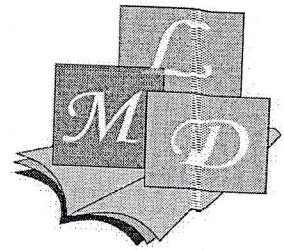




EXAMEN D'ANALYSE N° 1

DURÉE 1h 30mn.



**Exercice 1** Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -2, +\infty[$  par  $f(x) = x - \ln(x + 2)$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
2. Soit la suite  $u_n$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = f(u_n)$  et la donnée du premier terme  $u_0 = 3$ .  
Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq -1$
3. Etudier la monotonie de cette suite.
4. Est-elle convergente ? Si oui ; quelle est sa limite ?
5. On se donne la suite

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_n = \ln[(u_0 + 2)(u_1 + 2) \dots (u_{n-1} + 2)], \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 3 - u_n$ .

6. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + 2)(u_1 + 2) \dots (u_{n-1} + 2)$

**Exercice 2** Calculer  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{60}$

**Exercice 3** Pour quelles conditions la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0; \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

1. est continue en 0 ?
2. est dérivable en 0 ?
3. a une dérivée continue en 0 ?

**Exercice 4** Calculer  $(x \sinh x)^{(100)}$  puis former le développement de Mac-Laurin (au voisinage de 0)

**BON COURAGE**