Universidad del Valle de Guatemala
18 Avenida 11-95 Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Computación

Laboratorio 3. Modelación y Simulación

Grupo:
6

Integrantes:
Diego Alexander Hernández Silvestre, 21270
Mario Antonio Guerra Morales, 21008
Linda Inés Jiménez Vides, 21169

Curso:
Modelación y Simulación

Sección:
10

Guatemala, 20 de agosto de 2024

1. Implementar los algoritmos de Runge-Kutta (de orden 4) para resolver una EDO, y para resolver un sistema de EDO. Estos algoritmos se usarán en los siguientes problemas.

Una EDO

```python
# Ejemplo de uso: Ley de Enfriamiento de Newton
def leyEnfriamientoNewton(t, T):
    T_amb = 20  # Temperatura ambiente (en grados Celsius)
    k = 0.1     # Constante de enfriamiento
    return -k * (T - T_amb)
```

```
(venv) PS C:\Documentos\Semestre8\ModelacionYSimulacion\Laboratorios\Lab03MS> python .\Inciso1.py
🚀 Iniciando Runge-Kutta [orden 4] para EDO simple...
⏱️Paso 1/10: t = 0.5000, y(t) = 96.0984
⏱️Paso 2/10: t = 1.0000, y(t) = 92.3870
⏱️Paso 3/10: t = 1.5000, y(t) = 88.8566
⏱️Paso 4/10: t = 2.0000, y(t) = 85.4985
⏱️Paso 5/10: t = 2.5000, y(t) = 82.3041
⏱️Paso 6/10: t = 3.0000, y(t) = 79.2655
⏱️Paso 7/10: t = 3.5000, y(t) = 76.3750
⏱️Paso 8/10: t = 4.0000, y(t) = 73.6256
⏱️Paso 9/10: t = 4.5000, y(t) = 71.0103
⏱️Paso 10/10: t = 5.0000, y(t) = 68.5225
🏁 Finalizado!
Resultado final: T(tf) = 68.5225 °C
(venv) PS C:\Documentos\Semestre8\ModelacionYSimulacion\Laboratorios\Lab03MS>
```

Sistema de EDO

```python
def lotka_volterra(t, y):
    alpha = 1.5   # Tasa de crecimiento de las presas
    beta = 1.0    # Tasa de depredación
    delta = 1.0   # Tasa de aumento de depredadores por cada presa consumida
    gamma = 3.0   # Tasa de muerte de los depredadores

    x, y = y[0], y[1]

    dxdt = alpha * x - beta * x * y
    dydt = delta * x * y - gamma * y

    return np.array([dxdt, dydt])
```

```
⏱️ Paso 1497/1500: t = 14.9700, y(t) = [0.6839,0.0808]
⏱️ Paso 1498/1500: t = 14.9800, y(t) = [0.6937,0.079 ]
⏱️ Paso 1499/1500: t = 14.9900, y(t) = [0.7037,0.0772]
⏱️ Paso 1500/1500: t = 15.0000, y(t) = [0.7138,0.0754]
🏁 Finalizado!
[[10.         5.        ]
 [ 9.63907113  5.35296759]
 [ 9.25823486  5.70962257]
 ...
 [ 0.69372631  0.07895176]
 [ 0.70366122  0.07715558]
 [ 0.71375106  0.07540781]]
(venv) PS C:\Documentos\Semestre8\ModelacionYSimulacion\Laboratorios\Lab03MS>
```

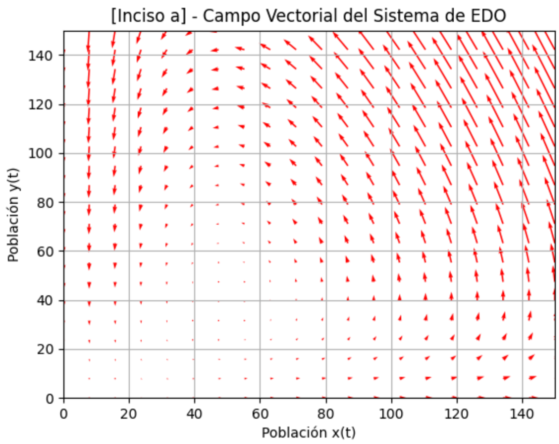
2. Dos poblaciones de animales $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen el siguiente sistema de EDO:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0.2x - 0.005xy, \\ y'(t) &= -0.5y + 0.01xy. \end{aligned}$$

Aquí, la escala de tiempo se mide en meses.

Nos interesa la trayectoria y el campo de direcciones que este sistema forma en el primer cuadrante del plano xy (ya que $x(t)$, $y(t)$ som ambas cantidades de individuos, sólo tiene sentido cuando estas son cantidades no-negativas). Resolver los siguiente:

a) Grafique el campo vectorial o plano de fase asociado a ese sistema de EDO.



b) Usando algoritmos computacionales, encuentre todos los puntos de equilibrio del sistema de EDO (sólo los que están en el primero cuadrante, incluyendo los ejes y el origen). y clasificarlos de acuerdo a su comportamiento. Explique cualitativamente cómo se comportan las soluciones cerca del punto de equilibrio obtenido.

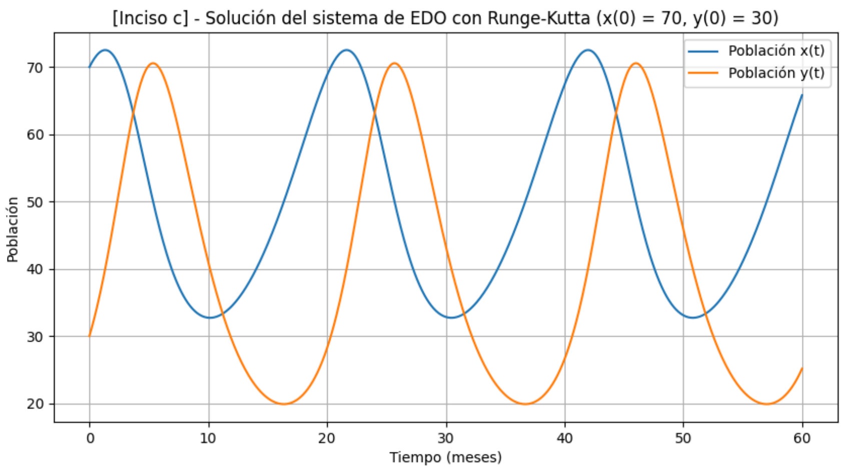
```
Inciso b) - Puntos de Equilibrio
☝ Puntos de equilibrio: [(0.0, 0.0), (50.0000000000000, 40.0000000000000)]
```

Se encontraron dos puntos de equilibrio, el que se encuentra en el origen nos indica que el sistema aparece en equilibrio debido a que representa la extinción total de ambas especies por lo que no se nota ningún efecto. El otro punto, indica que las poblaciones de presas y depredadores se estabilizan en 50 y 40 respectivamente. Este escenario nos indica que ambas especies coexisten sin que ninguna llegue a extinguirse.

c) Resuelva el sistema de EDO, con su algoritmo de Runge-Kutta, para la condición inicial

$$x(0) = 70, \qquad y(0) = 30.$$

Obtenga una gráfica de la solución obtenida, y estime cuál será la población x y y después de 5 años. Aproxime cuál es el valor del período o ciclo de repetición de las poblaciones.



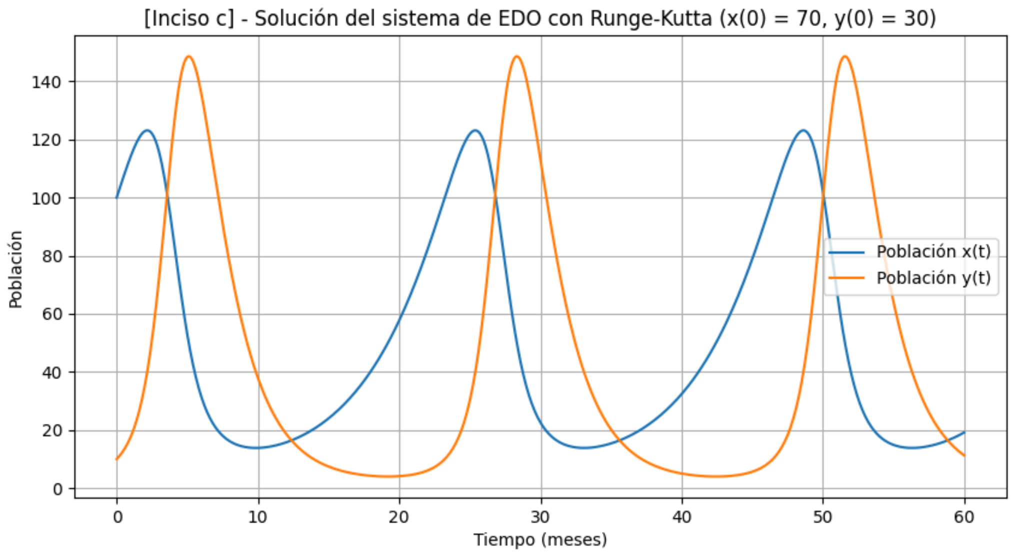
```
Inciso c) - Solución del sistema de EDO con Runge-Kutta (x(0) = 70, y(0) = 30)
🚀 Iniciando Runge-Kutta [orden 4] para sistemas de EDO...
🏁 Finalizado!
☝ Población de x(t) después de 5 años: 65.80
☝ Población de y(t) después de 5 años: 25.14
```

Observando la gráfica, se puede determinar que el valor de periodo o ciclo de repetición de las poblaciones ocurre aproximadamente cada 18 meses.

d) Repita la solución deel sistema de EDO, esta vez para la condición inicial

$$x(0) = 100, \qquad y(0) = 10.$$

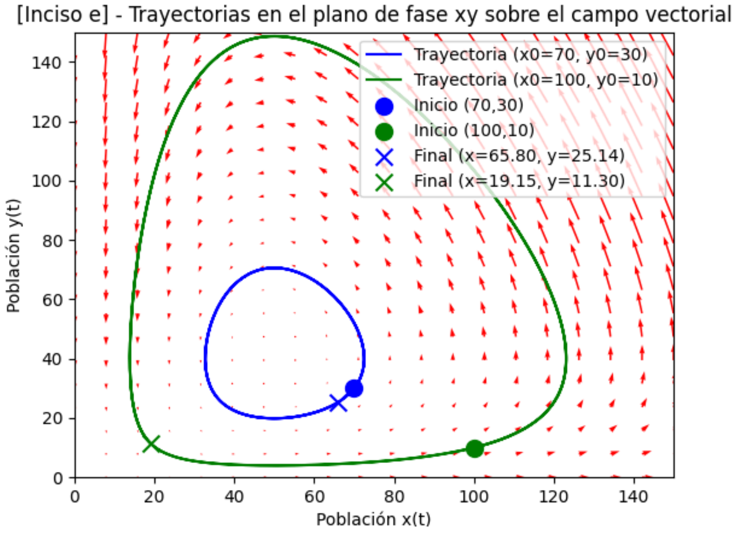
Obtenga una gráfica de la solución obtenida, y estime cuál será la población para las especies x y y después de 5 años. Aproxime cuál es el valor del período o ciclo de repetición de las poblaciones.




```
Inciso d) - Solución del sistema de EDO con Runge-Kutta (x(0) = 100, y(0) = 10)
🚀 Iniciando Runge-Kutta [orden 4] para sistemas de EDO...
🏁 Finalizado!
☝ Población de x(t) después de 5 años: 19.15
☝ Población de y(t) después de 5 años: 11.30
```

El valor del periodo o ciclo de repetición en ambas poblaciones es de aproximadamente 23 meses.

e) Grafique ambas trayectorias obtenidas en su plano de fase xy (encima del campo vectorial). Ilustre en la gráfica el valor de la población inicial y final (a los 5 años) en cada caso.



f) Explique o describa cualitativamente el comportamiento del sistema de poblaciones.

El sistema de la trayectoria azul (x(0)=70 y y(0)=30) parece estar cerca del punto de equilibrio y en este caso, el punto final es cercano al punto inicial, lo que nos indica que el crecimiento y decrecimiento de las especies oscila de manera casi periódica. Por otra parte, en el caso de la trayectoría verde, se observa que el sistema primero se aleja del origen para regresar a un punto final en el que ambas poblaciones se reducen drásticamente. Luego, la población x comienza a aumentar hasta llegar un punto en el que la población y ha crecido lo suficiente y comienza a decrecer.

3. Suponga ahora que que las poblaciones de dos especies $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen el sistema de EDO:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0.5x - 0.001x^2 - xy, \\ y'(t) &= -0.2y + 0.1xy. \end{aligned}$$

La escala de tiempo de nuevo se mide en meses.

Nos interesa la trayectoria y el campo de direcciones que este sistema forma en el primer cuadrante del plano xy (ya que $x(t)$, $y(t)$ som ambas cantidades de individuos, sólo tiene sentido cuando estas son cantidades no-negativas). Resolver los siguiente:

a) Grafique el campo vectorial o plano de fase asociado a ese sistema de EDO.

b) Usando algoritmos computacionales, encuentre todos los puntos de equilibrio del sistema de EDO (sólo los que están en el primero cuadrante, incluyendo los ejes y el origen). y clasificarlos de acuerdo a su comportamiento. Explique cualitativamente cómo se comportan las soluciones cerca del punto de equilibrio obtenido.

c) Resuelva el sistema de EDO, con su algoritmo de Runge-Kutta, para la condición inicial

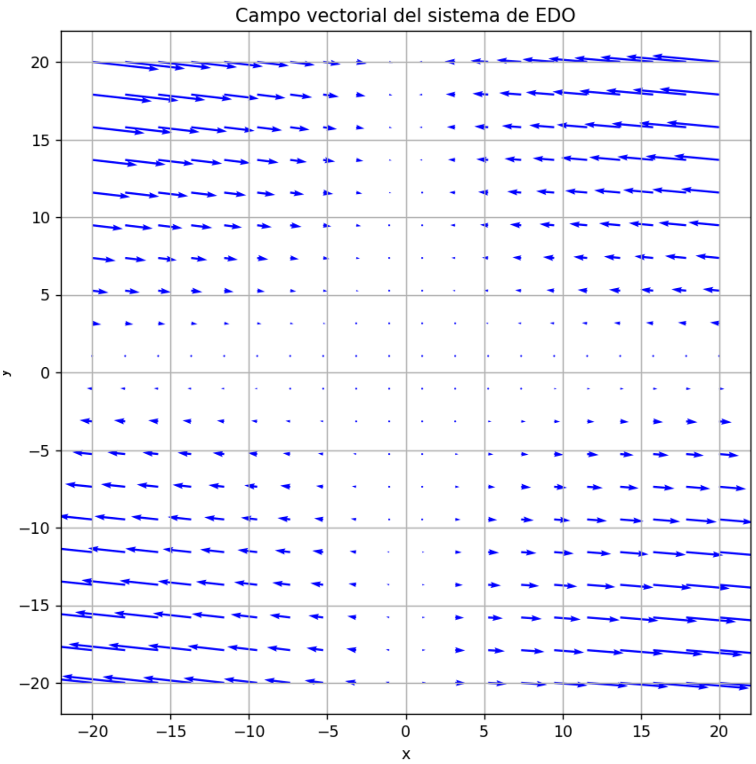
$$x(0) = 10, \qquad y(0) = 10.$$

Obtenga una gráfica de la solución obtenida, y estime cuál será la población x y y después de 5 años.

d) Grafique la trayectoria obtenidas en su plano de fase xy (encima del campo vectorial). Ilustre en la gráfica el valor de la población inicial y final (a los 5 años) en cada caso.

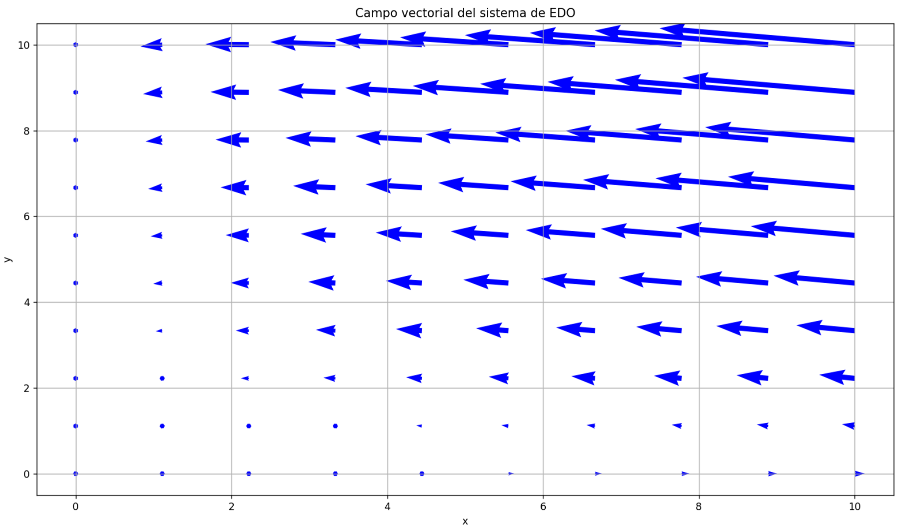
e) Explique o describa cualitativamente el comportamiento del sistema de poblaciones.

a)



b)

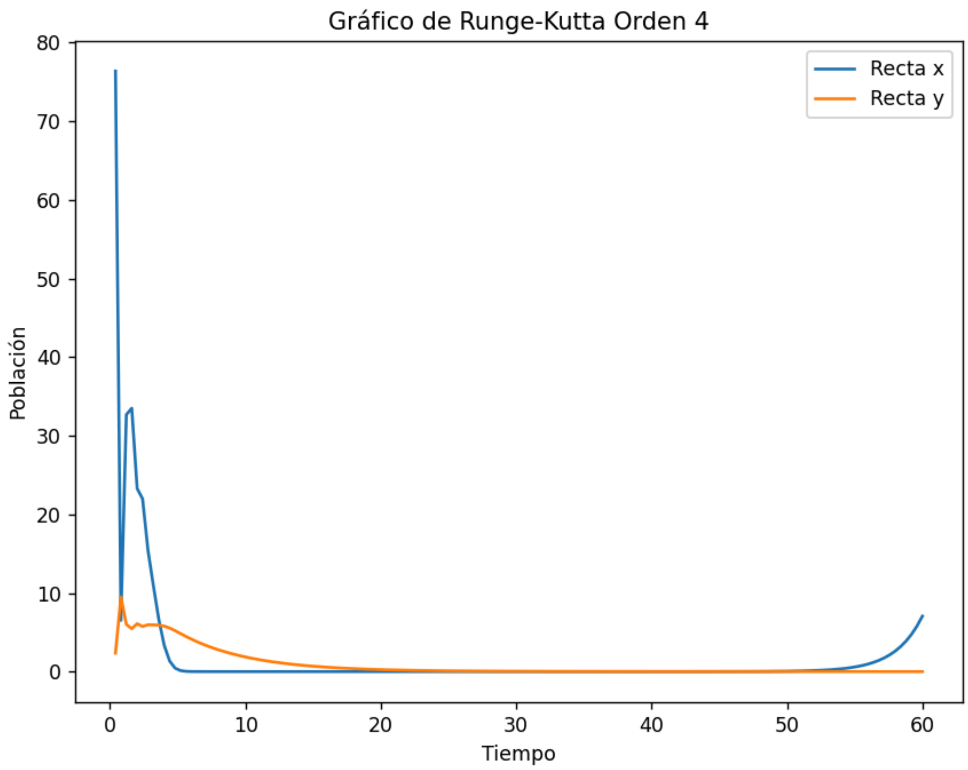
```
Puntos de equilibrio únicos en el primer cuadrante:
(x, y) = (2.0, 0.498)
(x, y) = (0.0, 0.0)
El punto de equilibrio (2.0, 0.498) es un nodo estable.
El punto de equilibrio (0.0, 0.0) es un punto de silla.
```



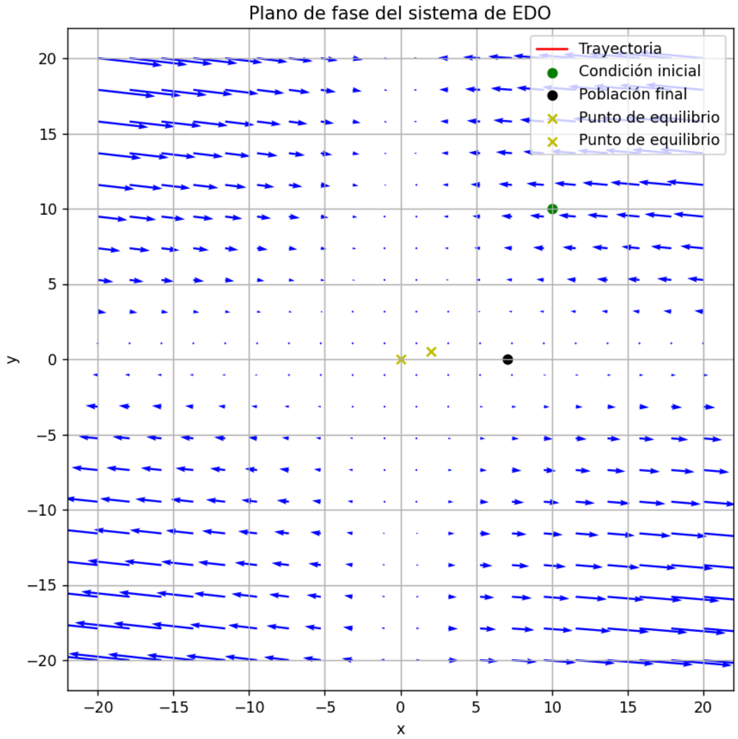
Se puede observar cualitativamente que, en el punto (2, 0.498), el campo vectorial empieza a dirigirse hacia la parte negativa de x, una parte real negativa. Mientras que, en el punto (0,0), al ser un punto de silla, se encuentra con algunas direcciones tanto positivas como negativas, al ser el punto de origen.

c)

```
Población x después de 5 años: 7.0521
Población y después de 5 años: 0.0003
```



d)



e) El sistema de poblaciones al principio da un increíble repunte en la población X, para luego ir decreciendo a la par que la población Y, quien tiene un comportamiento decreciente y se queda así hasta llegar a extinguirse casi por completo, mientras que al final, la población X en los siguientes meses hacia los 5 años logra volver a crecer.

4. El cometa Halley alcanzó el último perihelio (su punto de acercamiento más cercano al Sol, el Sol en el origen) el 9 de febrero de 1986. Sus componentes de posición y velocidad en ese momento fueron

$$\mathbf{p}_0 = (0.325514, -0.459460, 0.166229), \qquad \mathbf{v}_0 = (-9.096111, -6.916686, -1.305721),$$

respectivamente. Aquí la posición se mide en UA (unidades astronómicas), en las cuales la unidad de distancia corresponde al semi-eje mayor del planeta Tierra, y el tiempo se mide en años. El vector $\mathbf{p}(t)$ describe la posición $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ del cometa.

Las ecuaciones de movimiento del cometa son

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3},$$

donde

$$\mu = 4\pi^2 \qquad \text{y} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

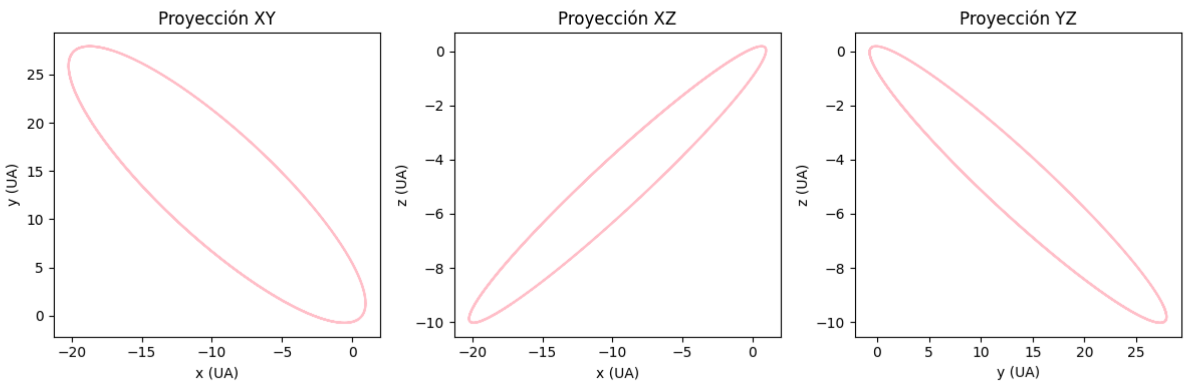
a) Resolver las ecuaciones mediante algoritmos numéricos. Graficar las proyeccciones xy, xz y yz de la trayectoria del cometa (si lo desea, puede graficar una trayectoria completa del cometa mediante una gráfica 3D).

b) Estimar la posición y velocidad del comenta para el 9 de febrero de 2086, y de 2186. ($t = 100$ y 200 años).

c) Elaborar una gráfica de t contra $r(t)$ y estimar el período de repetición de los ciclos del cometa.

---

a.



b.

```
🚀 Iniciando Runge-Kutta [orden 4] para sistemas de EDO...
🔢 Condiciones iniciales: t = 0.0000 años,  Posicion = [ 0.3255,-0.4595, 0.1662], Velocidad = [-9.0961,-6.9169,-1.3057]
⏱️ Tiempo 100.0000 años: Posicion = [-19.8458, 23.5102, -9.3736], Velocidad = [-0.1284, 0.4761,-0.1154]
⏱️ Tiempo 200.0000 años: Posicion = [-17.2876, 27.5549, -9.3612], Velocidad = [ 0.3201,-0.1382, 0.1105]
🏁 Simulación completada.
```

c. El período de repetición del cometa se puede estimar midiendo el tiempo entre dos mínimos consecutivos en la gráfica, ya que representan los momentos en que el cometa regresa a su perihelio. Esta estimación tendría un período aproximado entre 75 y 76 años.