Université de Tlemcen
Département de mathématique
LMD MI

Année universitaire : 2019-2020

Corrigé de la série de TD N° 2
Théorème de Gauss

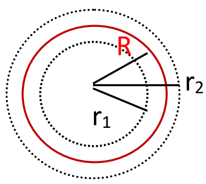
Exercice 1 :

On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

$$\emptyset = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} \; // \; \vec{ds}$ Donc : $\oiint \vec{E}.\vec{ds} = \iint E.ds = E \iint ds = E.S = E4\pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{E4\pi r^2} = \frac{\sum \boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

1- Le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.
   Nous avons 2 cas



1^er cas r<R $Q_{int} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{E_1 = 0}$

2^eme cas r≥ R $dq = \sigma ds \Rightarrow Q_{int} = \sigma 4\pi R^2$

Donc $E_2 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\sigma R^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 r^2}}$

2- Le potentiel électrostatique V(r) en tout point de l'espace.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int Edr$

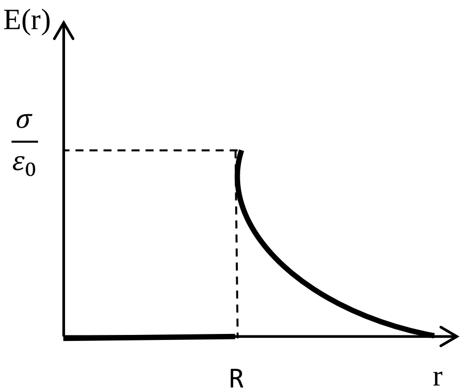
1^er cas r<R $E_1 = 0 \Rightarrow v_1 = C_1$

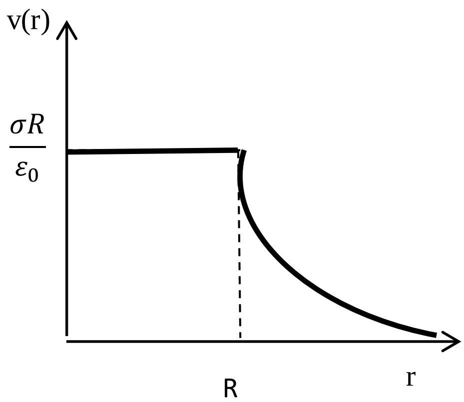
2^eme cas r≥ R $E_2 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow v_2 = -\sigma \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C_2$

Le potentiel à l'infini (r⟶∞) v=0 donc $\lim_{r \to \infty} v = 0$ donc $C_2=0$ Alors $\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{\sigma R^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}$

Le potentiel est une fonction continue en R donc $v_1(R) = v_2(R)$ alors $v_1 = C_1 = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R}$ donc $\boldsymbol{v_1} = \frac{\boldsymbol{\sigma R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

3- L'allure du champ électrique et du potentiel électrique en fonction de r :





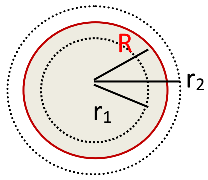
Exercice 2 :

On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

$$\emptyset = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel \vec{ds}$ Donc : $\oiint \vec{E}.\vec{ds} = \iint E.ds = E\iint ds = E.S = E4\pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{E4\pi r^2} = \frac{\sum \boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{4\pi r^2 \varepsilon_0}} \quad (*)$

1- Le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.



Nous avons 2 cas

1er cas r<R

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^r r^2 dr$

$\Rightarrow Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi r^3$ donc $(*) \Rightarrow E_1 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E_1} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\boldsymbol{r}$

2eme cas r≥ R

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^R r^2 dr$ donc $Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi R^3$

$$(*) \Rightarrow E_2 = \frac{\rho\ \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad donc\ \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\rho\ R^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0 r^2}}$$

2- Le potentiel électrique v(r) en tout point de l'espace.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int Edr$

1er cas : r<R

$E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r \Rightarrow v_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int rdr$ donc $\boldsymbol{v_1} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{6\varepsilon_0}}\boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{C_1}$

2eme cas r≥ R

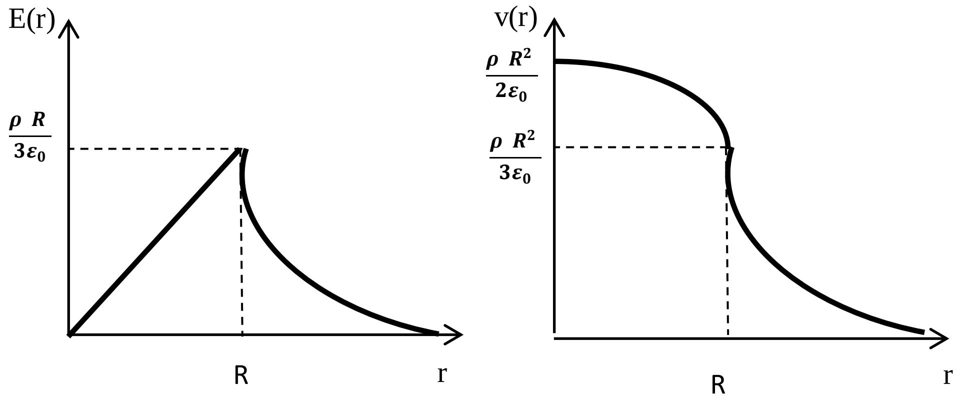
$E_2 = \frac{\rho\ R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow v_2 = -\frac{\rho\ R^3}{3\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr$ donc $\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{\rho\ R^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C_2}$

Le potentiel à l'infini ($r \rightarrow \infty$) v=0 donc $\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{\rho\ R^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$

Le potentiel est une fonction continue en R donc $\boldsymbol{v_1(R) = v_2(R)}$

$\frac{\rho\ R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho\ R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) = \frac{\rho\ R^2}{2\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{v_1} = -\frac{\boldsymbol{\rho\ r^2}}{\boldsymbol{6\varepsilon_0}} + \frac{\boldsymbol{\rho\ R^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}$

3- L'allure du champ électrique et du potentiel électrique en fonction de r :



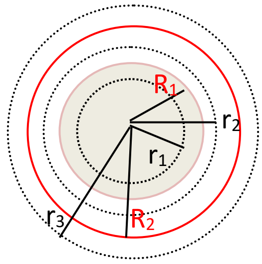
Exercice 3 :

On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

$$\emptyset = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds}$ Donc :$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds}$=$\iint E.ds = E\iint ds = E.S = E4\pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{E4\pi r^2} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2\varepsilon_0}$ $(*)$

1- Le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.



Nous avons 3 cas

1er cas r<R$_1$

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^r r^2 dr$

$\Rightarrow Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi r^3$ donc $(*) \Rightarrow E_1 = \frac{\rho\ \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E_1} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}$

2eme cas R$_1$ ≤ r<R$_2$

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^{R_1} r^2 dr$ donc $Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi R_1^3$

$$(*) \Rightarrow E_2 = \frac{\rho\ \frac{4}{3}\pi R_1^3}{4\pi r^2\varepsilon_0} \quad donc\ \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\rho\ R_1^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0 r^2}}$$

3eme cas r≥R$_2$

$Q_{int} = Q_1 + Q_2$avec $Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi R_1^3$ et $dq_2 = \sigma ds \Rightarrow Q_2 = \sigma 4\pi R_2^2$

Donc $Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2$ donc $(*) \Rightarrow E_3 = \frac{\rho\ \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2}{4\pi r^2\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E_3} = \frac{\boldsymbol{\rho\ R_1^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0 r^2}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 r^2}}$

2- Le potentiel électrique v(r) en tout point de l'espace.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int E dr$

1er cas : r<R$_1$

$E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r \Rightarrow v_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r dr$ donc $\boldsymbol{v_1} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{6\varepsilon_0}}\boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{C_1}$

2eme cas R$_1$ ≤ r<R$_2$

$E_2 = \frac{\rho\ R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow v_2 = -\frac{\rho\ R_1^3}{3\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr$ donc $\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{\rho\ R_1^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C_2}$

3eme cas r≥R$_2$

$E_3 = \frac{\rho\ R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow v_3 = -\left(\frac{\rho\ R_1^3}{3\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}\right)\int \frac{1}{r^2}dr$ donc $\boldsymbol{v_3} = \left(\frac{\boldsymbol{\rho\ R_1^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\right)\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C_3}$

Le potentiel à l'infini ($r \rightarrow \infty$) v=0 donc C_3=0 et $\boldsymbol{v_3} = \left(\frac{\boldsymbol{\rho\ R_1^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2^2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\right)\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$

Le potentiel est une fonction continue :

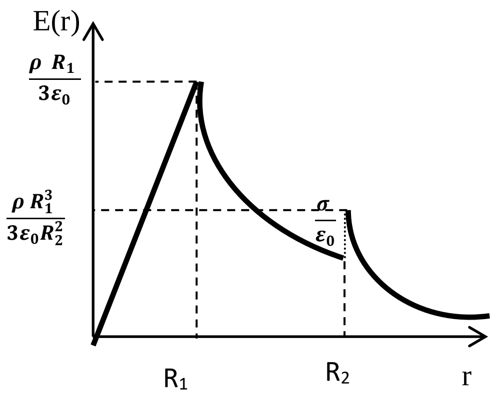
- *en R$_2$ donc* $\boldsymbol{v_3(R_2) = v_2(R_2)}$

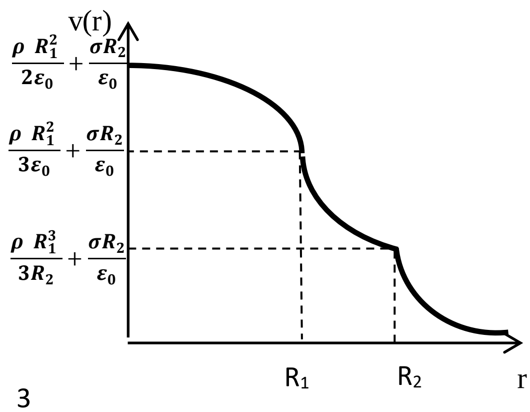
$\frac{\rho\ R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} = \frac{\rho\ R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{\rho\ R_1^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

- *en R$_1$ donc* $\boldsymbol{v_2(R_1) = v_1(R_1)}$

$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R_1^2 + C_1 = \frac{\rho\ R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow C_1 = \frac{\rho\ R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{v_1} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{6\varepsilon_0}}\boldsymbol{r^2} + \frac{\boldsymbol{\rho\ R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

3- L'allure du champ électrique et du potentiel électrique en fonction de r :





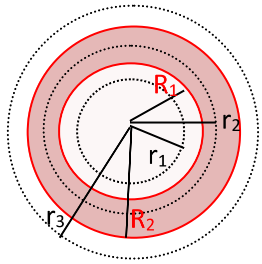
Exercice 4

On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

$$\emptyset = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds}$ Donc : $\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint E.ds = E \iint ds = E.S = E4\pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{E4\pi r^2} = \frac{\sum \boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$ $(*)$

1- Le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.



Nous avons 3 cas

<u>1er cas r<R1</u>

$Q_{int} = 0$ donc $\boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{0}$

<u>2eme cas $R_1 \leq r < R_2$</u>

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_{R_1}^{r} r^2 dr$

donc $Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$

$$(*) \Rightarrow E_2 = \frac{\rho\ \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad donc\ \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\rho}\ (r^3 - R_1^3)}{\boldsymbol{3\varepsilon_0 r^2}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\left(r - \frac{R_1^3}{\boldsymbol{r^2}}\right)$$

<u>3eme cas $r \geq R_2$</u>

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr$ donc $Q_{int} = \rho\ \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$

$$(*) \Rightarrow E_3 = \frac{\rho\ \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad donc\ \boldsymbol{E_3} = \frac{\boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{R_2^3} - \boldsymbol{R_1^3})}{\boldsymbol{3\varepsilon_0 r^2}}$$

2- Le potentiel électrique v(r) en tout point de l'espace.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int Edr$

<u>1er cas : r<R1</u>

$E_1 = 0 \Rightarrow \quad \boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{C_1}$

<u>2eme cas $R_1 \leq r < R_2$</u>

$E_2 = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\left(r - \frac{R_1^3}{\boldsymbol{r^2}}\right) \Rightarrow v_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\int rdr - R_1^3 \int \frac{1}{r^2}dr\right)$ donc $\boldsymbol{v_2} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\left(\frac{\boldsymbol{r^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{R_1^3}{\boldsymbol{r}}\right) + \boldsymbol{C_2}$

<u>3eme cas $r \geq R_2$</u>

$E_3 = \frac{\rho\ (R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow v_3 = -\frac{\rho\ (R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0} \int \frac{1}{r^2}dr$ donc $\boldsymbol{v_3} = \frac{\boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{R_2^3} - \boldsymbol{R_1^3})}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{C_3}$

Le potentiel à l'infini ($r \rightarrow \infty$) v=0 donc C_3=0 et $\boldsymbol{v_3} = \frac{\boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{R_2^3} - \boldsymbol{R_1^3})}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$

Le potentiel est une fonction continue :

- *en R_2 donc* $\boldsymbol{v_3(R_2)} = \boldsymbol{v_2(R_2)}$

$\frac{\boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{R_2^3} - \boldsymbol{R_1^3})}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\frac{1}{R_2} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\left(\frac{\boldsymbol{R_2^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{R_1^3}{\boldsymbol{R_2}}\right) + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho R_2^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R_2^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{v_2} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\left(\frac{\boldsymbol{r^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{R_1^3}{\boldsymbol{r}}\right) + \frac{\boldsymbol{\rho R_2^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}$

- *en R_1 donc* $\boldsymbol{v_2(R_1)} = \boldsymbol{v_1(R_1)}$

$C_1 = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{3\varepsilon_0}}\left(\frac{\boldsymbol{R_1^2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{R_1^3}{\boldsymbol{R_1}}\right) + \frac{\boldsymbol{\rho R_2^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}} \Rightarrow v_1 = -\frac{\rho\ R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}$

Exercice 5 :

On considère comme surface de gauss un cylindre de rayon **r** et de hauteur **h**.

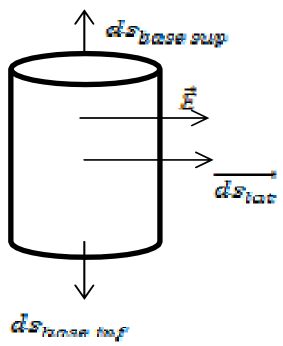
A cause e la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss

D'après le Théorème de Gauss : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\emptyset = \iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds} = 2\iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds_{\ base}} + \iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds_{lat}}$

$\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{ds_{\ base}} \Longrightarrow \iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = 0$

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{lat}}$ Donc : $\emptyset = \iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = \iint E.ds_{lat} = E.\int ds_{lat} = E.S_{lat}$

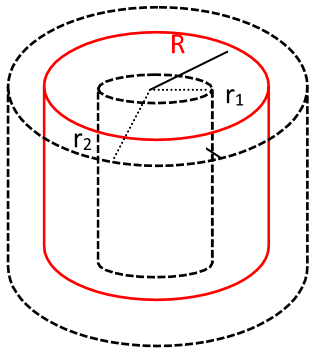


$\Rightarrow \emptyset = \boldsymbol{E2\pi rh} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E} = \frac{\sum \boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{2\pi rh\varepsilon_0}}$

1- Le champ électrique

__1^er cas__ $r < R$

$Q_{int} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{E_1} = \boldsymbol{0}$



__2^eme cas r≥ R__ $dq = \sigma ds \Rightarrow Q_{int} = \sigma S = \sigma 2\pi Rh$

Donc $E_2 2\pi rh = \frac{\sigma 2\pi Rh}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\sigma R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}$

2- Le potentiel :

$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\, V\ avec\ E = E(r) \Longrightarrow E = -\frac{dV}{dr} donc\ V = -\int E.dr$

$E_1 = 0 \Longrightarrow V_1 = \boldsymbol{C_1}$

$\boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\rho R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} \Longrightarrow V_2 = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}.dr = -\frac{\boldsymbol{\sigma R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\boldsymbol{lnr} + \boldsymbol{C_2}$ (0.5pts)

Exercice 5

On considère comme surface de gauss un cylindre de rayon **r** et de hauteur **h**.

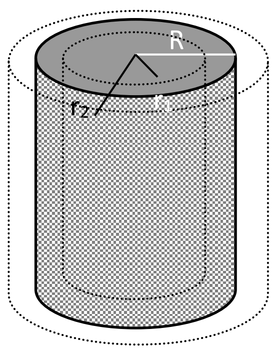
A cause e la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

D'après le Théorème de Gauss : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\emptyset = \iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds} = 2\iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds_{\ base}} + \iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds_{lat}}$

$\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{ds_{\ base}} \Longrightarrow \iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = 0$

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{lat}}$ Donc : $\emptyset = \iint \overrightarrow{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = \iint E.ds_{lat} = E.\int ds_{lat} = E.S_{lat}$



$\Rightarrow \emptyset = \boldsymbol{E2\pi rh} = \frac{\sum \boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

1- Le champ électrique

Pour : $r < R$

$$Q_{int} = \iiint \rho dv = \rho \int_0^r 2\pi hrdr = \rho\pi hr^2 \Rightarrow E2\pi rh = \frac{\rho\pi hr^2}{\varepsilon_0}$$

$\Longrightarrow \boldsymbol{E_1} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\boldsymbol{r}$

Pour : $r \geq R$

$$Q_{int} = \iiint \rho dv = \rho \int_0^R 2\pi hrdr = \rho\pi hR^2 \Rightarrow E2\pi rh = \frac{\rho\pi hR^2}{\varepsilon_0}$$

$\Longrightarrow \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\rho R^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$

2- Le potentiel :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\, V\ avec\ E = E(r) \Longrightarrow E = -\frac{dV}{dr} donc\ V = -\int E.dr$$

$V_1 = -\int E_1.dr \Longrightarrow V_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int rdr = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{4\varepsilon_0}}\boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{C_1}$

$V_2 = -\int E_2.dr = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}.dr = -\frac{\boldsymbol{\rho R^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\boldsymbol{lnr} + \boldsymbol{C_2}$

<u>Exercice 6 :</u>

On considère comme surface de gauss un cylindre de rayon **r** et de hauteur **h**.

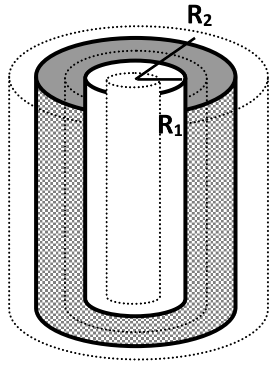
A cause e la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

D'après le Théorème de Gauss : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = 2\iint \vec{E}.\overrightarrow{ds}_{base} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}}$

$\vec{E} \perp \overrightarrow{ds}_{base} \Longrightarrow \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = 0$

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{lat}}$ Donc : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = \iint E.ds_{lat} = E.\int ds_{lat} = E.S_{lat}$



$\Rightarrow \emptyset = \boldsymbol{E2\pi rh} = \frac{\boldsymbol{\sum Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

Le champ électrique

<u>1^er cas r<R₁</u>

$Q_{int} = 0$ donc $\boldsymbol{E_1 = 0}$

<u>2^eme cas R₁ ≤ r<R₂</u>

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 2\pi h \int_{R_1}^{r} rdr$

donc $Q_{int} = \rho\ \pi h(r^2 - R_1^2)$

$$donc\ E_2 2\pi rh = \frac{\rho\ \pi h(r^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0} \quad donc\ \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\rho}\ (r^2 - R_1^2)}{\boldsymbol{2\varepsilon_0 r}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\left(r - \frac{R_1^2}{\boldsymbol{r}}\right)$$

<u>3^eme cas r≥R₂</u>

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr$ donc $Q_{int} = \rho\ \pi h(R_2^2 - R_1^2)$

$$donc\ E_3 2\pi rh = \frac{\rho\ \pi h(R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0}\ donc\ \boldsymbol{E_3} = \frac{\boldsymbol{\rho}\ \left(\boldsymbol{R_2^2 - R_1^2}\right)}{\boldsymbol{2\varepsilon_0 r}}$$

3- Le potentiel électrique v(r) en tout point de l'espace.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int Edr$

<u>1^er cas : r<R₁</u>

$E_1 = 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{v_1 = C_1}$

<u>2^eme cas R₁ ≤ r<R₂</u>

$E_2 = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\left(r - \frac{R_1^2}{\boldsymbol{r}}\right) \Rightarrow v_2 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\int rdr - R_1^2 \int \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} dr\right)$ donc $\boldsymbol{v_2} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\left(\frac{\boldsymbol{r^2}}{\boldsymbol{2}} - R_1^2\ \mathrm{lnr}\right) + \boldsymbol{C_2}$

<u>3^eme cas r≥R₂</u>

$E_3 = \frac{\boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{R_2^2 - R_1^2})}{\boldsymbol{2\varepsilon_0 r}} \Rightarrow v_3 = -\frac{\boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{R_2^2 - R_1^2})}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\int \frac{1}{r} dr$ donc $\boldsymbol{v_3} = -\frac{\boldsymbol{\rho}\ (\boldsymbol{R_2^2 - R_1^2})}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\boldsymbol{ln\, r} + \boldsymbol{C_3}$

<u>Exercice 7</u>

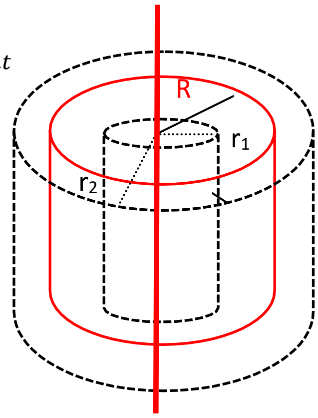
On considère comme surface de gauss un cylindre de rayon **r** et de hauteur **h**.

A cause e la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss

D'après le Théorème de Gauss : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = 2\iint \vec{E}.\overrightarrow{ds}_{base} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}}$

$\vec{E} \perp \overrightarrow{ds}_{base} \Longrightarrow \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = 0$



$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{lat}}$ Donc : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = \iint E.ds_{lat}$=$E.\int ds_{lat} = E.S_{lat}$

$\Rightarrow \emptyset = \boldsymbol{E2\pi rh} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sum Q_{int}}}{\boldsymbol{2\pi rh\varepsilon_0}}$

1- Le champ électrique

<u>1^er cas</u> $r < R \quad dq = \lambda dl \Rightarrow Q_{int} = \lambda l$

$E_1 2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_1} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2\pi r\varepsilon_0}$

<u>2^eme cas r≥ R</u> $Q_{int} = Q_1 + Q_2$

$dq_2 = \sigma ds \Rightarrow Q_{int} = \sigma S = \sigma 2\pi Rh$ donc $Q_{int} = \lambda h + \sigma 2\pi Rh$

Donc $E_2 2\pi rh = \frac{\lambda h+\sigma 2\pi Rh}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2\pi r\boldsymbol{\varepsilon_0}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R}}{\boldsymbol{\varepsilon_0 r}}$

2- Cherchons λ pour laquelle $E_2=0$

$$\frac{\lambda}{2\pi r\boldsymbol{\varepsilon_0}} + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi r\boldsymbol{\varepsilon_0}} = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}\ donc\ \lambda = -\frac{2\pi\sigma R}{h}$$

Exercice 8:

On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

$$\emptyset = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds}$ Donc :$\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds}$=$\iint E.ds = E\iint ds = E.S = E4\pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{E4\pi r^2} = \frac{\boldsymbol{\sum Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{4\pi r^2\varepsilon_0}}$ $(*)$

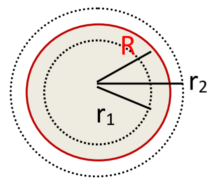
1- Le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.

Nous avons 2 cas

<u>1^er cas r<R</u>

$dq = \rho dv$ avec $\rho = Ar^2$donc $dq = \rho 4\pi r^2 dr = A4\pi r^4 dr \Rightarrow Q_{int} = \iiint \rho dv = A4\pi \int_0^r r^4 dr$

$\Rightarrow Q_{int} = A\ \frac{4}{5}\pi r^5$ donc $(*) \Rightarrow E_1 = \frac{A\frac{4}{5}\pi r^5}{4\pi r^2\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E_1} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{5\varepsilon_0}}\boldsymbol{r^3}$



<u>2^eme cas r≥ R</u>

$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \iiint \rho dv = A4\pi \int_0^R r^4 dr$ donc $Q_{int} = A\ \frac{4}{5}\pi R^5$

$$(*) \Rightarrow E_2 = \frac{A\ \frac{4}{5}\pi R^5}{4\pi r^2\varepsilon_0} \quad donc\ \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{A\ R^5}}{\boldsymbol{5\varepsilon_0 r^2}}$$