

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE A/MIRA-BEJAIA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

Intitulé du cours :

<p>MODÉLISATION ET SIMULATION DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES</p>
--

Niveau : 1^{ière} ANNEE Master Electrotechnique

Auteur : Mr. Athmane BOUZIDI

Maitre de conférences B, Chargé de recherche

Volume horaire : 60 heures, (Cours 1,5H, TD : 1.5H, TP : 1H)

Préambule

Le problème majeur de l'énergie électrique est qu'elle ne peut pas être stockée, à chaque instant, l'énergie produite doit être exactement égale à l'énergie consommée. Au niveau de l'ensemble le total de la production doit être égal au total de la consommation. Dès que l'énergie produite ne peut pas être consommée ou l'énergie demandée ne peut pas être satisfaite, cela provoque des problèmes, tels que la perte de synchronisme des alternateurs, la mise hors service d'un ouvrage qui peut lui-même engendrer d'autres mises hors service, il en résulte un fonctionnement relativement fragile du système et contre lequel il faut se prémunir. Avant que chaque instant ne se présente effectivement, il faut le préparer, c'est-à-dire amener le système électrique dans le meilleur état possible qui permet de passer l'instant avec la meilleure sécurité tout en engageant de moindres dépenses. Mais aussi des incidents peuvent provoquer des dégâts importants dans le réseau électriques si un dimensionnement adéquat des équipements et de la protection n'a pas été fait à l'avance. L'ajout ou la perte d'un élément important dans le réseau électrique nécessite de revoir les calculs des tensions, courants et puissances dans tout le réseau. En plus de toutes ces contraintes le réseau de transport électrique est un réseau maillé comportant des centaines d'accès et de lignes, des transformateurs et plusieurs sources. Des calculs et études simples ne conviennent plus et prennent énormément de temps. La modélisation et simulation par ordinateur sont indispensables et répondent parfaitement aux exigences d'efficacité, de précision et de rapidité. La prise en compte des centaines d'accès et le calcul des différents états et grandeurs par des systèmes matriciels représentant le réseau électrique n'est plus un problème pour l'ordinateur. En effet des modèles et programmes informatiques ont été élaborés et ont montré leur efficacité. Ces programmes permettent de faire le calcul des courants de court-circuit, d'écoulement de puissance, de dispatching économique, et de stabilité du réseau électrique.

Ce document comporte cinq chapitres :

Le premier chapitre permet de préparer les étudiants à la modélisation et à comprendre et assimiler les différents concepts de base ; les composants (résistance inductance et capacité), la représentation adéquate d'un signal électrique en monophasé et en triphasé et les modèles des différents éléments du réseau (sources, lignes, transformateurs et charges).

Le deuxième chapitre prépare toujours l'étudiant à la modélisation par la description du système d'unités relatives, en passant par la théorie des graphes et se termine par la construction des matrices admittance et impédance du réseau électrique. Ces matrices sont indispensables pour tous les calculs que nous aborderons dans ce document.

Le troisième chapitre est consacré au calcul des courants de défauts (triphasés, monophasé, biphasé et biphasé-terre) après avoir introduit la théorie des composantes symétriques.

Le quatrième chapitre est consacré au calcul d'écoulement de puissance par essentiellement deux méthodes (Gauss Seidel et Newton Raphson).

Le cinquième et dernier chapitre est réservé au calcul optimal du coût de la production de l'énergie électrique ce qu'on appelle le dispatching économique.

Sommaire

Préambule.....	2
Sommaire.....	3
Introduction générale.....	1
Chapitre I Réseaux électriques en régime sinusoïdal : notions de base	2
I.1 Introduction.....	2
I.2 Représentation des signaux sinusoïdaux	2
I.2.1 Représentation vectorielle	2
référence.....	2
I.2.2 Représentation complexe.....	3
I.2.3 valeur efficace et valeur crête.....	3
I.2.4 Impédances complexes	3
I.2.5 Puissance	4
I.2.6 Puissances active et réactive.....	5
I.3 Réseaux triphasés	8
I.3.1 Principe	8
I.3.2 Montage étoile.....	8
I.3.3 Montage triangle.....	9
I.3.3 Transformation étoile/triangle	10
I.3.4 Puissances en triphasé	10
I.4 Modélisation des éléments du réseau électrique.....	11
I.4.1 Moyens de production	12
I.4.2 Lignes.....	12
I.4.3 Transformateurs.....	15
I.4.5 Charge	15
I.5 Conclusion	15
Chapitre II. Système d'unités relatives et construction des matrices du réseau	16
II.1 Système d'unités relatives :	16
II.1.1 Le changement de base dans le système d'unité relative :	16
II.1.2 Exemple :	17
II.2 Description graphique et topologique d'un réseau	19
II.2.1 Examen de la théorie des graphes	19
II.2.2. Modélisation globale du réseau: le modèle CIM	21
II.2.3 Représentation matricielle des réseaux	21
II.3 Matrices admittance et impédance d'un réseau électrique	28
II.3.1 Relations entre les tensions aux accès et les courants injectés	28
II.3.2 Formation de la matrice impédance $[Z_{bus}]$	29
II.3.3 Formation de la matrice admittance nodale $[Y_{bus}]$:	35
II.4 Conclusion	36
Chapitre III. Calcul des courants de défaut dans les réseaux de transport	37

III.1 Introduction :	37
III.2 Définition	37
III.3 Les causes courantes de défauts	37
III.4 Effets d'un court-circuit	37
III.5 Calcul des courants de court-circuit.....	38
III.5.1 Présentation de la méthode des composantes symétriques :	38
III.5.2 formulation des équations générales de court-circuit	40
III.6 Calcul des tensions aux accès au moment du défaut.....	42
III.7 calcul des tensions en valeurs réelles aux accès du réseau :	42
III.8 calcul des courants dans les branches du réseau :	42
III.9 Réajustement du déphasage des tensions	43
III.10 calcul de la puissance de court-circuit :	43
III.11 Algorithme de calcul des courants de défaut	44
III.12 Conclusion	44
Chapitre IV. Calcul d'écoulement de puissance	45
IV.1. Introduction	45
IV.2 Objectifs	45
IV.3. Formulation du problème	45
IV.3.1. équations générales de la puissance	45
IV.3.2 Puissances écoulées dans les lignes :	46
IV.3.3 Puissance écoulée dans les transformateurs régulateurs	46
IV.3.4 Calcul des pertes totales dans le réseau :	47
IV.4 Méthodes de calcul	48
IV.4.1. Méthode de Gauss Seidel.....	48
IV.4.2 Méthode de Newton Raphson	52
IV.6 Conclusion :	59
Chapitre V. Dispatching Economique	60
V.1 Introduction	60
V.2 Caractéristique coût-production.....	60
V.2 Formulation du problème de dispatching économique.....	61
V.3 Dispatching économique sans pertes	62
V.3.1 La méthode de Kuhn-Tucker.....	62
V.3.2 La méthode du gradient.....	67
V.3.3 La méthode d'itération de Lambda	68
V.4 Dispatching économique avec pertes	69
V.4.1 Première approche :(Utilisation d'une expression mathématique des pertes)	69
V.4.2 Deuxième approche : (utilisation de l'OPF "Optimal Power Flow")	70
V.5 Conclusion	72
Conclusion générale	73
Références bibliographiques	74

Introduction générale

Le 20^{ème} siècle a vu peu à peu l'électricité s'imposer comme vecteur privilégié de l'énergie dans la quasi-totalité des domaines domestiques et industriels. Supports incontournables de cette énergie, les réseaux de transport et de distribution d'énergie électrique représentent aujourd'hui un enjeu économique et technologique considérable. Ils constituent une des composantes essentielles pour le développement et l'évolution des sociétés humaines que ce soit sur le plan de l'amélioration des conditions de vie que sur le développement des activités industrielles. Leur rôle est de fournir aux utilisateurs le produit électricité au moindre coût dans des conditions de qualité et de sécurité satisfaisantes.

Les réseaux électriques des différents pays autour de la méditerranée (Europe, Maghreb et Asie) sont interconnectés en un seul et même système de transport d'énergie électrique, à la fois maillé et bouclé. La moindre défaillance de ce système vaste et complexe, exploité et asservi en temps réel pour toujours adapter la production à la demande d'énergie électrique, serait une catastrophe industrielle et socio-économique. L'exploitation d'un tel réseau est donc toujours un compromis entre des contraintes économiques, des contraintes techniques liées à la physique du système, des contraintes de sûreté, d'exploitation, et des contraintes relatives à la qualité du produit "électricité". En constante évolution depuis près de 100 ans, le réseau est loin d'être figé : il se développe pour répondre à une demande sans cesse croissante, se transforme peu à peu en un marché concurrentiel, s'adapte à des contraintes environnementales nouvelles ... C'est ainsi que des lignes de distributions sont enfouies, mais aussi que des moyens de production décentralisés voient le jour : cogénération, éoliennes, ...

Si les réseaux d'énergie se développent, les charges qu'ils alimentent se sont aussi beaucoup diversifiées aux cours des dernières années. En particulier, le nombre croissant de charges non linéaires (comprenant des composants d'électronique de puissance) n'est pas sans répercussion sur le fonctionnement du réseau. Tout réseau d'énergie peut être perturbé par ces charges contraignantes, mais aussi par des incidents (foudre, courts-circuits, ...) pour lesquelles il convient toujours de détecter et de faire face. La maîtrise des régimes de fonctionnement perturbé et la conception de systèmes de protection rapides, sûrs et sélectifs contribuent à augmenter à la fois la fiabilité des réseaux d'énergie et la qualité du produit "électricité". Ces objectifs passent aujourd'hui par le développement et l'application de techniques très variées liées bien sûr au génie électrique, mais aussi à la modélisation des systèmes, à la simulation numérique, au traitement du signal, etc. Cette pluridisciplinarité est certainement la principale difficulté industrielle des prochaines années.

Ce travail constitue un support indispensable aux étudiants pour la compréhension de la modélisation et simulation des réseaux électriques. La réalisation de cet objectif passe inévitablement par la description des différents composants (résistance inductance et capacité), la représentation adéquate (représentation Fresnel et la représentation complexe) d'un signal électrique (courant, tension) en monophasé et en triphasé et les modèles des différents éléments du réseau (sources, lignes, transformateurs et charges). Cela constitue le contenu du premier chapitre

Le deuxième chapitre décrit le système d'unités relatives, un passage par la théorie des graphes et se termine par la construction des matrices admittance et impédance du réseau électrique. Ces matrices sont indispensables pour tous les calculs que nous aborderons dans ce document.

Le troisième chapitre est consacré au calcul des courants de défauts (triphasés, monophasé, biphasé et biphasé-terre) après avoir introduit la théorie des composantes symétriques.

Le quatrième chapitre est consacré au calcul d'écoulement de puissance par essentiellement deux méthodes (Gauss Seidel et Newton Raphson). Le calcul d'écoulement de puissance permet d'évaluer l'état des tensions d'un réseau électrique ainsi que les puissances transitants à travers tous les éléments du réseau.

Le cinquième et dernier chapitre est réservé au calcul optimale du coût de la production de l'énergie électrique ce qu'on appelle le dispatching économique. Cela consiste à déterminer la production de chaque centrale de production en minimisant le coût total de production et en tenant compte des contraintes d'égalité et d'inégalité.

Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre I Réseaux électriques en régime sinusoïdal : notions de base

I.1 Introduction

Le développement, et surtout l'interconnexion, depuis la fin du 19^{ème} siècle, des réseaux de production, de transport et de distribution d'énergie électrique a contraint les compagnies d'électricité - à faire des choix communs sur la nature du système électrique; tensions continues ou alternatives, monophasées ou polyphasées, valeurs de la fréquence, ... Ces choix ont été dictés par des considérations techniques, mais aussi économiques. Ils ont conditionné l'évolution des réseaux d'énergie et ont figé au cours des décennies quelques paramètres fondamentaux qui ne correspondent plus forcément aujourd'hui à un optimum. C'est ainsi que la tension a été **choisie alternative**, afin de pouvoir exploiter les propriétés du transformateur pour transporter l'énergie en haute tension (pour minimiser les pertes) et l'utiliser en basse tension (pour des raisons de sécurité). Le système **triphase présente en sus des avantages** par rapport au monophasé : création plus simple d'un champ tournant (machines synchrones et asynchrones), exploitation possible des différents couplages des transformateurs, utilisation des tensions simples ou composées selon les besoins, puissance instantanée constante, ... Quand à la fréquence, elle a été choisie en fonction de contraintes techniques relatives aux matériels de réseau et aux machines tournantes. La fréquence optimale serait certainement aujourd'hui supérieure à 50 ou 60 Hz.

Malgré le développement de l'électronique de puissance permettant d'exploiter des liaisons à courant continu, l'étude des réseaux électriques passe nécessairement par celle des systèmes triphasés.

I.2 Représentation des signaux sinusoïdaux

En première approximation, on peut considérer que les différents signaux présents sur un réseau d'énergie (tensions et courants) sont purement sinusoïdaux de fréquence imposée par les alternateurs : 50 Hz (Europe, Maghreb,...) ou 60 Hz (USA, ...). Dès lors, l'étude en régime permanent, à la fréquence fondamentale, d'un tel réseau et des différents éléments qui le composent permet déjà d'en comprendre les grands principes de fonctionnement. Dans ce contexte, la représentation et le traitement de signaux sinusoïdaux prend une importance toute particulière.

Un réseau de production, transport, distribution et de consommation d'énergie électrique est un système complexe qui est fréquemment le siège de phénomènes transitoires (manœuvres, défauts, à-coups de charges, ...), et/ou non linéaires (saturation de transformateurs, démarrage de moteurs, conversion d'énergie, ...). L'étude de ces phénomènes et de leurs conséquences sur le fonctionnement du réseau n'est possible qu'en utilisant des outils mathématiques parfois complexes, que nous n'aborderons pas dans ce document.

I.2.1 Représentation vectorielle

Considérons un signal sinusoïdal $s(t)$, de valeur crête A , de fréquence f et de phase φ :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (I.1)$$

Un tel signal est entièrement caractérisé par trois variables A , f et φ . On peut y associer une autre grandeur, en l'occurrence un vecteur $\vec{s}(t)$, caractérisé lui-aussi par les mêmes trois variables. A l'instant $t=0$, l'angle entre le vecteur $\vec{s}(t)$ et l'axe de référence vaut φ .

Si on a deux signaux sinusoïdaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ de fréquences différentes f_1 et f_2 , leurs vecteurs associés $\vec{s}_1(t)$ et $\vec{s}_2(t)$ tourneront à des vitesses différentes, leur déphasage est alors variable en fonction du temps. Si par contre les deux signaux considérés sont de même fréquence f , leurs vecteurs associés tournent à la même vitesse, le déphasage φ de l'un par rapport à l'autre est ainsi fixe. Alors seule

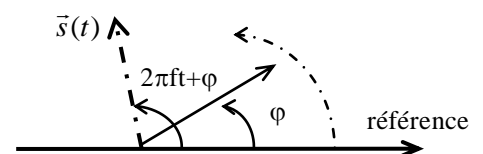


Fig. I.1.a : diagramme de Fresnel
(I)

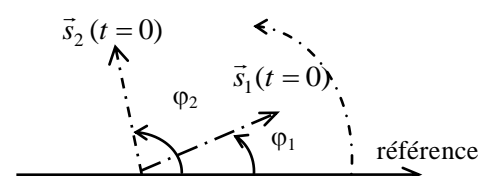


Fig. I.1.b : diagramme de Fresnel

la représentation des vecteurs à l'instant $t=0$ présente un intérêt. Sur un le schéma on peut lire l'amplitude des signaux et leurs phases.

La somme (ou la différence) de signaux sinusoïdaux est équivalente à la somme (ou la différence) des vecteurs qui leurs sont associés. Cette représentation vectorielle permet de substituer à des calculs trigonométriques des raisonnements géométriques.

I.2.2 Représentation complexe

À chaque vecteur $\vec{s}(t)$ représentant un signal sinusoïdal $s(t)$ peut encore être associé un nombre complexe, noté $\bar{s}(t)$, dont la partie réelle est la projection de $\vec{s}(t)$ sur l'axe de référence, et la partie imaginaire la projection sur un axe en quadrature.

Le signal $s(t)$ défini par l'équation (I.1) peut s'exprimer comme la partie réelle de $\bar{s}(t)$ comme suit :

$$s(t) = \Re(Ae^{j2\pi ft}.e^{j\varphi}) \quad (I.2)$$

La fréquence du signal est connue, on peut se contenter d'associer au signal $s(t)$ un nombre complexes plus simple, ne faisant intervenir que les informations intéressantes (l'amplitude et la phase de $s(t)$) :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \implies \bar{s} = Ae^{j\varphi} \quad (I.3)$$

La somme et différence trigonométriques se ramènent à la somme et différence de nombres complexes, ce qui est plus simple.

I.2.3 valeur efficace et valeur crête

la valeur efficace A_{eff} et la valeur crête A pour un signal $s(t)$ purement sinusoïdal, sont reliées par la relation suivante $A = \sqrt{2} \cdot A_{eff}$ la définition de \bar{s} par la relation (I.3) est souvent préférée la définition avec la valeur efficace : $\bar{s} = A_{eff}e^{j\varphi}$. Le choix de la valeur crête ou de la valeur efficace doit être précisé, car il a un effet direct sur la définition de grandeurs telles que la puissance complexe.

I.2.4 Impédances complexes

Considérons un dipôle linéaire alimenté en régime permanent sous une tension sinusoïdale $V(t)$ et parcouru par un courant $I(t)$. Ces deux grandeurs (courant et tension) peuvent être associées à un diagramme vectoriel ainsi qu'à des nombres complexes \bar{V} et \bar{I} . L'objectif est de trouver un nombre complexe \bar{Z} tel que :

$$\bar{V} = \bar{Z} \bar{I} \quad (I.4)$$

a) Résistance

$$I(t) = I \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = 2\pi f \quad (I.5)$$

$$V(t) = RI(t) = RI \cos(\omega t + \varphi) \quad (I.6)$$

$$\text{On peut écrire : } \bar{I} = Ie^{j\varphi} \text{ et } \bar{V} = RIe^{j\varphi} \quad (I.7)$$

b) Inductance

$$I(t) = I \cos(\omega t + \varphi),$$

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -L\omega I \sin(\omega t + \varphi) = L\omega I \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$\text{On peut écrire : } \bar{I} = Ie^{j\varphi} \text{ et}$$

$$\bar{V} = L\omega Ie^{j(\varphi+\pi/2)} = L\omega Ie^{j\pi/2} e^{j\varphi} = jL\omega Ie^{j\varphi} = jL\omega \bar{I}$$

$$\bar{Z}_L = jL\omega$$

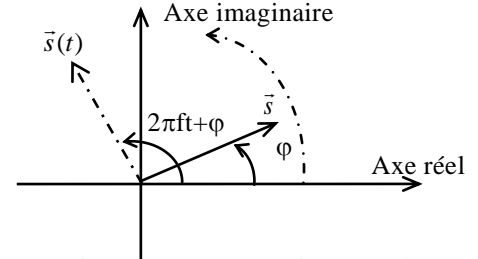
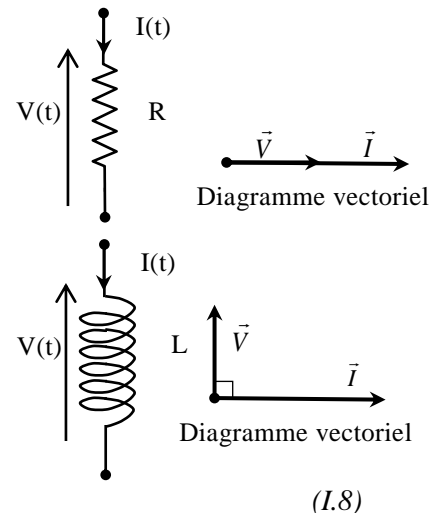
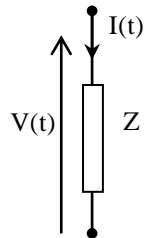


Fig. I.2 : Représentation complexe



(I.8)

c) Capacité

$$I(t) = I \cos(\omega t + \varphi),$$

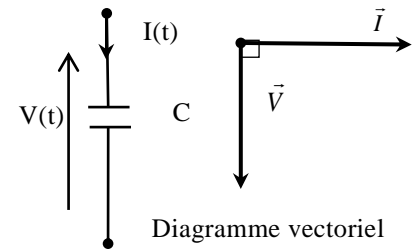
$$\bar{I} = I e^{j\varphi}, V(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C\omega} I \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{C\omega} I \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

On peut écrire :

$$\bar{I} = I e^{j\varphi} \text{ et}$$

$$\bar{V} = \frac{1}{C\omega} I e^{j(\varphi - \pi/2)} = \frac{1}{C\omega} I e^{-j\pi/2} e^{j\varphi} = -j \frac{1}{C\omega} I e^{j\varphi} = -j \frac{1}{C\omega} \bar{I}$$

$$\bar{Z}_C = -j \frac{1}{C\omega}$$



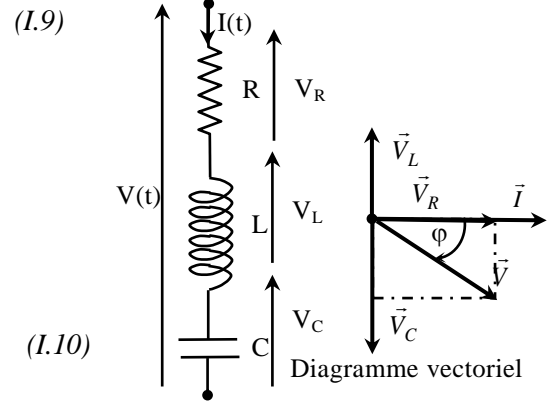
d) Dipôle R, L, C

$$\bar{I} = I e^{j\varphi}, V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

d'où on peut écrire :

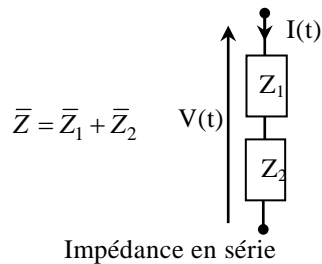
$$\bar{V} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C = R\bar{I} + jL\omega\bar{I} - j\frac{1}{C\omega}\bar{I} = [R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}] \bar{I}$$

$$\bar{Z}_{RLC} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C = R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}$$

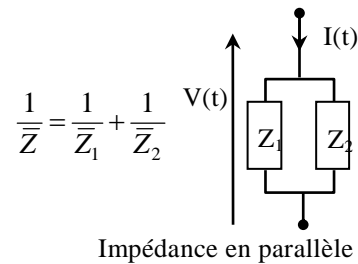


e) Association série parallèle

Les associations série ou parallèle des éléments R, L et C vérifient les règles connues pour des résistances :



Impédance en série



Impédance en parallèle

I.2.5 Puissance

Nous étudions comment se répartit la puissance instantanée dissipée dans chacun des éléments du dipôle R, L, C.

Tableau I.1 Puissance instantanée et puissance moyenne

	Pour une résistance	Pour une inductance	Pour une capacité
Tension	$V(t) = V \cos(\omega t)$ $= \sqrt{2} V_{\text{Reff}} \cos(\omega t)$	$V(t) = V_L \cos(\omega t + \pi/2)$ $= \sqrt{2} V_{\text{Leff}} \cos(\omega t + \pi/2)$	$V(t) = V_C \cos(\omega t - \pi/2)$ $= \sqrt{2} V_{\text{Ceff}} \cos(\omega t - \pi/2)$
Puissance instantanée $P(t) = V(t)I(t)$	$P(t) = RI^2(t) = RI^2 \cos^2 \omega t$ $P(t) = \frac{RI^2}{2} (1 + \cos 2\omega t)$	$P_L(t) = -L\omega I \cos(\omega t + \pi/2) I \cos \omega t$ $= -L\omega I^2 \sin \omega t \cos \omega t$ $P(t) = -\frac{L\omega I^2}{2} \sin 2\omega t$	$P(t) = \frac{1}{C\omega} I \cos(\omega t - \pi/2) I \cos \omega t$ $P(t) = \frac{I^2}{2C\omega} \sin 2\omega t$
Valeur moyenne de la puissance	$P = \frac{RI^2}{2} = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$	$P = 0$ puissance moyenne nulle	$P = 0$ puissance moyenne nulle

L'origine des temps est choisie telle que : $I(t) = I \cos \omega t = \sqrt{2} I_{\text{eff}} \cos \omega t$

La tension aux bornes du dipôle est alors $V(t) = V \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} V_{\text{eff}} \cos(\omega t + \varphi)$

Les tensions aux bornes de chacun des éléments en série sont (voir figure I.3)

(Remarque : tous les courants et tensions sont supposés sinusoïdaux, ce qui implique que valeur crête et valeur efficace sont reliées par un facteur $\sqrt{2}$.

I.2.6 Puissances active et réactive

La puissance instantanée dissipée **dans la partie L, C** du dipôle a pour expression :

$$P_x(t) = -\frac{I^2}{2} X \sin(2\omega t) = -\frac{V_x I}{2} \sin(2\omega t) = -\frac{V \sin \varphi}{\sqrt{2}} \frac{I}{\sqrt{2}} \sin(2\omega t) = -V_{eff} I_{eff} \sin \varphi \sin(2\omega t)$$

$$P_x(t) = -Q \sin(2\omega t)$$

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin \varphi$$

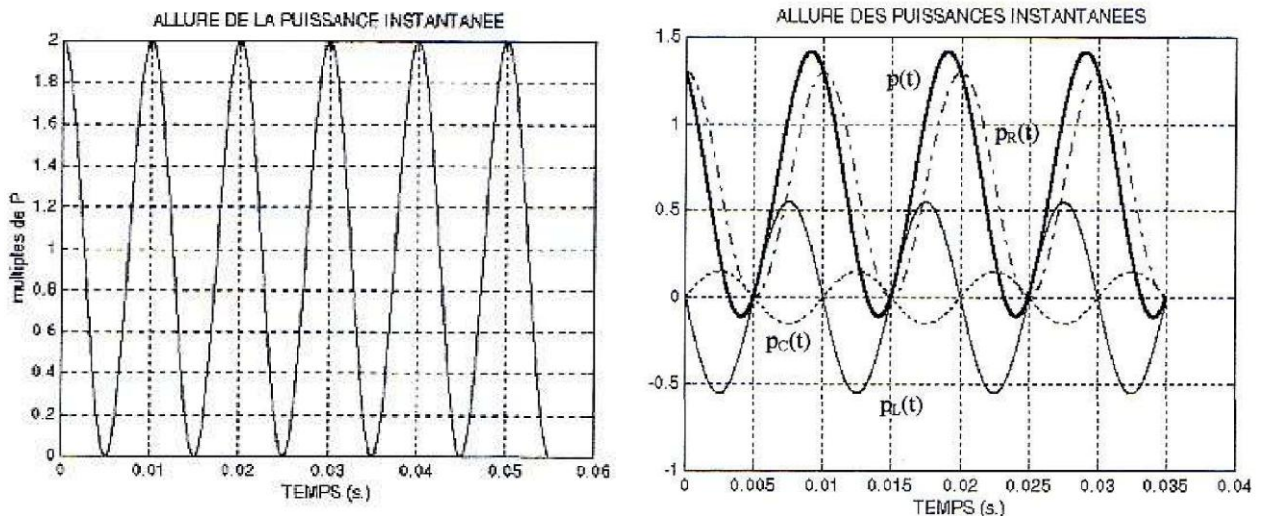


Fig.I.3 Allure des puissances instantanées dans un dipôle RLC série

La puissance instantanée dissipée dans l'ensemble du dipôle RLC série a pour expression

$$P(t) = P(1 + \cos 2\omega t) - Q \sin(2\omega t) \quad (I.11)$$

P : est la valeur moyenne de la puissance $p(t)$ appelée aussi puissance active

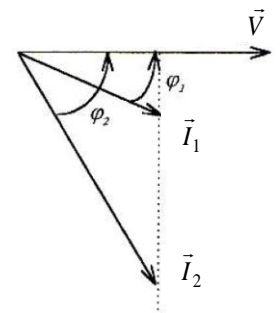
Q : est la valeur moyenne de la puissance réactive

Le signe de Q dépend des valeurs respectives de $L\omega$ et $1/C\omega$.

Si le dipôle est inductif ($L\omega > 1/c\omega$), alors $Q > 0$; on dit que le dipôle consomme de la puissance réactive. Si le dipôle est capacitif ($L\omega < 1/c\omega$), alors $Q < 0$; on dit que le dipôle fournit de la puissance réactive. La figure suivante représente les puissances instantanées dans les différents éléments d'un dipôle RLC série inductif.

Il est nécessaire de réduire au maximum les transits de puissance réactive sur un réseau d'énergie. À cette fin, comparons deux charges linéaires absorbant la même puissance utile (puissance active) P , mais une puissance réactive différente, respectivement Q_1 et Q_2 . Le diagramme vectoriel relatif à ces deux charges est le suivant

Il est clair sur le schéma ci-dessus que pour la même puissance utile (active), une plus grande puissance réactive conduit à un courant absorbé plus grand, et par conséquent, à plus de pertes. Ceci reviendra en fait à limiter le déphasage entre tension et courant. Là où le réseau est trop inductif, il conviendra par exemple de rajouter des éléments capacitifs (compensation de puissance réactive par bancs de capacités).



Considérons à nouveau un dipôle linéaire alimenté en régime permanent sous une tension sinusoïdale $V(t)$ et parcouru par un courant $I(t)$. Ces deux grandeurs (courant et tension) peuvent être associées à un

diagramme vectoriel ainsi qu'à des nombres complexes V et I . Soient P et Q les puissances actives et réactives reçues (ou fournies) par ce dipôle. Comment calculer P et Q à partir de \vec{V} et \vec{I}

D'une manière générale, en choisissant la valeur efficace et non la valeur crête pour caractériser l'amplitude des signaux sinusoïdaux, \vec{V} et \vec{I} ont pour expression

$$\vec{V} = V_{eff} e^{j(\delta + \varphi)} \text{ et } \vec{I} = I_{eff} e^{j\delta}$$

δ : représente le déphasage de $I(t)$ par rapport à une référence de phase donnée.

φ : est le déphasage entre $V(t)$ et $I(t)$ introduit par le dipôle considéré.

Notons \vec{I}^* le complexe conjugué de \vec{I}

Calculons la grandeur complexe $\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{I}^*$

$$\vec{S} = V_{eff} e^{j(\delta + \varphi)} \cdot I_{eff} e^{-j\delta} = V_{eff} \cdot I_{eff} e^{j\varphi} = V_{eff} \cdot I_{eff} \cos \varphi + j V_{eff} \cdot I_{eff} \sin \varphi$$

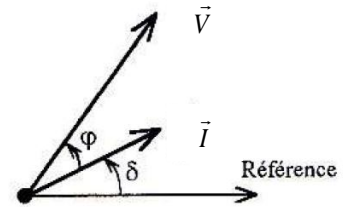
ou

$$P = V_{eff} \cdot I_{eff} \cos \varphi \quad (I.12.a)$$

$$Q = V_{eff} \cdot I_{eff} \sin \varphi \quad (I.12.b)$$

Cette relation n'est valable que si les nombres complexes \vec{V} et \vec{I} sont de module V_{eff} et I_{eff} . Si c'est les valeurs "crête" qui sont prises en compte, il faut écrire :

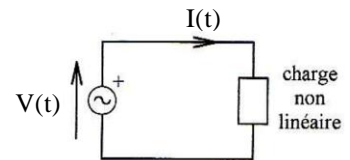
$$\vec{S} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{I}^*}{2} = P + jQ \quad (I.12.c)$$



Cas d'un régime non sinusoïdal

Les paragraphes précédents reposent sur l'hypothèse que toutes les grandeurs (courants et tensions) sont parfaitement sinusoïdales. Dans ces conditions, la notion de puissance réactive est intimement liée à la présence d'éléments inductifs ou capacitifs dans la charge. Elle traduit le déphasage φ entre tension et courant

Toutefois, lorsque les grandeurs électriques ne sont plus parfaitement sinusoïdales, les raisonnements menés ci-dessus ne sont plus valables : la notion de déphasage peut même ne plus avoir de sens entre deux signaux non sinusoïdaux. Afin de se ramener au cas sinusoïdal, il est alors utile de décomposer les signaux en séries de Fourier afin de pouvoir à nouveau considérer des déphasages, non plus entre les signaux "bruts", mais entre leurs fondamentaux.



Considérons à titre d'exemple le circuit suivant :

Supposons la source parfaitement sinusoïdale

$$V(t) = V(\cos \omega t + \varphi)$$

La charge n'étant pas linéaire, le courant, lui, ne sera pas parfaitement sinusoïdal. Supposons toutefois qu'il reste périodique de période $2\pi/\omega$; il peut alors se décomposer en série de Fourier :

$$I(t) = I_0 + I_1 \cos \omega t + \sum_{n=2}^{\infty} I_n \cos(n\omega t + \psi_n) \quad (I.13)$$

(Remarque : l'origine des temps a été choisie telle que $\psi_n = 0$).

$$T = 2\pi/\omega.$$

La puissance moyenne dissipée dans la charge a pour expression :

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) I(t) dt$$

Cette puissance moyenne peut être interprétée pour le produit scalaire de la fonction $V(t)$ par la fonction $I(t)$:

$$\langle p(t) \rangle = \langle V(t) | I(t) \rangle$$

$$\langle p(t) \rangle = \langle V(t) | \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_n \cos(n\omega t + \psi_n) \rangle$$

Si l'on suppose que la fonction $I(t)$ est de carré intégrable sur $[0, T]$ (c'est physiquement toujours le cas...), alors le signe $\lim_{n \rightarrow \infty}$ peut être sorti du produit scalaire :

$$\langle p(t) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle V(t) | \sum_{n=0}^{\infty} I_n \cos(n\omega t + \psi_n) \rangle \quad (I.14)$$

Or, on peut montrer que $\frac{1}{T} \int_0^T \cos(m\omega t + \varphi) \cos(n\omega t + \psi_n) dt = 0$ pour tout $n \neq m$ (les fonctions $\cos n\omega t$ et $\sin m\omega t$ définies sur $[0, T]$ sont orthogonales lorsque $n \neq m$).

Du produit scalaire précédent, il reste finalement :

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V \cos(\omega t + \varphi) I_1 \cos(n\omega t + \psi_n) dt$$

C.à.d.

$$\langle p(t) \rangle = \frac{VI_1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] dt = \frac{VI_1}{2} \cos \varphi$$

$$\langle p(t) \rangle = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos \varphi$$

Ainsi, seule la composante fondamentale du courant intervient dans l'expression de la valeur moyenne de la puissance dissipée dans la charge non linéaire. Cette puissance peut encore être définie comme étant la "puissance active" :

$$P = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \cos \varphi$$

Rien n'empêche alors de définir à nouveau une "puissance réactive", en n'utilisant que la composante fondamentale de $I(t)$

$$Q = V_{\text{eff}} I_{1\text{eff}} \sin \varphi$$

φ : est bien le déphasage entre les **fondamentaux** des signaux tension et courant

La puissance réactive définie ci-dessus à partir de la composante fondamentale des signaux ne fait aucunement appel à la notion d'inductance ou de capacité.

Remarque

Il est commode de définir la puissance moyenne à partir des valeurs efficaces vraies. La relation (I.14) devient alors

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} F_p \quad (I.15)$$

F_p est appelé "facteur de puissance".

Il est souhaitable de maximiser le facteur de puissance d'une charge, afin de minimiser le courant efficace appelé (donc les pertes), pour une puissance moyenne consommée donnée. Ce point sera important lors du choix et du dimensionnement de dispositifs d'électronique de puissance installés sur un réseau d'énergie.

I.3 Réseaux triphasés

I.3.1 Principe

Considérons un système électrique constitué de trois charges monophasées identiques alimentées par des tensions sinusoïdales équilibrées déphasées les unes par rapport aux autres de $2\pi/3$:

La charge Z étant linéaire et identique sur chaque phase (réseau équilibré), les trois courants dans les charges $I_1(t)$, $I_2(t)$ et $I_3(t)$ sont sinusoïdaux, équilibrés et déphasés de $2\pi/3$ les uns par rapport aux autres. Le schéma vectoriel de l'ensemble des trois schémas monophasés est représenté par le diagramme vectoriel en face.

L'intérêt économique du "triphasé" (et, plus généralement, du "multiphasé") repose sur une association des circuits monophasés permettant de réduire le nombre de conducteurs, à puissance transmise égale. Pour réaliser cette association, on peut exploiter l'une ou l'autre des deux relations suivantes :

$$I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) = 0 \quad (\text{montage étoile})$$

$$e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0 \quad (\text{montage triangle})$$

I.3.2 Montage étoile

Si le réseau est parfaitement équilibré (tant au niveau des sources que des charges), le courant $I_N(t)$ qui circule dans le conducteur de retour N est nul. Dans ces conditions, on peut donc ne pas le prévoir dans le montage et faire ainsi l'économie de trois conducteurs sur 6, par rapport au schéma de la figure I.4.a. Toutefois, la conception et l'exploitation d'un réseau électrique ne peuvent être menées sans prendre en compte son fonctionnement en régime déséquilibré, tel qu'il peut par exemple apparaître lors d'un court-circuit entre une phase et la terre. Dans une telle situation, il est nécessaire de distinguer le point neutre N et la terre, qui pourra jouer le rôle du "conducteur de retour" pour les courants de court-circuit. La façon dont le point neutre est connecté à la terre sera déterminante dans l'évolution de ces courants de court-circuit. Ainsi, en régime déséquilibré, la figure I.4 doit être complétée par l'impédance de mise à la terre du système triphasé (fig. I.5):

Dès que l'étude du système triphasé se limite à des régimes équilibrés, la façon dont le point neutre est mis à la terre (nature de l'impédance Z_n) est sans importance.

Sur la figure I.5 apparaissent les deux types de tension :

- des tensions entre une phase et la terre, dites encore **tensions simples** : $V_i(t)$
- des tensions entre deux phases, dites encore **tensions composées** : $U_{ij}(t)$

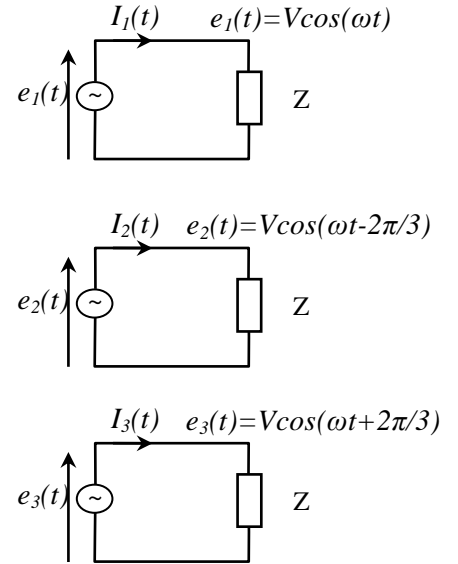


Fig. 9. Trois circuits monophasés

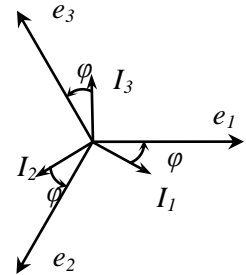


Diagramme vectoriel des tensions et courant d'un système triphasé

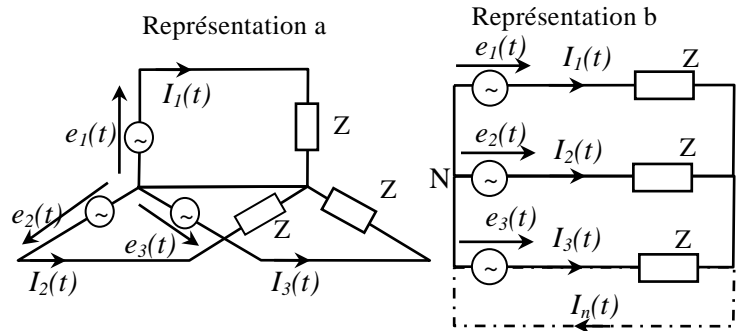


Fig.I.4. Schéma d'un couplage "étoile" d'un système triphasé

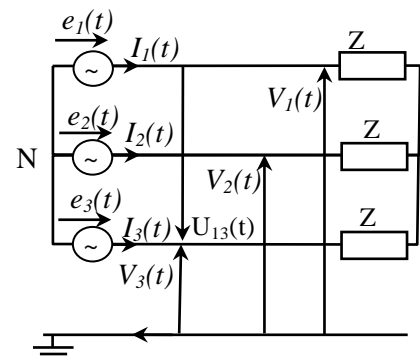


Fig.I.5 Système 3φ étoile équilibré ; tension simple et tensions composées

En revanche, le couplage "étoile" ne fait apparaître qu'un seul type de courant, qui circule à la fois dans les lignes et dans les charges : $I_i(t)$.

La relation instantanée entre tensions simples et tensions composées est:

$$U_{ij}(t) = V_i(t) - V_j(t); \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (I.16)$$

Cette relation se traduit, en régime sinusoïdal, par le schéma vectoriel représentée par la figure I.6.

Un raisonnement géométrique élémentaire sur la figure ci-dessus montre que pour passer du vecteur \vec{V}_i au vecteur \vec{U}_{ij} , il faut multiplier le module par $\sqrt{3}$ et faire une rotation d'angle $\pi/6$, d'où, en notation complexe

$$\bar{U}_{ij} = \sqrt{3} \bar{V}_i e^{j\pi/6}; \quad \bar{U}_{12} = \sqrt{3} \bar{V}_1 e^{j\pi/6}; \quad \bar{U}_{23} = \sqrt{3} \bar{V}_2 e^{j\pi/6}; \quad \bar{U}_{31} = \sqrt{3} \bar{V}_3 e^{j\pi/6}; \quad (I.17)$$

En cas de couplage "étoile", il est donc possible de mesurer deux types de tension : des tensions simples et des tensions composées. Elles sont reliées en module et en phase par la relation (I.16). En revanche, un seul type de courant peut être mesuré : le courant qui circule dans les charges.

I.3.3 Montage triangle

En remarquant sur la figure I.6 que $e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) = 0$, on peut encore connecter les circuits monophasés de la manière représentée par la figure I.7.

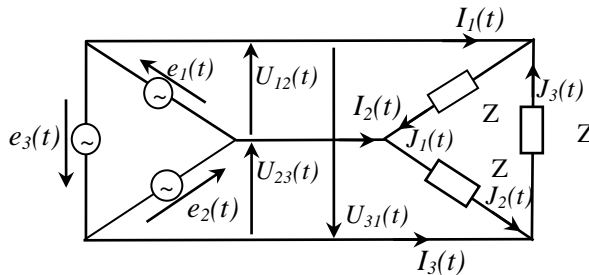


Fig.I.7 Schéma d'un couplage "triangle" d'un système triphasé

Alors que le couplage "étoile" introduisait deux types de tension (simple et composée), le couplage "triangle" introduit naturellement deux types de courants :

- les courants $I_i(t)$, qui circulent **dans les lignes** du réseau,
- les courants $J_i(t)$, qui circulent dans les charges elles-mêmes.

Supposons que les courants dans les charges $J_i(t)$ soient connus ; comment en déduire les courants dans les lignes ?

La relation instantanée

$$I_1(t) = J_1(t) - J_3(t) \quad (I.18)$$

$$I_i = \sqrt{3} J_i e^{-j\pi/6}; \quad (I.19.a)$$

$$I_2 = \sqrt{3} J_2 e^{-j\pi/6}; \quad (I.19.b)$$

$$I_3 = \sqrt{3} J_3 e^{-j\pi/6}; \quad (I.19.c)$$

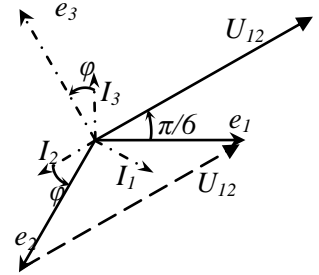


Fig. I.6 Diagramme vectoriel des tensions simples et composées

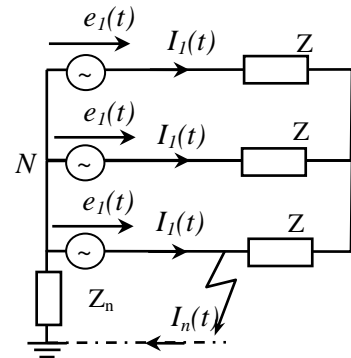


Fig.I.8 Système triphasé étoile avec impédance de mise à terre pour réduire les courants de défaut à la

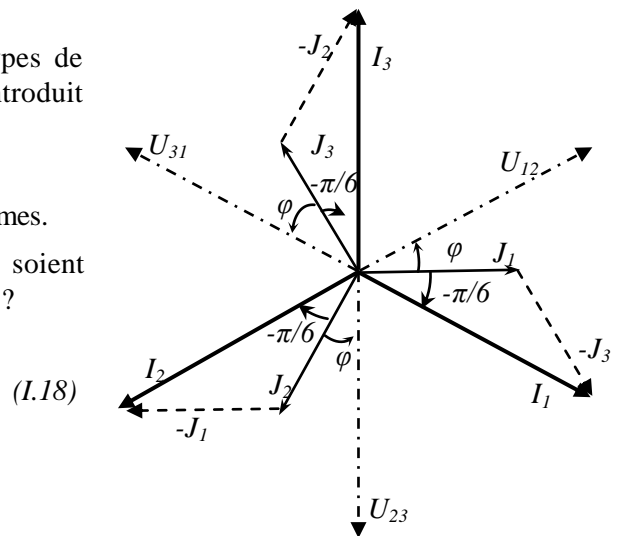


Fig. I.9 Diagramme vectoriel des courants simples i_i et composés J_i

Si on ne connaît que les courants de ligne $J_i(t)$, il est encore possible de calculer les courants dans les charges en inversant la relation (I.19) :

$$J_i = \frac{I_i}{\sqrt{3}} e^{+j\pi/6}; i = 1, 2, 3 \quad (I.20)$$

Les sources de tensions étant couplées en triangle, il n'existe à priori pas de point neutre du système triphasé. Cependant, il est encore possible non seulement de calculer des tensions simples à partir des tensions composées en inversant la relation (I.17), mais encore de reconstituer physiquement un point neutre en installant un dispositif permettant de relier le réseau exploité à la terre. Ce dernier point relève de la technique d'exploitation des réseaux.

Remarque importante

Les relations (I.17) et (I.19) ont été établies dans l'hypothèse d'un régime sinusoïdal équilibré. Elles ne peuvent être utilisées sans précaution en dehors de ce cadre. En particulier, si la somme des tensions simples n'est pas nulle (présence d'une tension homopolaire), la relation (I.17) ne peut plus être inversée. De même, en cas de courant homopolaire se rebouclant dans une charge couplée en triangle, la relation (I.19) n'est plus inversible. On doit dans ces cas revenir à des relations instantanées :

$$V_i(t) = \frac{1}{3} [V_N(t) + U_{i2}(t) - U_{31}(t)] \quad (I.21.a)$$

$$J_i(t) = \frac{1}{3} [I_N(t) + I_1(t) - I_3(t)] \quad (I.21.b)$$

I.3.3 Transformation étoile/triangle

Il est possible de définir une source de tension triphasée connectée en étoile ayant, vue de ses bornes, exactement le même comportement en régime équilibré sinusoïdal que cette source connectée en triangle.

D'après la figure I.7 et la relation (I.17), il suffit de poser

$$\bar{V}_i = \frac{\bar{U}_{ij}}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6}; i = 1, 2, 3 \quad (I.22)$$

Cette relation est bien-sûr inversible, et permet aussi de passer d'une source "étoile" à une source "triangle" (eq. I.17). Considérons maintenant une charge passive, d'impédance complexe \bar{Z}_t connectée en triangle. D'après les relations (I.17) et (I.19), il est possible de définir une charge connectée en étoile, d'impédance complexe \bar{Z}_e , ayant, vue de ses bornes, exactement le même comportement en régime sinusoïdal équilibré. Il suffit de poser

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{Z}_t}{3} \quad (I.23)$$

Les relations (I.20) et (I.21) permettent de convertir une source triphasée avec impédance interne, d'une connexion étoile en une connexion triangle, ou inversement.

I.3.4 Puissances en triphasé

Considérons une charge triphasée, connectée en étoile ou en triangle.

La puissance instantanée dissipée dans cette charge peut se calculer de deux manières différentes :

$$p(t) = V_1(t)I_1(t) + V_2(t)I_2(t) + V_3(t)I_3(t) \quad (\text{couplage étoile}) \quad (I.24.a)$$

$$p(t) = U_{12}(t)J_1(t) + V_{23}(t)J_2(t) + U_{31}(t)I_3(t) \quad (\text{couplage triangle}) \quad (I.24.b)$$

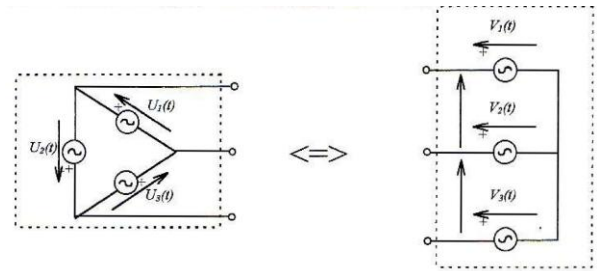


Fig. I.10 transformation triangle / étoile pour des sources de tension

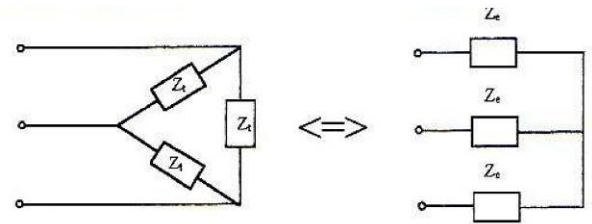


Fig. I.11 transformation triangle / étoile pour une charge passive

Il est important de noter que si la charge est connectée en triangle, le calcul de puissance peut encore être mené sur la charge étoile équivalente définie par la relation (I.21). Le diagramme vectoriel relatif à cette charge triphasée est représenté par la figure I.13.

La puissance instantanée dans une phase a pour expression :

$$p(t) = P(1 + \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t$$

Les puissances (P et Q) étant définies par les expressions (I.12.a) et (I.12.b).

Ainsi, pour l'ensemble de la charge triphasée, la puissance instantanée sera

$$\begin{aligned} p(t) &= P(1 + \cos 2\omega t) - Q \sin 2\omega t \\ &\quad + P(1 + \cos(2\omega t - 4\pi/2)) - Q \sin(2\omega t - 4\pi/2) \\ &\quad + P(1 + \cos(2\omega t - 8\pi/2)) - Q \sin(2\omega t - 8\pi/2) \\ p(t) &= 3P \end{aligned} \quad (I.22)$$

Il apparaît donc qu'en régime sinusoïdal permanent, la puissance instantanée est **constante** dans une charge triphasée, ce qui représente un avantage par rapport au monophasé (voir relation (I.9)).

Toutefois, le fait que cette puissance instantanée globale soit constante n'empêche pas des fluctuations de puissance instantanée sur chaque phase prise séparément. En particulier, les conducteurs de phase devront encore être dimensionnés pour transiter la puissance réactive.

Nous retiendrons enfin que la puissance active et la puissance réactive peuvent être calculées en considérant :

- les tensions simples V , et les courants de ligne
- ou
- les tensions composées U_{ij} et les courants dans la charge J_i .

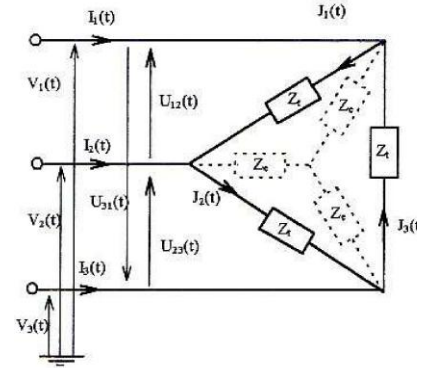


Fig. I.12 Schéma équivalent YΔ

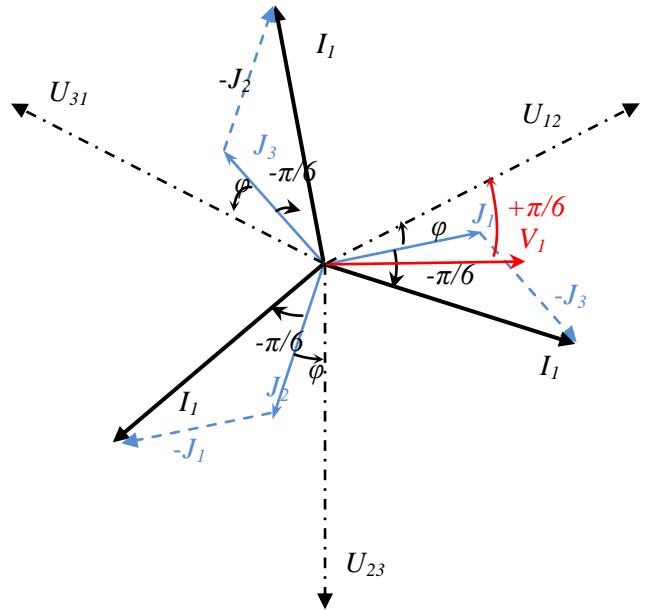


Fig. I.13 Diagramme vectoriel des courants simples i_i et composées J_i

I.4 Modélisation des éléments du réseau électrique

Cette partie décrit les modèles utiles pour mener à bien les calculs dans un réseau d'énergie. Il rappelle quelques résultats fondamentaux du cours de modélisation.

Les calculs que nous allons faire n'ont d'intérêt que si le réseau est maillé. On s'intéressera donc essentiellement au réseau de transport, même si les méthodes décrites sont indépendantes du niveau de tension. Sur un tel réseau, on distingue essentiellement 4 types d'éléments fondamentaux :

- des moyens de production,
- des lignes,
- des transformateurs de puissance,
- des charges

Notons que les charges ne sont qu'exceptionnellement des clients directement raccordés en THT. Elles représentent plus généralement un point de connexion au réseau de distribution (typiquement 63 kV), via un transformateur et rarement en 400 kV (El Hadjar, Annaba).

Notons également que les moyens de réglage de la puissance réactive (capacités, réactance, compensateurs statiques de puissance réactive) peuvent être assimilés à des charges ou à des moyens de production ne consommant ou ne fournissant que de la puissance réactive.

D'une manière générale, modéliser un réseau d'énergie, c'est avant tout faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui conditionneront à la fois la complexité et le domaine de validité du modèle.

Les principales hypothèses retenues, dans le cadre des différentes études, sont les suivantes : seul le comportement en régime permanent à 50 Hz est étudié ; le réseau est supposé linéaire. Un choix important doit alors être fait : le calcul des transits de puissance se limite-t-il à un fonctionnement totalement équilibré du réseau, L'étude du réseau peut être menée à partir d'un schéma monophasé équivalent. Cette approche est bien souvent suffisante dans le cadre de l'exploitation d'un réseau d'énergie. Elle permet déjà de prédéterminer, pour un plan de production et un niveau de charge donnés, quelle sera la charge de chacune des lignes du réseau en fonctionnement normal, et aussi quel sera le plan de tension du réseau.

Dans ces conditions, les modèles retenus sont les suivants :

I.4.1 Moyens de production

Un moyen de production sera simplement représenté par une fourniture de puissance active P_{Gi} et une fourniture ou consommation de puissance réactive Q_{Gi} ,

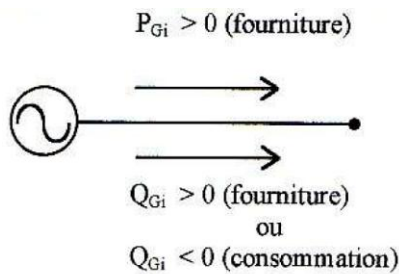


Fig. I.14 Modélisation d'une centrale de production

La puissance réactive peut être fournie ou consommée, selon le réglage de l'alternateur

I.4.2 Lignes

Considérons une ligne de transport d'énergie électrique parfaitement symétrique, et fonctionnant en régime équilibré. Son comportement peut être étudié en se limitant à un schéma monophasé équivalent. Par ailleurs, cette ligne se caractérise par des grandeurs *linéiques* résistance R et inductance L (directes) en série, capacité C et conductance G (directes) en parallèle. Ces grandeurs sont réparties le long de la ligne et s'expriment par unité de longueur :

$$Z_s = R + jL\omega \text{ (en } \Omega/\text{km)} \quad (I.26.a)$$

$$Y_p = G + jC\omega \text{ (en } \Omega/\text{km)} \quad (I.26.b)$$

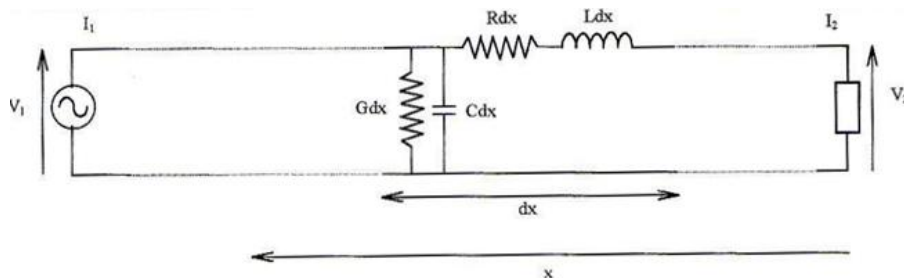


Fig. I.15 Modélisation d'une ligne par constantes réparties

La mise en équation liée au schéma ci-dessus fait intervenir des dérivées partielles de la tension et du courant par rapport à x (position le long de la ligne) et au temps t . La résolution de ces équations dans le cas particulier du régime permanent sinusoïdal conduit à :

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\gamma x & Z_c sh\gamma x \\ \frac{1}{Z_c} sh\gamma x & ch\gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (I.27)$$

avec

$$\gamma = \sqrt{Z_s Y_p} \quad (\gamma \text{ est un nombre complexe, appelé "constante de propagation" : } \gamma = a + jb)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} \quad (Z_c \text{ est un nombre complexe, appelé "impédance caractéristique"})$$

Si on ne s'intéresse qu'au comportement de la ligne vue de ses extrémités, ce système devient

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\gamma X & Z_c sh\gamma X \\ \frac{1}{Z_c} sh\gamma X & ch\gamma X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (I.28)$$

où X désigne la longueur totale de la ligne

Considérons maintenant un modèle quadripolaire de la ligne sous la forme dite "schéma en π " :

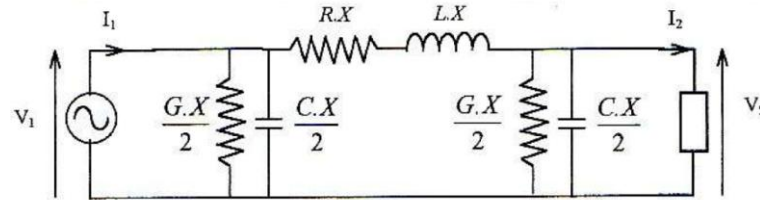


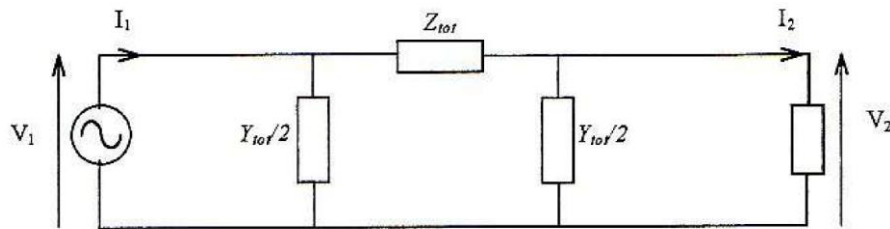
Fig. I.16 Modélisation d'une ligne par un schéma en π

RLC et G représentent les constantes linéiques de la ligne

Nous noterons

$$Z_{tot} = Z_s X \text{ et } Y_{tot} = Y_p X$$

Le schéma cidessus se résume alors à :



Dont les équations sont :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Y_{tot} Z_{tot}}{2} & Z_{tot} \\ Y_{tot} + \frac{Y_{tot}^2 Z_{tot}}{4} & 1 + \frac{Y_{tot} Z_{tot}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (I.29)$$

Le modèle à constantes concentrées de la figure I.16 ne représentera bien le comportement de la ligne vue de ses extrémités que si les équations matricielles (I.28) et (I.29) conduisent à des résultats similaires. En d'autres termes, à quelles conditions les matrices carrées intervenant dans (I.28) et (I.29) sont-elles "quasiment" identiques ?

Il est possible de développer les ch et sh de (I.28) en série :

$$ch\gamma X = 1 + \frac{(\gamma X)^2}{2} + \dots = 1 + \frac{Z_s Y_p X^2}{2} + \dots = 1 + \frac{Z_{tot} Y_{tot}}{2} + \dots$$

$$Z_c sh\gamma X = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} (\gamma X + \dots) = \sqrt{\frac{Z_s}{Y_p}} \sqrt{Z_s Y_p} X = Z_{tot} + \dots$$

$$\frac{1}{Z_c} sh\gamma X = \frac{1}{Z_c} \left(\gamma X + \frac{(\gamma X)^3}{3!} + \dots \right) = \sqrt{\frac{Y_p}{Z_s}} \sqrt{Z_s Y_p} X + \sqrt{\frac{Y_p}{Z_s}} \frac{\sqrt{Z_s Y_p} Z_s Y_p}{6} X^3 + \dots = Y_{tot} + \frac{Y_{tot} Z_{tot}}{6} + \dots$$

On retrouve (presque...) dans les premiers termes de ces développements en série les termes de la matrice (I.29). On peut par ailleurs montrer que les termes résiduels (notés +) sont d'autant plus faibles que la ligne est courte.

Le schéma en π constitue donc une approximation du modèle de ligne à constantes réparties. Cette approximation reste très correcte tant que la ligne n'est pas trop longue. Pour préciser l'ordre de grandeur, étudions un exemple concret.

Exemple

Considérons une ligne triphasée 225 kV, dont les caractéristiques linéiques sont, en régime direct :

$$Z_{série} = 0,04 + j0,4 \Omega/km$$

$$C_{shunt} = 15 \text{ nF/krn}$$

On suppose que cette ligne admet un courant maximal de 770 A (soit une charge de 270 MW pour un facteur de puissance $\cos\varphi = 0,9$).

Le schéma monophasé permettant de simuler le fonctionnement en régime permanent, quasiment en pleine charge, de la ligne est représenté par la figure I.17.

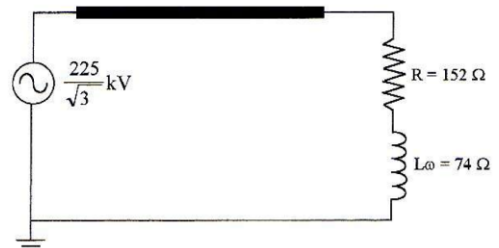
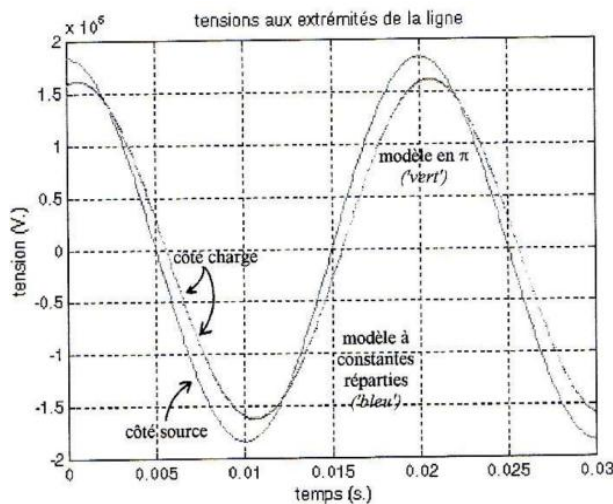


Fig. I.17 Schéma monophasé d'une ligne alimentant une charge RL

Les calculs exposés ci-dessus conduisent aux résultats suivants

a) Longueur de la ligne = 100 km



a) Longueur de la ligne = 200 km

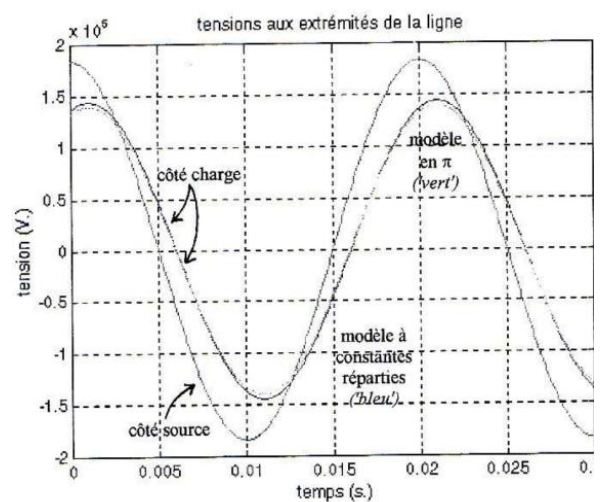


Fig. I.18 Tension aux extrémités de la ligne a) Ligne de 100km, b) Ligne de 200km

Il est important de garder à l'esprit qu'un schéma en π peut être un modèle très précis du comportement d'une ligne aérienne en régime permanent (50 Hz) équilibré, tout en étant un modèle très mauvais pour étudier le comportement de cette même ligne dans d'autres conditions de fonctionnement, par exemple en régime transitoire hautes fréquences. En effet, un tel modèle ne peut pas, par nature, représenter les

phénomènes de propagation le long de la ligne, tels que ceux apparaissant par exemple lors de la mise sous tension de la ligne ou lors d'un choc de foudre. Il n'y a pas de bon ou de mauvais modèle dans l'absolu ; il n'existe que des modèles adaptés, ou pas, à l'étude d'un phénomène donné. Le modèle en π est bien adapté au calcul de répartition des puissances dans un réseau de transport d'énergie.

I.4.3 Transformateurs

Un transformateur est bien modélisé, à 50 Hz, par un schéma équivalent monophasé faisant intervenir un transformateur idéal, des éléments en série (les résistances des enroulements primaire et secondaire et les inductances de fuites) et des éléments en parallèle (l'inductance de magnétisation et éventuellement une résistance modélisant les pertes "fer"). Ramené au même niveau de tension (primaire ou secondaire), ce schéma peut se réduire à un simple schéma en T. Ce schéma admet lui-même un équivalent en π .

Il n'est pas rare que soient négligé dans un calcul de répartition les éléments en parallèle du schéma équivalent, dont l'influence est surtout sensible lorsque le réseau est très peu chargé. Dans ce cas, le schéma équivalent du transformateur, ramené au même niveau de tension, se réduit à une simple impédance "série" dont la résistance représente la résistance totale des enroulements primaire et secondaire, et dont l'inductance représente l'inductance de fuite totale entre enroulement primaire et enroulement secondaire.

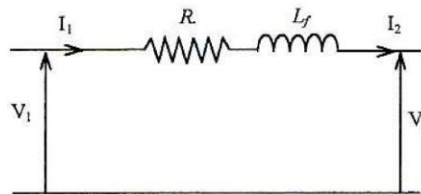


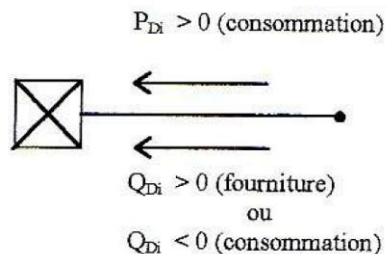
Fig. I.19 Modélisation d'un transformateur

Les paramètres de ce schéma sont ramenés au même niveau de tension. La résistance totale R peut être fournie directement par le constructeur du transformateur ou calculée à partir des pertes en court-circuit. L'inductance de fuite totale L_f peut être calculée à partir de la tension de court-circuit u_{cc} exprimée en %. Pour des transformateurs de très forte puissance (transport), $L_{\omega} \gg R$.

I.4.5 Charge

Une charge sera simplement représentée par une consommation de puissance active P_{ci} et une fourniture ou consommation de puissance réactive Q_{ci}

La puissance réactive peut être fournie ou consommée, selon la nature de la charge capacitive ou inductive. Notons qu'une telle modélisation permet de représenter aussi bien des charges connectées directement sur le réseau de transport (cas exceptionnel) que des points de connexion au réseau de répartition ou de distribution, ou encore des éléments du réseau tels que des moyens de compensation de la puissance réactive



I.5 Conclusion

Ce chapitre prépare l'étudiant à la modélisation des réseaux électriques en rappelant des différents composants de base (résistance inductance et capacité), de la représentation adéquate (représentation Fresnel et la représentation complexe) d'un signal électrique (courant, tension) en monophasé et en triphasé et les modèles des différents éléments du réseau (sources, lignes, transformateurs et charges).

Chapitre II. Système d'unités relatives et construction des matrices du réseau

II.1 Système d'unités relatives :

Les éléments d'un réseau de puissance fonctionnent dans des niveaux de tension où le Kilovolt (**kV**) est l'unité qui convient le mieux pour les exprimer, tandis que le Méga voltampères (**MVA**) exprime la puissance apparente.

Cependant les grandeurs courant et impédance sont souvent exprimées en unités relatives (per-unit) ou en pourcent par rapport à une grandeur de base donnée (généralement égale à la grandeur nominale).

Avantages notables du système d'unités relatives :

- Grâce à un choix judicieux des grandeurs de base, le schéma équivalent du transformateur est considérablement simplifié. Les tensions, courants, impédances et admittances convertis en pu ne changent pas quand elles sont rapportées du primaire au secondaire ou inversement. Cela donne un avantage considérable pour l'étude des réseaux importants comportant un grand nombre de transformateurs.
- Les impédances en unités relatives des équipements électriques de même type sont comprises dans un intervalle de valeurs étroites. Ces grandeurs peuvent facilement faire l'objet de vérification de leur ordre de grandeur pour se prémunir de risque d'erreurs.
- La méthode est définie de telle sorte que toutes les grandeurs au niveau de tous accès d'un réseau électrique soient proches de l'unité pour les bases appropriées. Cela facilite l'interprétation des résultats de calcul.

Les grandeurs en unités relatives sont calculées de la manière suivante.

$$\text{Valeur en (pu)} = \frac{\text{valeur réelle}}{\text{valeur de base choisie}} \quad (II.1)$$

Dans ce système, toutes les relations entre tension, puissance, impédance et admittance sont vérifiées et doivent être utilisées :

$$I_{base} = \frac{S_{base}}{V_{base}} \quad (II.2)$$

$$Z_{base} = \frac{V_{base}}{I_{base}} = \frac{V_{base}^2}{S_{base}} \quad (II.3)$$

Pour convertir de manière cohérente en p.u., les grandeurs électriques en tout point d'un réseau électrique, il faut connaître et appliquer deux règles aux grandeurs de base :

La puissance de base est la même en tout point du réseau électrique.

Le rapport des tensions de base des enroulements primaires et secondaires des transformateurs est égale au rapport des tensions nominales de ces enroulements.

$$\frac{V_{base1}}{V_{base2}} = \frac{V_{Nom1}}{V_{Nom2}}$$

II.1.1 Le changement de base dans le système d'unité relative :

L'expression de l'impédance en unité relative (pu) est donnée par :

$$Z(pu) = Z(\Omega) * \frac{S_b}{U_b^2} \quad (II.4)$$

Une impédance donnée en (pu) dans la base (1) peut être recalculée dans une autre base (2) en utilisant les formules suivantes :

$$Z_{b(1)}(pu) = \frac{Z(\Omega)}{Z_{b(1)}(\Omega)} = Z(\Omega) * \frac{S_{b(1)}}{U_{b(1)}^2} \quad (II.5)$$

Changement de tension de base :

$$Z_{b(2)}(pu) = Z_{B(1)}(pu) \cdot \frac{U_{B(1)}^2}{U_{B(2)}^2} \quad (II.6)$$

Changement de la puissance de base :

$$Z_{b(2)}(pu) = Z_{B(1)}(pu) \cdot \frac{S_{B(1)}}{S_{B(2)}} \quad (II.7)$$

Impédance relative du transformateur :

L'impédance de l'enroulement secondaire ramené au primaire est donnée comme suit :

$$Z_{2/1}(\Omega) = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_2(\Omega)$$

L'impédance en pu au secondaire est :

$$Z_2(pu) = \frac{Z_2(\Omega)}{Z_{base2}(\Omega)} \quad \text{avec} \quad Z_{base2}(\Omega) = \frac{V_{base2}^2(\Omega)}{S_{base\phi}}$$

$$Z_{2/1}(pu) = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_2(\Omega)}{Z_{base\phi}} \quad \text{ou} \quad Z_{base\phi}(\Omega) = \frac{V_{base\phi}^2(\Omega)}{S_{base\phi}} \quad \text{et} \quad V_{base\phi} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right) V_{base2}$$

$$\text{donc} \quad Z_{base\phi}(\Omega) = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 V_{base2}^2(\Omega)}{S_{base\phi}} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_{base2}$$

$$\text{Ce qui donne} \quad Z_{2/1}(pu) = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_2(\Omega)}{\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_{base2}(\Omega)} = \frac{Z_2(\Omega)}{Z_{base2}(\Omega)} = Z_2(pu)$$

Les impédances d'un transformateur en pu ne changent pas lorsqu'elles sont rapportées du primaire au secondaire et inversement.

II.1.2 Exemple :

Soit le système monophasé représenté par la figure II.1, composé d'une source de 30 KVA de 240V de d'un premier transformateurs (T1) de 30KVA, d'un rapport 240/480V et d'une impédance en pourcent de 0.10pu, d'un deuxième transformateurs (T2) de 20KVA d'un rapport 460/115V et d'une impédance en pourcent de 0.10pu, d'une ligne d'une impédance $X_{\text{ligne}} = 2\Omega$ et d'une charge $X_C = 0.9+j0.2 \Omega$.

Représenté ce réseau en unités relative. Calculer ensuite le courant de charge en pu puis en Ampères.

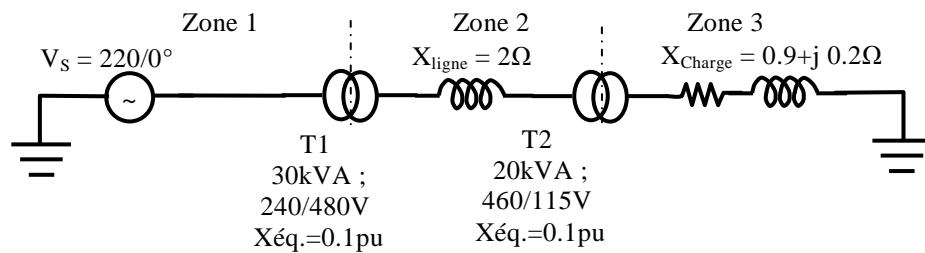


Fig. II. 1 Exemple système électrique monophasé

Solution :

Il faut d'abord déterminer les grandeurs d base d chaque zone.

La puissance de base est la même partout elle est $S_{base} = 30 \text{ KVA}$

La tension de base dans la zone 1 est $V_{base1}=240V$

Au passage par le transformateur, il faut appliquer la deuxième règle à savoir $\frac{V_{base1}}{V_{base2}} = \frac{V_{Nom1}}{V_{Nom2}}$

$$V_{base2} = V_{base1} \frac{V_{Nom2}}{V_{Nom1}} = 240 \frac{480}{240} = 480V$$

De la même manière on obtient V_{base3} :

$$V_{base3} = V_{base2} \frac{V_{Nom3}}{V_{Nom2}} = 480 \frac{115}{460} = 120V$$

Les impédances de base

$$Z_{base1} = \frac{V_{base1}^2}{S_{base}} = \frac{240^2}{30000} = 1.92\Omega ; \quad Z_{base2} = \frac{V_{base2}^2}{S_{base}} = \frac{480^2}{30000} = 7.68\Omega ; \quad Z_{base3} = \frac{V_{base3}^2}{S_{base}} = \frac{120^2}{30000} = 0.48\Omega$$

Les courants de base

$$I_{base1} = \frac{S_{base}}{V_{base1}} = \frac{30000}{240} = 125A ; \quad I_{base2} = \frac{S_{base}}{V_{base2}} = \frac{30000}{480} = 62.5A ; \quad I_{base3} = \frac{S_{base}}{V_{base3}} = \frac{30000}{120} = 250A$$

Les impédances relatives

L'impédance en pu de la zone 1 ne change pas du fait que la tension de base est égale à la tension nominale. Mais ce n'est pas le cas du transformateur T2 puisque $V_{Nom2} = 460V$ différente de $V_{base2}=480V$ et $S_{Nom2} = 20\,000kVA$ différente de $S_{base}=30\,000\,kVA$, il est donc nécessaire de convertir son impédance dans le nouveau système de base.

$$X_{T1New}(pu) = X_{T1Old}(pu) \left(\frac{V_{baseOld}}{V_{baseNew}} \right)^2 \frac{S_{baseNew}}{V_{baseOld}} = 0.10 \left(\frac{460}{480} \right)^2 \frac{30000}{20000} = 0.1376pu.$$

De même pour le transformateur T2

$$X_{T2New}(pu) = X_{T2Old}(pu) \left(\frac{V_{baseOld}}{V_{baseNew}} \right)^2 \frac{S_{baseNew}}{V_{baseOld}} = 0.10 \left(\frac{115}{120} \right)^2 \frac{30000}{20000} = 0.1376pu.$$

L'impédance de la ligne

$$X_{ligne} = \frac{X_{ligne}}{Z_{base2}} = \frac{2}{7.68} = 0.2604pu$$

L'impédance de la charge

$$X_{charge} = \frac{X_{charge}}{Z_{base3}} = \frac{0.9 + j0.2}{0.48} = 1.875 + j0.4176pu$$

Le circuit équivalent en pu est alors représenté par la figure II. 2

Le courant électrique absorbé par la charge est calculé comme suit :

$$I_{charge} = \frac{V_S(pu)}{j(X_S(pu) + X_{ligne}(pu) + X_{T1}(pu) + X_{T2}(pu) + X_{charge}(pu))}$$

$$I_{charge} = \frac{0.9167(pu)}{j(0.1376 + 0.2604 + 0.1376 + j0.4167 + 1.875)} = \frac{0.9167(pu)}{-0.4167 + j2.4106} = -0.0638 - j0.3692 ;$$

$$I_{charge}(pu) = 0.3747 / -99.81 \text{ pu}$$

$$I_{\text{charge}}(\Omega) = I_{\text{charge}}(\text{pu}) \cdot I_{\text{base}} = 0.3747 / -99.81^\circ \cdot 250 = 93.6804 / -99.81^\circ \text{ A}$$

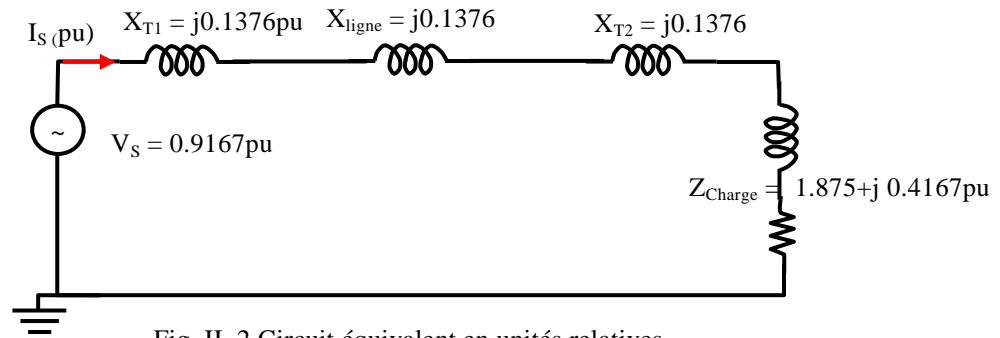


Fig. II. 2 Circuit équivalent en unités relatives

II.2 Description graphique et topologique d'un réseau

Le graphe est un dessin géométrique qui illustre les connexions graphiquement. Sa représentation est associée à une table qui présente les propriétés de matrices binaires. Les éléments de ces dernières sont égaux à 0 ou 1, avec éventuellement une indication (signe +/-) lorsque le graphique connu pour avoir une direction (sens), comme dans le cas général des réseaux électriques. Nous allons successivement étudier les propriétés des graphes et ceux de leurs matrices associées. Les exemples d'application de cette théorie porteront sur un réseau électrique à 4 accès (Fig. II.3.a) avec son circuit équivalent en monophasé (Fig. II.3.b).

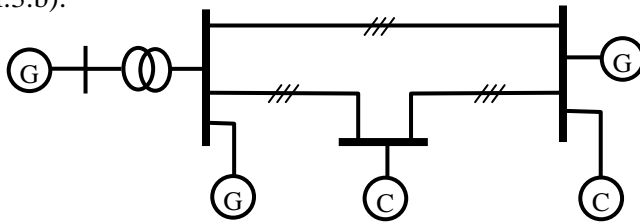


Figure II.3.a Représentation triphasée d'un réseau électrique.

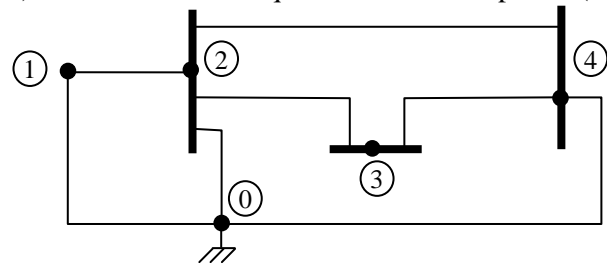


Figure II.3.b. Circuit équivalent monophasé.

II.2.1 Examen de la théorie des graphes

Le **graphe** correspondant à un réseau électrique donné est une manière concise de description des liens entre les entités topologiques qui sont des points représentatifs d'une structure géométrique, appelé **nœuds**, et des **segments** de liaison qui relient ces points (les éléments du réseau). Un nœud de référence doit être choisi et il est pratique courante d'assigner à ce nœud le numéro zéro (0). Dans le cas de systèmes électriques, le graphe est toujours orienté, c'est-à-dire qu'une direction est assignée à chaque segment. Cette direction correspond au sens de circulation du courant dans l'élément que représente le segment en question. Une exception ne respecte pas cette règle: les sources de tension indépendantes, auxquelles on doit assigner la direction contraire à celle du courant.

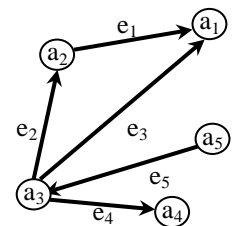
Le graphe du réseau de la figure II.3 est représenté par la figure II.4.a. Un **arbre** est défini comme étant un **sous-graphe** connecté comprenant tous les nœuds du graphe à l'étude ainsi qu'un certain nombre de ses segments, lesquels sont choisis de telle sorte qu'aucune maille ne soit formée. Tous les nœuds doivent être touchés par au moins un segment. Les segments faisant partie de l'arbre portent de nom de **branches** de l'arbre, alors que les segments ne faisant pas partie de l'arbre sont nommés les **liens** de l'arbre. Si un graphe comprend n nœuds, l'arbre doit contenir $n-1$ branches.

Définitions :

- **Graphique**: un dessin avec des points définis appelés **nœuds** (aussi **sommets**) reliés par des **éléments** appelés **segments**.
- **Graphe orienté**: graphique dans lequel on assigne une direction dans chaque segment. En donnant une direction (sens) aux segments d'un graphe, on obtient un graphe orienté (ou digraph : "directed graph").

Un digraphe fini $G = (A, E)$ est défini par l'ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dont les éléments sont les sommets (nœuds), et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ dont les éléments sont les segments.

- **Sous-Graphe (subgraph):** Un sous-graphe est obtenu en enlevant au segment du graphe tous les segments incidents à ces sommets.
- **Graphe connexe:** graphique dans lequel il existe un chemin entre chaque paire de nœuds. Un graphe est fortement connexe, si toute paire ordonnée de sommets distincts (a, b) du graphe est reliée par au moins un chemin. En d'autres termes, tout sommet est atteignable depuis tous les autres sommets par au moins un chemin. Un graphe qui n'est pas connexe est dit non connexe, et se décompose en composantes connexes.
- **Incidence:** un nœud (a) et un segment (e) sont connus comme incidents si le nœud (a) est l'un des sommets du segment. Un segment est incident à un sommet (a) si il « touche » ce sommet.
- **Arbre:** graphique contenant tous les nœuds, mais pas de maille, il est équivalent à un graphe connexe à n nœud et $n-1$ branches. Les segments restants sont appelés les liens. L'ensemble des liens forme le co-arbre.
- **Co-arbre:** sous-graphe complémentaire d'un arbre, il constitue un groupe de liens d'un graphe qui ne fait pas partie d'un arbre.
- **Branche :** connexion entre deux nœuds a et b d'un arbre. Dans le cas des graphes orientés on parle d'**arc**. Le terme « **branche** ou **Arête** » est alors utilisé pour désigner l'ensemble des deux nœuds (a, b) , c'est-à-dire de a vers b , et (b, a) , c'est-à-dire de b vers a .
- **lien:** segment appartenant au graphique, mais pas à l'arbre. segment appartenant au Co-arbre reliant deux sommets non adjacents d'un cycle.
- **Chemin:** formé par les sommets raccordés d'une manière telle que l'on ait au plus deux branches incidentes au niveau de chaque nœud. Un chemin conduisant du sommet a au sommet b est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des branches, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque branche est encadré à gauche par son sommet origine et à droite par son sommet destination. Sur le digraphe ci-après, on peut voir par exemple le chemin $(a_3, e_2, a_2, e_1, a_1)$. Tout chemin comporte au moins une branche.
- **Circuit:** Un circuit est un chemin dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes (parcours fermé). Le graphe ci-dessus ne contient pas de circuit. Les notions de chemins et de circuits sont analogues à celles des chaînes et des cycles pour les graphes non orientés.
- **Circuits fondamentaux :** groupe de circuits indépendants contenant chacun un seul lien.
- **Maille :** ensemble de branches adjacentes constituant un chemin fermé : un nœud n'est pas rencontré plus d'une fois le long d'une maille.
- **Mailles indépendantes (MI) :** ensemble des mailles formées par un lien et les branches d'arbres adjacentes. Une maille indépendante est orientée et elle ne possède qu'un seul lien.
- **Coupe:** un groupe de liens dont l'extraction provoque la séparation du graphique en plusieurs graphes disjoints.
- **Coupes fondamentaux :** groupe de coupes contenant chacun une seule branche.



Proposition: Soit un graphe orienté contenant n nœuds et e segments. Quand un arbre est choisi,

- Le nombre de branches est: $b = n-1$;
- Le nombre de liens est la suivante: $l = e - n + 1$;
- Le nombre de circuits fondamentaux est: $m = e - n + 1$;
- Le nombre de coupes fondamentales est: $c = n-1$;
- L'orientation choisie;
 - D'un circuit: celui du lien associée;
 - D'une coupe: celle de la branche associée.

Les figures II.4 a, b, c et d illustrent la représentation par un graphe orienté du graphique du réseau définie par la figure II.3, elles montrent respectivement la représentation du réseau par un graphe orienté, un arbre avec des liens et des branches, des circuits fondamentaux, et des coupes fondamentales. A partir de

la description du réseau par un diagramme et l'extraction du graphique qui est la représentation topologique unifilaire, il est possible de chercher, par des algorithmes dédiés, les arbres possibles et les liens associés, les branches et les circuits.

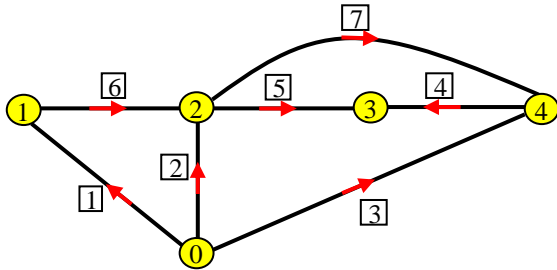


Fig. II.4.a Représentation par un graphe du réseau de la figure I.17.

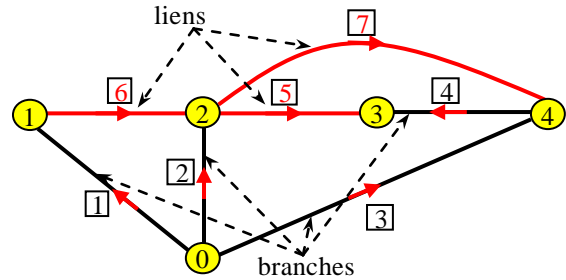


Fig. II.4.b Arbre avec les branches (1-4) et liens (5-7).

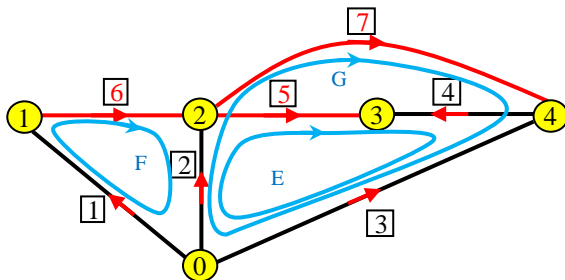


Fig. II.4.c Circuits fondamentaux (E, F, G).

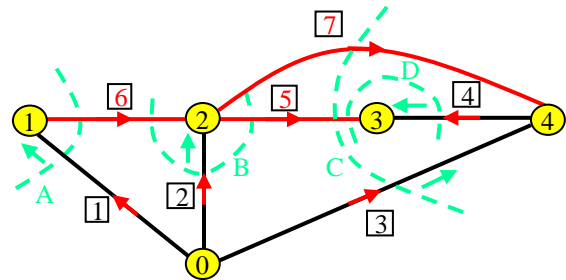


Fig. II.4.d Coupes fondamentales (A, B, C, D).

II.2.2. Modélisation globale du réseau: le modèle CIM

Les réseaux électriques sont interconnectés, il est alors essentiel d'établir un échange d'informations entre les opérateurs du réseau à la fois au sein de la même unité d'électricité et entre les différentes compagnies. Les échanges de données doivent être compatibles avec les formats d'échange basés sur les modèles les plus couramment utilisés dans les systèmes électriques. Ainsi, un modèle qui est utilisé par toutes les entreprises à l'échelle internationale ("**Common Information Model**" (CIM)) a été créée.

CIM est un modèle conceptuel qui est développé sous l'égide de la Commission électrotechnique internationale (CEI) dans une langue du type UML (Unified Modeling Language). Il couvre l'ensemble des données nécessaires à l'étude et l'exploitation des systèmes électriques, y compris les opérations du marché entre les entreprises ou les producteurs et les consommateurs.

Le modèle complet est d'une grande complexité et contient plusieurs sections. Une section particulière, permet de représenter les données spécifiques des éléments du réseau et les types de calcul, elle contient la topologie, les données électriques de tous les éléments du système (lignes, transformateurs, disjoncteurs et les générateurs) et la modélisation de la charge.

II.2.3 Représentation matricielle des réseaux

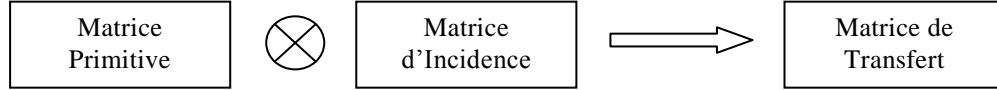
La formulation des équations du réseau est basée sur la définition d'un modèle mathématique exact et cohérent qui décrit les caractéristiques des composants individuels (machines, lignes, transformateurs et charges) et de l'interconnexion entre ces composants. L'équation matricielle est un modèle approprié adapté au traitement mathématique et à la transformation sous un aspect systémique. Les éléments de la matrice peuvent être des impédances (les tensions aux nœuds sont écrites en fonction des courants injectés), ou admittances (les courants injectés sont écrites en fonction des tensions aux nœuds).

Le réseau peut être décrit par les trois types de matrices suivantes:

- **Matrices élémentaires** (ou **primitives**): ces matrices décrivent les composants individuels en tenant compte, le cas échéant, de leur couplage électromagnétique (capacitif et inductif). Elles sont de structure diagonale, le couplage des composants est représenté par des éléments non diagonaux;

- **Matrices d'incidence:** elles décrivent les interconnexions entre les différents composants du réseau. Les valeurs de ces matrices sont binaires 1, 0, - 1, elles représentent le lien entre les branches et les nœuds du réseau avec leur orientation;
- **Matrices de transferts:** elles décrivent de façon mathématique le comportement électrique du réseau maillé. Elles sont essentiellement les matrices impédance ou admittance qui correspondent aux nœuds du réseau (matrices nodales).

La relation, entre ces trois matrices, peut être décrite par le schéma ci-dessous. La matrice de transfert est obtenue à partir d'une opération complexe en utilisant la matrice élémentaire et la matrice d'incidence.



II.2.3.1. Matrice Incidence

Les matrices incidence caractérisent la relation entre les éléments de réseau (généralement appelées branches) et les nœuds de liaison entre ces éléments.

II.2.3.1.1. Matrice Incidence nodale (Branche-nœuds)

Cette matrice est souvent symbolisée par "A" et ne doit pas être confondue avec la matrice d'état A. La matrice incidence nodale A décrit la topologie du système en faisant abstraction de la nature des éléments qui le composent. Pour un graphe comportant n nœuds et e segments, la matrice A est formée de n rangées et e colonnes. Ses éléments a_{ij} peuvent prendre les valeurs 0, - 1 ou 1 comme suit :

$a_{ij} = 1$ si la branche i est incident avec nœud j et est dirigé vers ce nœud;

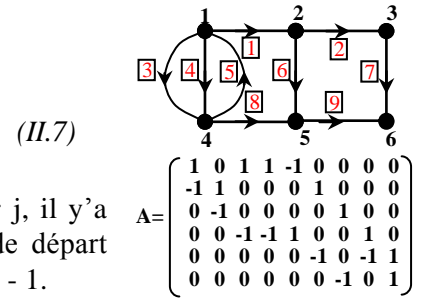
$a_{ij} = -1$ si la branche i est incident avec nœud j et est dirigé dans le sens inverse de ce nœud;

$a_{ij} = 0$ si la branche i est non-incident avec nœud j .

Propriétés - Pour chaque colonne j :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} = 0$$

En effet sur la même colonne correspondant à la branche visée par j , il y'a seulement deux éléments non nuls: Le premier correspond au nœud de départ avec la valeur 1, et le second correspond au nœud d'arrivée avec la valeur - 1.



II.2.3.1.2. Matrice Incidence réduite

La matrice d'incidence nodale n'est pas vraiment utile dans le développement qui suit. On utilise plutôt la **matrice incidence nodale réduite**, qui correspond à la matrice d'incidence nodale, dans laquelle le choix d'un nœud de référence des tensions conduit à la suppression d'une colonne de la matrice (A) (en général la première).

II.2.3.1.3. Matrice Incidence de coupures fondamentales (Branche-coupure fondamentales)

La deuxième matrice nécessaire est la matrice des coupures fondamentales "cutsets" (B). Une coupure est créée lorsque l'on retire certains segments d'un graphe et que ce retrait a pour effet de couper le graphe en deux sous-graphes disjoints. Une coupure fondamentale est associée à chaque branche d'un arbre (1, 2, 3, 4) (Fig. II.4.a). Une coupure fondamentale est donc définie par une branche de l'arbre et par tous les liens de l'arbre qui transitent entre les deux co-arbres obtenus lors du retrait de la branche. L'orientation de la coupure est la même que celle de la branche qui définit la coupure.

La matrice des coupures fondamentales permet de définir les coupures de façon concise. Elle comporte autant de lignes qu'il y a de segments dans le graphe et autant de colonnes qu'il y a de branches dans l'arbre. Les éléments $\{b_{ij}\}$ de la matrice des coupures fondamentales B de dimensions $(e \times b)$ peuvent prendre les valeurs 0, - 1 ou 1 comme suit :

- $b_{ij} = + 1$ si la $i^{\text{ème}}$ branche appartient à la $j^{\text{ème}}$ coupure fondamentale avec la même orientation;

- $b_{ij} = -1$ si la $i^{\text{ème}}$ branche appartient à la $j^{\text{ème}}$ coupure fondamentale avec une orientation opposée;
- $b_{ij} = 0$ si la $i^{\text{ème}}$ branche ne fait pas partie de la $j^{\text{ème}}$ coupure fondamentale.

Propriétés: Soient les sous-matrices de "A" et "B" ci-après désignés par:

- A par : A_b (branches/accès) et A_c (liens/accès).
- B par : B_b (branches/coupures fondamentales) et B_c (liens/coupures fondamentales).

La sous-matrice B_b est égale à la matrice de l'unité I , le produit $B_c * A_b$ est égale à la matrice incidence liens/accès (A_c)

$$B_c * A_b = A_c \quad (II.8)$$

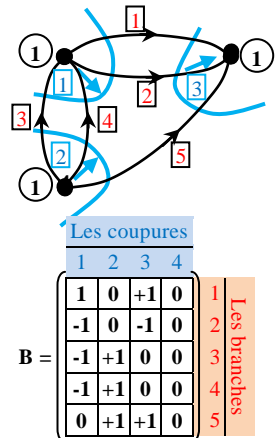
Cela donne

$$B_c = A_c * A_b^{-1} \quad (II.9)$$

Ainsi, on peut construire la matrice B à partir de sous-matrices A_b , A_c et de la matrice A par la formule:

$$B = [A_c * A_b^{-1}]^T \quad (II.10)$$

Pour le graphe à 3 nœuds ci-dessus les différentes coupures (des ensembles de branches) sont $I_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (direction de e_1), $I_2 = \{e_3, e_4, e_5\}$ (Direction de e_3), $I_3 = \{e_1, e_2, e_5\}$ (direction de e_1) et $I_4 = \emptyset$. Sa matrice des coupures est donnée sur le même schéma.



II.2.3.1.4. Matrice Incidence des mailles fondamentales (Branche-Mailles fondamentales)

La dernière matrice importante est la matrice des mailles fondamentales (C). Elle comporte autant de lignes qu'il y a de segments dans le graphe (e) et autant de colonnes qu'il y a de liens dans l'arbre (m). On obtient cette matrice ($e \times m$), une fois l'arbre choisi, en ajoutant un à un les liens dans le graphe. Une maille fondamentale (une colonne de la matrice C) est ainsi formée. L'orientation de la maille est celle du lien qui la définit.

La matrice des mailles Fondamentales permet aussi d'exprimer une généralisation de la loi de Kirchhoff des tensions. Les termes $\{c_{ij}\}$ de la matrice C de dimension ($e \times m$) peuvent prendre les valeurs 0, -1 ou 1 tels que:

$c_{ij} = +1$ si le $i^{\text{ème}}$ segment appartient à la $j^{\text{ème}}$ maille fondamentale avec la même orientation;

$c_{ij} = -1$ si le $i^{\text{ème}}$ segment appartient à la $j^{\text{ème}}$ maille fondamentale avec une orientation opposée;

$c_{ij} = 0$ si le $i^{\text{ème}}$ segment ne fait pas partie de la $j^{\text{ème}}$ maille fondamentale.

Propriétés: supposant les sous-matrices de "C" suivantes soient désignées comme suit:

- C_b : branches/circuits fondamentaux;
- C_c : liens/circuits fondamentaux.

Comme il y a identité entre les liens et la maille fondamentale, la sous-matrice C_c est égale à la matrice unité I .

Exemple de matrices d'incidence: Les graphiques des figures II.4.a - II.4.c condensés en un seul graphe est représenté par la figure II.5, il montre les branches, les liens, les circuits et les coupures fondamentaux, on peut facilement construire des matrices A , B , et C correspondant à ce graphique:

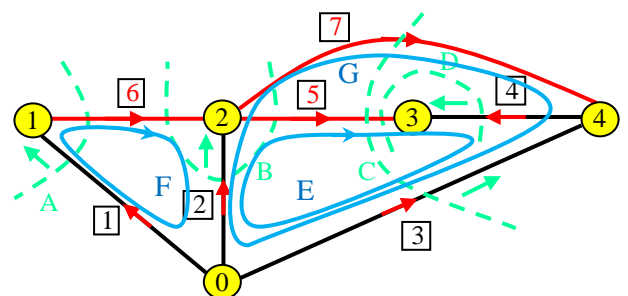


Fig. II.5 Graphe pour les matrices du réseau A , B , C .

Lignes	Noeud				
	0 réf.	1	2	3	4
1	-1	+1	0	0	0
2	-1	0	+1	0	0
3	-1	0	0	0	+1
4	0	0	0	+1	-1
5	0	0	-1	+1	0
6	0	-1	+1	0	0
7	0	0	-1	0	+1

$A = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right\} A_b \\ \left. \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \right\} A_c \end{matrix}$

Lignes	Mailles fondamentales		
	E	F	G
1	0	1	0
2	1	-1	1
3	-1	0	-1
4	-1	0	0
5	1	0	0
6	0	1	0
7	0	0	1

$C = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right\} C_b \\ \left. \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \right\} C_c \end{matrix}$

II.2.3.2. Matrices du réseau primitif

Le "réseau primitif" représente l'ensemble des composants du réseau, y compris leurs couplages électriques et magnétiques. Chaque composant est défini par son impédance Z_{pq} ou admittance $Y_{pq} = 1/Z_{pq}$ d'indices p (nœuds de départ) et q (nœuds d'arrivée). En outre, les générateurs sont modélisés par une force électromotrice (f.é.m.) E_{pq} en série avec une impédance interne (Thevenin), et une source de courant J_{pq} avec une admittance interne en parallèle (Norton).

II.2.3.2.1. L'équation en termes d'impédance

La figure II.6 montre le circuit de Thevenin (la f.é.m. en série avec l'impédance interne). La tension aux bornes v_{pq} est reliée au courant i_{pq} par la f.é.m. e_{pq} et l'impédance Z_{pq} comme suit:

$$V_{pq} + e_{pq} = Z_{pq} i_{pq} \quad (II.11)$$

II.2.3.2.2. L'équation en termes d'admittance

La figure II.7 montre le circuit équivalent de Norton d'un générateur (source de courant en parallèle avec l'admittance interne). Les courants i_{pq} J_{pq} et la tension aux bornes du générateur v_{pq} sont liés par l'équation (II.12).

$$\begin{aligned} i_{pq} + J_{pq} &= Y_{pq} v_{pq} \\ J_{pq} &= -Y_{pq} e_{pq} \end{aligned} \quad (II.12)$$

La matrice du réseau primitif est une matrice à dominance diagonale dont les éléments correspondent aux impédances de chaque liaison du réseau. Ces impédances sont les impédances propres $Z_{pq,pq}$ et les impédances de couplage entre les liens pq et rs , qui représentent les éléments hors diagonale $Z_{pq,rs}$ (Fig. II.8).

Les vecteurs courant I et tension v ainsi que la matrice impédance Z du réseau primitif, avec les éléments de la diagonal et hors diagonale (colonnes rs et de lignes pq) sont illustrés sur la figure II.9.

Lignes	Coupures fondamentales			
	A	B	C	D
1	+1	0	0	0
2	0	+1	0	0
3	0	0	+1	0
4	0	0	0	+1
5	0	-1	+1	+1
6	-1	+1	0	0
7	0	-1	+1	0

$A = \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right\} B_b \\ \left. \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \right\} B_c \end{matrix}$

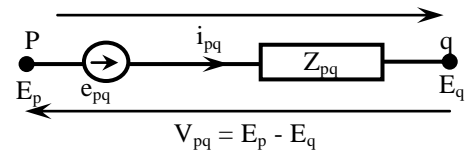


Figure II.6 Représentation de la source de tension avec son impédance interne

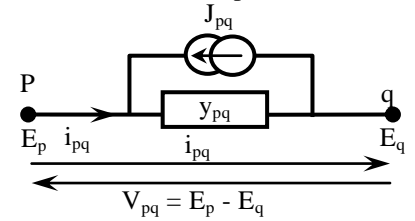


Figure II.7 Représentation de la source de courant avec son admittance interne

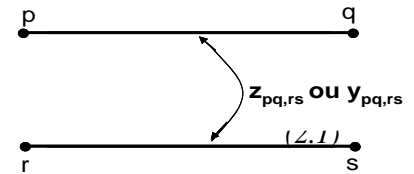


Fig. II.8 Eléments couplés.

$$I = \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{13} \\ \vdots \\ I_{23} \\ \vdots \\ I_{pq} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{13} \\ \vdots \\ v_{23} \\ \vdots \\ v_{pq} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad Z =$$

Fig. II.9 relations tension-courant dans un réseau primitif.

La représentation vectorielle des sources de courant j et les f.é.m. e , et les équations du réseau élémentaire sont données ci-dessous.

$$\begin{aligned} e &= \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{13} \\ \vdots \\ e_{23} \\ \vdots \\ e_{pq} \\ \vdots \end{bmatrix} & j &= \begin{bmatrix} j_{12} \\ j_{13} \\ \vdots \\ j_{23} \\ \vdots \\ j_{pq} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ v+e &= zi \\ i+j &= yv \\ y &= z^{-1} \end{aligned} \tag{II.13}$$

Exemple de réseau primitif: Soit le réseau de la figure II.10 avec 4 nœuds et 5 segments, les lignes (segments) 1-2 et 1-4 sont couplées mutuellement comme l'indique par les flèches de couleur jaune. En vue de les identifier, les lignes 1 et 4 tous deux connectés en parallèle entre les nœuds 1 et 2 sont désignés par les indices (1) et (2), respectivement.

La présentation de ce réseau est illustrée ci-dessous sous forme d'une table de connexion indiquant les valeurs des impédances propres des lignes et des impédances mutuelle de couplage (le cas échéant). Les impédances sont données en unités relatives. Si l'on adopte la classification des liens définis dans le tableau II.1, on peut construire la matrice impédance Z du réseau primaire.

Tableau II.1 Réseau d'impédances propres et mutuelles.

lignes	Access	Self-	Access	Impédance
1	1-2 (1)	0.6		
2	1-3	0.5	1-2 (1)	0.1
3	3-4	0.5		
4	1-2 (2)	0.4	1-2 (1)	0.2
5	2-4	0.2		

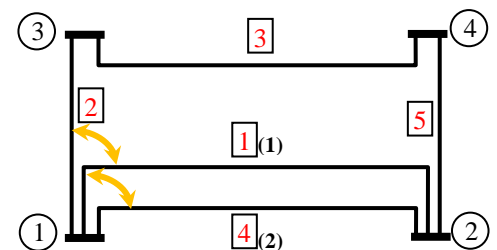


Fig. II.10 Exemple de réseau primaire.

Un choix adéquat de la numérotation des lignes (ce qui ne modifie pas le mode de fonctionnement du réseau), permet une meilleure utilisation de la matrice impédance Z pour la transformée en sous-matrices diagonales, particulièrement pour la détermination de son inverse. Comme dans l'illustration (Fig. II.11), si les liens 3 et 4 sont permutés, la matrice résultante est représentée sur la figure II.12.

lignes		1	2	3	4	5
Z=	1	0.6	0.1		0.2	
	2	0.1	0.5			
	3			0.5		
	4	0.2			0.4	
	5					0.2

Fig. II.11 Matrice impédance primitive.

lignes	1	2	3	4	5
1	0.6	0.1	0.2		
2	0.1	0.5			
3	0.2		0.4		
4				0.5	
5					0.2

Fig. II.12 Matrice impédance primitive avec permutation des liens 3 et 4.

On obtient l'inverse de la matrice de la figure II.12, en inversant séparément une matrice 3 x 3 et une matrice diagonale 2 x 2. Le résultat est montré sur la figure II.13.

	lignes	1	2	3	4	5
	1	2.08	-0.42	-1.04		
	2	0.1	0.5	0.21		
$Y=Z^{-1}=$	3	-1.04	0.21	0.4		
	4				0.5	
	5					0.2

Fig. II.13 Matrice inverse Z de la Figure II.10.

II.2.3.3. Matrices de transfert

a) Matrice de transfert nodale

Considérons un réseau à N nœuds, numérotés 0, 1, 2, ..., N-1. Soit le nœud 0 le nœud de référence auquel toutes les tensions aux nœuds notées (E_1, E_2, E_{N-1}) sont indexées et (I_1, I_2, I_{N-1}) les courants injectés aux nœuds (Fig. II.14). Cette notation permet de ramener l'analyse du réseau par ses composants individuels en une analyse qui ne tient pas compte de la structure interne qui sera représenté par des matrices de transfert.

Ainsi, le réseau de la figure II.15 ci-dessous peut être modifié et représentée par un schéma comme le montre la figure II.16.

Nous définissons alors les vecteurs E_{bus} et I_{bus} dont les éléments représentent respectivement les tensions aux nœuds et les courants injectés aux nœuds:

$$E_{bus} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_p \\ \vdots \\ E_{N-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad I_{bus} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \\ \vdots \\ I_{N-1} \end{bmatrix}$$

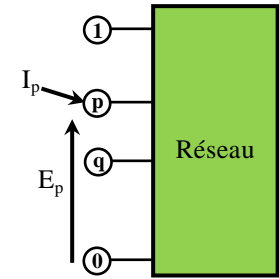


Fig. II.14 Réseau avec des tensions de nœud et courants injectés.

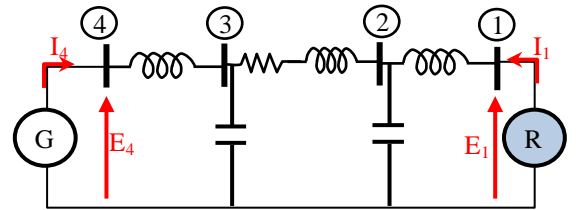


Fig. II.15 Exemple de réseau de 4 nœuds

Le fonctionnement du réseau est alors modélisé à travers la matrice d'impédance nodale Z_{bus} , ou la matrice d'admittance nodale Y_{bus} par les équations (II.14) et (II.15) comme suit:

$$I_{bus} = Y_{bus} \cdot E_{bus} \quad (II.14)$$

$$E_{bus} = Z_{bus} \cdot I_{bus} \quad (II.15)$$

Il existe un lien fort entre les matrices de transfert, les matrices impédance nodale ou admittance nodale et les matrices incidence.

Considérons les équations matricielles du réseau primitif:

$$i + j = yv \quad (II.16)$$

En multipliant par la matrice incidence transposée A^t , on obtient:

$$A^t \cdot (i + j) = A^t \cdot yv \Rightarrow A^t i + A^t j = A^t \cdot yv$$

Le premier terme $A^t i$ est la somme des courants qui arrivent à chaque nœud du réseau, qui est égal à zéro (loi de Kirschhoff). Le terme $A^t j$ est la somme des courants injectés dans chaque nœud, il est égal à I_{bus} . Ainsi, L'équation ci-dessus se réduit à:

$$I_{bus} = A^t \cdot yv$$

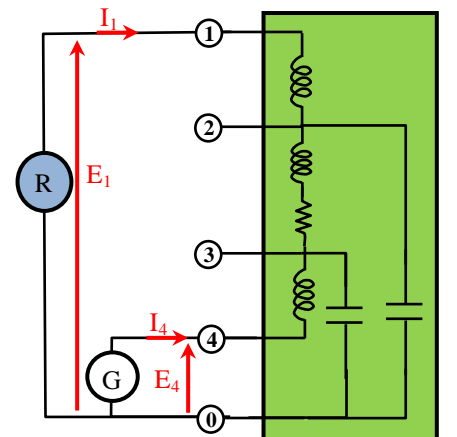


Fig. II.16 modification schématique du système de la figure II.15.

$$(II.17)$$

La puissance complexe totale injectée dans le réseau est la même que celle du réseau est représenté sous la forme de tensions et de courants nodaux ou sous sa forme primitive. Il en résulte:

$$P = (I_{bus})^{*t} \cdot E_{bus} = j^{*t} \cdot v \quad (II.18)$$

Mais tant que

$$I_{bus} = A^t \cdot j,$$

Alors,

$$(I_{bus})^{*t} = (A^t \cdot j)^{*t}$$

Etant donné que la matrice A est composé de nombres réels, alors $A = A^*$ et par conséquent:

$$(I_{bus})^{*t} = j^{*t} A$$

et donc l'équation (II.18) devient:

$$j^{*t} A E_{bus} = j^{*t} v, \quad (II.19)$$

on a alors $v = A E_{bus}$

Tant que

$$I_{bus} = A^t \cdot y \cdot v$$

alors,

$$A^t y A E_{bus} = Y_{bus} \cdot E_{bus}$$

donc, en conclusion:

$$Y_{bus} = A^t y A \quad (II.20)$$

et

$$Z_{bus} = (Y_{bus})^{-1} \quad (II.21)$$

b) Matrice de mailles de transfert

Considérons un réseau qui contient m circuits (ou mailles) fondamentaux qui portent courants i_1, i_2, \dots, i_m , et les sources de tension E_1, E_2, \dots, E_m inséré dans chaque maille. Nous définissons E_{bus} et I_{bus} et les vecteurs de tension avec le terme $E_m = \{e_k\}$ et de courant avec le terme $I_m = \{i_k\}$.

$$I_m = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} \text{ et } E_m = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$$

Le fonctionnement du réseau en se référant à la tension et au courant est exprimé en utilisant les équations qui relient les courants des mailles aux sources de tension insérés dans chaque maille. Ces relations sont exprimées à partir de les impédances de transfert des mailles (ou matrice impédance des mailles) Z_m , ou par les admittances de transfert des mailles (ou matrice admittance de maille) Y_m .

La relation entre E_m et I_m est exprimée à travers ces matrices de transfert par les équations (II.22) et (II.23) ci-dessous

$$I_m = Y_m \cdot E_m \quad (II.22)$$

$$E_m = Z_m \cdot I_m \quad (II.23)$$

Pour exprimer la relation entre les matrices de transfert du réseau primitif et des matrices incidence, nous considérons la puissance complexe injectée dans le réseau pour qu'elle soit représentée par des matrices de transfert ou des matrices du réseau primaire.

Dans le réseau primitif, l'équation des mailles sous forme matricielle est :

$$v + e = z \cdot i \quad (II.24)$$

En multipliant les deux termes par C^t :

$$C^t \cdot v + C^t \cdot e = C^t \cdot z \cdot i$$

Dans l'équation ci-dessus, le premier terme est nul $C^t.v = 0$, du fait que la somme des tensions à travers une maille est égal à zéro (loi de Khitchoff des tensions).

En outre, le second terme correspond à E_m défini par la relation

$$C^t.e = E_m \quad (II.25)$$

nous concluons ce qui suit:

$$E_m = C^t.e = C^t.z.i$$

Exprimant la conservation de la puissance entre les deux référentiels:

$$P = [I_m^t] * E_m = (i^*)^t.e$$

et en tenant compte des relations antérieures entre E et E_m :

$$[I_m^t] * C^t.e = (i^*)^t.e$$

Cette relation est vraie quel que soit le vecteur e . On en déduit que:

$$(i^*)^t = [I_m^t] * C^t$$

et donc,

$$i = \{([I_m^t] * C^t)^t\}^* = (C.I_m^{t*})^* = C^*.I_m$$

$$i = C.I_m \quad (II.26)$$

La matrice C est une matrice composée de nombres réels, alors $C = C^*$, on conclue alors :

$$E_m = (C^t.Z.C).I_m \quad (II.27)$$

Donc

$$Z_m = C^t.z.C \quad (II.28)$$

Et

$$Y_m = (C^t.z.C)^{-1} \quad (II.29)$$

En conclusion de ce chapitre, nous pouvons résumer dans le tableau 2.2 ci-dessous la relation entre les matrices de transfert et les matrices du réseau primitive (ou élémentaire) à travers la matrice d'incidence qui représente essentiellement les interconnexions entre les éléments du réseau primitif.

Tableau 2.2 Relationship among different matrices of a network

Matrice	Réseau primitif	Maille	Accès
Impédance	Z ↓	$Z_m = C^t.z.C$ ↓	$Z_{bus} = Y_{bus}^{-1}$ ↑
Admittance	$y = z^{-1}$	$Y_m = Z_m^{-1}$	$Y_{bus} = A^t.y.A$



II.3 Matrices admittance et impédance d'un réseau électrique

II.3.1 Relations entre les tensions aux accès et les courants injectés

On suppose qu'on a un réseau de $(n+1)$ accès y compris la référence, il existe alors, entre les n tensions V des accès autres que la référence et les n courants I injectés en ces accès, un système de n relations linéaires constituant les équations du réseau.

Parmi les formes simples de ce système, on utilise celle dont les paramètres sont les courants et les inconnues sont les tensions, ainsi on définit le réseau par :

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{Z}_{11}\bar{I}_1 + \bar{Z}_{12}\bar{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{1n}\bar{I}_n \\ \bar{V}_2 = \bar{Z}_{21}\bar{I}_1 + \bar{Z}_{22}\bar{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{2n}\bar{I}_n \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \bar{V}_n = \bar{Z}_{n1}\bar{I}_1 + \bar{Z}_{n2}\bar{I}_2 + \dots + \bar{Z}_{nn}\bar{I}_n \end{cases} \quad (II.30)$$

Cependant le calcul matriciel constitue la technique la plus commode, ainsi le système s'écrit sous la forme suivante :

$$[V_{bus}] = [Z_{bus}] * [I_{bus}] \quad (II.31)$$

Avec :

$[V_{bus}]$: vecteur d'ordre $(n \times 1)$ correspondant aux tensions mesurées aux accès en tenant compte de la référence.

$[Z_{bus}]$: matrice carrée et symétrique d'ordre $(n \times n)$ sont les coefficients système (II.30).

$[I_{bus}]$: vecteur d'ordre $(n \times 1)$ correspondants aux courants injectés aux accès.

II.3.2 Formation de la matrice impédance $[Z_{bus}]$

Le principe de la méthode algorithmique pour la formation de $[Z_{bus}]$ est que cette matrice Z_{bus} est le réseau est formé au fur et à mesure de la formation du réseau par l'addition des éléments suivants :

- Branche
- Boucle
- Sous réseau

La technique de formation de $[Z_{bus}]$ est de suivre le réseau dans son évolution, dont on a le libre choix. Un réseau initial est donc choisi de telle sorte que sa matrice peut être formée sans ambiguïté. À la limite ce réseau est formé d'un seul élément joignant l'accès de référence à un autre accès. La matrice correspondante se réduit alors à un seul terme égal à l'impédance de cet élément. L'évolution du réseau se fait pas à pas en additionnant un élément dans chaque étape au réseau initial. Une fois qu'on a épuisé tous les éléments constituant le réseau, la matrice est obtenue.

Soit un élément $p-q$ qu'on additionne au réseau ; cet élément peut être soit une branche, soit une boucle comme le montre la figure (II.17).

Si l'élément $p-q$ est une branche, le nouveau accès q est ajouté au réseau partiel et la matrice aura $(m+1) \times (m+1)$ pour dimension.

Les nouveaux vecteurs tensions et courant auront $(n+1) \times 1$ pour dimension. La détermination de la nouvelle matrice impédance exige seulement le calcul des éléments de la colonne et de la ligne ajoutée.

Si l'élément $p-q$ est une boucle, il n'y a pas de nouveau accès ajoutés au réseau partiel, ainsi les dimensions de la matrice restent inchangées, mais tous les éléments de matrice doivent être recalculés pour inclure l'effet de cette boucle. Et on obtient ainsi une nouvelle matrice d'impédance de transfert.

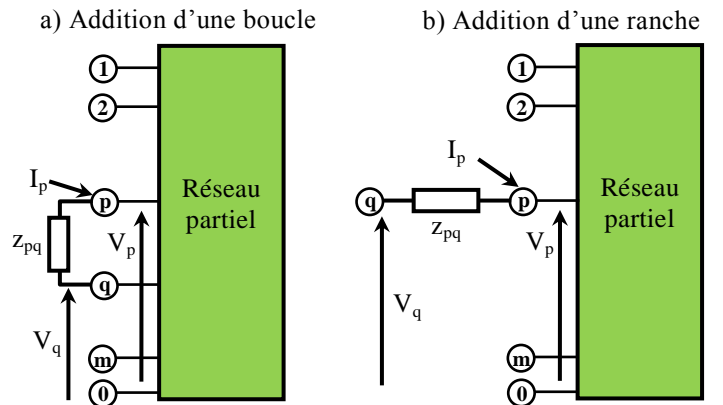


Fig. II.17 Addition d'un élément au réseau partiel

II.3.2.1 Addition d'une branche :

Le système d'équations d'un réseau partiel avec l'addition d'une branche $p-q$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_p \\ \vdots \\ \bar{V}_n \\ \bar{V}_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \cdots & \bar{Z}_{1p} & \cdots & \bar{Z}_{1m} & \bar{Z}_{1q} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \cdots & \bar{Z}_{2p} & \cdots & \bar{Z}_{2m} & \bar{Z}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \bar{Z}_{p1} & \bar{Z}_{p2} & \cdots & \bar{Z}_{pp} & \cdots & \bar{Z}_{pm} & \bar{Z}_{pq} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \bar{Z}_{m1} & \bar{Z}_{m2} & \cdots & \bar{Z}_{mp} & \cdots & \bar{Z}_{mm} & \bar{Z}_{mq} \\ \bar{Z}_{q1} & \bar{Z}_{q2} & \cdots & \bar{Z}_{qp} & \cdots & \bar{Z}_{qm} & \bar{Z}_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_p \\ \vdots \\ \bar{I}_n \\ \bar{I}_q \end{Bmatrix} \quad (II.32)$$

Les éléments du réseau sont passifs et linéaires, il en résulte que :

$$Z_{qi} = Z_{iq} \quad (II.33)$$

Où : $i = 1, 2, \dots, m$ représente les accès du réseau partiel sans introduction du nouveau accès q .

La branche additionnée $p-q$ peut être couplée avec un ou plusieurs éléments du réseau de départ.

Les éléments Z_{qi} sont déterminés en injectant un courant de 1pu au $i^{\text{ème}}$ accès et en mesurant la tension à l'accès q :

Puisque on a injecté le courant uniquement à l'accès i et que les courants des autre accès sont nuls, l'équation (II.30) devient :

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{Z}_{1i} \bar{I}_i \\ \bar{V}_2 = \bar{Z}_{2i} \bar{I}_i \\ \vdots \\ \bar{V}_p = \bar{Z}_{pi} \bar{I}_i \\ \vdots \\ \bar{V}_m = \bar{Z}_{mi} \bar{I}_i \\ \bar{V}_q = \bar{Z}_{qi} \bar{I}_i \end{cases} \quad (II.34)$$

La tension du nouvel accès peut être évaluée en fonction de la tension V_p et la tension de la branche V_{pq} .

$$\begin{aligned} V_{pq} &= V_p - V_q \quad \text{Ou encore} \\ V_q &= V_p - V_{pq} \end{aligned} \quad (II.35)$$

Les courants dans les éléments du réseau de la figure II.18 sont exprimés à l'aide des admittances primitives et tensions entre ces éléments.

$$\begin{Bmatrix} i_{pq} \\ i_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{pq,pq} & y_{pq,\alpha\beta} \\ y_{\alpha\beta,pq} & y_{\alpha\beta,\alpha\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{pq} \\ v_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} \quad (II.36)$$

avec :

- $p-q$: souscription fixe de l'élément à additionner.
- $\alpha-\beta$: souscription variable et se réfère à tous les éléments du réseau partiel.
- $i_{\alpha\beta}$ et $V_{\alpha\beta}$ sont les valeurs courant et tension des éléments du réseau partiel.
- $Y_{pq,pq}$: admittance propre de l'élément additionné.
- $\{y_{pq,\alpha\beta}\}$: vecteur des mutuelles admittances entre l'élément additionné ($p-q$) et les éléments (α,β) du réseau partiel.

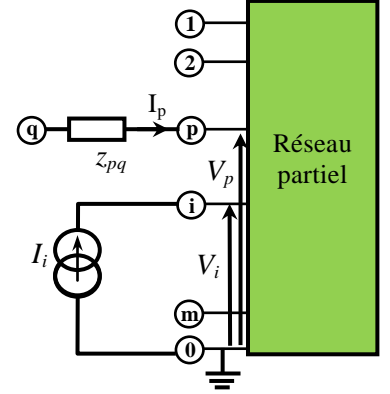


Fig. II.18 Addition d'une branche

- $[y_{\alpha\beta, \alpha\beta}]$: matrice des admittances primitives du réseau partiel.

Le courant dans la branche additionne est nul, ainsi on a :

$$I_{p-q}=0 \quad (II.37)$$

Cependant, V_{pq} la tension de cette branche n'est pas nulle parce qu'elle est couplée mutuellement avec un ou plusieurs des éléments du réseau partiel.

La tension entre deux accès de souscription α et β est donnée comme suit :

$$V_{\alpha\beta} = [V_{\alpha} - V_{\beta}] \quad (II.38)$$

Des équations (II.36), (II.37) et (II.38) résulte :

$$I_{pq} = y_{pq,pq} \cdot V_{pq} + [y_{pq,\alpha\beta}] \cdot V_{\alpha\beta} = 0 \quad (II.39)$$

on obtient alors

$$\bar{V}_{pq} = - \frac{\{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{\bar{V}_{\alpha} - \bar{V}_{\beta}\}}{y_{pq,pq}} \quad (II.40)$$

ou encore :

$$\bar{V}_q = \bar{V}_p + \frac{\{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{\bar{V}_{\alpha} - \bar{V}_{\beta}\}}{y_{pq,pq}} \quad (II.41)$$

De plus on pose pour V_q , V_p , V_{α} et V_{β} du système (II.32) que le courant I_i égal à l'unité, on obtient finalement le terme de la matrice d'impédance nouvelle après addition de la branche comme suit :

$$Z_{qi} = Z_{pi} + \frac{\{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{Z_{\alpha i} - Z_{\beta i}\}}{y_{pq,pq}} \quad i=1, 2, 3, \dots, m ; i \neq q \quad (II.42)$$

L'élément Z_{qq} peut être calculé en injectant cette fois, un courant de 1pu au $q^{ième}$ accès et on mesure la tension de ce même accès, il résulte du système (II.34) que :

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{Z}_{1q} \bar{I}_q \\ \bar{V}_2 = \bar{Z}_{2q} \bar{I}_q \\ \vdots \\ \bar{V}_p = \bar{Z}_{pq} \bar{I}_q \\ \vdots \\ \bar{V}_m = \bar{Z}_{mq} \bar{I}_q \\ \bar{V}_q = \bar{Z}_{qq} \bar{I}_q \end{cases} \quad (II.43)$$

On pose $I_q = 1pu$, donc Z_{qq} est connue en mesurant la tension V_q . Et le courant dans la branche additionnée vaudra :

$$I_{pq} = -I_q = -1 \quad (II.44)$$

De l'équation (II.39) on obtient :

$$I_{pq} = y_{pq,pq} V_{pq} + \{y_{pq,\alpha\beta}\} V_{\alpha\beta} = -1 \quad (II.45)$$

$$\text{D'où : } \bar{V}_q = \bar{V}_p + \frac{1 + \{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{\bar{V}_{\alpha} - \bar{V}_{\beta}\}}{y_{pq,pq}}$$

Ainsi en remplaçant V_q , V_p , V_{α} et V_{β} de (II.45) avec $I_q = 1pu$, on obtient :

$$Z_{qq} = Z_{pq} + \frac{1 + \{y_{pq,\alpha\beta}\} \{Z_{\alpha q} - Z_{\beta q}\}}{y_{pq,pq}} \quad (II.46)$$

II.3.2.2 Addition d'une boucle

Si l'élément additionne $p-q$ est une boucle, la technique pour recalculer les éléments de la nouvelle matrice impédance consiste à connecter avec l'élément additionne une source de tension fictive comme le montre la figure (II.19) :

Cependant cette technique crée un accès fictif l qui sera éliminé par la suite. La source de tension e_l est choisie de telle sorte que le courant circulant dans la boucle sera nul.

Le système d'équations représentant le réseau partiel, la boucle ($p-l$) ajoutée et la source de tension e_l sera donné par :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_p \\ \vdots \\ V_m \\ V_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1p} & \cdots & Z_{1m} & Z_{1q} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2p} & \cdots & Z_{2m} & Z_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Z_{p1} & Z_{p2} & \cdots & Z_{pp} & \cdots & Z_{pm} & Z_{pq} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \cdots & Z_{mp} & \cdots & Z_{mm} & Z_{mq} \\ Z_{l1} & Z_{l2} & \cdots & Z_{lp} & \cdots & Z_{ln} & Z_{lq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_p \\ \vdots \\ \bar{I}_m \\ \bar{I}_l \end{Bmatrix} \quad (II.47)$$

Comme la tension de la source e_l est égale à $(V_l - V_q)$, alors l'élément Z_{li} peut être déterminé en injectant un au $i^{ème}$ accès et en mesurant les tensions en tenant compte de l'accès l .

Puisque tous les autres courants sont nuls, il vient de l'équation (II.47) que :

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{Z}_{1i} \bar{I}_i \\ \bar{V}_2 = \bar{Z}_{2i} \bar{I}_i \\ \vdots \\ \bar{V}_p = \bar{Z}_{pi} \bar{I}_i \\ \vdots \\ \bar{V}_n = \bar{Z}_{ni} \bar{I}_i \\ \bar{V}_l = \bar{Z}_{li} \bar{I}_i \end{cases} \quad (II.48)$$

Ou encore : $V_k = Z_{ki} I_i \quad i=1, 2, \dots, m$ et :

$$e_l = Z_{li} I_i \quad (II.49)$$

Si on pose $I_i = I_{pu}$ dans l'équation (II.49), Z_{li} sera obtenue directement en mesurant la tension e_l à l'accès i . Comme la source de tension est donnée par :

$$e_l = V_l - V_q = V_q - V_p - V_{pl} \quad (II.50)$$

Et puisque le courant dans la boucle ajoutée est nul $I_{pq} = 0$, l'élément $p-q$ peut être donc traité comme une branche. Le courant dans cet élément sera donné par (II.36) :

$$I_{pl} = y_{pq,pl} V_{pl} + \{y_{pl,\alpha\beta}\} V_{\alpha\beta} = I_{pq} = 0$$

donc :

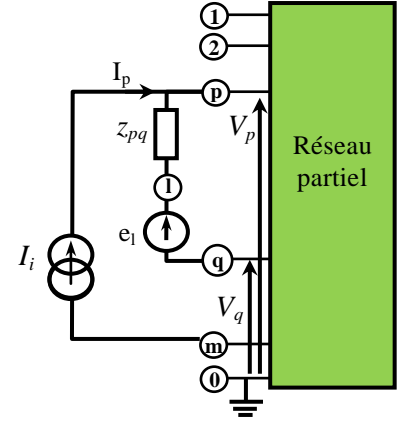


Fig. II.19 Addition d'une boucle

$$\bar{V}_{pl} = - \frac{\{y_{pl,\alpha\beta}\} \cdot \{\bar{V}_\alpha - \bar{V}_\beta\}}{y_{pl,pl}}$$

et comme $y_{pl, pl} = y_{pq, pq}$ et que $\{y_{pl, \alpha\beta}\} = \{y_{pq, \alpha\beta}\}$

donc :

$$V_{pl} = - \frac{\{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{V_\alpha - V_\beta\}}{y_{pq,pq}} \quad (II.51)$$

En substituant dans l'ordre les équations (II.51), (II.38) et (II.47) et en posant

$I_i = I_{pu}$ dans l'équation (II.24) on obtient :

$$Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi} + \frac{\{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{Z_{\alpha i} - Z_{\beta i}\}}{y_{pq,pq}} \quad i=1, 2, \dots, m; i \neq q \quad (II.52)$$

L'élément Z_{li} peut être calculé en injectant un courant au $I^{ième}$ accès avec l'accès q comme référence et en mesurant la tension au $I^{ième}$ accès en considérant l'accès q .

Puisque tous les courants aux autres accès sont nuls, il vient de l'équation (II.49) que :

$$V_k = Z_{ki} \cdot I_i \quad \text{et} \quad e_l = Z_{li} \cdot I_i \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (II.53)$$

En posant toujours I_i per unit dans (II.2-7), Z_{li} s'obtient en mesurant e_l .

Le courant dans l'élément (p - I) est $I_{pl} = I_l = -I$

$$I_{pl} = y_{pq,pq} V_{pl} + \{y_{pq,\alpha\beta}\} V_{\alpha\beta} = -1$$

On aura ainsi :

$$\bar{V}_{pl} = \frac{1 + \{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{\bar{V}_\alpha - \bar{V}_\beta\}}{y_{pq,pq}} \quad (II.54)$$

Et après substitution comme précédemment, on trouve l'élément d'impédance Z_{li} par :

$$Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi} + \frac{1 + \{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{Z_{\alpha i} - Z_{\beta i}\}}{y_{pq,pq}} \quad i=1, 2, \dots, m; i \neq q \quad (II.55)$$

Les éléments des $I^{èmes}$ ligne et colonne de la matrice du réseau partiel augmente, sont donnés par les équations (II.54) et (II.55).

Il reste à calculer la matrice d'impédances incluant l'effet de la boucle. Ceci peut être accompli en modifiant les éléments Z_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m$) et en éliminant les $I^{ième}$ ligne et colonne correspondant à l'accès fictif, ce dernier est éliminé en court-circuitant la source de tension e_i .

De l'équation (II.48)

$$\{V\} = [Z] \cdot \{I\} + Z_{li} \cdot I_i \quad (II.56)$$

D'autre part:

$$e_l = \{Z_{l,1:m}\} \cdot \{I\} + Z_{li} \cdot I_i \quad (II.57)$$

A partir des équations (II.56) et (II.57) on obtient :

$$\{V\} = \left(Z - \frac{\{Z_{1:m,l}\} \{Z_{l,1:m}\}}{Z_{ll}} \right) \cdot [I]$$

Il vient donc :

$$Z^{New} = Z^{Old} - \frac{\{Z_{1:m,l}\} \{Z_{l,1:m}\}}{Z_{ll}}$$

Ou encore :

$$Z_{ij}^{New} = Z_{ij}^{Old} - \frac{Z_{il} \cdot Z_{lj}}{Z_{ll}} \quad (II.58)$$

II.3.2.3 Suppression d'un accès :

Dans la pratique, le nombre d'accès dans un réseau est souvent grand, donc on se retrouve avec une matrice d'impédance $[Z_{bus}]$ de grande dimension, ce qui pose le problème de stockage en mémoire. Mais souvent on manipule des accès qui ne sont pas utiles dans les calculs pour lesquels la matrice $[Z_{bus}]$ a été construite.

Ainsi il est nécessaire de supprimer ces accès dans la matrice sans pour autant les supprimer réellement du réseau. Pour le faire, il suffit d'éliminer les axes qui correspondent à ces accès.

II.3.2.4 Algorithme de formation de Z_{bus} :

Lire les données des éléments du réseau (accès de départ et d'arrivée, impédances primitives et mutuelles)

Pour k allant de 1 au dernier élément de la liste faire

Si k est un élément radial alors

Lire les accès p et q

Lire z_{pq}

Lire si z_{pq} est couplée mutuellement avec un ou plusieurs éléments déjà si oui m=1

Pour i allant de 1 à n faire

$$\text{Si } m = 1 \text{ alors calculer } pr = \frac{\{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{Z_{\alpha i} - Z_{\beta i}\}}{y_{pq,pq}}$$

Si non $Pr = 0$

Fin si

$$Z_{qi} = Z_{iq} + pr$$

$$Z_{pi} = Z_{ip}$$

Fin pour

$$\text{Si } m=1 \text{ alors calculer } ps = \{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{V_{\alpha} - V_{\beta}\}$$

Sinon $ps = 0$

$$Z_{qq} = Z_{pq} + \frac{1 + ps}{y_{pq,pq}}$$

Si k est un élément de la boucle alors

Lire les accès p et q

Lire z_{pq}

Lire si z_{pq} est couplée mutuellement avec un ou plusieurs éléments déjà si oui m=1

Pour i allant de 1 à n faire

$$\text{Si } m = 1 \text{ alors calculer } pr = \frac{\{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{Z_{\alpha i} - Z_{\beta i}\}}{y_{pq,pq}}$$

Si non $pr = 0$

Fin si

$$Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi} + pr$$

Fin pour

Si m=1 alors calculer $ps = \{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{V_\alpha - V_\beta\}$

Sinon $ps = 0$

$$Z_{ll} = Z_{pl} - Z_{ql} + \frac{1 + ps}{y_{pq,pq}}$$

Pour i allant de 1 à n faire

Pour j allant de 1 à n faire

$$Z_{ij}^{New} = Z_{ij}^{Old} - \frac{Z_{il} \cdot Z_{lj}}{Z_{ll}}$$

Fin pour

Fin pour

Afficher les résultats

II.3.3 Formation de la matrice admittance nodale $[Y_{bus}]$:

On a trois méthodes pour la détermination de la matrice $[Y_{nodale}]$ qui sont :

- a) Par inversion de la matrice impédance nodale.
- b) à partir des admittances des éléments du réseau.
- c) à partir des admittances des éléments du réseau et la matrice d'incidence (topologique)

a) Formation de $[Y_{nodale}]$ (Y_{bus}) à partir des admittances des éléments du réseau :

Cette méthode est la plus simple et la plus commode car elle nécessite moins d'opérations que les autres méthodes et surtout dans le cas où le réseau ne présente pas de couplage mutuel entre ses éléments

➤ Dérivation de la matrice $[Y_{bus}]$:

Soit un réseau à n accès indépendant et un accès $n+1$ représentant l'accès de référence.

Considérons un accès i parmi les n accès différents de celui de référence.

Pour cet accès on a :

$$I_i = \sum_{j=1}^n I_{ij} \quad (II.59)$$

Avec :

I_i : Le courant injecté à l'accès i par une source extérieure.

I_{ij} : Le courant qui circule entre l'accès i et l'accès j à travers la branche $(i-j)$.

On a aussi :

$$I_{ij} = (V_i - V_j)y_{ij} \quad (II.60)$$

Telle que:

V_i et V_j : Sont respectivement les tensions aux accès i et j .

y_{ij} : L'admittance propre de la branche $(i-j)$.

On aura alors :

$$I_i = \sum_{j=1}^n y_{ij}(V_i - V_j) = y_{i0}(V_i - V_0) + y_{i1}(V_i - V_1) + y_{i2}(V_i - V_2) + \dots + y_{in}(V_i - V_n)$$

Telle que : $V_0 = 0$ et $i = 1 \dots n$

y_{i0} : La somme des admittances transversales des lignes reliées à l'accès i

$$I_i = V_i \left[y_{i0} + \sum_{j=1}^n y_{ij} \right] - y_{i1}V_1 - y_{i2}V_2 - y_{i3}V_3 - \dots - y_{in}V_n ; i=1,2,\dots,n \quad (II.61)$$

Si on écrit l'équation précédente sous la forme matricielle pour les n accès on aura :

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1i} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2i} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ Y_{i1} & Y_{i2} & \dots & Y_{ii} & \dots & Y_{in} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \ddots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{ni} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_n \end{Bmatrix} \quad (II.62)$$

tel que:

$$\begin{cases} Y_{ii} = y_{i0} + \sum_{j=1}^n y_{ij} \\ Y_{ij} = -y_{ij} \end{cases} \quad (II.63)$$

$[Y]$: La matrice nodale des admittances carrée d'ordre $(n \times n)$.

Algorithme de calcul de Y_{bus} :

Lecture des données de lignes et accès.

Initialiser $Y_{bus} = [0]$.

Initialiser le compteur d'accès à 1.

Calculer

$$Y_{ij} = -\frac{1}{z_{ij}} \quad (II.64)$$

$$Y_{ii} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z_{ij}} + y_b \quad (II.65)$$

$$Y_{ji} = Y_{ij} \quad (II.66)$$

Afficher les résultats.

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté le système d'unités relatives, la théorie des graphes permettant la représentation matricielle des réseaux électriques. La construction des différentes matrices incidence nodale A , incidence nodale réduite A' , incidence de coupures fondamentales B , incidence de mailles fondamentales C , les matrices de transfert ainsi la matrice des impédances primitives. Cela nous a permis de construire les matrices admittance nodale Y_{bus} et impédance nodale Z_{bus} . Les algorithmes de construction de ces derniers sont développés.

Chapitre III. Calcul des courants de défaut dans les réseaux de transport

III.1 Introduction :

Les courants et tensions qui apparaissent lors d'un défaut (court-circuit ou défaut d'isolement) affectant les réseaux et peuvent provoquer d'énormes pertes matérielles, humaines et économiques d'où l'intérêt de maîtriser et d'étudier ce type de perturbations.

En effet leurs calculs nous permettent essentiellement de :

- mieux choisir les paramètres fondamentaux du dimensionnement du matériel notamment des disjoncteurs dont le rôle est d'interrompre les courants de défaut.
- servir d'entrée et des équipements de protection pour la détection et la localisation des défauts.

III.2 Définition

Un courant de court-circuit se produit généralement à la fermeture d'un circuit électrique sur une impédance nulle ou de faible valeur. Le cas le plus courant est celui où se produit une courte entre une ou plusieurs phases d'un réseau et la terre. Un autre cas est la connexion accidentelle entre deux phases avec une impédance négligeable. Le courant de court-circuit qui en résulte est souvent désigné comme "courant de défaut" puisque ceci représente un fonctionnement anormal du système et l'équipement électrique connexe. Les courants de défaut sont caractérisés par leurs valeurs très élevées. Ces courants sont plusieurs fois le courant nominal, selon l'impédance du système à l'endroit du défaut.

III.3 Les causes courantes de défauts

Les causes d'un court-circuit peuvent être diverses:

- **Les conditions météorologiques (foudre, vent, tempête, etc.)** dans ces conditions météorologiques extrêmes, une rupture diélectrique (par exemple surtensions temporaires causées par la foudre) ou la destruction partielle de la matière de l'équipement peuvent provoquer des courts-circuits;
- **Le vieillissement du matériel:** ce phénomène conduit à la rupture ou la défaillance locale qui pourrait entraîner des courts-circuits;
- **Le manque d'isolation électrique:** ce défaut est souvent à l'origine de certains courts-circuits où l'isolation n'est plus en mesure de maintenir sa fonction, conduisant ainsi à un contact entre les phases ou entre spires d'un transformateur par exemple. Le contact accidentel entre une ligne et la végétation (arbres) est considéré comme un défaut d'isolation tant que la distance d'isolement entre la ligne et la végétation (terre) ne sont plus respectés pour manque d'entretien ou élagage;
- **Le manque de flexibilité et de l'erreur humaine:** Ce type de manœuvre ou erreur provoque souvent des courts-circuits graves. Ceux-ci peuvent varier de l'oubli d'une mise à la terre lors de l'entretien, d'une erreur opérationnelle qui provoque une surtension temporaire qui déclenche une rupture diélectrique;
- **Vandalisme:** lancer une barre de fer sur une ligne aérienne provoque inévitablement un court-circuit;
- **Animaux:** oiseaux causent souvent des courts-circuits. Le cas de la cigogne du Portugal est célèbre.

III.4 Effets d'un court-circuit

Les effets et les conséquences d'un court-circuit sont extrêmement dommageables pour le matériel et les équipements du réseau électrique. En effet, l'équipement électrique installé sur les systèmes d'alimentation n'est pas conçu pour résister à de telles valeurs de courant très élevées. Ces courants provoquent un échauffement excessifs qui peuvent entraîner des risques d'incendies et de destruction des équipements. Divers dysfonctionnements peuvent être observés à la suite d'un défaut, particulièrement dans les appareils de mesure (transformateurs lignes de courant) et les équipements de télécommunication.

Il est donc essentiel de protéger l'équipement contre les effets de courts-circuits. Cette fonction est généralement assurée par un dispositif qui peut détecter et interrompre des courants très élevés, à savoir, le disjoncteur. Toutefois, ces disjoncteurs sont associés à des dispositifs de protection qui sont équipés avec des algorithmes de détection de défauts et la coordination avec d'autres dispositifs de protection (sélectivité) au sein du réseau.

III.5 Calcul des courants de court-circuit

Le calcul des courants de court-circuit peut se faire de différentes manières, néanmoins, dans ce présent chapitre on exposera que la méthode dite "des composantes symétriques".

III.5.1 Présentation de la méthode des composantes symétriques :

La définition des composantes symétrique repose sur l'équivalence entre un système triphasé déséquilibré et la somme de trois systèmes équilibrés, direct, inverse et homopolaire voir la figure (III.1).

Il ya 3 systèmes triphasés équilibrés distincts (pour une fréquence angulaire ω de donnée, de l'amplitude "A" et la phase φ). Ces systèmes appelés : «directe», «inverse» et «homopolaire». En adoptant la représentation de Fresnel (vecteur), ces systèmes sont représentés par les formules ci-dessous:

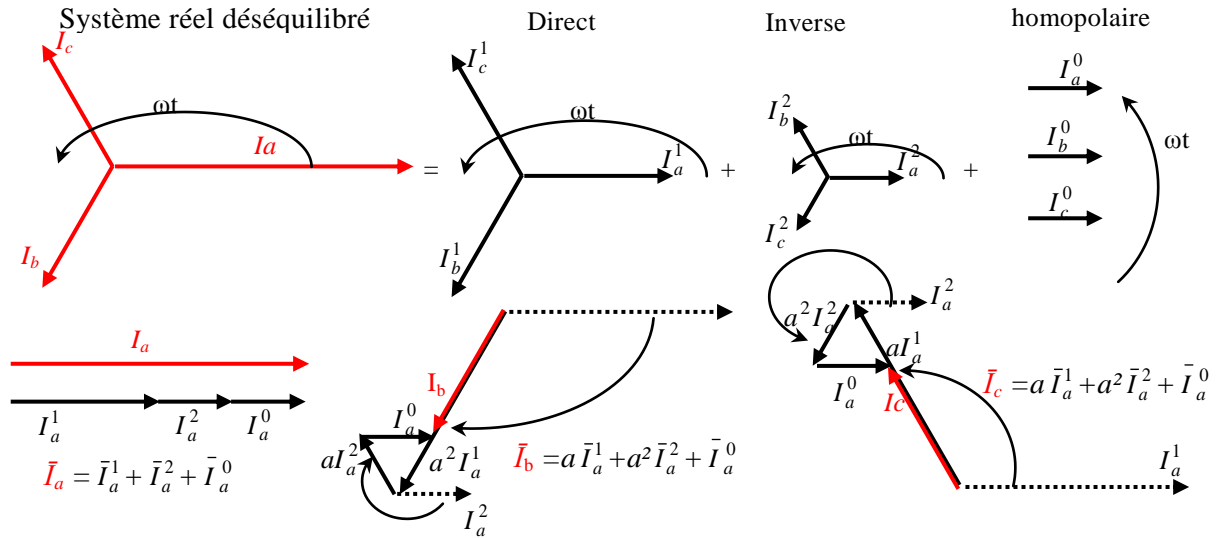


Fig. III.1 Construction géométrique des courants I_a , I_b et I_c

Le calcul des courants de court-circuit peut se faire de différentes manières, néanmoins, dans ce présent chapitre on exposera que la méthode dite "des composantes symétriques".

Le théorème de superposition est alors exploitable pour le calcul des courants de défaut.

Les composantes réelles des phases a, b, c des courants I^{abc} et des tensions V^{abc} s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} I^a = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \\ I^b = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{3}) \\ I^c = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad \begin{cases} V^a = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) \\ V^b = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}) \\ V^c = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad (III.1)$$

Ce système est équivalent au 3 systèmes : direct, inverse et homopolaire est formulé par les équations suivantes :

Direct	Inverse	Homopolaire
$\begin{cases} I_a^1 = I^1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \\ I_b^1 = I^1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{3}) \\ I_c^1 = I^1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$	$\begin{cases} I_a^2 = I^2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \\ I_b^2 = I^2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3}) \\ I_c^2 = I^2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$	$\begin{cases} I_a^0 = I^0 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \\ I_b^0 = I^0 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \\ I_c^0 = I^0 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$

(III.2)

$$\begin{cases} V_a^1 = V^1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) \\ V_b^1 = V^1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}) \\ V_c^1 = V^1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad \begin{cases} V_a^2 = V^2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) \\ V_b^2 = V^2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi + \frac{2\pi}{3}) \\ V_c^2 = V^2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi + \frac{2\pi}{3}) \end{cases} \quad \begin{cases} V_a^0 = V^0 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) \\ V_b^0 = V^0 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) \\ V_c^0 = V^0 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) \end{cases} \quad (III.3)$$

Le système est défini en prenant \bar{I}_i^a comme référence de rotation, pour un accès quelconque d'indice i les composantes de courant s'écrivent:

- \bar{I}_i^1 : Comme sa composante directe.
- \bar{I}_i^2 : Comme sa composante inverse.
- \bar{I}_i^0 : Comme sa composante homopolaire.

Et en utilisant l'opérateur $a=e^{j2\pi/3}$ entre \bar{I}_i^a , \bar{I}_i^b , \bar{I}_i^c , l'addition graphique des vecteurs donne bien les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \bar{I}_i^a &= \bar{I}_i^1 + \bar{I}_i^2 + \bar{I}_i^0 \\ \bar{I}_i^b &= a^2 \bar{I}_i^1 + a \bar{I}_i^2 + \bar{I}_i^0 \\ \bar{I}_i^c &= a \bar{I}_i^1 + a^2 \bar{I}_i^2 + \bar{I}_i^0 \end{aligned}$$

Les trois composantes de phases a, b, c sont données en fonction des composantes symétriques (1, 2, 0) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_i^a \\ \bar{I}_i^b \\ \bar{I}_i^c \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \bar{I}_i^1 \\ \bar{I}_i^2 \\ \bar{I}_i^0 \end{bmatrix} \quad (III.4)$$

$$\text{Avec } [T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \text{ est la matrice de transfert.}$$

Ces composantes symétriques de courant sont liées aux composantes symétriques de tension par les impédances correspondantes, on aura :

$$\begin{aligned} \bar{V}_i^1 &= E - Z_i^1 \bar{I}_i^1 \\ \bar{V}_i^2 &= -Z_i^2 \bar{I}_i^2 \\ \bar{V}_i^0 &= -Z_i^0 \bar{I}_i^0 \end{aligned} \quad (III.5)$$

De la même manière que les courants, Les tensions sont liées par la matrice de transformation T comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_i^a \\ \bar{V}_i^b \\ \bar{V}_i^c \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \bar{V}_i^1 \\ \bar{V}_i^2 \\ \bar{V}_i^0 \end{bmatrix} \quad (III.6)$$

Donc le calcul des courants et tensions de court-circuit revient à déterminer $[\bar{I}_i^{1,2,0}]$ et $[\bar{V}_i^{1,2,0}]$ connaissant les matrices impédances $[\bar{Z}^{1,2,0}]$.

La relation ci-dessus exprime les composantes de phase en fonction des composantes symétriques. D'autre part, on peut exprimer les composantes symétriques en termes de composantes de phase par inversion de la matrice de transformation T:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_i^1 \\ \bar{I}_i^2 \\ \bar{I}_i^0 \end{bmatrix} = [T]^I \begin{bmatrix} \bar{I}_i^a \\ \bar{I}_i^b \\ \bar{I}_i^c \end{bmatrix} \quad (III.7)$$

$$[T]^I = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.8)$$

Les courants de phase $[\bar{I}_i^{a,b,c}]$ ainsi que les tensions de phase $[\bar{V}_i^{a,b,c}]$ au niveau chaque accès i seront calculés comme suit :

$$\begin{cases} \bar{I}_i^a = \frac{1}{3}(\bar{I}_i^1 + a\bar{I}_i^2 + a^2\bar{I}_i^0) \\ \bar{I}_i^b = \frac{1}{3}(\bar{I}_i^1 + a^2\bar{I}_i^2 + \bar{I}_i^0) \\ \bar{I}_i^c = \frac{1}{3}(\bar{I}_i^1 + \bar{I}_i^2 + \bar{I}_i^0) \end{cases} \quad (III.9)$$

$$\begin{cases} V_i^a = \frac{1}{3}(V_i^1 + aV_i^2 + a^2V_i^0) \\ V_i^b = \frac{1}{3}(V_i^1 + a^2V_i^2 + V_i^0) \\ V_i^c = \frac{1}{3}(V_i^1 + V_i^2 + V_i^0) \end{cases} \quad (III.10)$$

III.5.2 formulation des équations générales de court-circuit

En pratique, on rencontre plusieurs types de défauts :

- Court-circuit monophasé à la terre.
- Court-circuit biphasé.
- Court-circuit biphasé à la terre.
- Court-circuit triphasé.

Le type de défaut le plus fréquent est le Court-circuit monophasé.

Le défaut peut être franc ou à travers une impédance.

III.5.2.a) Défaut triphasé symétrique :

On définit i comme étant l'accès de défaut pour tous les types de défauts.

Conditions de défaut :

$$\bar{I}_i^a + \bar{I}_i^b + \bar{I}_i^c = 0$$

$$\bar{V}_i^a = \bar{V}_i^b = \bar{V}_i^c$$

Le schéma équivalent en composantes symétriques est donné sur la figure (III.3) :

Avec :

$$\bar{I}_i^2 = \bar{I}_i^0 = 0$$

Et :

$$\bar{I}_f = \bar{I}_i^1 = \frac{E}{Z_{ii}^1 + Z_f} \quad (III.11)$$

En remplaçant dans l'équation (III.4) on aura :

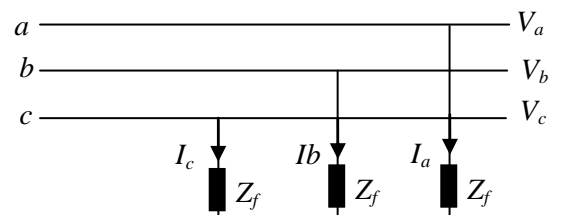


Fig. III.2 Schéma de court circuit triphasé.

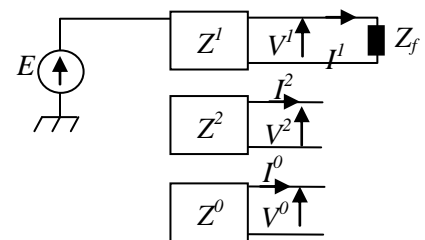


Fig. III.3 Schéma de séquence pour un défaut triphasé.

$$\bar{I}_i^a = \bar{I}_i^1; \bar{I}_i^b = a^2 \bar{I}_i^1; \bar{I}_i^c = a \bar{I}_i^1 \quad (III.12)$$

III.5.2.b) Défaut phase-terre :

Conditions de défaut :

$$\bar{I}_i^a = \bar{I}_i^b = 0$$

$$\bar{I}_f = \bar{I}_i^a$$

$$\bar{V}_i^a = Z_f \bar{I}_f$$

Dans ce cas, les composantes symétriques en courant sont égales, d'où le schéma équivalent en séquences (1,2,0) suivant :

avec :

$$\bar{I}_i^1 = \bar{I}_i^2 = \bar{I}_i^0 = \frac{E}{Z_{ii}^1 + Z_{ii}^2 + Z_{ii}^0 + Z_f} \quad (III.13)$$

En appliquant (III.4) on aura :

$$\bar{I}_f = \bar{I}_i^a = 3\bar{I}_i^1 \quad (III.14)$$

$$\bar{I}_i^b = \bar{I}_i^c = 0$$

III.5.2.c) Défaut biphasé :

Conditions de défauts :

$$\bar{I}_i^a = 0$$

$$\bar{I}_f = \bar{I}_i^b = -\bar{I}_i^c$$

Le schéma équivalent en composantes symétriques est donné sur la figure (III.7) :

Avec : $\bar{I}_i^0 = 0$

Et :

$$\bar{I}_i^1 = -\bar{I}_i^2 = \frac{E}{Z_{ii}^1 + Z_{ii}^2 + Z_f} \quad (III.15)$$

En utilisant l'équation (III.4) on obtiendra les courants circulants dans les trois phases en valeurs réelles :

$$I_i^a = 0$$

$$\bar{I}_f = \bar{I}_i^b = -\bar{I}_i^c = (a^2 - a) \cdot \bar{I}_i^1 = j\sqrt{3} \bar{I}_i^1$$

$$\bar{I}_f = j\sqrt{3} \frac{E}{Z_{ii}^1 + Z_{ii}^2 + Z_f} \quad (III.16)$$

III.5.2.d) Défaut biphasé-terre :

Conditions de défaut :

$$\bar{I}_f = \bar{I}_i^b + \bar{I}_i^c; \bar{I}_i^a = 0$$

$$\bar{V}_i^b - \bar{V}_i^c = Z_f \bar{I}_f$$

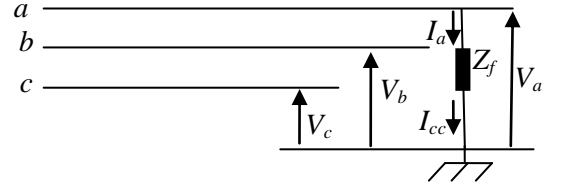


Fig. III.4 Schéma de court-circuit monophasé.

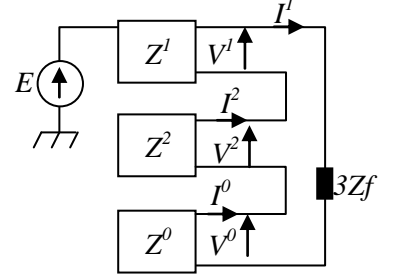


Fig. III.5 Schéma de séquence pour un défaut monophasé.

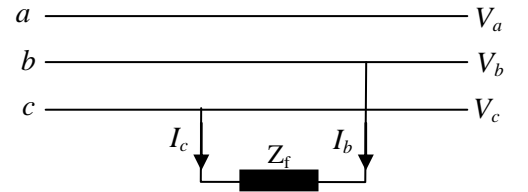


Fig. III.6 Schéma de court-circuit biphasé.

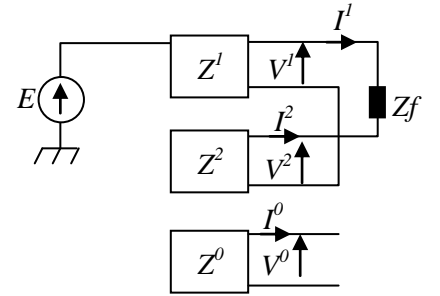


Fig. III.7 schéma de séquence pour un défaut biphasé.

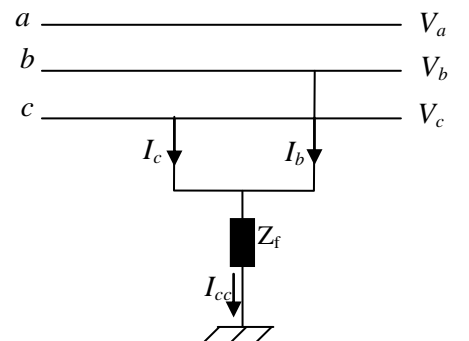


Fig. III.8 Schéma de court-circuit biphasé-terre.

Le schéma équivalent en composantes symétriques est donné sur la figure (III.9) :

Dans ce type de défaut, les courants de différentes séquences coexistent, ce qui rend la résolution un peu difficile. Ainsi après développement des équations (III.4) et (III.5) donnent ce qui suit :

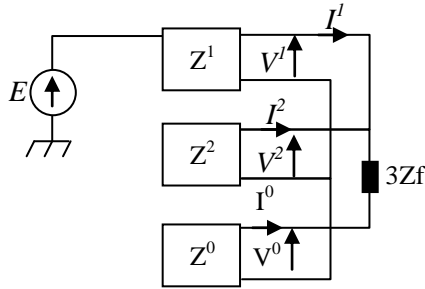


Fig. III.9 Schéma de séquence pour un défaut biphasé-terre

Les différents courants de séquences sont :

$$\begin{cases} \bar{I}_i^1 = \frac{Z_{ii}^2 + (Z_{ii}^0 + 3Z_f)}{\Delta} E \\ \bar{I}_i^2 = -\frac{Z_{ii}^0 + 3Z_f}{\Delta} E \\ \bar{I}_i^0 = -\frac{Z_{ii}^2}{\Delta} E \end{cases} \quad (III.17)$$

avec : $\Delta = Z_{ii}^1 \cdot Z_{ii}^2 + Z_{ii}^1 \cdot (Z_{ii}^0 + 3Z_f) + Z_{ii}^2 \cdot (Z_{ii}^0 + 3Z_f)$

III.6 Calcul des tensions aux accès au moment du défaut

Les différentes tensions de séquences à l'accès j sont :

$$\begin{cases} \bar{V}_j^1 = E - Z_{ij}^1 \bar{I}_i^1 \\ \bar{V}_j^2 = -Z_{ij}^2 \bar{I}_i^2; \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \bar{V}_j^0 = -Z_{ij}^0 \bar{I}_i^0 \end{cases} \quad (III.18)$$

III.7 calcul des tensions en valeurs réelles aux accès du réseau :

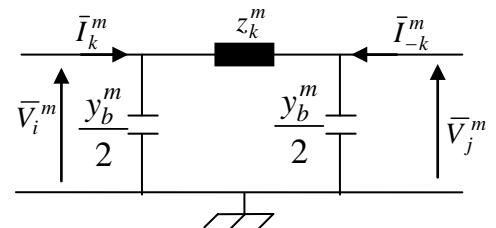
Une fois $[\bar{V}_j^{1,2,0}]$ déterminée on peut procéder au calcul des tensions de phases sur tous les accès du réseau en appliquant l'équation (III.6), comme suit :

$$\bar{V}_j^{abc} = [T][\bar{V}_j^{1,2,0}]$$

III.8 calcul des courants dans les branches du réseau :

La clef pour retrouver toutes les grandeurs du système est de connaître la tension en chaque accès sous condition de défaut.

Nous sommes aussi intéressés de connaître les courants circulants dans les branches du réseau qui sont le but de l'étude des courts-circuits, cela permettra de prévoir un dimensionnement et une protection adéquate.



Connaissant les tensions aux différents accès du réseau, les courants qui circulent dans la branche k ayant comme accès i et j sont donnés comme suit :

$$\bar{I}_k^m = \frac{\bar{V}_i^m - \bar{V}_j^m}{z_k^m} + y_b^m \cdot \bar{V}_i^m \quad (III.19)$$

$$\bar{I}_{-k}^m = -\frac{\bar{V}_j^m - \bar{V}_i^m}{z_k^m} + y_b^m \cdot \bar{V}_j^m \quad (III.20)$$

où

\bar{V}_i^m, \bar{V}_j^m : Tensions de séquence m respectivement aux accès i et j .

z_k^m : Impédance primitive de la branche k de séquence m .

$\bar{I}_k^m, \bar{I}_{-k}^m$: Courants de séquence m circulant respectivement de i vers j et de j vers i .

y_b^m : Admittance transversale de séquence m .

Dans le cas où l'élément ne présente pas d'admittance transversale, le courant \bar{I}_k^m est l'opposé de \bar{I}_{-k}^m , c'est-à-dire que $\bar{I}_{-k}^m = -\bar{I}_k^m$, mais cette relation n'est pas toujours vraie, car dans le cas de la présence d'un transformateur ΔY un réajustement du déphasage des tensions est nécessaire ce qui est l'objet de ce qui suit.

III.9 Réajustement du déphasage des tensions

Pour des transformateurs couplés en $Y\Delta$ ayant i comme accès de départ (côte Y) et j comme accès d'arrivée (côte Δ), le déphasage de la tension à l'accès j vaut -30° par rapport à la tension à l'accès i .

Et pour des transformateurs couplés ΔY le déphasage de la tension du côté Y (arrivée) vaut $+30^\circ$ par rapport à la tension du côté Δ (départ).

Pour des transformateurs couplés YY ou $\Delta\Delta$ le déphasage reste inchangé.

III.10 calcul de la puissance de court-circuit :

Pour tout système, la puissance totale en n'importe quel accès, est la somme des puissances calculées individuellement pour chaque phase.

$$\bar{S}_{cc} = [\bar{V}_a \cdot \bar{I}_a^* + \bar{V}_b \cdot \bar{I}_b^* + \bar{V}_c \cdot \bar{I}_c^*]$$

Pour un défaut à l'accès i , la valeur moyenne de cette puissance triphasée est donné par :

$$\bar{S}_{icc} = [\bar{V}_i^a \cdot \bar{I}_i^{a*} + \bar{V}_i^b \cdot \bar{I}_i^{b*} + \bar{V}_i^c \cdot \bar{I}_i^{c*}] \quad (III.21)$$

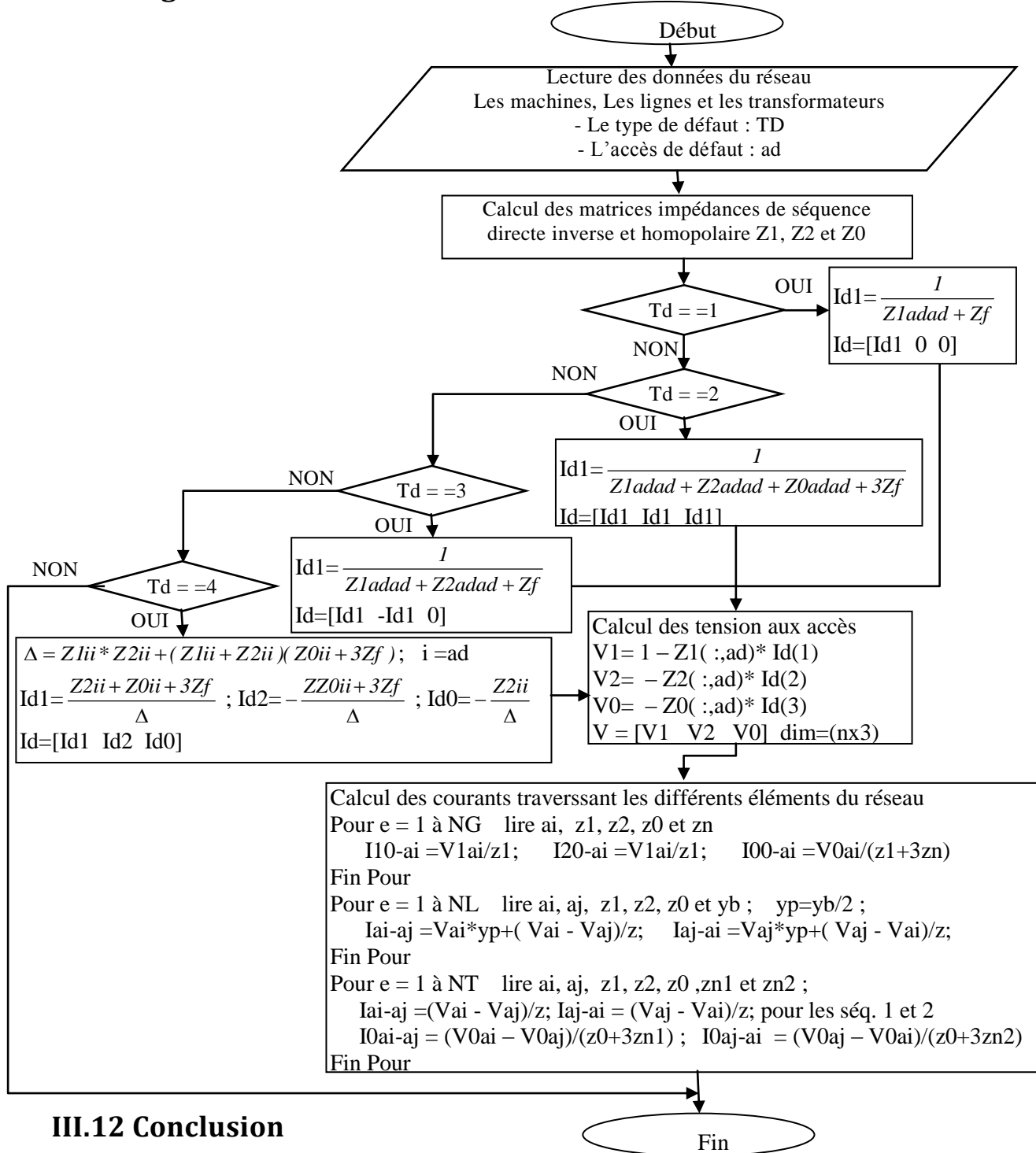
Remarque: pour un réseau d'alimentation, la puissance de court-circuit triphasé en un accès du réseau permet de calculer l'impédance du réseau amont ramenée au secondaire du transformateur Z_s

$$\text{telle que : } Z_s = \frac{\bar{U}_0^2}{\bar{P}_{cc}}$$

avec : U_0 : tension entre phase à vide du secondaire du transformateur.

Z_s : impédance amont du transformateur ramenée au secondaire.

III.11 Algorithme de calcul des courants de défaut



III.12 Conclusion

Ce chapitre est consacré au calcul des courants de court-circuit (3φ, 1φ, 2φ et 2φ-T). Il commence par le rappel du système unitaire relatives (pu) et la méthode des composantes symétriques. Cette dernière est indispensable pour étudier les cas déséquilibrés ce qui est le cas des défauts (1φ, 2φ et 2φ-T) en utilisant la matrice de transformation T et la matrice de transformation T⁻¹ pour le passage des composantes de phases (a,b,c) aux composantes symétriques (1,2,0) et inversement. Le calcul des courants de défauts, en utilisant les matrices de transformation T et T⁻¹ et la matrice impédance nodale Z_{bus}, permet aux étudiants d'évaluer l'état des tensions de tous les accès du réseau au moment du défaut. Il permet aussi le calcul des courants et des puissances électriques transitant dans chaque élément du réseau. Un réajustement des déphasages des tensions et courants de séquences lors de la présence d'un transformateur ΔY ou YΔ est nécessaire.

Chapitre IV. Calcul d'écoulement de puissance

IV.1. Introduction

Le dimensionnement d'un système de compensation d'énergie réactive d'une installation industrielle nécessite l'élaboration d'un bilan de puissance afin de déterminer les puissances actives et réactives réellement consommées par l'installation, ce qui nous permet de déduire le facteur de puissance de l'installation.

On est en particulier amené à évaluer l'impact des changements sur l'état du réseau existant tel que :

- Installation de nouveaux sites de productions.
- Augmentation de la charge.
- Installation de nouvelles lignes de transport.
- Interconnexion d'un réseau avec d'autres.
- Différentes conditions de charge (périodes de pointe, périodes creuses, ...etc.).

IV.2 Objectifs

Le calcul de l'écoulement de puissance est réalisé dans le but de :

- **Définition de l'état du réseau :** L'objectif du calcul d'écoulement de puissance dans un réseau est de déterminer l'état du réseau selon les charges connectées et leur répartition sur tous les accès du réseau. Le calcul fournit une image précise du flux de puissance active et réactive dans chaque élément du réseau de transport, ainsi que les niveaux de tension en chaque nœud. Ce calcul est basé sur l'hypothèse que le réseau fonctionne à l'état d'équilibre et que les générateurs fournissent de l'énergie sous forme de courant alternatif (CA) sinusoïdale et de tensions triphasées équilibrées.
- **Calcul des flux de courant :** La valeur du courant circulant à travers chaque élément du réseau (ligne, un câble ou un transformateur) ne doit pas dépasser les valeurs nominales de courant de ces composants. Le calcul du flux de courant ne doit pas dépasser ces valeurs. Des valeurs excessives du courant peuvent conduire à une surchauffe des composants et même à une rupture.
- **Calcul des pertes en ligne :** Le calcul d'écoulement de puissance permet à travers les flux de courant une évaluation des pertes de puissance dans les lignes et les transformateurs. Des Pertes excessives peuvent conduire à la reconfiguration du réseau afin de minimiser ces dernières sur l'ensemble du réseau.
- **Etablir une stratégie d'adaptation et de contrôle :** La détermination des tensions aux nœuds et de la puissance active et réactive que chaque générateur doit fournir pour assurer la livraison de puissance à chaque charge, permet de définir les instructions de commande pour la régulation de chaque machine connectée au réseau. Ce calcul est également utilisé dans l'analyse de stabilité.
- **Optimisation de la capacité de transit de puissance :** Enfin, il est possible d'optimiser le flux de puissance afin d'augmenter la capacité de transfert de puissance disponible dans le réseau en utilisant des algorithmes basés sur le concept de contraintes et de fonction objectif.

IV.3. Formulation du problème

IV.3.1. équations générales de la puissance

La puissance complexe $S_i = P_i + jQ_i$ injecté au nœud i , en fonction des tensions aux nœuds et les éléments de la matrice admittance nodale Y_{bus} , en tenant compte de l'expression du courant injecté I_i au nœud i , est donnée par la relation suivante:

$$\bar{S}_i = \bar{P}_i + j\bar{Q}_i = \bar{V}_i \cdot \bar{I}_i^* = \bar{V}_i \cdot \sum_{j \neq i} \bar{Y}_{ij}^* \cdot \bar{V}_j^* \quad (IV.1)$$

L'expression de la puissance complexe conjuguée s'écrit

$$\begin{aligned}\bar{S}_i^* &= \bar{P}_i - j\bar{Q}_i = \bar{V}_i^* \cdot \left(\bar{Y}_{ii} \cdot \bar{V}_i + \sum_{j \neq i} \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j \right) \\ S_I^* &= \bar{Y}_{ii} \cdot \bar{V}_i^* \cdot \bar{V}_i + \bar{V}_i^* \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j\end{aligned}\quad (IV.2)$$

En exprimant la tension sous sa forme polaire en module $|\bar{V}_i|$ et argument θ , l'expression de la puissance complexe devient

$$\bar{S}_i^* = \bar{Y}_{ii} \cdot |\bar{V}_i|^2 + |\bar{V}_i| \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j \right| e^{j(\theta_j - \theta_i)} \quad (IV.3)$$

$$P_i = \text{Réel}(\bar{S}_i^*) = \text{Réel} \left\{ \bar{V}_i^* \sum_{j=1}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j \right\} \quad (IV.4.a)$$

$$Q_i = -\text{Imag}(\bar{S}_i^*) = -\text{Imag} \left\{ \bar{V}_i^* \sum_{j=1}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j \right\} \quad (IV.4.b)$$

IV.3.2 Puissances écoulées dans les lignes :

Pour calculer la puissance qui s'écoule dans la branche reliant les accès i et j , le courant qui circule entre les accès i et j a pour expression :

$$I_{ij} = \bar{Y}_{ij} \cdot (\bar{V}_i - \bar{V}_j) + \bar{Y}_{i0} \bar{V}_i \quad (IV.5)$$

Et la puissance apparente :

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ij} &= \bar{V}_i \cdot \bar{I}_{ij}^* \\ \bar{S}_{ij} &= \bar{V}_i \cdot \left[\bar{Y}_{ij} \cdot (\bar{V}_i - \bar{V}_j) + \bar{Y}_{i0} \cdot \bar{V}_i \right]^* \\ \bar{S}_{ij} &= |\bar{V}_i|^2 \cdot \bar{Y}_{ij}^* - \bar{V}_i \cdot \bar{V}_j^* \cdot \bar{Y}_{ij}^* + |\bar{V}_i|^2 \cdot \bar{Y}_{i0}^*\end{aligned}\quad (IV.6)$$

   De même la puissance apparente qui s'écoule de l'accès j vers l'accès i vaut :

$$\bar{S}_{ji} = |\bar{V}_j|^2 \cdot \bar{Y}_{ij}^* - \bar{V}_j \cdot \bar{V}_i^* \cdot \bar{Y}_{ij}^* + |\bar{V}_j|^2 \cdot \bar{Y}_{j0}^* \quad (IV.7)$$

IV.3.3 Puissance écoulée dans les transformateurs régulateurs

Considérant un transformateur régulateur dont sa matrice admittance est :

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{Y_{ij}}{a^2} & -\frac{Y_{ij}}{a} \\ -\frac{Y_{ij}}{a} & Y_{ij} \end{bmatrix} \quad (IV.8)$$

Le courant qui circule entre les accès i et j est donné comme suit :

$$\bar{I}_{ij} = \frac{\bar{Y}_{ij}}{a^2} \cdot \bar{V}_i - \frac{\bar{Y}_{ij}}{a} \cdot \bar{V}_j = \frac{1}{a} \cdot \bar{Y}_{ij} \left(\frac{1}{a} \bar{V}_i - \bar{V}_j \right) \quad (IV.9)$$

Et la puissance \bar{S}_i^* a pour valeur :

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij} &= \bar{V}_i \cdot \bar{I}_{ij}^* = \bar{V}_i \cdot \left[\frac{1}{a} \bar{Y}_{ij} \left(\frac{1}{a} \bar{V}_i - \bar{V}_j \right) \right] \\ \bar{S}_{ij} &= \frac{1}{a^2} (\bar{V}_i)^2 \cdot \bar{Y}_{ij}^* - \frac{1}{a} \bar{Y}_{ij}^* \bar{V}_j \cdot \bar{V}_i \end{aligned} \quad (IV.10)$$

D'autre part le courant qui circule de l'accès j vers l'accès i :

$$\bar{I}_{ji} = \frac{1}{a} \cdot \bar{Y}_{ij} \left(\bar{V}_j - \frac{1}{a} \bar{V}_i \right) \quad (IV.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ji} &= \bar{V}_j \cdot \bar{I}_{ji}^* = \bar{V}_j \cdot \left[\frac{1}{a} \bar{Y}_{ij} \left(\bar{V}_j - \frac{1}{a} \bar{V}_i \right) \right]^* \\ \bar{S}_{ji} &= \frac{1}{a^2} (\bar{V}_j)^2 \cdot \bar{Y}_{ij}^* - \frac{1}{a} \bar{Y}_{ij}^* \bar{V}_j \cdot \bar{V}_i \end{aligned} \quad (IV.12)$$

IV.3.4 Calcul des pertes totales dans le réseau :

Pour un élément du réseau reliant deux accès i et j on a :

$$\bar{S}_{Lossij} = \bar{S}_{ij} + \bar{S}_{ji} \quad (IV.13)$$

Tel que

\bar{S}_{Lossij} : Puissance apparente perdue dans la branche $(i-j)$;

\bar{S}_{ij} : Puissance apparente qui transite de l'accès i vers l'accès j ;

\bar{S}_{ji} : Puissance apparente qui transite de l'accès j vers l'accès i ;

D'où

$$\bar{P}_{Lossij} = \text{Réel}\{\bar{S}_{Lossij}\} \quad (IV.14)$$

$$\bar{Q}_{Lossij} = \text{Imag}\{\bar{S}_{Lossij}\}$$

\bar{P}_{Lossij} : Puissance active perdue dans la branche $(i-j)$

\bar{Q}_{Lossij} : Puissance réactive perdue dans la branche $(i-j)$

La puissance totale perdue dans le réseau est égale à la somme des puissances perdues dans toutes les branches du réseau.

$$\bar{S}_{Loss} = \sum \bar{S}_{Lossij} \quad (IV.15.a)$$

$$\bar{P}_{Loss} = \text{Réel}\left\{\sum \bar{S}_{Lossij}\right\} \quad (IV.15.b)$$

$$\bar{Q}_{Loss} = \text{Imag}\left\{\sum \bar{S}_{Lossij}\right\} \quad (IV.15.c)$$

IV.3.5 Classification des accès d'un réseau électrique

Pour un réseau d'énergie électrique, on peut identifier trois types d'accès (ou jeux de barres)    savoir :

- Accès bilan (ou barre d'équilibre) : 1 seul accès
- Accès générateur ($P, |\bar{V}|$) : 15% des accès

- Accès de charges (P, Q) : 85% des accès

Chaque accès est caractérisé par quatre grandeurs réelles, à savoir :

- Puissance active (P)
- Puissance réactive (Q)
- Module de la tension ($|\bar{V}|$)
- Angle de déphasage (θ)

Pour chaque accès, deux grandeurs sont spécifiées, et les autres varient suivant la demande en énergie électrique de l'ensemble des abonnés.

Pour les accès de charges qui représentent généralement 85% des accès d'un réseau, la puissance complexe demandée (P et Q) est spécifiée il reste à déterminer $|\bar{V}|$ et θ qui varient avec la demande en énergie électrique.

Pour les accès générateurs, où le module de la tension peut être régulé à l'aide de régulateur de tension, P et $|\bar{V}|$ sont spécifiées, il reste à déterminer Q et θ . Pour de tels accès, la puissance réactive est généralement bornée entre les limites Q_{min} et Q_{max} .

A part ces deux types d'accès, on considère un accès bilan puisque dans un réseau d'énergie électrique, la production totale est égale à la demande, plus les pertes dans les lignes. Aussi du fait qu'on ne peut pas déterminer d'avance les pertes de puissances, on doit considérer un accès générateur à part, pour fournir toute production additionnelle en dehors de la demande effective. Pour cet accès bilan, $|\bar{V}|$ et θ sont spécifiés et il reste à déterminer P et Q .

IV.4 Méthodes de calcul

IV.4.1. Méthode de Gauss Seidel

La méthode de Gauss Seidel est une méthode itérative utilisée dans la résolution des systèmes linéaires à plusieurs inconnus. Cette méthode fixe d'abord des valeurs initiales des inconnus pour un premier calcul des résultats. Ces nouvelles valeurs sont utilisées comme données initiales pour une deuxième itération ainsi de suite. On arrête le processus itératif une fois que la différence entre les valeurs obtenues entre deux itérations est inférieure à une tolérance notée (ϵ).

IV.4.1.1 Principe de la méthode

La méthode de Gauss Seidel est une méthode itérative qui à partir des valeurs initiales du vecteur inconnu (X^0), calcul de nouvelles valeurs X^* par la fonction $G(X)$, la différence entre les vecteurs ΔX appelée erreur de calcul est évaluée. Si l'erreur ΔX est inférieure à la précision de calcul ϵ , on arrête les itérations, la nouvelle valeur du vecteur X^* est considéré comme solution du problème, sinon cette nouvelle X^* sera considérée valeur initiale X^0 et on continue les itérations jusqu'à ce que l'erreur de calcul ΔX soit inférieur à la précision ϵ .

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (IV.16)$$

où

a_{ij} : représentent des coefficients

b_i : constantes

x_i : inconnue

Ce système d'équation (IV.16) peut être écrit sous une autre forme où on tire de chaque équation l'expression de x_i

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ x_n = \frac{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases} \quad (IV. 17)$$

$a_{ii} \neq 0, i=1, 2, \dots, n$

Si on note par k le nombre d'itérations, cette méthode consiste à évaluer x^{k+1} à partir de x^k . Le système d'équation précédent peut alors s'écrire.

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \dots + a_{1n}x_n^k}{a_{11}} \\ x_2^{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^k + a_{23}x_3^k + \dots + a_{2n}x_n^k}{a_{22}} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{a_{n1}x_1^k + a_{n2}x_2^k + a_{n3}x_3^k + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^k}{a_{nn}} \end{cases} \quad (IV. 18)$$

Qui peut aussi s'écrire :

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - a_{i2}x_2^k + a_{i3}x_3^k + \dots + a_{in}x_n^k}{a_{ii}}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (IV. 19)$$

Ou aussi

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^k \right), \quad i=1,2,\dots,n \quad (IV. 20)$$

La méthode de Gauss appelé aussi méthode de Jacobi nécessite un vecteur de valeurs initiales pour commencer les itérations

$$X^0 = \begin{Bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{Bmatrix} \quad (IV. 21)$$

Le processus d'itération va s'arrêter une fois la condition de convergence est satisfaite :

$$\left| x_i^{k+1} - x_i^k \right|_{i=1,2,\dots,n} \leq \varepsilon$$

ε : précision de calcul

La méthode de Gauss Seidel est une amélioration à la méthode de Jacobi qui consiste à calculer l'inconnue à l'itération $k+1$ x^{k+1} en fonction des valeurs des inconnues x^k et x^{k+1} respectivement aux itérations k et $k+1$ comme suit :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right), \quad i=1,2,\dots,n \quad (IV.22)$$

Le nombre d'itérations de la méthode de Gauss Seidel peut être améliorée en utilisant à chaque itération un facteur d'accélération α comme suit :

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \alpha (x_i^{k+1} - x_i^k) \quad (IV.23)$$

IV.4.1.1 Application de la méthode de Gauss Seidel; calcul des tensions aux accès du réseau :

L'équation du calcul d'écoulement de puissance nous ramène aux calculs des tensions aux accès du réseau

$$\bar{I}_i = \sum_{j=1}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j$$

$$P_i + jQ_i = \bar{V}_i \cdot \bar{I}_i^* = \bar{V}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j \right)^* \quad (IV.24)$$

On prend le conjugué de la puissance apparente, on aura :

$$P_i - jQ_i = \bar{V}_i^* \cdot \bar{I}_i = \bar{V}_i^* \cdot \bar{Y}_{ii} \cdot \bar{V}_i + \bar{V}_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j \right) + \bar{V}_i^* \cdot \left(\sum_{j=i+1}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j \right) \quad (IV.25)$$

Le processus d'itération de Gauss Seidel, peut être alors appliqué comme suit :

$$\bar{V}_i^{k+1} = \frac{1}{\bar{Y}_{ii}} \left(\frac{\bar{S}_i^*}{\bar{V}_i^{*k}} - \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j^{k+1} \right) + \left(\sum_{j=i+1}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j^k \right) \right) \quad (IV.26)$$

Cette équation, ne concerne pas l'accès bilan où \bar{P} et \bar{Q} sont données ; P et Q à déterminer.

Pour les accès générateurs ($P, |\bar{V}|$), la puissance réactive est inconnue. Elle doit être calculée d'après l'équation suivante :

$$Q_i^{k+1} = -\text{imag} \left\{ \bar{V}_i^* \cdot \bar{Y}_{ii} \cdot \bar{V}_i^k + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j^{k+1} \right) + \left(\sum_{j=i+1}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j^k \right) \right\} \quad (IV.27)$$

Si la valeur de Q_i^{k+1} calculée d'après l'équation précédente viole l'une des limites spécifiées, on fixe la valeur de Q_i à la limite violée.

Ensuite on procède au calcul de \bar{V}_i^{k+1} d'après l'équation (III.26)

Pour le calcul de \bar{V}_i^{k+1} , pour ce type d'accès, le module de la tension étant spécifiée, on doit garder seulement l'angle de phase θ calculé en effectuant l'opération suivante :

$$\bar{V}_i^{k+1} = \frac{\bar{V}_i^{k+1}}{|\bar{V}_i^{k+1}|} |\bar{V}_{i,spécifié}| \quad (III.28)$$

Pour accélérer la convergence de la méthode, les tensions durant les itérations successives, doivent être modifiés comme suit

$$\bar{V}_i^{k+1} = \bar{V}_i^k + \alpha (\bar{V}_i^{k+1} - \bar{V}_i^k) \quad (III.29)$$

où α est un facteur d'accélération.

Pour la majorité des réseaux électriques, α est compris entre 1, $1 \leq \alpha \leq 2$

IV.4.1.2 Algorithme de la méthode de Gauss Seidel :

- Lecture des données du réseau DONGS le fichier contient :
- DONY : table des impédances du réseau permettant de calculer la matrice Y
- DONVP : table des tensions spécifiées pour les accès bilan et générateurs, des tensions initiales pour les accès charges, des puissances aux accès, des puissances limites des accès générateurs et les type de chaque accès (bilan, charge et générateur)

Vsp=DONVP(: , 2) ; Ps=DONVP(: , 3) ; Qs=DONVP(: , 4) ; Pc=DONVP(: , 5) ;

Qc=DONVP(: , 6) ; Ps=DONVP(: , 8) ; Qs=DONVP(: , 9) ; Ta =DONVP(: , 10).

Tol = 10⁻⁴ ; erreur = 1 ; maxIt=100 ; P0 = Ps – Pc; Q0 = Qs – Qc; S0 = complex(P0, Q0);

V0 = Vsp ; S=S0; k = 0;

Tant que erreur >= Tol & k < maxIt

k = k+1 ;

Pour ii allant de 2 à n

Si Ta(ii) ==2 % l'accès ii est un accès générateur

$$V(ii) = \frac{1}{Y(ii, ii)} \left(\frac{S^*(ii)}{V^*(ii)} - Y(ii, 1:ii-1).V(1:ii-1) - Y(ii, ii+1:n).V(ii+1:n) \right)$$

Sinon Si Ta(ii) ==3

$$Q(ii) = - \text{Imag}(V^*(ii) (Y(ii, 1:ii-1).V(1:ii-1) - Y(ii, ii:n).V(ii:n)))$$

Si Qmin(ii) <= Q(ii) <= Qmax(ii)

$$S(ii) = \text{complex}(P0(ii), Q(ii))$$

$$V(ii) = \text{Eq}(1)$$

$$V(ii) = \frac{V(ii)}{|V(ii)|} |Vsp(ii)|$$

Sinon Si Q(ii) <= Qmin(ii) l'accès ii est considéré comme un accès charge

$$S(ii) = \text{complex}(P0(ii), Qmin(ii))$$

$$V(ii) = \text{Eq}(1)$$

Sinon Si Q(ii) >= Qmax(ii) l'accès ii est considéré comme un accès charge

$$S(ii) = \text{complex}(P0(ii), Qmax(ii))$$

$$V(ii) = \text{Eq}(1)$$

Fin SI

FinSI

FinPour

$$\text{Erreur} = \max((V - V0)/V); V0 = V;$$

Fin Tant que

$$S = V^*(:). \{ Y(:, :) V(:) \} \quad \% \text{ Clacul des puissance aux accès}$$

Iij = [] ; Sij = [] ; %Clacul des puissance transitant dans les lignes

Pour e = 1 à NL lire ai, aj, z1, z2, z0 et yb ; yp=yb/2 ;

$$Iaiaj = V(ai) * yp + (V(ai) - V(aj)) / z1; \quad Iajai = V(aj) * yp + (V(aj) - V(ai)) / z1;$$

$$Saiaj = V(ai).Conj(Iaiaj); \quad Sajai = V(aj).Conj(Iajai)$$

$$Iij = [Iij; ai \quad aj \quad Iaiaj]; \quad Iij = [Iij; aj \quad ai \quad Iajai];$$

$$Sij = [Sij; ai \quad aj \quad Saiaj]; \quad Sij = [Sij; aj \quad ai \quad Sajai];$$

Fin Pour

IV.4.2 Méthode de Newton Raphson

IV.4.2.1 Principe de la méthode de Newton Raphson

Soit le système d'équation non linéaire suivant :

$$\begin{cases} Y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ Y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ Y_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{cases} \quad (III.30)$$

Si on suppose que les solutions initiales du système sont :

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)$$

Les erreurs :

$$(\Delta x_1^0, \Delta x_2^0, \Delta x_3^0, \dots, \Delta x_n^0)$$

Donc :

$$(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2^0, x_3^0 + \Delta x_3^0, \dots, x_n^0 + \Delta x_n^0), i = 1, n$$

En appliquant le développement en série de Taylor d'ordre (1) aux points $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

on aura :

$$Y_i = f_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0) + \Delta x_1^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \Delta x_2^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \Delta x_3^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_3} + \dots + \Delta x_n^0 \frac{\partial f_i}{\partial x_n} + C_i \quad (III.31)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur posant : $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, on aura le système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_1^0 \\ \Delta Y_2^0 \\ \vdots \\ \Delta Y_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^0 \\ Y_2 - f_2^0 \\ \vdots \\ Y_n - f_n^0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta Y_1^0 \\ \Delta Y_2^0 \\ \vdots \\ \Delta Y_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \Delta x_2^0 \\ \vdots \\ \Delta x_n^0 \end{bmatrix} \quad (III.32)$$

Ou sous forme matricielle :

$$[\Delta Y] = [J] \cdot [\Delta X]$$

Avec :

$[J]$: Matrice Jacobien.

La méthode de Newton-Raphson consiste à calculer les éléments du vecteur X , à la $k^{ieme} + 1$ itération par :

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta x_i^k \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (III.33)$$

Ce vecteur servira pour le nouveau jacobien J afin de déterminer les nouvelles valeurs de x_i en résolvant le système d'équations par la méthode adéquate de résolution de système linéaires.

Ce processus de calcul est répété jusqu'à l'obtention de la précision désirée, et on arrête le processus d'itération une fois que $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \varepsilon$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

IV.4.2.2 Application de la méthode de Newton-Raphson pour l'écoulement de puissance

Reprenons l'équation permettant de calculer la puissance apparente \bar{S}_i

$$\bar{S}_i = \bar{V}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n \bar{Y}_{ij} \cdot \bar{V}_j \right)^*$$

$$P_i = \text{Real}\{S_i\} ; Q_i = \text{Imag}\{S_i\} ;$$

La méthode de N.R a plusieurs variantes selon que l'on exprime les éléments de la matrice admittance nodale et tensions aux accès en coordonnées cartésiennes, polaires ou hybrides.

IV.4.2.2.1 Différentes formes

a) Forme cartésienne :

Dans la forme cartésienne, les grandeurs sont exprimées sous leurs formes rectangulaires (partie réelle et partie imaginaire) :

$$V_i = e_i + jf_i \quad i=1, n$$

$$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} \quad i=1, n \quad j=1, n$$

On aura alors :

$$P_i = e_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) + f_i \sum_{j=1}^n (B_{ij}e_j - G_{ij}f_j) \quad (IV.34.a)$$

$$Q_i = f_i \sum_{j=1}^n (G_{ij}e_j - B_{ij}f_j) - e_i \sum_{j=1}^n (B_{ij}e_j - G_{ij}f_j) \quad (IV.34.b)$$

b) Forme hybride :

On a :

$$\bar{V}_i = |\bar{V}_i| e^{j\theta_i} \quad (IV.35.a)$$

$$\bar{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} \quad (IV.35.b)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$P_i = |V_i| \sum_{j=1}^n |V_j| \left[-G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) \right] \quad (IV.36.a)$$

$$Q_i = |V_i| \sum_{j=1}^n |V_j| \left[G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) \right] \quad (IV.36.b)$$

c) Forme polaires :

On à :

$$\bar{V}_i = |\bar{V}_i| e^{j\theta_i} \quad (IV.37.a)$$

$$\text{et } \bar{Y}_{ij} = |\bar{Y}_{ij}| e^{j\phi_{ij}} \quad (IV.37.b)$$

Et en séparant la partie réelle de la partie imaginaire on aura :

$$\begin{cases} P_i = |\bar{V}_i| \sum_{j=1}^n |\bar{V}_j| |\bar{Y}_{ij}| \cdot \cos(\theta_i - \theta_j - \phi_{ij}) \\ Q_i = |\bar{V}_i| \sum_{j=1}^n |\bar{V}_j| |\bar{Y}_{ij}| \cdot \sin(\theta_i - \theta_j - \phi_{ij}) \end{cases} \quad (IV.38)$$

Ou bien :

$$\begin{cases} P_i = F(\theta, |\bar{V}|) \\ Q_i = G(\theta, |\bar{V}|) \end{cases} \quad i=1, n \quad (IV.39)$$

IV.4.2.2.2 Formulation des équations de la méthode de Newton Raphson

Le système d'équations (III.39) est formé donc de $2n$ équations permettant de calculer P et Q avec $2n$ inconnus θ et $|\bar{V}|$

En différenciant les équations (III.39) on aura :

$$\begin{cases} \Delta P_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \Delta \theta_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial |\bar{V}_j|} \Delta |\bar{V}_j| \\ Q_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} \Delta \theta_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q_i}{\partial |\bar{V}_j|} \Delta |\bar{V}_j| \end{cases} \quad (IV.40)$$

Physiquement, les ΔP_i et ΔQ_i représentent la différence entre les valeurs spécifiées et celles calculées des puissances actives $P_{spéc}$ et réactives $Q_{spéc}$ qui peuvent être calculées comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_n \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_n} & \frac{\partial P_1}{\partial |\bar{V}_1|} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial |\bar{V}_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \theta_n} & \frac{\partial P_n}{\partial |\bar{V}_1|} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial |\bar{V}_n|} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial |\bar{V}_1|} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial |\bar{V}_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial \theta_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial |\bar{V}_1|} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial |\bar{V}_n|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \vdots \\ \Delta \theta_n \\ \Delta |\bar{V}_1| \\ \vdots \\ \Delta |\bar{V}_n| \end{bmatrix} \quad (IV.41)$$

avec :

$$[J1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} ; [J2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial |\bar{V}_1|} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial |\bar{V}_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial |\bar{V}_1|} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial |\bar{V}_n|} \end{bmatrix} ; [J3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} ; [J4] = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial |\bar{V}_1|} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial |\bar{V}_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial |\bar{V}_1|} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial |\bar{V}_n|} \end{bmatrix}$$

IV.4.2.2.2 Système d'équation à résoudre :

Le système d'équation sous forme matriciel à résoudre s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta P\} \\ \{\Delta Q\} \end{Bmatrix}^k = [J]^k \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta \theta\} \\ \{\Delta |\bar{V}|\} \end{Bmatrix}^k \quad (IV.42)$$

Avec :

$$[J] = \begin{bmatrix} J1 & J2 \\ J3 & J4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ \{|\bar{V}|\} \end{Bmatrix}^{k+1} = \begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ \{|\bar{V}|\} \end{Bmatrix}^k + \begin{bmatrix} J1 & J2 \\ J3 & J4 \end{bmatrix}^{-1(k)} \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta P\} \\ \{\Delta Q\} \end{Bmatrix}^k \quad (IV.43)$$

$$\begin{cases} |\bar{V}_i|^{k+1} = |\bar{V}_i|^k + \Delta |\bar{V}_i|^k \\ \theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \Delta \theta_i^k \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (IV.44)$$

IV.4.2.2.3 Calcul des éléments du Jacobien :

L'expression des éléments du Jacobien dépendent de la forme avec laquelle on représente les tensions et les éléments de la matrice admittance qui peuvent être polaires, cartésiens ou hybrides..

a) Forme polaire

Les éléments du Jacobien peuvent être calculés à partir des équations (IV.38), et ce en les dérivant par rapport aux modules des tensions et aux angles de phases.

1) Éléments de J_1 :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = -|\bar{V}_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\bar{V}_j| |\bar{Y}_{ij}| \sin(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}) \quad \text{Eléments de la diagonale} \quad (IV.45)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_k} = -|\bar{V}_i| \cdot |\bar{V}_k| \cdot |\bar{Y}_{ik}| \sin(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) \quad \text{Eléments hors de la diagonale} \quad (IV.46)$$

2) Éléments de J_2 :

$$\frac{\partial P_i}{\partial |\bar{V}_i|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\bar{V}_j| |\bar{Y}_{ij}| \cos(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}) + 2 \cdot |\bar{V}_i| |\bar{Y}_{ii}| \cos(\varphi_{ii}) \quad \text{Eléments de la diagonale} \quad (IV.47)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial |\bar{V}_k|} = |\bar{V}_i| \cdot |\bar{Y}_{ik}| \cos(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) \quad \text{Eléments hors de la diagonale} \quad (IV.48)$$

3) Éléments de J_3 :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = |\bar{V}_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\bar{V}_j| |\bar{Y}_{ij}| \cos(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}) \quad \text{Eléments de la diagonale} \quad (IV.49)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_k} = -|\bar{V}_i| \cdot |\bar{V}_k| \cdot |\bar{Y}_{ik}| \cos(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) \quad \text{Eléments hors de la diagonale} \quad (IV.50)$$

4) Éléments de J_4 :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |\bar{V}_i|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\bar{V}_j| |\bar{Y}_{ij}| \cdot \sin(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}) - 2 \cdot |\bar{V}_i| \cdot |\bar{Y}_{ii}| \cdot \sin(\varphi_{ii}) \quad \text{Eléments de la diagonale} \quad (IV.51)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |\bar{V}_k|} = |\bar{V}_i| \cdot |\bar{Y}_{ik}| \cdot \sin(\theta_i - \theta_k - \varphi_{ik}) \quad \text{Eléments hors de la diagonale} \quad (IV.52)$$

b) Forme hybride

Les éléments du Jacobien peuvent être calculés à partir des équations (IV.38), et ce en les dérivant par rapport aux modules des tensions et aux angles de phases.

1) Eléments de J_1 :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = -|\bar{V}_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\bar{V}_j| \cdot [B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) - G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)] \quad \text{Eléments de la diagonale} \quad (IV.53)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_k} = -|\bar{V}_i| |\bar{V}_k| \cdot [-B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)] \quad \text{Eléments hors de la diagonale} \quad (IV.54)$$

2) Eléments de J_2 :

$$\frac{\partial P_i}{\partial |\bar{V}_i|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\bar{V}_j| \cdot [B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)] + 2|\bar{V}_i| G_{ii} \quad \text{Eléments de la diagonale} \quad (IV.55)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial |\bar{V}_k|} = |\bar{V}_i| \cdot [B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k)] \quad \text{Eléments hors de la diagonale} \quad (IV.56)$$

3) Eléments de J_3 :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = -|\bar{V}_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\bar{V}_j| \cdot [B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) + G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)] \quad \text{Eléments de la diagonale} \quad (IV.57)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_k} = |\bar{V}_i| |\bar{V}_k| \cdot [-B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k)] \quad \text{Eléments hors de la diagonale} \quad (IV.58)$$

4) Eléments de J_4 :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |\bar{V}_i|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\bar{V}_j| \cdot [-B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)] - 2|\bar{V}_i| B_{ii} \quad \text{Eléments de la diagonale} \quad (IV.59)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |\bar{V}_k|} = |\bar{V}_i| \cdot [-B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)] \quad \text{Eléments hors de la diagonale} \quad (IV.60)$$

IV.4.2.2.4 Résolution

Pour un accès k générateur ($P, |\bar{V}_k|$) où l'amplitude de la tension $|\bar{V}_k|$ est spécifiée et reste constante, alors $\Delta |\bar{V}_k| = 0$. Il est donc nécessaire de **supprimer la ligne** et de la **colonne** correspondant à k dans la matrice J_4 tant que $\Delta |\bar{V}_k| = 0$. Cela doit être appliqué pour tous les accès générateurs. Par conséquent, les puissances réactives injectées en ces nœuds peuvent être calculées directement par la deuxième équation de (IV.38). Il est alors nécessaire de vérifier que la puissance réactive calculée à chaque accès générateur i est dans les limites de puissance réactive spécifiées:

Il existe deux approches pour pondre en considération cet aspect.

Première méthode : Itérer jusqu'à la convergence, en ignorant un éventuel dépassement des limites de puissance réactive. Après convergence, on vérifie pour chaque accès générateur s'il y'a eu effectivement un dépassement et on procède comme suit :

1) s'il n'y a aucun dépassement des limites des puissances réactives des accès générateurs, alors la solution obtenue est la solution de notre problème.

2) si l'une ou plusieurs limites des puissances réactives des accès générateurs sont violées, alors on procède comme suit :

On vérifie pour chaque accès k générateur ($P, / \bar{V} /$) :

- Si $Q_{min} < Q_i < Q_{max}$, la puissance réactive de la machine est maintenue à la valeur calculée,
- Si $Q_i > Q_{max}$, on fixe $Q_i = Q_{max}$, et on change l'accès k en un accès de charge,
- Si $Q_i < Q_{min}$, on fixe $Q_i = Q_{min}$ et on change l'accès k en un accès charge dans lequel P et Q sont fixées et on poursuit les itérations.

Pour les accès ayant changé de statut devenus accès charge (P, Q), il est nécessaire de réintroduire les lignes et les colonnes correspondantes dans le Jacobien J4.

On reprend ensuite le processus d'itérations jusqu'à la convergence et procédé aussi la vérification des accès générateurs si leurs limites sont respectées ainsi de suite.

Deuxième méthode : procéder à chaque itération aux vérifications décrites dans la première méthode jusqu'à convergence en procédant au changement d'états des accès nécessaires ainsi qu'à l'introduction des lignes et colonnes du Jacobien J4 des accès ayant changés d'état et devenus accès charges.

IV.4.2.3 Algorithme pour la méthode de Newton-Raphson :

1-Lecture des données du réseau.

2-Définir le critère de convergence ε et le nombre maximum d'itération K_{max} .

3-Initialiser les tensions complexes des accès.

$$/\bar{V}_1/ = \bar{V}_{1,Spec} \quad \theta_1 = \theta_0^\circ \quad \text{accès 1 = accès bilan.}$$

$$/\bar{V}_i/ = \bar{V}_{i,Spec} \quad \theta_i = 0^\circ \quad \text{pour les accès (P, V).}$$

$$/\bar{V}_i/ = 1 \quad \theta_i = 0^\circ \quad \text{pour les accès (P, Q).}$$

4-Formation de la matrice $\bar{Y}_{nodale} (\bar{Y}_{bus})$.

5-Initialiser le compteur d'itération ($K_i=1$).

6-Calculer les P_i et Q_i $i=2,n$ (n : nombre d'accès).

7-Calculer les $\Delta P_i^{(k)} = P_{iSpec} - P_{iCal}^{(k)}$ $i = 2,n$.

$$\Delta Q_i^{(k)} = Q_{iSpec} - Q_{iCal}^{(k)} \quad \text{pour les accès (P, Q).}$$

8-Pour $i = 2, n$

Si type (i) = 3 type (i) = 3 : accès générateurs ; type (i) = 2 : accès charge

$$|V_i| = |V_{iSpec}| ; \quad \Delta/\bar{V}_i/ = 0 ; \quad \Delta Q_i = 0$$

Fin Si

9-Calculer $MDP = \max|\Delta P_i|$

$$MDQ = \max|\Delta Q_i|$$

Si $MDP > \varepsilon$ ou $MDQ < \varepsilon$ alors aller à 16

10-Former le Jacobien du système : (éliminer les lignes et colonnes de J4 des accès (P,|V|))

11-Résoudre le système :

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta P\} \\ \{\Delta Q\} \end{Bmatrix}^k = [J]^k \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta \theta\} \\ \{\Delta |\bar{V}|\} \end{Bmatrix}^k$$

12-Calculer les nouvelles valeurs des tensions complexes.

$$\begin{cases} |\bar{V}_i|^{k+1} = |\bar{V}_i|^k + \Delta |\bar{V}_i|^k \\ \theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \Delta \theta_i^k \end{cases}$$

13-Incrémenter le compteur d'itération ($K_i = K_i + 1$)

Si $K_i < K_{\max}$ alors aller à 6

14-Calculer P_i et Q_i

15-pour les accès générateurs vérifier les conditions suivantes :

$Q = Q_{\max}$ $V_i > V_{i,sp}$ reste accès générateur

$Q = Q_{\max}$ $V_i < V_{i,sp}$ changer en accès charge. Reprendre le processus itératif

$Q = Q_{\min}$ $V_i < V_{i,sp}$ reste accès générateur

$Q = Q_{\min}$ $V_i > V_{i,sp}$ changer en accès charge. Reprendre le processus itératif

16-Calculer les puissances qui s'écoulent dans les branches

17-Imprimer les résultats

18-Fin

IV.4.2.4 Méthode de Newton-Raphson découplée :

Une difficulté majeure de la méthode de Newton-Raphson est la nécessité d'évaluer et de résoudre le système d'équation linéaire (IV.42) par des méthodes directes ou itératives.

Cependant, le jacobien doit être réévalué et le système linéaire (IV.42) doit être résolu pour chaque itération, donc, il y'a la motivation pour trouver des moyens de simplifier ce temps consommé. La puissance active P est très sensible aux changements d'angle $\Delta\theta$, pendant que la puissance réactive Q dépendait des changements des modules des tensions $\Delta|\bar{V}|$. Il est raisonnable alors de partager les systèmes d'équations (IV.42) en deux systèmes d'équations découplé (P est découplée de ΔV , et Q est découplée de $\Delta\theta$).

Les éléments des sous matrices J_1 , J_2 , J_3 et J_4 donnés par les équations (IV.45-IV.53 ou IV.54-IV.61) et sur la base des considérations précédentes, les éléments de J_2 et J_3 peuvent être négligés respectivement devant ceux de J_1 et J_4 :

Le système précédant (IV.42) devient :

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta P\} \\ \{\Delta Q\} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta \theta\} \\ \{\Delta |\bar{V}|\} \end{Bmatrix}^k \quad (IV.61)$$

Ce système est équivalent à :

$$\{\Delta P\}^k = [J_1]^k \cdot \{\Delta \theta\}^k \quad (IV.62.a)$$

$$\{\Delta Q\}^k = [J_4]^k \cdot \{\Delta |\bar{V}|\}^k \quad (IV.62.b)$$

IV.4.2.5 Méthode de Newton-Raphson découplée rapide:

Deux chercheurs, B. Scott et O. Alsac, décrivent une série d'approximation qui produit d'avantage de simplifications. On doit introduire ces simplifications à la méthode découplée en ajoutant l'adjectif rapide à la méthode. Pour comprendre la méthode, on rappelle l'équation générale qui constitue l'entrée diagonale de la matrice $\frac{\partial P}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = |\bar{V}_i| |\bar{V}_j| |\bar{Y}_{ij}| \sin(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij})$$

En fonctionnement normal du réseau, les modules des tensions en pu des accès sont tous voisins de l'unité et les différences entre les angles de phase des tensions des accès interconnectés sont faibles et peuvent être négligées devant θ_{ij} .

$$\theta_i - \theta_j \ll \varphi_{ij} \quad (IV.63)$$

On peut alors écrire

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = |\bar{V}_i| |\bar{V}_j| |\bar{Y}_{ij}| \sin(-\varphi_{ij})$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = -|\bar{V}_i| |\bar{V}_j| |\bar{Y}_{ij}| \sin(\varphi_{ij}) = -|\bar{V}_i| |\bar{V}_j| B_{ij}$$

$$|\bar{V}_i| \approx 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = -|\bar{V}_i| |\bar{V}_j| B_{ij} \approx -B_{ij} \quad (IV.64)$$

De la même façon, on détermine les éléments de la sous matrice $[J4]$:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |\bar{V}_j|} = -|\bar{V}_i| |\bar{V}_j| B_{ij} \approx -B_{ij} \quad (IV.65)$$

Le problème consiste à résoudre les deux systèmes suivant :

$$\{\Delta P\}^k = -[B] \{\Delta \theta\}^k \quad (IV.66.a)$$

$$\{\Delta Q\}^k = -[B] \{\Delta |\bar{V}|\}^k \quad (IV.66.b)$$

IV.6 Conclusion :

Le calcul d'écoulement de puissance se fait généralement à travers deux méthodes qui sont Gauss Seidel et Newton Raphson (NR) et aussi NR découplé et NR découplé rapide. Les deux méthodes avec les algorithmes de chacune sont détaillées et expliquées. Le calcul des puissances qui s'écoulent dans les réseaux d'énergie électriques se fait à travers le calcul des tensions (en module $|V|$ et argument θ) aux différents accès. Cela permet de déduire les courants électriques et les puissances actives et réactives fournies par chaque source et transitant dans chaque branche du réseau.

Chapitre V. Dispatching Economique

V.1 Introduction

L'objectif principal du dispatching économique est de minimiser le coût de production de l'énergie électrique des réseaux électriques en tenant compte des contraintes d'égalité et des contraintes d'inégalité. Cela consiste à trouver la contribution en puissance de chaque groupe de production du système électrique, de sorte que le coût total de production soit aussi minimisé que possible pour n'importe quelle condition de charge tout en respectant les contraintes physiques de tous les équipements du réseau.

Le dispatching économique est un problème d'optimisation qui consiste à répartir la production de la puissance active demandée entre les différentes centrales du réseau, de sorte à exploiter ces derniers de la manière la plus économique possible. Cette distribution doit évidemment respecter les limites de Production des centrales. La variable à optimiser est donc le *coût de production*.

Le problème du dispatching économique statique sans perte est peu complexe car le seul paramètre qui influence le coût est la puissance active générée par la centrale (sans tenir compte de la puissance perdue dans les lignes lors des transits de puissance entre les centrales et les charges) dont la résolution est faite pour un instant précis.

Notant que les générateurs à combustibles distincts possèdent différents coûts pour fournir la même quantité d'énergie électrique, c'est important de se rendre compte que le générateur le plus efficace du système ne peut pas produire de l'électricité au plus bas coût et qu'un générateur bon marché ne peut pas être le plus rentable, puisqu'un générateur qui se trouve trop loin de la charge donne des pertes de transport énormes, et donc le rend peu économique.

Cependant ces pertes varient en fonction de la répartition des puissances entre les centrales et la charge. Ainsi, contrairement à celui sans perte, le dispatching économique avec perte tient compte de la topologie du réseau. Pour pénaliser les centrales qui produisent de la puissance dont le transit provoque d'importantes pertes, nous multiplions leur coût incrémental par un facteur de pénalité. La justification physique de ce facteur de pénalité s'explique par le fait qu'à cause des pertes, il peut être plus intéressant de produire pour plus cher près du lieu de consommation que loin et pour moins cher.

Le dispatching économique avec perte est un procédé itératif qui doit converger vers la solution optimale. Si on prend en considération les pertes de puissance constantes, on doit évaluer celles-ci et les inclure dans la demande.

Lorsque le problème prend une dimension dynamique (dispatching économique dynamique), c'est-à-dire lorsque la demande évolue dans un intervalle de temps donné (24 heures), l'algorithme qui présente une demande variable dans le temps. Une autre complexité s'ajoute à ce problème car il faut tenir compte dans ce cas des états des centrales ainsi que des contraintes Rampes des générateurs. La complexité de l'algorithme d'optimisation ainsi le temps de calcul s'accroît chaque fois qu'on considère une nouvelle contrainte.

V.2 Caractéristique coût-production

Une centrale thermique est constituée d'une chaudière B, d'une turbine T et d'une génératrice G (Fig. V.1). La combustion du fuel produit de la vapeur à travers une chaudière qui se transforme en énergie mécanique à travers la turbine, cette énergie mécanique est transformée en énergie électrique à travers la génératrice. La centrale est dotée d'un système de régulation permettant le réglage de la tension de la fréquence et aussi d'un système de protection pour protéger la machine contre les courants forts et lorsque la puissance demandée dépasse les capacités de la centrale.

La caractéristique coût d'un générateur thermique est représentée par un graphe (Fig. V.2) qui relie le taux du combustible à l'entrée (en Btu/h ou en \$/h) avec la puissance électrique (en MW) délivrée par l'unité. La forme de cette courbe est déterminée sur la base des données collectées à partir des essais effectués sur la génératrice.

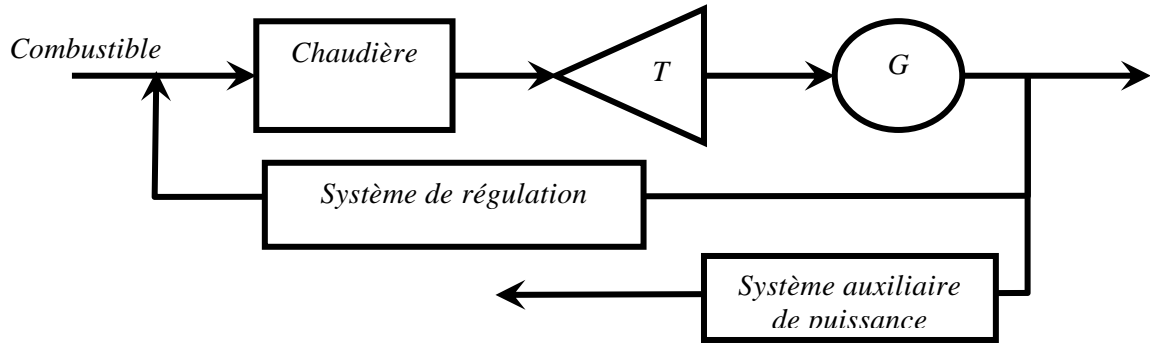


Fig. V.1 Centrale de production électrique

Il est souvent usuel d'utiliser le taux du coût de combustible (en \$/h) au lieu du taux du combustible (en Btu/h). Cette conversion est accomplie en multipliant le taux du combustible par le prix du combustible (en \$/Btu). La caractéristique qui en résulte et que nous montrons dans la Figure V.2, est connue sous le nom de courbe de coût du combustible. La forme conventionnelle de la caractéristique du coût de combustible des unités thermiques est généralement représentée par un polynôme du 2^{ème} ordre (équ. V.2). Ce type de fonction possède l'avantage d'être convexe ce qui simplifie le problème du dispatching économique et augmente le nombre de techniques mathématiques qui peuvent être appliquées à sa résolution. Dans ce cas, il est possible d'aboutir à une solution avec un minimum global en utilisant une technique conventionnelle. Par ailleurs pour certains cas, la représentation quadratique est inadaptée, d'où la nécessité de développer des méthodes plus précises pour aboutir à de meilleurs résultats.

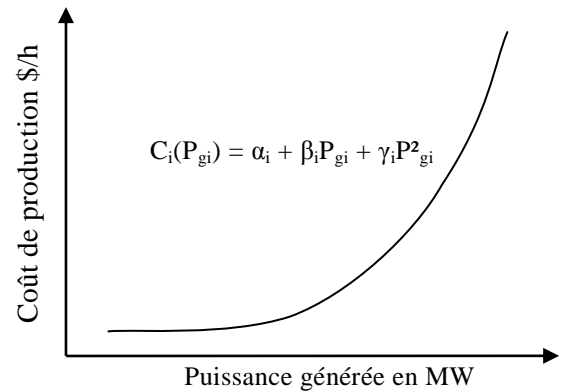


Fig. V.2 Caractéristique coût de production en fonction de la puissance

V.2 Formulation du problème de dispatching économique

Pour un système électro-énergétique avec ng unités de production, le coût total du combustible est égal à la somme des coûts élémentaires du combustible des différentes unités, soit :

$$C_t = \sum_{i=1}^{ng} C_i(P_{gi}) \quad (V.1)$$

Tel que :

P_{gi} : c'est la puissance active produite par le générateur

C_t : Représente le coût total de production.

$C_i(P_{gi})$: Représente le coût de production du $i^{ème}$ générateur.

La fonction coût de production d'un générateur (Fig. V.2) peut être exprimée par une forme quadratique d'un polynôme de second ordre comme suit :

$$C_i(P_{gi}) = \alpha_i + \beta_i P_{gi} + \gamma_i P_{gi}^2 \quad (V.2)$$

Le coût total aura alors l'expression suivante :

$$C_t(P_{gi}) = \sum_{i=1}^{ng} \alpha_i + \beta_i P_{gi} + \gamma_i P_{gi}^2 \quad (V.3)$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$: représentent les coefficients de la fonction coût.

La somme de toutes les puissances actives générées, doit être égale à la charge totale du système P_C plus les pertes totales de transport P_L (cette condition est appelée : contraintes d'égalité).

$$\sum_{i=1}^{ng} P_{gi} = \sum_{i=1}^{nc} P_{Ci} + \sum_{i=1}^{nl} P_{Li}$$

$$\sum_{i=1}^{ng} P_{gi} = P_C + P_L \quad (V.4)$$

nc, nl : représentent respectivement le nombre de charges et le nombre de lignes

P_C : Puissance demandée

P_L : Pertes actives de toutes les lignes électriques

Cette distribution doit en plus respecter les limites admissibles de production de chaque générateur de production et [12].

$$P_{gi}^{min} \leq P_{gi} \leq P_{gi}^{max} \quad (V.5)$$

Ainsi, le problème du dispatching économique se formule mathématiquement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} (C_t) \text{ (fonction objectif à minimiser) sujet aux contraintes :} \\ \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} = P_C + P_L \\ P_{gi}^{min} \leq P_{gi} \leq P_{gi}^{max} \end{array} \right. \quad (V.6)$$

La valeur exacte des pertes de transport ne peut être obtenue qu'à partir d'une étude d'écoulement de puissance (chapitre IV). Néanmoins, dans les études du dispatching économique on exprime souvent les pertes de transport en fonction des puissances actives générées. Cette technique est communément appelée la méthode des coefficients B qu'on utilise pour estimer ces pertes. Dans cette approche, les pertes sont approximées par la formule de Kron.

$$P_L = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} P_{gi} B_{ij} P_{gj} + \sum_{j=1}^{ng} B_{0j} P_{gj} + B_{00} \quad (V.7)$$

B_{ij} : coefficients des pertes

Notant que ces coefficients ne sont pas constants mais variables suivant les conditions de fonctionnement du système. Cependant, des résultats acceptables peuvent être obtenus si les conditions de fonctionnement sont relativement proches de celles pour lesquelles les coefficients B ont été calculés. Il existe plusieurs méthodes basées sur l'étude de l'écoulement de puissance qui permettent de calculer les coefficients de pertes.

V.3 Dispatching économique sans pertes

Le dispatching économique statique sans perte est plus simple, seul la puissance active générée par la centrale influence le coût, la résolution est faite pour un instant précis.

La solution du dispatching économique est obtenue à l'aide de deux types de méthodes d'optimisation ;

- La méthode de Kuhn-Tucker et la méthode de gradient utilisant le gradient (fonction de Lagrange).
- La méthode d'itération de Lambda qui utilise les itérations (minimisation sans gradient).

Dans certains cas on peut considérer le problème de dispatching comme linéaire par parties, on utilise alors la programmation linéaire.

V.3.1 La méthode de Kuhn-Tucker

On peut constater que le problème d'optimisation est non-linéaire et soumis à des contraintes d'égalité et d'inégalité. En effet, il faut que :

$$\sum_{i=1}^{ng} P_{gi} = P_C \quad (V.8)$$

Et

$$P_{gi}^{min} \leq P_{gi} \leq P_{gi}^{max} \quad (V.9)$$

avec

$P_{gi}^{min}, P_{gi}^{max}$: Les puissances minimale et maximale du i^{eme} générateur.

La méthode de « Kuhn-Tucker » consiste à construire le *Lagrangien* qui tient compte des contraintes d'égalité et:

$$L(x, \lambda, \beta) = f(x) + \lambda \cdot h(x) + \sum_i \beta_i g_i(x) \quad (V.10)$$

où $f(x)$ est la fonction à optimiser

$h(x)$: représente la contrainte d'égalité ($\sum_{i=1}^{ng} P_{gi} = P_C$) mise sous la forme $h(x) = 0$

et $g(x)$ représente la contrainte d'inégalité ($P_{gi}^{min} \leq P_{gi} \leq P_{gi}^{max}$) mise sous la forme $g(x) \leq 0$

$$h(x) = P_C - \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} \quad (V.11)$$

la fonction à optimiser représente le coût totale définit par :

$$C_t = \sum_{i=1}^{ng} C_i(P_{gi})$$

avec l'équation (V.3)

$$C_t(P_{gi}) = \sum_{i=1}^{ng} \alpha_i + \beta_i P_{gi} + \gamma_i P_{gi}^2$$

La fonction de Lagrange s'écrit alors comme suit :

$$L(P_{gi}, \lambda) = C_t + \lambda \cdot \left(P_C - \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} \right) \quad (V.12)$$

Pour atteindre l'optimum, il suffit d'abord d'évaluer en négligeant les contraintes d'inégalité ($b_i = 0$ dans l'éq. V.10), Si cet optimum vérifie les contraintes d'inégalité, il s'agit de la solution recherchée, dans le cas contraire, on transforme certaines inégalités non-vérifiées en égalités (pour imposer ces inégalités à leurs limites) et on recalcule un nouvel optimum en tenant compte de ces nouvelles égalités. L'optimum sera atteint dès que toutes les contraintes d'inégalités seront vérifiées.

En effet, pour trouver le premier optimum des P_{gi} (les contraintes d'inégalité négligées), il faut dériver notre Lagrangien en fonction des P_{gi} et du coefficient de Lagrange λ , et annuler ces dérivées de sorte à obtenir les deux conditions sur l'optimum :

En appliquant les deux conditions de Lagrange (dérivée par rapport à P_{gi} et λ) , on aura :

$$\frac{\partial L}{\partial P_{gi}} = \frac{\partial C_t}{\partial P_{gi}} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_C - \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} = 0$$

$\frac{\partial C_t}{\partial P_{gi}}$: est appelé le coût incrémental

La première condition donne :

$$\lambda = \frac{\partial C_t}{\partial P_{gi}} = \frac{\partial C_t}{\partial P_{gi}} = \beta_i + 2\gamma_i P_{gi} \quad (V.13)$$

Ce qui donne les valeurs des puissances produites par les différents générateurs :

$$P_{gi} = \frac{\lambda - \beta_i}{2\gamma_i} \quad (V.14)$$

En remplaçant ensuite dans la seconde condition, on a :

$$P_C = \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} = \sum_{i=1}^{ng} \frac{\lambda - \beta_i}{2\gamma_i}$$

On trouve alors

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^{ng} \frac{1}{2\gamma_i} \right)^{-1} \left(P_C + \sum_{i=1}^{ng} \frac{\beta_i}{2\gamma_i} \right) \quad (V.15)$$

$$P_{gi} = \frac{\lambda - \beta_i}{2\gamma_i} = \frac{1}{2\gamma_i} \left(\left(\sum_{i=1}^{ng} \frac{1}{2\gamma_i} \right)^{-1} \left(P_C + \sum_{i=1}^{ng} \frac{\beta_i}{2\gamma_i} \right) - \beta_i \right) \quad (V.16)$$

L'expression (V.16) nous donne donc l'ensemble des P_{gi} minimisant le coût total (contraintes d'inégalité négligées) et constituant notre premier optimum. Cet optimum n'est pas calculable dans le cas où γ_i est nul, or ce coefficient pourrait être nul pour quelques centrales. La méthode d'optimisation de "Kuhn-Tucker" n'est pas adaptée à tous les problèmes.

Exemple :

Soit un réseau électrique avec trois sources d'énergie G_1 , G_2 et G_3 avec une consommation totale égale à 275 MW. Connaissant les coûts de production et les contraintes de chaque générateur données ci-dessous.

$$C_1(P_{g1}) = 500 + 5.3P_{g1} + 0.004 P_{g1}^2 [\$ / MWh]$$

$$100 \leq P_{g1} \leq 500 \text{ MW}$$

$$C_2(P_{g2}) = 400 + 5.5P_{g2} + 0.006 P_{g2}^2 [\$ / MWh]$$

$$200 \leq P_{g2} \leq 400 \text{ MW}$$

$$C_3(P_{g3}) = 200 + 5.8P_{g3} + 0.009 P_{g3}^2 [\$ / MWh]$$

$$180 \leq P_{g3} \leq 300 \text{ MW}$$

- 1) Calculer le coût total optimal de production d'énergie électrique ainsi que la production de chaque générateur sans tenir compte des contraintes d'inégalités et des pertes de transport dans les lignes électriques.
- 2) Calculer le coût total optimal de production d'énergie électrique ainsi que la production de chaque générateur en tenant compte des contraintes d'inégalités et sans tenir compte des pertes de transport dans les lignes électriques.

Solution

- 1) Calculer le coût total optimal de production d'énergie électrique ainsi que la production de chaque générateur sans tenir compte des contraintes d'inégalités et des pertes de transport dans les lignes électriques.

L'équation (V.14) permet de calculer λ

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^{ng} \frac{1}{2\gamma_i} \right)^{-1} \left(P_c + \sum_{i=1}^{ng} \frac{\beta_i}{2\gamma_i} \right) = \left(\frac{1}{0.008} + \frac{1}{0.012} + \frac{1}{0.018} \right)^{-1} \left(800 + \left(\frac{5.3}{0.008} + \frac{5.5}{0.012} + \frac{5.8}{0.018} \right) \right) =$$

$$\lambda = 8.5 \text{ [\$ / MWh]}$$

en remplaçant la valeur de λ dans V.15 on trouve les valeurs des puissance fournies par les générateurs

$$P_{gi} = \frac{\lambda - \beta_i}{2\gamma_i}$$

$$P_{g1} = \frac{\lambda - \beta_1}{2\gamma_1} = \frac{8.5 - 5.3}{0.008} = 400 \text{ MW}$$

$$P_{g2} = \frac{\lambda - \beta_2}{2\gamma_2} = \frac{8.5 - 5.5}{0.012} = 250 \text{ MW}$$

$$P_{g3} = \frac{\lambda - \beta_3}{2\gamma_3} = \frac{8.5 - 5.8}{0.018} = 150 \text{ MW}$$

$$P_C = P_{g1} + P_{g2} + P_{g3} = 400 + 250 + 150 = 800 \text{ MW}$$

Le coût total de la production est :

$$C_t = \sum_{i=1}^3 C_i(P_{gi}) = (500 + 5.3P_{g1} + 0.004 P_{g1}^2) + (400 + 5.5P_{g2} + 0.006 P_{g2}^2) + (200 + 5.8P_{g3} + 0.009 P_{g3}^2)$$

$$C_t = 3260 + 2150 + 1272.5 = 6682.5 \$$$

- 2) Calculer le coût total optimal de production d'énergie électrique ainsi que la production de chaque générateur en tenant compte des contraintes d'inégalités et sans tenir compte des pertes de transport dans les lignes électriques.

Si les productions calculées vérifient les contraintes d'inégalités alors ces productions représentent les productions optimales. Si non, on fixe les productions de la contrainte violée à la limite violée et on refait les calculs avec un générateur en moins.

La première condition est vérifiée, la 3^{ème} n'est pas respectée

On fixe la limite violée la plus proche

$$P_{g3} = 180 \text{ MW}$$

On recalcule λ

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^{ng-1} \frac{1}{2\gamma_i} \right)^{-1} \left(P_c + \sum_{i=1}^{ng-1} \frac{\beta_i}{2\gamma_i} \right) = \left(\frac{1}{0.008} + \frac{1}{0.012} \right)^{-1} \left(620 + \left(\frac{5.3}{0.008} + \frac{5.5}{0.012} \right) \right) = 1740.8333 / 0.0048$$

$$\lambda = 8.356 \text{ [\$ / MWh]}$$

$$P_{g1} = \frac{\lambda - \beta_1}{2\gamma_1} = \frac{8.356 - 5.3}{0.008} = 382 \text{ MW}$$

$$P_{g2} = \frac{\lambda - \beta_2}{2\gamma_2} = \frac{8.356 - 5.5}{0.012} = 238 \text{ MW}$$

$$C_t = \sum_{i=1}^3 C_i(P_{gi}) = (500 + 5.3P_{g1} + 0.004 P_{g1}^2) + (400 + 5.5P_{g2} + 0.006 P_{g2}^2) + (200 + 5.8P_{g3} + 0.009 P_{g3}^2)$$

$$C_t = 3108.296 + 2048.864 + 1535.6 = 6692.76 \$$$

Solution en utilisant la méthode itérative avec $P_C = 975$ MW

Introduction de la valeur initiale de λ

$$\lambda^0 = 6.0$$

en remplaçant la valeur de λ dans V.15 on trouve les valeurs des puissance fournies par les générateurs

$$P_{gi} = \frac{\lambda - \beta_i}{2\gamma_i}$$

$$P_{g1}^1 = \frac{\lambda^1 - \beta_1}{2\gamma_1} = \frac{6.0 - 5.3}{0.008} = 87.5 \text{ MW}$$

$$P_{g2}^1 = \frac{\lambda - \beta_2}{2\gamma_2} = \frac{6.0 - 5.5}{0.012} = 41.7 \text{ MW}$$

$$P_{g3}^1 = \frac{\lambda^1 - \beta_3}{2\gamma_3} = \frac{6.0 - 5.8}{0.018} = 11.1 \text{ MW}$$

$$\Delta P^1 = 975 - (87.5 + 41.7 + 11.1) = 834.7 \text{ MW}$$

$$\Delta \lambda^1 = \frac{\Delta P^1}{\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)^1} = 659.7 \cdot \left(\frac{1}{0.008} + \frac{1}{0.012} + \frac{1}{0.018} \right)^{-1} = 3.1632$$

$$\lambda^2 = 6 + 3.1632 = 9.1632 [\$/\text{MWh}]$$

$$P_{g1}^2 = \frac{\lambda^2 - \beta_1}{2\gamma_1} = \frac{9.1632 - 5.3}{0.008} = 483 \text{ MW}$$

$$P_{g2}^2 = \frac{\lambda^2 - \beta_2}{2\gamma_2} = \frac{9.1632 - 5.5}{0.012} = 305 \text{ MW}$$

$$P_{g3}^2 = \frac{\lambda^2 - \beta_3}{2\gamma_3} = \frac{9.1632 - 5.8}{0.018} = 187 \text{ MW}$$

$$\Delta P^2 = 975 - (483 + 305 + 187) = 0.0 \text{ MW}$$

$$P_{g1}^2 = 483 > 450 \text{ MW alors on fixe } P_{g1}^2 = 450 \text{ MW}$$

$$\Delta P^2 = 975 - (450 + 305 + 187) = 33 \text{ MW}$$

$$\Delta \lambda^2 = \frac{\Delta P^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)^2} = 33 \cdot \left(\frac{1}{0.012} + \frac{1}{0.018} \right)^{-1} = 0.2368$$

$$\lambda^3 = 9.1632 + 0.2368 = 9.4 [\$/\text{MWh}]$$

$$P_{g2}^3 = \frac{\lambda^3 - \beta_2}{2\gamma_2} = \frac{9.4 - 5.5}{0.012} = 325 \text{ MW}$$

$$P_{g3}^3 = \frac{\lambda^3 - \beta_3}{2\gamma_3} = \frac{9.4 - 5.8}{0.018} = 200 \text{ MW}$$

$$\Delta P^3 = 975 - (450 + 325 + 200) = 0.0 \text{ MW}$$

P_{g2} et P_{g3} vérifie les contraintes

$$\begin{aligned} C_T &= 500 + 5.3(450) + 0.004(450)^2 + 400 + 5.5(325) + 0.006(325)^2 + 200 + 5.8(200) + 0.009(200)^2 \\ &= 8\,236.25 \$/\text{MWh} \end{aligned}$$

V.3.2 La méthode du gradient

Le problème consiste à trouver un minimum global de la fonction erreur E entre la fonction $f(t)$ et les points "target". La méthode du gradient est l'une des principales méthodes utilisée pour déterminer cette région d'optimisation.

En effet, afin de minimiser une fonction à partir d'une solution approchée, le plus simple est de suivre la ligne de plus grande pente. D'un point de vue mathématique, la pente d'une fonction correspond à la dérivée de cette dernière. Si l'on se place dans le cadre d'une fonction ayant plusieurs paramètres, la dérivée devient un vecteur : le gradient de la fonction. Chaque élément de ce vecteur correspond alors à la dérivée partielle de la fonction selon l'un de ses paramètres. Soit f une fonction (suffisamment dérivable) dont on recherche un minimum. La méthode du gradient construit une suite x_n qui doit s'approcher du minimum. Pour cela, on part d'une valeur quelconque x_0 et l'on construit la suite :

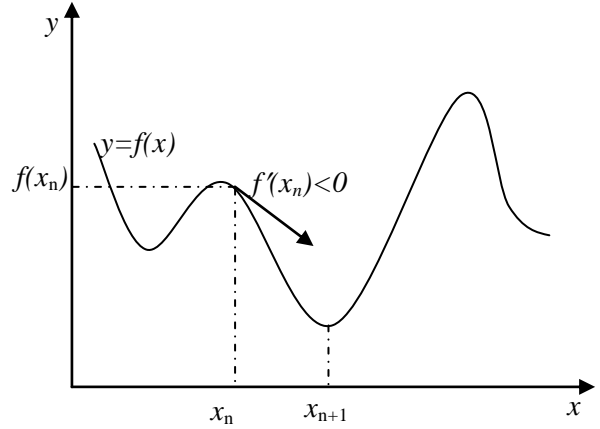


Fig. V.3 Méthode du gradient

$$x_{n+1} = x_n - \rho f'(x_n) \quad (V.17)$$

où ρ est une valeur bien choisie réelle et non nulle

On a

$$f(x_{n+1}) = f(x_n - \rho f'(x_n)) \approx f(x_n) - \rho (f'(x_n))^2 \quad (V.18)$$

d'après le théorème des approximations finies si $\rho f'(x_n)$ est "suffisamment" petit. On voit que, sous réserve de la correction de l'approximation, $f(x_{n+1})$ est inférieur à $f(x_n)$.

On remarque que x_{n+1} est d'autant plus éloigné de x_n que la pente de la courbe en x_n est grande. On peut décider d'arrêter l'itération lorsque cette pente est suffisamment faible (en dimension 2 par exemple, un minimum correspond à une *pente nulle*).

Application de la méthode du gradient au dispatching économique :

Appliquant la méthode du gradient au dispatching économique, la fonction d'objet sera :

$$\text{Min}(F) = \sum_{i=1}^{ng} f_i(P_{gi}) \quad (V.19)$$

Sous la contrainte d'égalité des puissances demandés et fournies (éq. V.8):

$$\sum_{i=1}^{ng} P_{gi} = P_C$$

Et la contrainte d'inégalité (éq. V.9) :

$$P_{gi}^{min} \leq P_{gi} \leq P_{gi}^{max}$$

La fonction de Lagrange sous les contraintes d'inégalités s'écrit :

$$L(P_{gi}, \lambda) = F + \lambda \left(P_C - \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} \right) = \sum_{i=1}^{ng} f_i(P_{gi}) + \lambda \left(P_C - \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} \right) \quad (V.20)$$

Le gradient de la fonction de Lagrange est :

$$\nabla L = \begin{Bmatrix} \frac{\partial L}{\partial P_{g1}} \\ \frac{\partial L}{\partial P_{g2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial P_{gng}} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_1(P_{gi})}{\partial P_{g1}} - \lambda \\ \frac{\partial f_2(P_{gi})}{\partial P_{g2}} - \lambda \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{ng}(P_{gi})}{\partial P_{gng}} - \lambda \\ Pc - \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} \end{Bmatrix} \quad (V.21)$$

En introduisant les valeurs initiales $P_{g1}^0, P_{g2}^0, P_{gng}^0$ et λ^0 , les valeurs suivantes calculées par la méthode du gradient sont données par :

$$X^1 = X^0 - \varepsilon \nabla L \quad (V.22)$$

Avec

$$X^0 = \begin{Bmatrix} P_{g1}^0 \\ P_{g2}^0 \\ \vdots \\ P_{gng}^0 \\ \lambda^0 \end{Bmatrix} \quad et \quad X^1 = \begin{Bmatrix} P_{g1}^1 \\ P_{g2}^1 \\ \vdots \\ P_{gng}^1 \\ \lambda^1 \end{Bmatrix} \quad (V.23)$$

A la $n^{ième}$ itération on peut écrire :

$$X^n = X^{n-1} - \varepsilon \nabla L \quad (V.24)$$

V.3.3 La méthode d'itération de Lambda

La méthode d'itération Lambda consiste à trouver la valeur de Lambda du système et trouver ensuite le dispatching économique optimal des générateurs. Contrairement aux autres méthodes d'itération, comme : Gausse-Seidel et Newton – Raphson, "Lambda itération method" n'utilise pas la valeur précédente de l'inconnue pour trouver la valeur suivante. La valeur suivante est prédéfinie par *intuition*, elle est projetée avec interpolation de la bonne valeur possible jusqu'à ce que le décalage spécifié soit obtenu.

Comment trouver le dispatching économique optimal utilisant la méthode d'itération de Lambda ?

- la méthode exige qu'il y ait une correspondance entre une valeur lambda et l'output (en MW) de chaque générateur
- la méthode commence avec des valeurs de lambda en-dessous et en-dessus de la valeur optimale (qui est inconnue), puis par itération limite la valeur optimale

On choisit λ^L et λ^H tel que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{ng} P_{gi}(\lambda^L) - P_C < 0 \\ et \\ \sum_{i=1}^{ng} P_{gi}(\lambda^H) - P_C > 0 \end{cases} \quad (V.25)$$

On pose

$$\lambda^M = \frac{\lambda^L + \lambda^H}{2} \quad (V.26)$$

$$\text{Si } \sum_{i=1}^{ng} P_{gi}(\lambda^M) - P_C > 0$$

Alors

$$\lambda^H = \lambda^M \quad (V.27)$$

$$\text{Si } \sum_{i=1}^{ng} P_{gi}(\lambda^M) - P_C < 0$$

Alors

$$\lambda^L = \lambda^M \quad (V.28)$$

On refait les calculs jusqu'à $|\lambda^L - \lambda^H| > \varepsilon$

où ε représente la tolérance de convergence

Dans la figure ci-dessous pour chaque valeur de lambda il y a une puissance P_{gi} unique pour chaque générateur. Cette relation est la fonction $P_{gi}(\lambda)$.

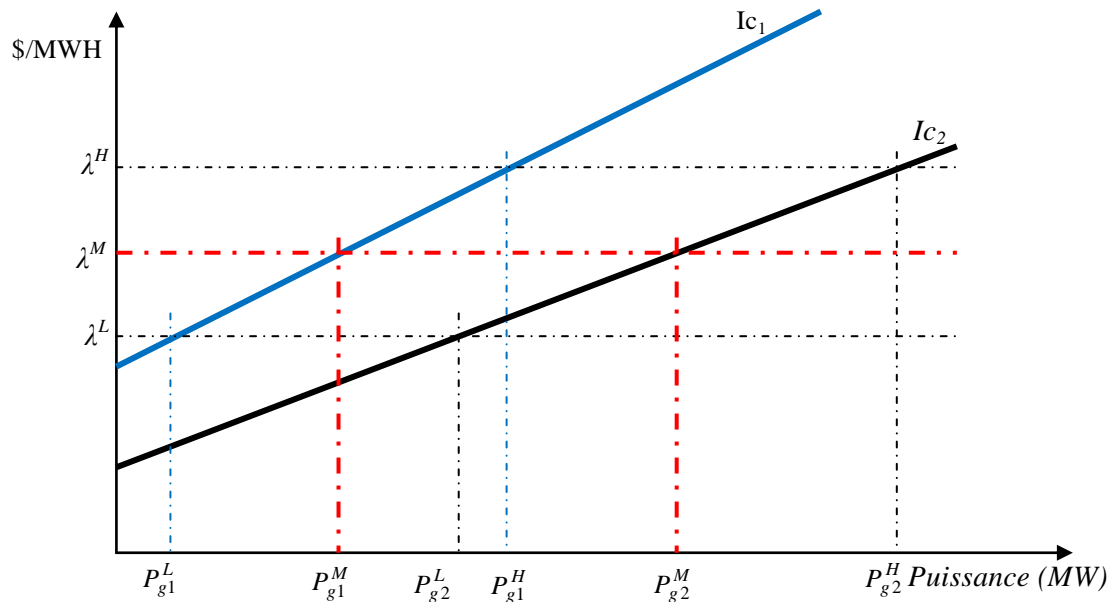


Fig. IV.4 – changement de λ en fonction de la puissance de sortie.

V.4 Dispatching économique avec pertes

Deux approches sont essentiellement utilisées pour la solution du dispatching économique avec pertes, la première est le développement d'une expression mathématique des pertes en fonction des puissances de sortie de chaque unité de production. La deuxième approche consiste à utiliser les équations de l'écoulement de puissances optimal (optimal power flow).

V.4.1 Première approche : (Utilisation d'une expression mathématique des pertes)

La fonction à optimiser reste la même (eq. V.3) et les pertes de transport P_L doivent être prisent en compte dans la contraintes d'égalité donnée par l'équation (V.4)

$$P_C + P_L - \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} = 0$$

P_L : Les pertes de transport.

La fonction de Lagrange pour ce nouveau cas est donnée par :

$$L(P_{gi}, \lambda) = C_t + \lambda \left(P_c + P_L - \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} \right) \quad (V.29)$$

Les dérivées de la fonction de Lagrange par rapport aux variables indépendantes nous donne :

$$\frac{\partial L}{\partial P_{gi}} = \frac{\partial C_i(P_{gi})}{\partial P_{gi}} - \lambda \left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_{gi}} \right) = 0$$

$$\lambda = \frac{\partial C_i(P_{gi})}{\partial P_{gi}} - \left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_{gi}} \right)^{-1} \quad (V.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_c + P_L - \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} \quad (V.31)$$

Les équations (V.30) et (V.31) sont des conditions nécessaires pour solutionner le problème de dispatching avec pertes.

V.4.2 Deuxième approche : (utilisation de l'OPF "Optimal Power Flow")

Le dispatching économique avec pertes est un procédé itératif qui doit, s'il est réalisé correctement, converger vers la solution optimale. Pour tenir compte des pertes, nous allons évaluer celles-ci et les inclure dans la demande. Elles varient en fonction de la répartition des puissances entre les centrales et de la consommation locale de puissance. Ainsi, contrairement à celui sans pertes, le dispatching économique avec pertes tient compte de la topographie du réseau. Pour pénaliser les centrales qui produisent de la puissance dont le transit provoque d'importantes pertes, nous multiplions leur coût incrémental par un *facteur de pénalité*. La justification physique de ce facteur de pénalité s'explique par le fait qu'à cause des pertes, il peut être plus intéressant de produire pour plus cher près du lieu de consommation que loin et pour moins cher. Pour l'appliquer au dispatching économique avec perte, il faut appliquer l'algorithme de la figure IV.5 avec les étapes principales suivantes :

- Calculer les pertes
- Calculer le facteur de pénalité
- Déterminer un critère de convergence

Schéma bloc

Voici le schéma bloc de l'algorithme appliqué :

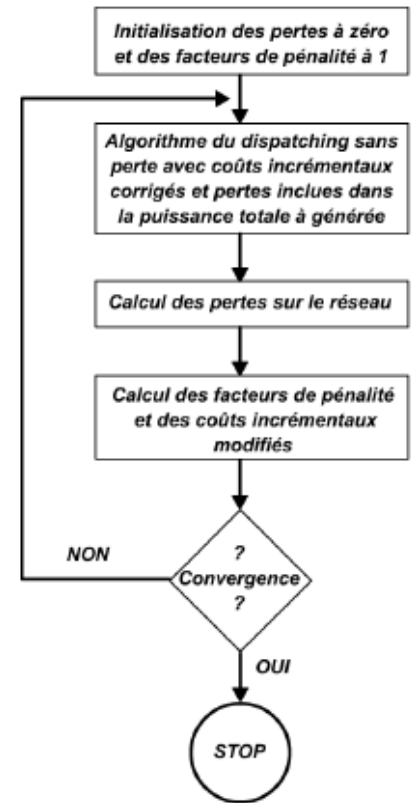


Fig. IV.5- Algorithme de dispatching économique avec pertes

V.4.2.a Calcul des pertes (P_L)

À partir des équations de l'écoulement de puissance (Power Flow), on calcul la puissance transitant entre deux nœuds i et j

P_{ij} : représente la puissance qui quitte le nœud i en direction du nœud j .

P_{ji} : représente la puissance qui quitte le nœud j en direction du nœud i .

$$P_{ij} = V_i^2 G_{ij} - V_i V_j (G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)) \quad (V.32)$$

$$P_{ji} = V_j^2 G_{ij} - V_i V_j (G_{ij} \cos(\theta_j - \theta_i) + B_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)) \quad (V.33)$$

Les pertes dans la ligne $i-j$ sont égales à la somme de ces deux puissances

$$P_{Li,j} = P_{i,j} + P_{j,i} \quad (V.34)$$

Les pertes totales dans tout le réseau électrique sont égales à la somme des pertes de toutes les lignes équivalentes à la somme de toutes les puissances qui transitent dans les lignes dans les deux sens.

$$P_L = \sum_{\text{toutes les lignes}} P_{Li,j} = \sum_{\text{toutes les lignes}} P_{i,j} + P_{j,i} \quad (V.35)$$

Elles peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$P_L = \Psi^t . G . \Psi \quad (V.36)$$

avec

$$\Psi = M \delta \quad (V.37)$$

M : étant la matrice incidence des lignes et δ : la matrice des phases des nœuds et G la matrice diagonale des conductances des lignes.

$$G = \begin{bmatrix} G_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & G_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (V.38)$$

Or ; δ peut-être approximé par un DC Load Flow² . Ainsi

$$P_G - P_C = A^{-1} \delta \Rightarrow \delta = A^{-1} (P_G - P_C) \quad (V.39)$$

Avec A : matrice du DC load flow.

On trouve alors

$$P_L = \Psi^t . G . \Psi$$

$$P_L = (P_G - P_C)^t A^{-1} . M^t . G . M . A^{-1} (P_G - P_C)$$

$$P_L = P_C^t B P_C^t - 2 P_C^t B P_G + P_G^t B P_G \quad (V.40)$$

$$B = A^{-1} . M^t . G . M . A^{-1} \quad (V.41)$$

V.4.2.b Facteur de pénalité

Nous avons

$$\lambda = \frac{\partial C_t}{\partial P_{gi}} = \frac{\partial C_i}{\partial P_{gi}} = \beta_i + 2\gamma_i P_{gi}$$

$$\text{et } P_G = P_C + P_L$$

$$dC = \beta_i dP_{gi} + 2\gamma_i P_{gi} dP_{gi} = \beta_i (dP_{Ci} + dP_{Li}) + 2\gamma_i P_{gi} (dP_{Ci} + dP_{Li}) = (\beta_i + 2\gamma_i P_{gi}) . dP_{Ci} + (\beta_i + 2\gamma_i P_{gi}) . dP_{Li}$$

$$\frac{\partial C_t}{\partial P_{Ci}} = (\beta_i + 2\gamma_i P_{gi}) . \left(1 + \frac{dP_{Li}}{dP_{Ci}} \right) = (\beta_i + 2\gamma_i P_{gi}) . \left(\frac{dP_{Ci} + dP_{Li}}{dP_{Ci}} \right) = (\beta_i + 2\gamma_i P_{gi}) . \left(\frac{dP_{gi}}{dP_{Ci}} \right)$$

$$\frac{dC_t}{dP_{Ci}} = (\beta_i + 2\gamma_i P_{gi}) . \left(\frac{dP_{Ci}}{dP_{gi}} \right)^{-1} = (\beta_i + 2\gamma_i P_{gi}) . \left(\frac{dP_{gi} - dP_{Li}}{dP_{gi}} \right)^{-1} = (\beta_i + 2\gamma_i P_{gi}) . \left(1 - \frac{dP_{Li}}{dP_{gi}} \right)^{-1}$$

² DC load flow est la résolution du problème non linéaire de 'AC load flow' (répartition des puissances en courant alternatif) en introduisant des approximations rendant le problème linéaire.

$$\frac{dC_t}{dP_{Ci}} = (\beta_i + 2\gamma_i P_{gi}) \cdot \left(1 - \frac{dP_L}{dP_{gi}}\right)^{-1} \quad (V.42)$$

On peut alors écrire :

$$\frac{dC_t}{dP_{Ci}} = (\beta'_i + 2\gamma'_i P_{gi}). \quad (V.43)$$

Avec

$$\beta'_i = \beta_i \cdot f_i \quad \text{et} \quad \gamma'_i = \gamma_i \cdot f_i \quad (V.44)$$

Où $f_i = \left(1 - \frac{dP_L}{dP_{gi}}\right)^{-1}$ qui représente le facteur de pénalité du coût incrémental.

$\frac{dC_t}{dP_{Ci}}$ représente l'accroissement du coût de production pour une augmentation de la puissance consommée par les charges.

Cette valeur est plus intéressante pour nous que le coût incrémental défini précédemment car il tient compte des pertes. Ainsi, le critère pour la distribution des paquets de puissance sera dorénavant de trouver le coût incrémental corrigé le plus faible.

V.4.2.c Critère de convergence

La convergence est atteinte lorsque la contrainte d'égalité est respectée c.à.d.

$$\left| \sum_{i=1}^{ng} P_{gi} - P_C - P_L \right| \leq \varepsilon \quad (V.45)$$

V.4.2.d Hypothèses et approximations

Plusieurs hypothèse et approximations sont utilisées lors du calcul d'erreur. On considère les déphasages entre nœud négligeable ($\theta_i - \theta_j \approx 0$) ce qui nous a permis d'approcher un cosinus par son développement en série de Taylor. Tous les nœuds sont supposés à tension nominative. L'usage du DC load flow implique aussi que l'on suppose les conductances négligeables.

$$G_{ij} \approx 0 \quad (V.46)$$

V.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré au dispatching économique qui est un problème d'optimisation qui minimise le coût de production de l'énergie électrique des réseaux électriques en tenant compte des contraintes d'égalité et des contraintes d'inégalité. Cela consiste à trouver la contribution en puissance de chaque groupe de production du système électrique, de sorte que le coût total de production soit aussi minimisé que possible pour n'importe quelle condition de charge tout en respectant les contraintes physiques de tous les équipements du réseau. Le dispatching économique a été étudié d'abord en négligeant les pertes électriques du réseau ensuite en tenant compte de ces pertes. Pour le premier cas trois méthodes (Lagrange (ou Kuhn-Tucker) la méthode du Gradient et la méthode Lamda) permettent de le faire sont détaillées et étudiées. Pour le deuxième cas deux approches sont étudiées ; la première passe à travers une estimation des pertes en utilisant une expression mathématique ; la deuxième approche passe à travers une estimation des pertes en utilisant un calcul optimal de la puissance (OPF). Cette partie permet aux étudiants comprendre la situation dans laquelle se trouvent les gestionnaires du réseau électrique de parer aux éventuels incidents, de satisfaire la demande mais aussi de minimiser les coûts de production qui se chiffre en Million de Dollars d'économie.

Conclusion générale

Ce document constitue un support indispensable aux étudiants de la filière électrotechnique en générale et particulièrement ceux de la spécialité réseaux électriques pour la compréhension de la modélisation et simulation des réseaux électriques. La gestion des réseaux électrique se fait à chaque instant 24h/24 et 7j/7 étant donné que la contrainte d'égalité de la puissance produite et celle consommée doit être assurée à chaque instant. Ainsi pour parer à tout éventuel incident ou évènement indésirable sur le réseau et aussi pour satisfaire la demande et minimiser les coûts de production, des modélisations et des simulations doivent être élaborées et réalisés quotidiennement à tout instant d'une manière quasi permanente. Des simulations du réseau électrique sont aussi nécessaires dans le cas de changement d'état du réseau (défection d'un élément du réseau, installation d'un nouvel équipement).

La formation des étudiants en vue de la modélisation des réseaux électriques passe inévitablement par la maîtrise des différents composants de base (résistance inductance et capacité), de la représentation adéquate (représentation Fresnel et la représentation complexe) d'un signal électrique (courant, tension) en monophasé et en triphasé et les modèles des différents éléments du réseau (sources, lignes, transformateurs et charges). Il passe inévitablement aussi par la maîtrise du système d'unités relatives et la construction des matrices admittance Y_{bus} et impédance Z_{bus} , qui sont indispensable pour l'étude des réseaux maillés.

L'étude des différents défauts (court-circuit 3 ϕ , 1 ϕ , 2 ϕ et 2 ϕ -T) est faite en système unité relatives (pu), en utilisant la méthode des composantes symétriques et la matrice impédance nodale Z_{bus} . Le calcul des courants de défauts, à travers un programme informatique utilisant les matrices de transformation T et impédance nodale, permet aux étudiants d'évaluer l'état des tensions de tous les accès du réseau au moment du défaut. Il permet aussi les courants et les puissances électriques transitant dans chaque élément du réseau. Cela permet le dimensionnement des équipements électriques (Lignes, transformateur, sources) et aussi les éléments de protection (disjoncteurs).

Dans le quatrième chapitre les étudiants vont se familiariser avec les deux méthodes de calcul les plus utilisées pour le calcul d'écoulement de puissance. Les deux méthodes sont Gauss Seidel et Newton Raphson (NR) et aussi NR découplé et NR découplé rapide. Des algorithmes des deux programmes sont détaillés, ils seront ensuite implémentés par les étudiant su PC avec un langage de programmation (généralement MATLAB). Le calcul des puissances qui s'écoulent dans les réseaux d'énergie électriques se fait à travers le calcul des tensions (en module $|V|$ et argument θ) aux différents accès. Cela permet de déduire les courants électriques et les puissances actives et réactives fournies par chaque source et transitant dans chaque branche du réseau. Ce calcul permet de vérifier les capacités des sources à satisfaire la demande en énergie et aussi de vérifier les niveaux de tension aux accès ainsi que les capacités de transport de chaque ligne du réseau.

Le cinquième et dernier chapitre est consacré au dispatching économique qui est un problème d'optimisation dont l'objectif principal est de minimiser le coût de production de l'énergie électrique des réseaux électriques en tenant compte des contraintes d'égalité et des contraintes d'inégalité. Cela consiste à trouver la contribution en puissance de chaque groupe de production du système électrique, de sorte que le coût total de production soit aussi minimisé que possible pour n'importe quelle condition de charge tout en respectant les contraintes physiques de tous les équipements du réseau. Le dispatching économique a été étudié d'abord en négligeant les pertes électriques du réseau ensuite en tenant compte de ces pertes. Pour le premier cas trois méthodes (Lagrange (ou Kuhn-Tucker) la méthode du Gradient et la méthode Lamda) permettent de le faire sont détaillées et étudiées. Pour le deuxième cas deux approches sont étudiées ; la première passe à travers une estimation des pertes en utilisant une expression mathématique ; la deuxième approche passe à travers une estimation des pertes en utilisant une un calcul optimal de la puissance (OPF). Cette partie permet aux étudiants comprendre la situation dans laquelle se trouvent les gestionnaires du réseau électrique de parer aux éventuels incidents, de satisfaire la demande mais aussi de minimiser les coûts de production qui se chiffre en Million de Dollars d'économie.

Références bibliographiques

- [1] Charles A. Gross; "Power system analysis", Mc Graw Hill international editions (Electrical et Electronic Engineering series, 1988).
- [2] R. Natarajan; "Computer-Aided Power System Analysis", Marcel Dekker, 2002.
- [3] A. R. Bergen and V. Vittal; "Power System Analysis", Prentice-Hall, 2000.
- [4] H. Saadat; "Power System Analysis", McGraw-Hill, 1999.
- [5] William D. Stevenson; "Elements of power system analysis", Edition (Dunod, paris, 1999).
- [6] B. M. Weedy and B. J. Cory; "Electric Power Systems", John Wiley & Sons, 1998.
- [7] Jean Pal Barret, Pierre Bornard, Bruno Mayer; "Simulation des réseaux électriques", Editions EYROLLES 1997.
- [8] J. J. Grainger, and W. D. Stevenson; "Power System Analysis", McGraw-Hill, Inc, Singapore, 1994.
- [9] A. Greenwood; "Electrical Transients in Power Systems", John Wiley, 1991.
- [10] Arrillaga, J. and Arnold, C.P.; "Computer Analysis of Power Systems", John Wiley & Sons, 1990.
- [11] J. Arrillaga, and C.P. Arnold; "Computer Analysis of Power System", John Wiley & Sons, 1990.
- [12] S. A. Nasar; "Electric Power Systems", Schaum's Outline Series, 1990.
- [13] D. P. Kothari and I. J. Nagrath; "Modern Power Systems Analysis", Tata-McGraw-Hill, 1989.
- [14] Glenn W. Stagg, Ahmad H. El Abiad; "Computer methods in power systems analysis", Mc GRAW HILL international editions (Electrical et Electronic Engineering séries ; 1988).
- [15] J. Arrillaga and B. Smith; "AC-DC Power System Analysis", The Institution of Electrical Engineers, 1988.
- [16] Turan, G.; "Modern Power System Analysis", John Wiley & sons, 1988.
- [17] Stevenson, W.D.Jr.; "Elements of Power System Analysis". Mc Graw Hill, 1985.
- [18] Elgerd, O.I.; "Electric Energy Systems Theory: An Introduction", Mc Graw Hill, 1971.
- [19] Stagg, G.W. and El-Abiad, A.h.; "Computer Methods in Power System Analysis", Mc Graw Hill, 1968.
- [20] Stagg, G. W., and E. L. Witzmann; "Computer Program for Load Flow Study Handles Ten-system Interconnection", Electrical World, Aug. 1, 1960.
- [21] Zuckernick, S. J., and G. W. Stagg; "Computer Solves Relay Problems", Electrical World, July 20, 1959.
- [22] St. Clair, H. P., and G. W. Stagg; "Digital Computer Solution of Power System Problems", Proc. Am. Power Conf., vol. 20, pp. 614--629, 1958.
- [23] St. Clair, H. P., G. W. Stagg, and Maria Tscherne; "Digital Computer Takes Over Load Flow Calculations", Electrical World, Sept. 30, 1957.
- [24] Ward, J.B. and Hale, H.W.; "Digital Computer Solution of Power Flow Problems", Trans. Am. Inst. Elect. Eng., Part 3 75 398-404, 1956.
- [25] A. J. Wood and B.F. Wollenberg; "Power Generation, Operation and Control", John Wiley & Sons, New York, USA, 1996.
- [26] S. Benmezziane, L. Ali Cherif; "Le calcul de l'écoulement de puissance par les réseaux de neurones artificiels", Mémoire de fin d'étude, Université de Bejaia 2005.
- [27] M. Belabed, A. Boufala; "Elaboration d'un logiciel de calcul de répartition de puissance", Mémoire de fin d'étude, Université de Bejaia 2004.
- [28] A. Djida, A. M. Boutamine; "Modélisation des réseaux électriques pour le calcul des courants de défaut par ordinateur", Mémoire de fin d'étude, Université de Bejaia 1994.
- [29] Grainger, J.; Stevenson, W.; "Power System Analysis. New York: McGraw-Hill. ISBN 0-07-061293-5, 1994.