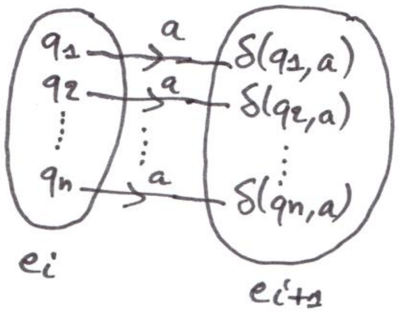
Rappels.

1] Déterminisation des AEFs.

* **Définition :** Un AEF est déterministe si et seulement si : pour chaque état q_i et chaque terminal a, il existe au plus une seule transition $\delta(q_i, a) = q_j$. Donc, si $|\delta(q_i, a)| > 1$ alors l'automate est indéterministe.

* **Algorithme de déterministation d'un AEF indéterministe :**
  * **Entrée :** un AEF $A = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ indéterministe.
  * **Sortie :** un AEF $A' = (\Sigma, Q', e_0, F', \delta')$ déterministe.
  * **Étape 1 :** l'état initial de A' $e_0 = \{q_0\}$.
    (l'état initial de l'automate déterministe est toujours égale à celui de l'automate indéterministe).
  * **Étape 2 :** Pour chaque nouvel état e_i de A' défini par $e_i = \{q_1, \dots, q_n\}$, et chaque terminal $a \in \Sigma$, faire comme suit :

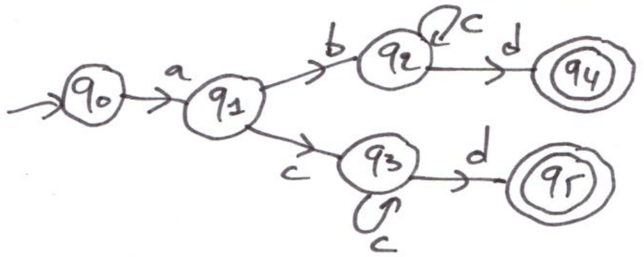


⇒ Créer le nouvel état e_{i+1} défini par
$$e_{i+1} = \{\delta(q_1, a), \dots, \delta(q_n, a)\}.$$
⇒ Créer la nouvelle transition
$$\delta'(e_i, a) = e_{i+1}.$$

  * **Étape 3 :** Finalement, chaque nouvel état de A' qui contient au moins un état final de A devient état final.

2 Minimisation des AEFs.

• **Définition:** Deux états q_1 et q_2 sont dits β-équivalents ssi à partir desquels on reconnait le même sous-langage.

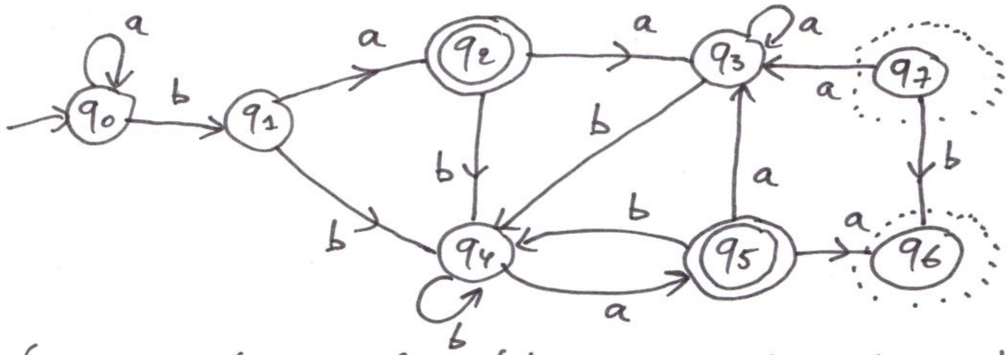


Par exemple, dans l'AEF ci-avant, les deux états q_2 et q_3 sont β-équivalents parce qu'ils nous permettent de reconnaitre le même sous-langage $\{c^*d^+\}$.

• **Définition:** un AEF A est minimal si sa minimisation donne le même automate A.

• **Algorithme de minimisation (expliqué à travers un exemple):**

Soit à minimiser l'AEF suivant:



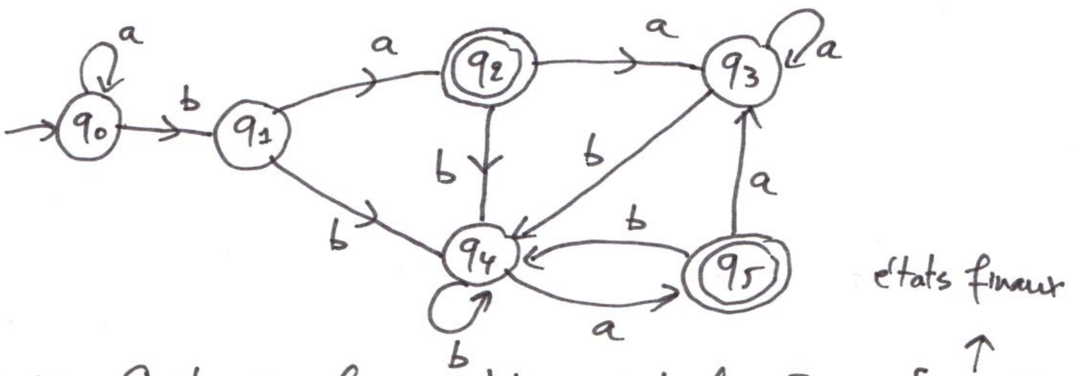
• **Étape 1:** éliminer les états inaccessibles et puits.

Ici: le q_7 est un état inaccessible, tandis que le q_6 est un état puit. Donc, éliminer q_6 et q_7.

• **Étape 2:** Rendre l'automate déterministe.

Après avoir éliminé les états q_6 et q_7, l'automate résultant est bien déterministe.

Donc, l'automate que l'on va considérer est le suivant :



Étape 3 : Construire la partition initiale $\beta_0 = \underbrace{\{q_2, q_5\}}_{A}, \overbrace{\{q_0, q_1, q_3, q_4\}}^{B}$

états non-finaux

Étape 4 : Construire la partition β_1 comme suit :

* Pour chaque ensemble de la partition précédente, tracer une matrice :

	a	b
q_2	B	B
q_5	B	B

A

	a	b
q_0	B	B
q_1	A	B
q_3	B	B
q_4	A	B

B

Le but est de regrouper ensemble les états qui donnent le même résultat pour chaque terminal.

Ici : * q_2 et q_5 doivent être regroupés ensemble dans β_1.

* Pareil pour q_0, q_3, et q_1, q_4.

D'où : la partition β_1 est définie par : $\underbrace{\{q_2, q_5\}}_{A}, \underbrace{\{q_0, q_3\}}_{B}, \underbrace{\{q_1, q_4\}}_{C}$

Étape 5 : Construire la partition β_2 :

	a	b
q_2	B	C
q_5	B	C

A

q	a	b
q_0	B	C
q_3	B	C

B

	a	b
q_1	A	C
q_4	A	C

C

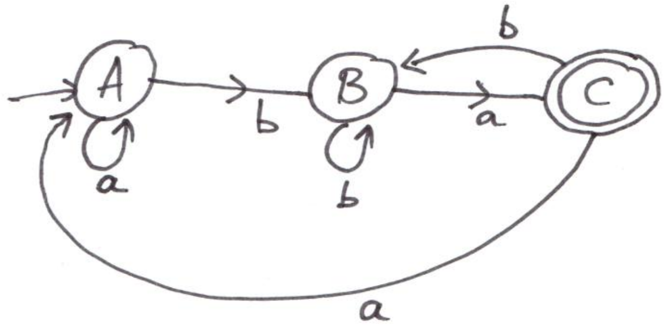
La nouvelle partition β_2 est définie par : $\underset{C}{\{q_2, q_5\}}$, $\underset{A}{\{q_0, q_3\}}$, $\underset{B}{\{q_1, q_4\}}$.

$\beta_2 = \beta_1 \Rightarrow$ arrêt de la procédure $\Rightarrow \beta_2$ est la partition finale.

Étape finale : Construction de l'automate minimal.

- chaque ensemble de la partition finale devient un état.
- L'ensemble qui contient l'état initial devient état initial.
- Chaque ensemble qui contient un état final devient état final.
- On crée une transition entre deux ensemble A et B avec un terminal a ssi : il existe un état q_1 de A, et un état q_2 de B, tel que $\delta(q_1, a) = q_2$.

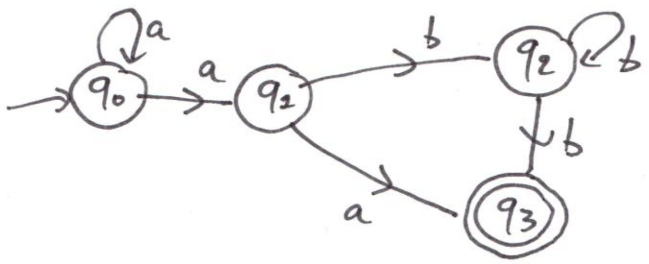
$\Rightarrow$ L'automate minimal équivalent à notre automate du départ est le suivant :



Remarque : les états β-équivalents sont : q_0 et q_3, q_1 et q_4, q_2 et q_5.

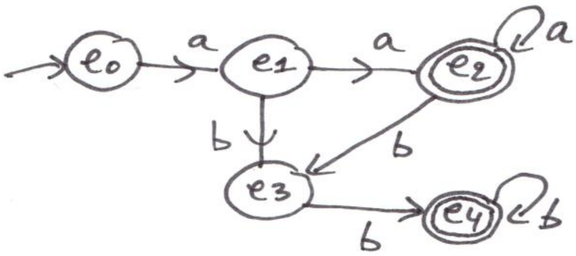
Le but de l'algorithme de minimisation est de regrouper les états β-équivalents.

Exercice n°01 : Déterminiser l'automate suivant :



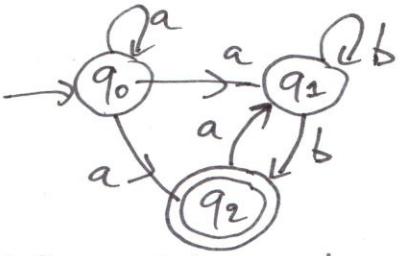
A_1

L'automate déterministe à trouver doit être équivalent à :



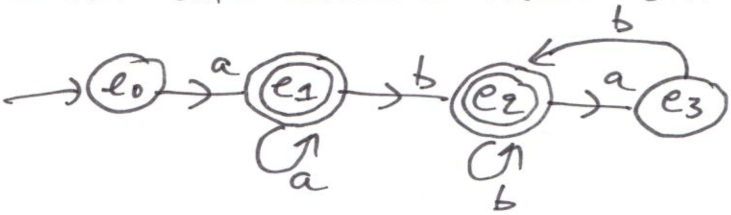
avec : $e_0 = \{q_0\}$, $e_1 = \{q_0, q_1\}$, $e_2 = \{q_0, q_1, q_3\}$, $e_3 = \{q_2\}$, $e_4 = \{q_2, q_3\}$.

Exercice n°02 : Déterminiser l'AEF suivant :



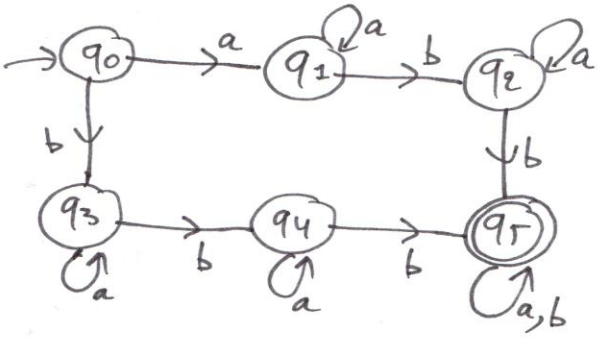
A_2

L'AEF déterministe à trouver doit être équivalent à :

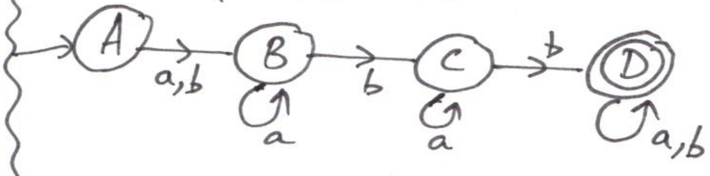


avec : $e_0 = \{q_0\}$, $e_1 = \{q_0, q_1, q_2\}$, $e_2 = \{q_1, q_2\}$, $e_3 = \{q_1\}$.

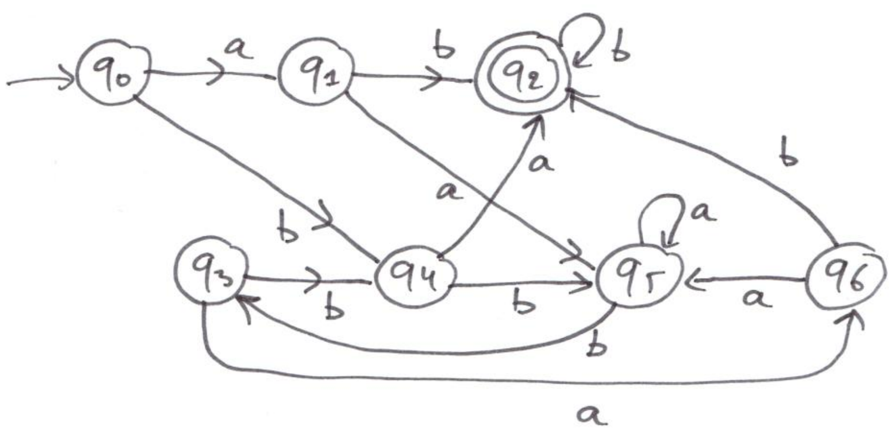
Exercice n°03 : Minimiser l'AEF suivant :



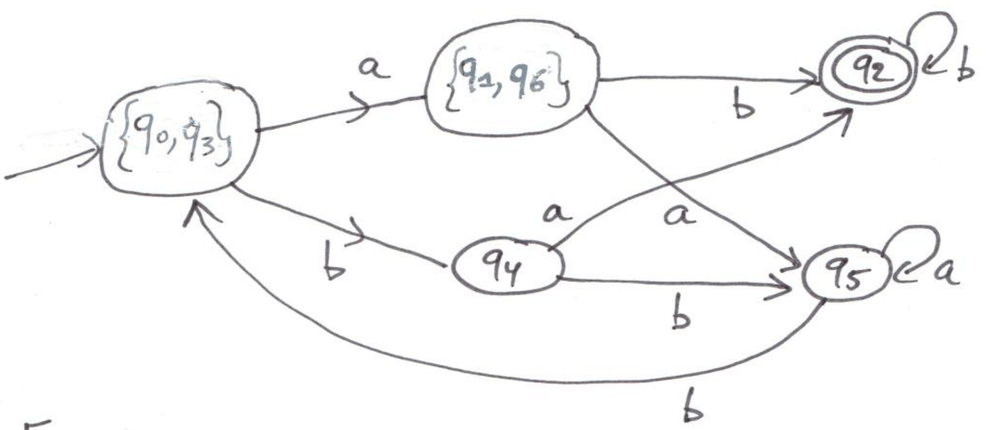
L'AEF minimal à trouver ~~est~~ doit être équivalent à :



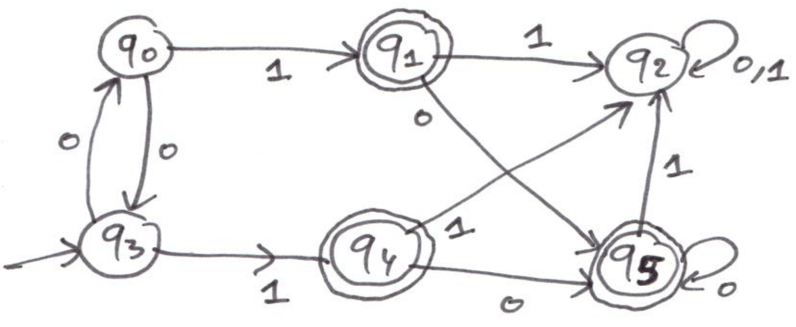
Exercice n°04 : Minimiser l'AEF suivant :



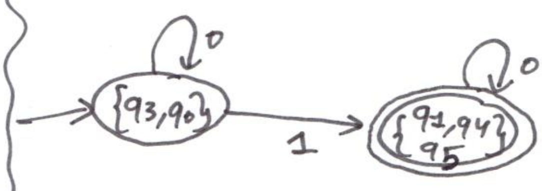
L'AEF minimal à trouver est le suivant :



Exercice n°05 : Minimiser l'AEF suivant :



L'AEF minimal équivalent à trouver est :



Exercice n°06 : Justifier que l'AEF de l'exercice n°02 est déjà minimal (Celui trouvé après la déterminisation).

Exercice n°07 : Déterminer le langage reconnu par l'AEF suivant :

Résultat à trouver :

$L = \{a(b + a^+b)^*a^+\}$.

Exercice n°08 : Déterminer le langage reconnu par l'AEF suivant :