 2t,\ y = t + 1,\ z = -t + 2\}.$$

1) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точки P_1, P_2, P_3.
2) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.
3) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 6. Пусть Σ — куб, центр которого находится в начале координат O, грани параллельны координатным плоскостям, а длина ребра равна 2. Дано геометрическое место точек M:

$$M = \{P \in \Omega \mid \text{сумма квадратов расстояний от точки } P$$
$$\text{до плоскостей граней куба } \Sigma \text{ равна } 8\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{3 - 4\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 1), \quad P_2 = (-1,\ -2,\ -2),$$

$$\Sigma = \{2(z+1) = 2x^2 + y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка S и дан эллипсоид Σ:

$$S = (0,\ 2,\ -5), \quad \Sigma = \{3x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ_1, вершина которой находится в точке S, а образующие касаются эллипсоида Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 18

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (7,\ -3),\quad B = (8,\ 4),\quad C = (-4,\ 8),\quad D = (-6,\ 6).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ 8,\ -6),\quad B = (1,\ 2,\ -3),\quad C = (-1,\ 0,\ -4),\quad D = (-5,\ -3,\ 7).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно плоскости ABC.

Задача 3. Даны точки P_1, P_2 и дана плоскость Q:

$$P_1 = (-1,\ -2,\ -3),\quad P_2 = (1,\ 1,\ 2),\quad Q = \{x + y + 2z - 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости Q_1, проходящей через точки P_1 и P_2 перпендикулярно плоскости Q.

Задача 4. Даны точки P_1, P_2 и дана плоскость Q:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 4),\quad P_2 = (2,\ 2,\ 0),\quad Q = \{x + y - 2z = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L, проходящей через точки P_1 и P_2.
2) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.
3) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 5. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (-4,\ 3,\ -2),\quad Q_1 = \{x - 2y + z = 0\},\quad Q_2 = \{2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L, проходящей через точку P параллельно плоскостям Q_1 и Q_2.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (3,\ 2,\ 1), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP = BP\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ 2,\ 0), \quad P_2 = (-1,\ 3,\ 0),$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{(x-1)^2}{2} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана прямая L и дана сфера Σ:

$$L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}, \quad \Sigma = \{(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой параллельны прямой L и касаются сферы Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 19

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (8,\ -1), \quad B = (7,\ 6), \quad C = (-7,\ 8), \quad D = (0,\ -9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ 2,\ 2), \quad B = (2,\ 2,\ 3), \quad C = (2,\ 3,\ 2), \quad D = (2,\ 2,\ 2).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно прямой AC (прямая L_1).

Задача 3. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (-1,\ -2,\ -3), \quad Q_1 = \{x - 2y + z - 4 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - 2z + 4 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P перпендикулярно плоскостям Q_1 и Q_2.

Задача 4. Даны прямые L_1 и L_2:

$$L_1 = \{2x - y - 7 = 0,\ 2x - z + 5 = 0\}, \quad L_2 = \{3x - 2y + 8 = 0,\ 3x - z + 1 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 скрещиваются.
2) Найти угол $\angle(L_1,\ L_2)$ между прямыми L_1 и L_2.

Задача 5. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \left\{\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}\right\}, \quad Q = \{2x + y - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямая L параллельна плоскости Q.
2) Найти расстояние $d(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (0,\ 0,\ -4), \quad B = (0,\ 0,\ 4), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 10\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{144}{13 - 5\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ 0,\ 0), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 1),$$

$$\Sigma = \{9(x-1)^2 + 4y^2 - 36z^2 = 36\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка S и дана окружность Γ:

$$S = (0,\ 0,\ 5), \quad \Gamma = \left\{x^2 + (y-1)^2 = 4,\ z = 1\right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ, вершина которой находится в точке S, а направляющей служит окружность Γ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)
(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 20

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ 5), \quad B = (5,\ 4), \quad C = (8,\ -2), \quad D = (1,\ -9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (5,\ 1,\ -2), \quad C = (2,\ -2,\ -2), \quad D = (2,\ 2,\ 8).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти уравнение прямой L_2, симметричной прямой AD (прямая L_1) относительно плоскости ABC.

Задача 3. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x-1}{6} = \frac{y-1/2}{5} = \frac{z-1}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2.

Задача 4. Даны плоскости Q_1, Q_2, Q_3:

$$Q_1 = \{3x - 4y = 0\}, \quad Q_2 = \{y = 0\}, \quad Q_3 = \{z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L, проходящей через начало координат O и образующей одинаковые углы с плоскостями Q_1, Q_2 и Q_3.

Задача 5. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (-1,\ 2,\ -3), \quad L = \{x - 2 = 0,\ y - z - 1 = 0\}.$$

1) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P перпендикулярно прямой L.
2) Найти точку P_1 пересечения прямой L и плоскости Q.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (0,\ -5,\ 0), \quad B = (0,\ 5,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 6\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{18}{4 - 5\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 2), \quad P_2 = (0,\ -1,\ 2),$$

$$\Sigma = \{x^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дан вектор $\boldsymbol{a}$ и дана парабола Γ:

$$\boldsymbol{a} = (1,\ -2,\ 3), \quad \Gamma = \{x = y^2,\ z = 0\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ, образующие которой параллельны вектору $\boldsymbol{a}$, а направляющей служит парабола Γ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 21

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (7,\ 3), \quad B = (-9,\ 3), \quad C = (3,\ -6), \quad D = (7,\ -3).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (-3,\ 2,\ 0), \quad B = (1,\ 1,\ 1), \quad C = (4,\ 4,\ 1), \quad D = (4,\ 1,\ 7).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию L_2 прямой AD (прямая L_1) на плоскость ABC.

Задача 3. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (1,\ 1,\ 1), \quad Q_1 = \{2x + 2y - z - 1 = 0\}, \quad Q_2 = \{x - 2y + 2z + 3 = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P и образующей угол $45°$ с плоскостями Q_1 и Q_2.

Задача 4. Даны прямые L_1, L_2 и дана плоскость Q:

$$L_1 = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}\right\}, \quad L_2 = \{3x + 2y + z - 6 = 0,\ 2x + y + z - 4 = 0\},$$

$$Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

1) Найти точку P_1 пересечения прямой L_1 и плоскости Q.
2) Найти точку P_2 пересечения прямой L_2 и плоскости Q.
3) Найти уравнение прямой L, проходящей через точки P_1 и P_2.

Задача 5. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (3,\ 4,\ 0), \quad L = \{2x + y - z + 4 = 0,\ x + 2y + z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точку P параллельно прямой L.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (0,\ -2,\ 0), \quad B = (0,\ 2,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP + BP = 5\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - 2\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 2,\ 0), \quad P_2 = (0,\ 0,\ 2),$$

$$\Sigma = \{2(1 - z) = 2x^2 + y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана плоскость Q и дана поверхность Σ:

$$Q = \{x + 2y + 3z = 0\}, \quad \Sigma = \{x = y^2 + z^2\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой перпендикулярны плоскости Q, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 22

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (8,\ -7), \quad B = (-4,\ 9), \quad C = (-2,\ 8), \quad D = (2,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (-1,\ 1,\ -1), \quad B = (1,\ 3,\ 0), \quad C = (0,\ -1,\ 1), \quad D = (9,\ -3,\ -7).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на плоскость ABC.

Задача 3. Дана точка P:

$$P = (2,\ 3,\ -4).$$

Найти уравнение перпендикуляра L, опущенного из точки P на ось Oy.

Задача 4. Даны точки P_1, P_2 и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P_1 = (-1,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (3,\ 3,\ 3),$$

$$Q_1 = \{3x + y - z + 2 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 3y - z + 2 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L пересечения плоскостей Q_1 и Q_2.
2) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точки P_1 и P_2 параллельно прямой L.

Задача 5. Даны точки P_1, P_2 и дана прямая L:

$$P_1 = (-1,\ -1,\ -1), \quad P_2 = (0,\ -2,\ -2), \quad L = \{x - 2z + 1 = 0,\ y + 2z - 1 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точки P_1 и P_2.
2) Найти угол $\angle(L_1,\ L)$ между прямыми L_1 и L.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (0,\ -10,\ 0), \quad B = (0,\ 10,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid |AP - BP| = 12\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{3}{2 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (-1,\ 3,\ 4),$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4(y-1)^2 - z^2 = 0\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана плоскость Q и дана сфера Σ:

$$Q = \{2y - z = 0\}, \quad \Sigma = \{(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой перпендикулярны плоскости Q и касаются сферы Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 23

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ 8), \quad B = (-9,\ 2), \quad C = (7,\ -6), \quad D = (9,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ 2,\ 3), \quad B = (1,\ 4,\ 3), \quad C = (1,\ 2,\ 5), \quad D = (1,\ 2,\ 3).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на прямую AC (прямая L_1).

Задача 3. Дана плоскость Q:

$$Q = \{2x + y - \sqrt{5}\, z = 0\}.$$

Найти уравнение плоскости Q_1, проходящей через ось Oz и образующей угол 60° с плоскостью Q.

Задача 4. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (1,\ 2,\ 8), \quad L = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1} \right\}.$$

Найти проекцию P_1 точки P на прямую L.

Задача 5. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (1,\ 2,\ 4), \quad Q_1 = \{2x - y + 3z - 6 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 2y - z + 3 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L пересечения плоскостей Q_1 и Q_2.
2) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P и через прямую L.

Задача 6. Дана точка A, дана плоскость Q и дано геометрическое место точек M:

$$A = (1,\ 2,\ 3), \quad Q = \{x + y + z = 0\}, \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой некоторого отрезка } AB, \text{ конец } B \text{ которого лежит в плоскости } Q\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{4}{3 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (3,\ 1,\ 4),$$

$$\Sigma = \{9x^2 + 4(y-1)^2 - 36z^2 = 36\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана прямая L и дан эллипсоид Σ:

$$L = \{x = t - 3,\ y = 2t + 3,\ z = 3t + 5\}, \quad \Sigma = \{(x-1)^2 + 2y^2 + 5z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой параллельны прямой L и касаются эллипсоида Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 24

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (7,\ 7), \quad B = (5,\ 9), \quad C = (3,\ -5), \quad D = (8,\ 5).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (0,\ -1,\ 2), \quad B = (1,\ 1,\ 4), \quad C = (3,\ -1,\ 5), \quad D = (2,\ 1,\ -4).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно плоскости ABC.

Задача 3. Дана точка P и даны плоскости Q_1, Q_2:

$$P = (2,\ 0,\ -3), \quad Q_1 = \{3x - y + 2z - 7 = 0\}, \quad Q_2 = \{x + 3y - 2z - 3 = 0\}.$$

1) Найти уравнение прямой L пересечения плоскостей Q_1 и Q_2.
2) Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точку P параллельно прямой L

Задача 4. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \{3x - y + 1 = 0,\ 3x + 2z - 2 = 0\}, \quad Q = \{2x + y + z - 4 = 0\}.$$

Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 5. Дана точка P, дана прямая L и дана плоскость Q:

$$P = (1,\ 5,\ 10), \quad L = \left\{\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}\right\}, \quad Q = \{x + 2y + 3z - 29 = 0\}.$$

1) Найти точку P_1 пересечения прямой L и плоскости Q.
2) Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точки P и P_1.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (-2,\ 0,\ 0), \quad B = (2,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 16\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ -4,\ 0), \quad P_2 = (3,\ -3,\ 2),$$

$$\Sigma = \{(x-1)^2 + (y+1)^2 + 2z^2 = 4\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка A и дана прямая L:

$$A = (0,\ 0,\ 5), \quad L = \{x = 2t - 3,\ y = -t + 7,\ z = -2t + 5\}.$$

Найти уравнение круговой цилиндрической поверхности Σ, проходящей через точку A, если осью этой поверхности является прямая L.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 25

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (2,\ -3), \quad B = (8,\ 5), \quad C = (5,\ 9), \quad D = (-3,\ 9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (2,\ -1,\ -1), \quad B = (-1,\ -1,\ 2), \quad C = (-1,\ 2,\ -1), \quad D = (-1,\ -1,\ -1).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно прямой AC (прямая L_1).

Задача 3. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{ \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \right\}, \quad L_2 = \{x - 2 = 0,\ y - 2 = 0\}.$$

1) Найти уравнение плоскости Q_1, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2.
2) Найти уравнение плоскости Q_2, проходящей через прямую L_2 параллельно прямой L_1.
3) Найти расстояние $d(Q_1,\ Q_2)$ между плоскостями Q_1 и Q_2.

Задача 4. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \{x - y + z - 4 = 0,\ 2x + y - 2z + 5 = 0\}, \quad L_2 = \{x + y + z - 4 = 0,\ 2x + 3y - z - 6 = 0\}.$$

Найти угол $\angle(L_1,\ L_2)$ между прямыми L_1 и L_2.

Задача 5. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (1,\ 0,\ -1), \quad L = \left\{ \frac{x + 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{-3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P перпендикулярно прямой L.

Задача 6. Дана точка A и дано геометрическое место точек M:

$$A = (3,\ -5,\ 7), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$
$$\text{некоторого отрезка } AB,\ \text{конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oxy\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ 2,\ 3), \quad P_2 = (0,\ -3,\ 2),$$
$$\Sigma = \{36z = 4x^2 + 9(y+3)^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка S и дан эллипсоид Σ:

$$S = (-1,\ 2,\ -5), \quad \Sigma = \{3x^2 + 2y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ_1, вершина которой находится в точке S, а образующие касаются эллипсоида Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 26

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (5,\ 7),\quad B = (2,\ -2),\quad C = (-2,\ 0),\quad D = (-3,\ 3).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (2,\ -2,\ 1),\quad B = (1,\ -1,\ -1),\quad C = (2,\ 0,\ -1),\quad D = (-4,\ 4,\ 1).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти уравнение прямой L_2, симметричной прямой AD (прямая L_1) относительно плоскости ABC.

Задача 3. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}\right\},\quad L_2 = \left\{\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}\right\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны.
2) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Задача 4. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (3,\ 0,\ 4),\quad L = \{2x - y + 1 = 0,\ 2x - z = 0\}.$$

Найти расстояние $d(P,\ L)$ от точки P до прямой L.

Задача 5. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \{x + 2y + 3z - 13 = 0,\ 3x + y + 4z - 19 = 0\},\quad Q = \{5x - 3y + z = 0\}.$$

1) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 6. Дана точка A и дано геометрическое место точек M:

$$A = (-3,\ -5,\ 9), \quad M = \{P \in \Omega \mid \text{точка } P \text{ является серединой}$$

$$\text{некоторого отрезка } AB, \text{ конец } B \text{ которого лежит в координатной плоскости } Oyz\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{1 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 2), \quad P_2 = (1,\ 2,\ 3),$$

$$\Sigma = \{2(2 - z) = x^2 + 2y^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана плоскость Q и дана поверхность Σ:

$$Q = \{3x - y + z = 0\}, \quad \Sigma = \{x - y = z^2\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой перпендикулярны плоскости Q, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 27

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (3,\ -4), \quad B = (-6,\ 5), \quad C = (8,\ 7), \quad D = (7,\ 0).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (0,\ 5,\ 1), \quad B = (1,\ -2,\ -1), \quad C = (1,\ 1,\ 2), \quad D = (-7,\ -7,\ 8).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию L_2 прямой AD (прямая L_1) на плоскость ABC.

Задача 3. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \{x - z + 2 = 0,\ y - 2z - 1 = 0\}, \quad L_2 = \left\{\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}\right\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 пересекаются.
2) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Задача 4. Даны прямые L_1, L_2:

$$L_1 = \left\{\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}\right\}, \quad L_2 = \{x - z - 1 = 0,\ y + z - 1 = 0\}.$$

Доказать, что прямые L_1 и L_2 перпендикулярны.

Задача 5. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \left\{\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}\right\}, \quad Q = \{x + y + z - 3 = 0\}.$$

Найти проекцию L_1 прямой L на плоскость Q.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (2,\ 3,\ -5), \quad B = (2,\ -7,\ -5), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 - BP^2 = 13\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{10}{1 - \frac{3}{2}\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.
2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (0,\ 0,\ 1), \quad P_2 = (3,\ -2,\ 1),$$

$$\Sigma = \{2x^2 + 4y^2 = (z-1)^2\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.
2) Изобразить схематически поверхность Σ.
3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка S и дана окружность Γ:

$$S = (0,\ 1,\ 3), \quad \Gamma = \left\{x^2 + (y-1)^2 = 1,\ z = 2\right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ, вершина которой находится в точке S, а направляющей служит окружность Γ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 28

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (8,\ 5), \quad B = (9,\ -2), \quad C = (4,\ 8), \quad D = (6,\ 7).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ -2,\ 0), \quad B = (-2,\ 4,\ -2), \quad C = (0,\ 7,\ 4), \quad D = (5,\ 6,\ -3).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на плоскость ABC.

Задача 3. Дана точка P и даны векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$:

$$P = (1,\ 1,\ 1), \quad \boldsymbol{a}_1 = (0,\ 1,\ 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-1,\ 0,\ 1).$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P параллельно векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

Задача 4. Дана точка P и даны прямые L_1, L_2:

$$P = (1,\ 1,\ 2), \quad L_1 = \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{-1} \right\}, \quad L_2 = \{x - z + 2 = 0,\ y - 2z - 1 = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L, проходящей через точку P перпендикулярно прямым L_1 и L_2.

Задача 5. Даны прямые L_1, L_2 и дана плоскость Q:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3} \right\}, \quad L_2 = \left\{ \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3} \right\},$$

$$Q = \{x + y - z = 0\}.$$

1) Доказать, что прямая L_1 параллельна плоскости Q.
2) Доказать, что прямая L_2 лежит в плоскости Q.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (-1,\ 0,\ 0), \quad B = (1,\ 0,\ 0), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP^2 + BP^2 = 4\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{12}{2 - \cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (1,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (2,\ 1,\ -1),$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - (z-1)^2 = 1 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана точка S и дана окружность Γ:

$$S = (0,\ 2,\ 3), \quad \Gamma = \left\{ x^2 + (y-1)^2 = 1,\ z = 2 \right\}.$$

Найти уравнение конической поверхности Σ, вершина которой находится в точке S, а направляющей служит окружность Γ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 29

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (7,\ 6), \quad B = (7,\ 3), \quad C = (-5,\ -6), \quad D = (3,\ 9).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (1,\ 1,\ 4), \quad B = (-1,\ 3,\ 4), \quad C = (-1,\ 1,\ 6), \quad D = (-1,\ 1,\ 4).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти проекцию D_1 точки D на прямую AC (прямая L_1).

Задача 3. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (3,\ 4,\ 0), \quad L = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{3} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точку P и через прямую L.

Задача 4. Даны прямые L_1 и L_2:

$$L_1 = \left\{ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} \right\}, \quad L_2 = \{4x - y - z - 4 = 0,\ 2x - y - 1 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны.
2) Найти расстояние $d(L_1,\ L_2)$ между прямыми L_1 и L_2.

Задача 5. Дана прямая L и дана плоскость Q:

$$L = \{x + z - 1 = 0,\ y - 2 = 0\}, \quad Q = \{y - z = 0\}.$$

1) Найти точку P пересечения прямой L и плоскости Q.
2) Найти угол $\angle(L,\ Q)$ между прямой L и плоскостью Q.

Задача 6. Пусть Σ — куб, центр которого находится в начале координат O, грани параллельны координатным плоскостям, а длина ребра равна 2. Дано геометрическое место точек M:

$$M = \{P \in \Omega \mid \text{сумма квадратов расстояний от точки } P$$
$$\text{до плоскостей граней куба } \Sigma \text{ равна } 8\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{5}{3 - 4\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 0), \quad P_2 = (2,\ 1,\ 8),$$
$$\Sigma = \left\{1 - z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана плоскость Q и дана поверхность Σ:

$$Q = \{x + y + z = 0\}, \quad \Sigma = \{x = z^2\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой перпендикулярны плоскости Q, а направляющей служит кривая $\Gamma = \Sigma \cap Q$.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(1-й курс, 1-й семестр)

(2020/2021 учебный год)

Типовой расчет

Вариант 30

Задача 1. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (5,\ -7), \quad B = (-3,\ 9), \quad C = (-4,\ 8), \quad D = (-6,\ 4).$$

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.
2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра I и радиус r этой окружности.
3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра O и радиус R этой окружности.

Задача 2. Даны точки A, B, C, D:

$$A = (0,\ 2,\ 3), \quad B = (2,\ 4,\ 4), \quad C = (1,\ 6,\ 2), \quad D = (-2,\ 10,\ 6).$$

1) Найти объем V_{ABCD} пирамиды $ABCD$.
2) Найти площадь S_{ABC} грани ABC.
3) Найти уравнение прямой AB (прямая L).
4) Найти длину ребра AB.
5) Найти уравнение плоскости ABC (плоскость Q).
6) Найти точку D_1, симметричную точке D относительно плоскости ABC.

Задача 3. Даны точки P_1, P_2 и дана прямая L:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 5), \quad P_2 = (1,\ 2,\ 5), \quad L = \left\{ \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+4}{0} \right\}.$$

Найти уравнение плоскости Q, проходящей через точки P_1 и P_2 и образующей угол 45° с прямой L.

Задача 4. Дана точка P и дана прямая L:

$$P = (-4,\ 3,\ 3), \quad L = \{x - 2y + z - 4 = 0,\ 2x + y - z = 0\}.$$

Найти уравнение прямой L_1, проходящей через точку P параллельно прямой L.

Задача 5. Даны прямые L_1 и L_2:

$$L_1 = \left\{ \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \right\}, \quad L_2 = \{x - 3z + 4 = 0,\ y - z - 2 = 0\}.$$

1) Доказать, что прямые L_1 и L_2 пересекаются.
2) Найти точку P пересечения прямых L_1 и L_2.
3) Найти уравнение плоскости Q, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Задача 6. Даны точки A, B и дано геометрическое место точек M:

$$A = (1,\ 2,\ -3), \quad B = (3,\ 2,\ 1), \quad M = \{P \in \Omega \mid AP = BP\}.$$

Найти уравнение ГМТ M.

Задача 7. Кривая Γ задана своим уравнением в полярных координатах:

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}.$$

1) Определить тип кривой Γ.

2) Написать каноническое уравнение кривой Γ.

Задача 8. Даны точки P_1, P_2 и дана поверхность второго порядка Σ:

$$P_1 = (2,\ 1,\ 3), \quad P_2 = (2,\ -1,\ 4),$$

$$\Sigma = \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2 \right\}.$$

1) Определить тип поверхности Σ.

2) Изобразить схематически поверхность Σ.

3) Изобразить сечения поверхности Σ координатными плоскостями, по возможности соблюдая масштаб. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.

4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности Σ лежат точки P_1 и P_2.

5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью Σ имеет прямая, проходящая через точки P_1 и P_2 (прямая L).

Задача 9. Дана плоскость Q и дан эллипсоид Σ:

$$Q = \{x + 2y - z = 0\}, \quad \Sigma = \{(x-1)^2 + 3y^2 + z^2 = 10\}.$$

Найти уравнение цилиндрической поверхности Σ_1, образующие которой перпендикулярны плоскости Q и касаются эллипсоида Σ.

Замечание 1. Везде, где сказано найти уравнение плоскости, надо найти общее уравнение плоскости.

Замечание 2. Везде, где сказано найти уравнение прямой в пространстве, надо найти каноническое уравнение прямой в пространстве.