

**COURS DE GEOMETRIE**  
**Licence de mathématiques**  
**2<sup>ième</sup> année**

Olivier Couture  
Université de Bourgogne



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels de géométrie dans <math>\mathbb{R}^2</math> et <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>5</b>
1.1	Structures vectorielle et affine de $\mathbb{R}^d$	5
1.1.1	Structure vectorielle	5
1.1.2	Structure affine	6
1.2	Droites affines de $\mathbb{R}^2$	8
1.2.1	Équations de droites de $\mathbb{R}^2$	8
1.2.2	Concours de deux droites de $\mathbb{R}^2$	9
1.3	Droites et plans de $\mathbb{R}^3$	12
1.3.1	Représentation paramétrique d'une droite et d'un plan de $\mathbb{R}^3$	12
1.3.2	Équation cartésienne d'un plan	13
1.3.3	Autres représentations de droites et de plans	14
1.3.4	Concours de deux plans - Équations cartésiennes de droites de $\mathbb{R}^3$	14
1.3.5	Concours d'un plan et d'une droite de $\mathbb{R}^3$	17
1.3.6	Concours de deux droites de $\mathbb{R}^3$	18
1.4	Utilisation la dimension 3 pour résoudre un problème de dimension 2	19
1.5	Utilisation des nombres complexes	21
1.5.1	Le plan complexe	21
1.5.2	Cercle et écriture trigonométrique	22
1.5.3	Quelques notions géométriques de base (cadre euclidien)	23
1.5.4	Transformations affines complexes de $\mathbb{C}$	34



# Chapitre 1

## Rappels de géométrie dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

### 1.1 Structures vectorielle et affine de $\mathbb{R}^d$

#### 1.1.1 Structure vectorielle

##### L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

En dehors de tout aspect géométrique, les éléments de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ne sont rien d'autre que des **couples de nombres**  $(x, y)$  sur lesquels on effectue deux opérations :

— **Addition** (c'est une loi interne)

$$\begin{aligned} + : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

— **Multiplication par un scalaire** <sup>\*</sup> (c'est une loi externe)

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x, y)) &\mapsto (\lambda \times x, \lambda \times y) \end{aligned}$$

(le  $\cdot$  est souvent omis pour simplifier les écritures).

Ces deux opérations confèrent à  $\mathbb{R}^2$  une structure d'**espace vectoriel réel**. Les éléments de  $\mathbb{R}^2$  sont alors appelés vecteurs. Du fait de la nature très particulière de  $\mathbb{R}^2$ , tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  s'écrit tout naturellement

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

Autrement dit, les deux vecteurs  $\vec{e}_1 = (1, 0)$  et  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  forment la base **canonique** de  $\mathbb{R}^2$  (le mot canonique signifiant qu'elle est intrinsèquement liée à la définition de  $\mathbb{R}^2$ ).

Évidemment, ces définitions se généralisent à  $\mathbb{R}^d$  pour  $d \in \mathbb{N}$ . Le nombre  $d$  est la dimension de l'espace vectoriel. On dit aussi que  $\mathbb{R}$  est une **droite vectorielle**,  $\mathbb{R}^2$  un **plan vectoriel**,  $\mathbb{R}^3$  un **espace vectoriel tri-dimensionnel**.

##### Sous-espaces vectoriels

- o Dans  $\mathbb{R}^2$ , si  $\vec{v} = (a, b)$  est un vecteur non nul, l'ensemble  $\vec{\mathcal{D}} = \text{Vect}\{\vec{v}\} = \{\lambda \cdot \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$  des couples proportionnels à  $\vec{v}$  (on dit que les vecteurs sont **colinéaires** à  $\vec{v}$ ) est lui-même un espace vectoriel (donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ ), de dimension 1, donc une **droite vectorielle** et  $\vec{v}$  est une base de  $\vec{\mathcal{D}}$ .

---

\*. Mot introduit par William Hamilton pour distinguer les réels parmi les quaternions

- De même dans  $\mathbb{R}^3$ , si  $\vec{v} = (a, b, c)$  est un vecteur non nul, l'ensemble  $\vec{\mathcal{D}} = \text{Vect}\{\vec{v}\} = \{\lambda \cdot \vec{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel, de dimension 1, donc une **droite vectorielle** et  $\vec{v}$  est une base de  $\vec{\mathcal{D}}$ .
- Dans  $\mathbb{R}^3$ , si  $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  et  $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  sont deux vecteurs linéairement indépendants, c'est à dire

$$(\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 = (0, 0, 0) = \vec{0}) \implies (\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$$

l'ensemble  $\vec{\mathcal{P}} = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$  est un **plan vectoriel** (un sous-espace vectoriel de dimension 2), et  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est une base de  $\vec{\mathcal{P}}$ .

**Exercice.** Que se passe-t-il si les deux vecteurs sont linéairement liés ?

- Attention à ne pas commettre l'erreur fréquente suivante :
  - $\mathbb{R}$  n'est pas une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^2$  !  $\mathbb{R}$  n'est même pas contenu dans  $\mathbb{R}^2$ . En revanche  $\mathbb{R} \times \{0\}$  et  $\{0\} \times \mathbb{R}$  sont des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$ , ce sont les deux axes de coordonnées.
  - De même  $\mathbb{R}^2$  n'est pas un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  ! Cependant,  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ,  $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$  et  $\{0\} \times \mathbb{R}^2$  sont les trois plans de coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\mathbb{R} \times \{(0, 0)\}$ ,  $\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$  et  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$  sont les trois axes de coordonnées.

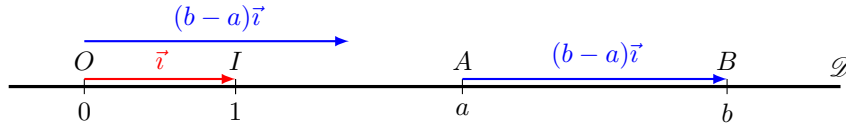
### 1.1.2 Structure affine

On représente souvent géométriquement  $\mathbb{R}$  par une « droite affine »  $\mathcal{D}$  dirigée par un vecteur non nul  $\vec{i}$  et sur laquelle on a placé une origine  $O$ . Le couple  $(O, \vec{i})$  est un **repère affine** de la droite. Chaque point  $M$  est repéré par une abscisse  $x \in \mathbb{R}$ , en particulier  $O$  par l'abscisse 0, et à tout couple  $(A, B)$  de points,  $A$  d'abscisse  $a$  et  $B$  d'abscisse  $b$  de  $\mathcal{D}$  on associe le vecteur

$$\overrightarrow{AB} = (b - a)\vec{i}.$$

On note souvent  $b - a = \overline{AB}$  et on l'appelle la **mesure algébrique** de  $AB$ .

Une alternative au repère affine  $(O, \vec{i})$  consiste à se donner deux points  $(O, I)$  de sorte que  $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$  (autrement dit  $I$  a pour abscisse 1).



La relation d'addition des vecteurs se traduit alors par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

On peut ainsi voir les vecteurs comme des « **vecteurs<sup>†</sup> de translation** » le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  étant celui qui permet de translater  $A$  sur  $B$ . On note d'ailleurs fréquemment

$$B = A + \vec{u} \quad \text{signifiant : } B \text{ est l'image de } A \text{ par translation de vecteur } \vec{u}, \text{ autrement dit } \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

La somme  $\overrightarrow{AC}$  des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  correspond, à travers la relation de Chasles à la composée des deux translations, d'abord de  $A$  vers  $B$  puis de  $B$  vers  $C$ .

Tout ceci se généralise à  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  (et même  $\mathbb{R}^d$  pour  $d > 3$ ).

Prenons le cas de  $\mathbb{R}^2$  (on laisse aux lecteurs le soin d'imaginer la même situation pour  $\mathbb{R}^3$ ). On représente géométriquement  $\mathbb{R}^2$  par un « plan affine »  $\mathcal{P}$  rapporté à un point  $O$ , l'origine, et deux vecteurs non colinéaires  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ . Le triplet  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est un **repère affine** du plan. Chaque point  $M$  est repéré par

<sup>†</sup>. c'est le sens étymologique du mot vecteur – de *vehere* qui veut dire transporter – introduit par Pierre-Simon de Laplace, qui parlait de rayon-vecteur.

deux coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  (abscisse et ordonnée), en particulier  $O$  a pour coordonnées  $(0, 0)$ . À tout couple  $(A, B)$  de points,  $A$  de coordonnées  $(a_1, a_2)$  et  $B$  de coordonnées  $(b_1, b_2)$  de  $\mathcal{P}$  on associe le vecteur

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + (b_2 - a_2)\vec{e}_2.$$

On parle également du repère affine formé des trois points  $(O, E_1, E_2)$  si  $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$  et  $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$ . La relation d'addition des vecteurs se traduit alors par le relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

À nouveau, on peut voir les vecteurs comme des « **vecteurs de translation** », le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  étant celui qui permet de translater  $A$  sur  $B$ , mais aussi  $X$  sur  $Y$  si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$ . On note encore

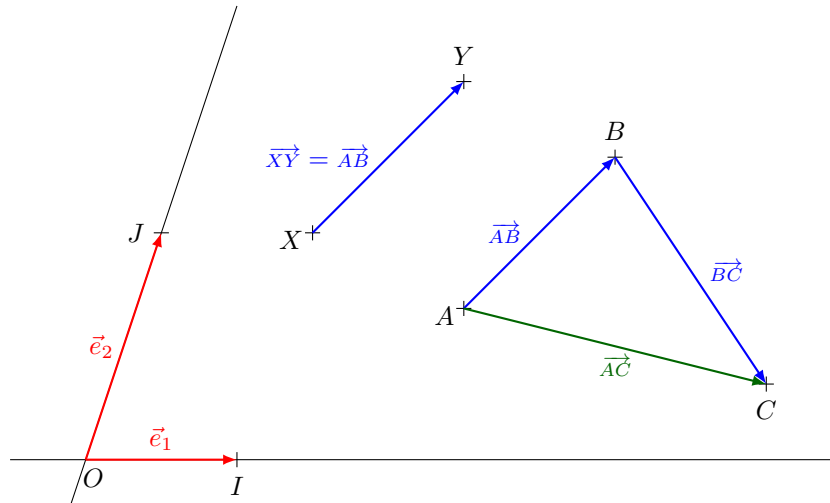
$$B = A + \vec{u} \quad \text{signifiant que } B \text{ est l'image de } A \text{ par translation de vecteur } \vec{u}, \text{ autrement dit } \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

La somme  $\overrightarrow{AC}$  des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  correspond, à travers la relation de Chasles à la composée des deux translations, d'abord de  $A$  vers  $B$  puis de  $B$  vers  $C$ .

#### Nota Bene

La donnée d'un couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  peut donc désigner soit les coordonnées d'un point  $A$ , soit le vecteur  $\vec{v} = (a, b)$ . On a en fait donné une structure d'**espace affine** à  $\mathbb{R}^2$ . On reviendra plus tard sur la définition précise d'espace affine.

Un abus de notation courant consiste à écrire  $A \in \mathbb{R}^2$  et «  $A = (a, b)$  » à la place de «  $A$  le point du plan  $\mathcal{P}$  (représentant  $\mathbb{R}^2$ ) de coordonnées  $(a, b)$  ». Cela peut créer des confusions entre les deux notions de point et de vecteur. Dans la mesure du possible, j'éviterai cette notation. J'écrirai plutôt  $A(a, b)$ .



## 1.2 Droites affines de $\mathbb{R}^2$

### 1.2.1 Équations de droites de $\mathbb{R}^2$

Une **droite affine**  $\Delta$  du plan  $\mathcal{P}$  représentant  $\mathbb{R}^2$  est définie par la donnée d'un point  $M_0$  et d'un vecteur non nul  $\vec{v} = (a, b)$ , dit **vecteur directeur**. On note souvent  $\Delta = \mathcal{D}(M_0, \vec{v})$ .

$$\Delta = \{M \in \mathcal{P} : \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{M_0 M} = t\vec{v}\}$$

On dit que c'est un **espace affine de dimension 1**, car la **droite vectorielle associée**  $\vec{\Delta} = \text{Vect}\{\vec{v}\} = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$ , appelée la **direction vectorielle** de  $\Delta$  est de dimension 1. Plus concrètement, les points de  $\Delta$  varient selon le seul paramètre  $t$  (un seul degré de liberté).

#### Représentation paramétrique

Si  $M_0$  a pour coordonnées  $(x_0, y_0)$ , un point  $M$  appartient à  $\Delta$  si ses coordonnées  $(x, y)$  satisfont le système d'équations paramétriques

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \left( \text{Remarque : } \vec{\Delta} : \begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \right)$$

#### Équation cartésienne

En éliminant le paramètre  $t$ , on obtient l'**équation cartésienne**. Soit  $M$  un point du plan de coordonnées  $(x, y)$ . On a les équivalences :

$$\begin{aligned} (M \in \Delta) &\iff (\exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{M_0 M} = t\vec{v}) \iff (\det(\overrightarrow{M_0 M}, \vec{v}) = 0) \iff \left( \begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0 \right) \\ &\iff (b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0) \end{aligned}$$

Autrement dit, l'**équation cartésienne**  $bx - ay - (bx_0 - ay_0) = 0$  caractérise la droite  $\Delta$ .

Inversement, compte tenu des équivalences ci-dessus, la donnée d'un triplet  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  définit la droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ , de vecteur directeur  $\vec{u} = (-\beta, \alpha)$  passant par le point de coordonnées  $(-\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$  si  $\alpha \neq 0$  ou  $(0, -\frac{\gamma}{\beta})$  si  $\beta \neq 0$ . On note souvent une droite du plan donnée par son équation cartésienne de façon suivante :

$$\mathcal{D} : \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

#### Nota Bene

On rappelle que la codimension d'un sous espace vectoriel  $F$  d'un espace vectoriel  $E$  est la dimension d'un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  autrement dit

$$\text{codim } F = \dim E - \dim F.$$

De la même façon pour **une droite affine du plan est de codimension 1** (il y a une seule « contrainte (équation) » dans l'espace de dimension 2).

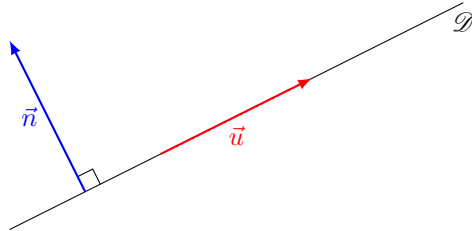
#### Remarques 1.2.1

1. Si on munit  $\mathbb{R}^2$  de son produit scalaire usuel  $\langle (x, y) | (x', y') \rangle = xx' + yy'$ , on peut interpréter le vecteur non nul  $\vec{n} = (\alpha, \beta)$  comme étant **normal** à  $\mathcal{D}$ , c'est à dire orthogonal à  $\mathcal{D}$  : si  $M_0$  de coordonnées  $(x_0, y_0)$  est un point de  $\mathcal{D}$  alors pour tout point  $M$  du plan de coordonnées



$(x, y)$ , on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \left( \overrightarrow{M_0 M} \perp \vec{n} \right) &\iff \left( \langle (x - x_0, y - y_0) \mid (\alpha, \beta) \rangle = 0 \right) \iff \left( \alpha x + \beta y = \alpha x_0 + \beta y_0 = -\gamma \right) \\ &\iff \left( M \in \mathcal{D} \right) \end{aligned}$$



2. La direction vectorielle de  $\mathcal{D}$  :  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  est la droite vectorielle  $\vec{\mathcal{D}}$  :  $\alpha x + \beta y = 0$ .  
Si on considère la **forme linéaire**

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \alpha x + \beta y \end{aligned}$$

on a  $\vec{\mathcal{D}} = \ker f = f^{-1}(\{0\})$  et  $\mathcal{D} = f^{-1}(\{-\gamma\})$ .

#### Autres représentations

- Droite  $(AB)$  passant par deux points distincts  $A$  de coordonnées  $(x_A, y_A)$  et  $B$  de coordonnées  $(x_B, y_B)$  a pour représentation paramétrique **barycentrique** (on reviendra sur la notion de barycentre) :

$$(AB) : \begin{cases} x = t x_B + (1 - t) x_A \\ y = t y_B + (1 - t) y_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- Équation cartésienne réduite (droite « non verticale ») :

$$\Delta : y = mx + p \quad m = \text{pente (ou coefficient directeur)} \quad p = \text{ordonnée à l'origine}$$

$$\Delta : y = m(x - x_0) + y_0 \quad \text{droite de pente } m \text{ passant par } M_0 = (x_0, y_0)$$

- Équation cartésienne **homogène** (droite coupant les axes en dehors de l'origine) :

$$\Delta : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{droite coupant les axes en } (a, 0) \text{ et } (0, b), \quad ab \neq 0.$$

### 1.2.2 Concours de deux droites de $\mathbb{R}^2$

#### Cas de deux droites données par des équations cartésiennes

Soient deux droites données par leurs équations cartésiennes

$$\mathcal{D}_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

Les points coordonnées des points à l'intersection de ces deux droites satisfont le système d'équations :

$$(S) : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Trois cas se présentent :

1. les triplets  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  sont proportionnels autrement dit les déterminants suivants sont nuls

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

alors les deux équations définissent la même droite : les droites sont **confondues**.

2. les couples  $(a_1, b_1)$  et  $(a_2, b_2)$  sont proportionnels mais pas les triplets  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  autrement dit les déterminants suivants sont nuls

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \left( \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) \neq (0, 0)$$

alors le système d'équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

n'a pas de solution. Les droites sont dites **strictement parallèles**.

### Exemple 1.2.2

$$\mathcal{D}_1 : 2x + 3y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : 4x + 6y - 1 = 0.$$

le système n'a pas de solution

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ 4x + 6y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 6y = -4 \\ 4x + 6y = 1 \end{cases}$$

Pour les cas 1 et 2 réunis, les droites sont dites **parallèles** au sens large.

3. les vecteurs  $(-b_1, a_1)$  et  $(-b_2, a_2)$  ne sont pas colinéaires autrement dit le déterminant suivant est non nul

$$\begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

alors le système d'équations  $(S)$  a un unique couple  $(x, y)$  solution, correspondant au point  $I$  d'intersection des deux droites. Les droites sont dites **sécantes** (en  $I$ ).

### Exemple 1.2.3

$$\mathcal{D}_1 : 2x + 3y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : 3x + 4y - 2 = 0.$$

On résout le système en faisant des combinaisons linéaires des équations pour éliminer chacune des variables

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ 3x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 14 & (3L_2 - 4L_1) \\ y = -10 & (3L_1 - 2L_2) \end{cases}$$

## Cas de d'une équation cartésienne et d'une représentation paramétrique

Soient deux droites données l'une par une équation cartésienne l'autre par une représentation paramétrique

$$\mathcal{D}_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2t \\ y = y_2 + b_2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver les éventuels points d'intersection, on substitue les variables  $x$  et  $y$  dans l'équation de première droite par leur valeur en fonction de  $t$  de la seconde : soit  $M(x_2 + a_2t, y_2 + b_2t)$  un point de  $\mathcal{D}_2$ ,

$$(M \in \mathcal{D}_1) \iff ((a_1a_2 + b_1b_2)t + a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = 0).$$

On retrouve les trois cas précédents :

1. droites confondues si  $a_1a_2 + b_1b_2 = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 = 0$  ;
2. droites strictement parallèles si  $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$  et  $a_1x_2 + b_1y_2 + c_1 \neq 0$ .
3. droites sécantes si  $a_1a_2 + b_1b_2 \neq 0$  ;

**Exercice 1.2.4**

Soit  $M_0(x_0, y_0)$  un point et  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$  une droite de  $\mathbb{R}^2$ , muni de sa structure euclidienne usuelle. On note  $d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$  la distance entre  $M$  et  $N$ . On appelle distance de  $M_0$  à  $\mathcal{D}$  le réel positif

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \inf \{d(M_0, M) : M \in \mathcal{D}\}$$

1. Trouver une représentation paramétrique de la droite passant par  $M_0$  perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ .
2. En déduire que

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Cas de deux droites données par des représentations paramétriques**

Soient deux droites données par des représentations paramétriques

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2 u \\ y = y_2 + b_2 u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

Attention dans ce cas à donner des noms différents aux paramètres ! Dans ce cas, on commence par résoudre le système  $(\Sigma)$  en les paramètres  $t$  et  $u$  :

$$(\Sigma) : \begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + a_2 u \\ y_1 + b_1 t = y_2 + b_2 u \end{cases}$$

1.  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sécantes si  $\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  : on trouve un unique couple  $(t, u)$  solution de  $(\Sigma)$ . En reportant  $t$  dans les équations paramétriques de  $\mathcal{D}_1$  et  $u$  dans les équations paramétriques de  $\mathcal{D}_2$  on trouve le même pour d'intersection  $I$
2.  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  si les deux équations de  $(\Sigma)$  sont proportionnelles.
3.  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  strictement parallèles si les deux équations de  $(\Sigma)$  sont incompatibles.

**Exemple 1.2.5**

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 5 + 3u \\ y = -2u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

Dans ce cas, on commence par résoudre le système  $(S)$  en les paramètres  $t$  et  $u$  :

$$\begin{cases} 3 + 2t = 5 + 3u \\ 3 - t = -2u \end{cases} \iff \begin{cases} 2t - 3u = 2 \\ t - 2u = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -5 \\ u = -4 \end{cases}$$

d'où le d'intersection point  $I = (-7, 8)$  :

$$\text{avec } \mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 3 + 2 \times (-5) = -7 \\ y = 3 - (-5) = 8 \end{cases} \quad \text{avec } \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 5 + 3 \times (-4) = -7 \\ y = -2 \times (-4) = 8 \end{cases}$$

**Exercice 1.2.6**

Soient trois droites données par leurs équations cartésiennes

$$\mathcal{D}_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \mathcal{D}_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \mathcal{D}_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

1. Montrer que ces trois droites sont confondues ou concourantes en un unique point si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Préciser comment distinguer les deux cas confondues ou concourantes en un unique point.

2. On suppose  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sécantes en un point  $I$ . Déterminer la forme générale des équations cartésiennes des droites passant par  $I$ .

### Nota Bene

**Une droite affine de  $\mathbb{R}^2$  est de codimension 1** : elle est définie par une seule équation cartésienne, autrement dit une seule « contrainte » dans le plan de dimension 2. Cette équation est unique à multiplication par un scalaire près (cf. paragraphe 1.2.2).

## 1.3 Droites et plans de $\mathbb{R}^3$

### 1.3.1 Représentation paramétrique d'une droite et d'un plan de $\mathbb{R}^3$

#### Représentation paramétrique de droite

Comme dans le cas bi-dimensionnel, une droite affine  $\Delta$  de l'espace tri-dimensionnel  $\mathcal{E}$  représentant  $\mathbb{R}^3$  est définie par la donnée d'un point  $M_0$  et d'un vecteur (directeur) non nul  $\vec{v} = (a, b, c)$

$$\Delta = \{M \in \mathcal{E} : \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{M_0 M} = t\vec{v}\}$$

C'est un espace affine de dimension 1, car les points de  $\Delta$  varient selon un seul paramètre  $t$  (un degré de liberté). La **droite vectorielle associée**

$$\vec{\Delta} = \text{Vect}\{\vec{v}\} = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$$

est appelée la **direction vectorielle** de  $\Delta$ . Si  $M_0$  a pour coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ , un point  $M$  appartient à  $\Delta$  si ses coordonnées  $(x, y, z)$  satisfont le système d'équations paramétriques

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + t a \\ y = y_0 + t b \\ z = z_0 + t c \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Remarque :

$$\vec{\Delta} : \begin{cases} x = t a \\ y = t b \\ z = t c \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

#### Représentation paramétrique de plan

Un plan affine  $\Pi$  de l'espace tri-dimensionnel  $\mathcal{E}$  représentant  $\mathbb{R}^3$  est défini par la donnée d'un point  $M_0$  et de deux vecteurs (directeur) non colinéaires  $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  et  $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$\Pi = \{M \in \mathcal{E} : \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{M_0 M} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2\}$$

C'est un espace affine de dimension 2, car les points de  $\Pi$  varient selon deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  (deux degrés de liberté). Le **plan vectoriel associé**

$$\vec{\Pi} = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

est appelé la **direction vectorielle** de  $\Pi$ . Si  $M_0$  a pour coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$ , un point  $M$  appartient à  $\Pi$  si ses coordonnées  $(x, y, z)$  satisfont le système d'équations paramétriques

$$\Pi : \begin{cases} x = x_0 + a_1 \lambda + a_2 \mu \\ y = y_0 + b_1 \lambda + b_2 \mu \\ z = z_0 + c_1 \lambda + c_2 \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque :

$$\vec{\Pi} : \begin{cases} x = a_1 \lambda + a_2 \mu \\ y = b_1 \lambda + b_2 \mu \\ z = c_1 \lambda + c_2 \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

### 1.3.2 Équation cartésienne d'un plan

On obtient l'équation cartésienne de  $\Pi$  en éliminant les paramètres  $(\lambda, \mu)$  dans le système d'équations paramétriques. Soit  $M$  un point de l'espace de coordonnées  $(x, y, z)$ . On a les équivalences

$$\begin{aligned} (M \in \Pi) &\iff (\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) \iff (\det(\overrightarrow{M_0M}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0) \\ &\iff \left( \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \right) \\ &\iff \left( \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0 \right) \end{aligned}$$

Autrement dit, l'équation cartésienne

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

caractérise le plan  $\Pi$ .

Inversement, la donnée d'un quadruplet  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$  où  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$  définit le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ , ayant pour vecteurs directeurs deux des trois vecteurs  $(0, -\gamma, \beta)$ ,  $(-\gamma, 0, \alpha)$  ou  $(-\beta, \alpha, 0)$ , et passant par le point de coordonnées  $(-\frac{\delta}{\alpha}, 0, 0)$  si  $\alpha \neq 0$ , par  $(0, -\frac{\delta}{\beta}, 0)$  si  $\beta \neq 0$  ou par  $(0, 0, -\frac{\delta}{\gamma})$  si  $\gamma \neq 0$ . On note souvent un plan donné par son équation cartésienne de façon suivante :

$$\mathcal{P} : \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

#### Nota Bene

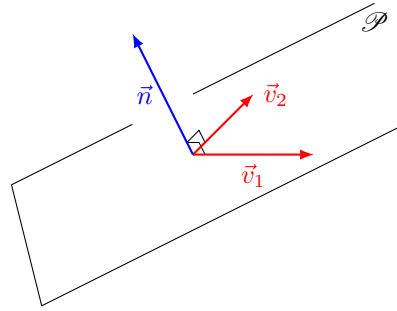
**Un plan affine de  $\mathbb{R}^3$  est de codimension 1** : il est défini par une seule équation cartésienne, autrement dit une seule « contrainte » dans l'espace de dimension 3.

Cette équation est unique à multiplication par un scalaire près (cf. paragraphe 1.3.4).

#### Remarques 1.3.1

1. Soit un plan  $\mathcal{P} : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ . Si on munit  $\mathbb{R}^3$  de son produit scalaire usuel  $\langle (x, y, z) | (x', y', z') \rangle = xx' + yy' + zz'$ , on interprète le vecteur non nul  $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$  comme un vecteur **normal** à  $\mathcal{P}$ , c'est à dire orthogonal à  $\mathcal{P}$ . Si  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  est un point de  $\mathcal{P}$  alors pour tout point  $M(x, y, z)$  de  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}) &\iff (\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0) | (\alpha, \beta, \gamma) \rangle = 0) \\ &\iff (\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = -\delta) \\ &\iff (M \in \mathcal{P}) \end{aligned}$$



En particulier, pour un plan  $\mathcal{P}$  passant par  $M_0$  de vecteurs directeurs  $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  et  $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ , le vecteur

$$\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left( \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

est normal à  $\mathcal{P}$  et redonne l'équation cartésienne

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0.$$

Il s'appelle le **produit vectoriel** de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , noté

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2.$$

2. La direction vectorielle de  $\mathcal{P} : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  est le plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}} : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ .  
Si on considère la **forme linéaire**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z \end{aligned}$$

on a  $\vec{\mathcal{P}} = \ker f = f^{-1}(\{0\})$  et  $\mathcal{P} = f^{-1}(\{-\delta\})$ .

### 1.3.3 Autres représentations de droites et de plans

- Droite  $(AB)$  et plan  $(ABC)$  passant par trois points  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$  et  $C(x_C, y_C, z_C)$  non alignés : une représentation paramétrique **barycentrique** :

$$(AB) : \begin{cases} x &= t x_B + (1-t)x_A \\ y &= t y_B + (1-t)y_A \\ z &= t z_B + (1-t)z_A \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(ABC) : \begin{cases} x &= \lambda x_C + \mu x_B + (1-\lambda-\mu)x_A \\ y &= \lambda y_C + \mu y_B + (1-\lambda-\mu)y_A \\ z &= \lambda z_C + \mu z_B + (1-\lambda-\mu)z_A \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Équation cartésienne **homogène** (plan coupant les axes en dehors de l'origine) :

$$\Pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{plan coupant les axes en } (a, 0, 0), (0, b, 0) \text{ et } (0, 0, c), abc \neq 0.$$

### 1.3.4 Concours de deux plans - Équations cartésiennes de droites de $\mathbb{R}^3$

Soient deux plans donnés par leurs équations cartésiennes

$$\mathcal{P}_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0.$$

Les coordonnées  $(x, y, z)$  des points à l'intersection de ces deux plans satisfont le système d'équations :

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Trois cas se présentent :

1. Les quadruplets  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$  sont proportionnels alors les deux équations définissent le même plan : les plans sont **confondus**.
2. les triplets  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  sont proportionnels mais pas les quadruplets  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$  alors le système d'équations  $(S)$  n'a pas de solution. Les plans sont dits **strictement parallèles**.

Pour les cas 1 et 2 réunis, les plans sont dits **parallèles** au sens large.

3. Les triplets  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(a_2, b_2, c_2)$  ne sont pas proportionnels autrement dit un des trois déterminants suivant est non nul

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

alors le système d'équations  $(S)$  admet une droite de solutions, de vecteur directeur  $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ .

### Exercice 1.3.2

- (a) Déterminer un point particulier de  $\mathcal{D}$  si on sait que  $\alpha \neq 0$ . Faire de même si on sait que  $\beta \neq 0$  puis  $\gamma \neq 0$ .
- (b) Étant donnée une droite  $\mathcal{D}$  passant par un point  $A$  de coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = (a, b, c)$ , c'est à dire définie par le système d'équations paramétriques

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_0 + t a \\ y = y_0 + t b \\ z = z_0 + t c \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On suppose  $a$  non nul. Vérifier que  $\mathcal{D}$  est l'intersection de ces deux plans définis par les équations

$$\begin{cases} b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \\ c(x - x_0) - a(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

Que dire si  $a = 0$  ?

### Exemple 1.3.3

$$\mathcal{P}_1 : 2x + 3y + 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : 3x + 4y - z + 5 = 0.$$

On résout le système en utilisant une variable comme paramètre (ici  $y$ ), et en faisant des combinaisons linéaires des équations pour éliminer une des deux autres variables :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ 3x + 4y - z + 5 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x + 2z = 1 - 3y \\ 3x - z = -5 - 4y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 8x = -9 - 11y \\ 8z = 13 - y \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = -\frac{9}{8} - 11t \\ y = 8t \\ z = \frac{13}{8} - t \end{cases} \end{aligned}$$

l'intersection des deux plans est la droite  $\mathcal{D}$  passant par le point  $M_0$  de coordonnées  $(-\frac{9}{8}, 0, \frac{13}{8})$  et de vecteur directeur  $\vec{u} = (-11, 8, -1)$ .

**Nota Bene**

Une droite affine de  $\mathbb{R}^3$  est de codimension 2 : elle est définie par deux équations cartésiennes linéairement indépendantes, autrement dit deux « contraintes » dans l'espace de dimension 3.

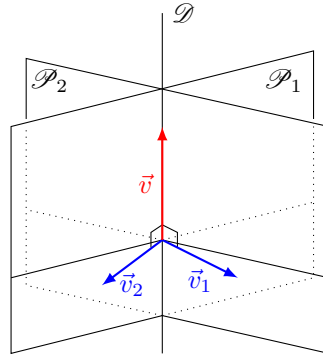
Ces équations ne sont pas uniques : étant données deux équations définissant une droite, tout autre système d'équations est obtenu par des combinaisons linéaires de ces deux équations (cf. paragraphe 1.3.6).

**Remarque 1.3.4**

Si on munit  $\mathbb{R}^3$  de son produit scalaire usuel  $\langle (x, y, z) \mid (x', y', z') \rangle = xx' + yy' + zz'$ , on peut interpréter les vecteurs  $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  et  $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  comme des vecteurs normaux aux plans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , donc orthogonaux à la droite  $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ . Il en résulte que

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (\alpha, \beta, \gamma) = \left( \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 1.3.5**

1. Soit  $\mathcal{D}$  une droite donnée par une représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Donner un système d'équations cartésiennes de  $\Delta$ .

2. Soit une droite  $\mathcal{D}$  donnée par deux équations cartésiennes

$$\mathcal{D} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Déterminer la forme générale de l'équation cartésienne d'un plan contenant  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 1.3.6**

Soit  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  un point et  $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$  un plan de  $\mathbb{R}^3$ , muni de sa structure euclidienne usuelle. On note  $d(M, N) = \|\vec{MN}\|$  la distance entre  $M$  et  $N$ . On appelle distance de  $M_0$  à  $\mathcal{P}$  le réel positif

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \inf \{ d(M_0, M) : M \in \mathcal{P} \}$$



1. Trouver une représentation paramétrique de la droite passant par  $M_0$  perpendiculaire à  $\mathcal{P}$ .
2. En déduire que

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

3. Soit  $\Delta$  une droite donnée par une représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = x_1 + \alpha t \\ y = y_1 + \beta t \\ z = z_1 + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Donner une équation du plan  $\Pi$  passant par le point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  et perpendiculaire à  $\Delta$ .  
En déduire la distance de  $M_0$  à  $\Delta$  à savoir

$$d(M_0, \Delta) = \inf \{d(M_0, M) : M \in \Delta\}$$

### 1.3.5 Concours d'un plan et d'une droite de $\mathbb{R}^3$

**Cas du plan donné par une équation cartésienne et d'une droite par une rep. param.**

Soient un plan  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  donné par une équation cartésienne et une droite  $\mathcal{D}$  donnée une représentation paramétrique

$$\mathcal{P} : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} : \begin{cases} x = x_2 + a_2 t \\ y = y_2 + b_2 t \\ z = z_2 + c_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour trouver les éventuels points d'intersection, on substitue les variables  $x, y, z$  dans l'équation du plan par leur valeur en fonction de  $t$  de la seconde : soit  $M(x_2 + a_2t, y_2 + b_2t, z_2 + c_2t)$  un point de  $\mathcal{D}$ ,

$$(M \in \mathcal{P}_1) \iff ((a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)t + a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 + d_1 = 0).$$

On trouve les trois cas suivants :

1. si  $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 + d_1 = 0$  alors  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$  ;
2. si  $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$  et  $a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 + d_1 \neq 0$  alors  $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$  : on dit que  $\mathcal{D}$  est strictement parallèle à  $\mathcal{P}$ .
3. si  $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \neq 0$ , il y a un unique point d'intersection  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}$  sont sécants.

**Cas d'un plan et d'une droite définis par des équations cartésiennes**

Soient un plan  $\mathcal{P}_1$  de  $\mathbb{R}^3$  et une droite  $\mathcal{D}_2$  donnés par des équations cartésiennes

$$\mathcal{P} : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} : \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z + d'_2 = 0 \end{cases}$$

On résout le système formé des trois équations. On retrouve les trois cas.

1. Le quadruplet  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  est combinaison linéaire de  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$  et  $(a_3, b_3, c_3, d_3)$ , autrement dit le système formé de ces trois vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  est de rang 2 (on rappelle que les deux vecteurs  $(a_2, b_2, c_2), (a'_2, b'_2, c'_2)$  forment un système de rang 2 pour définir une droite) : dans ce cas,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ .
2. Le système formé de ces trois vecteurs  $(a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2), (a'_2, b'_2, c'_2, d'_2)$  de  $\mathbb{R}^4$  est de rang 3, mais le système formé des trois vecteurs  $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a'_2, b'_2, c'_2)$  de  $\mathbb{R}^3$  est de rang 2. Dans ce cas,  $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ , la droite est parallèle au plan.
3. Le système formé des trois vecteurs  $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a'_2, b'_2, c'_2)$  de  $\mathbb{R}^3$  est de rang 3 :  $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$  est réduit à un unique point, la droite est sécante au plan.

### 1.3.6 Concours de deux droites de $\mathbb{R}^3$

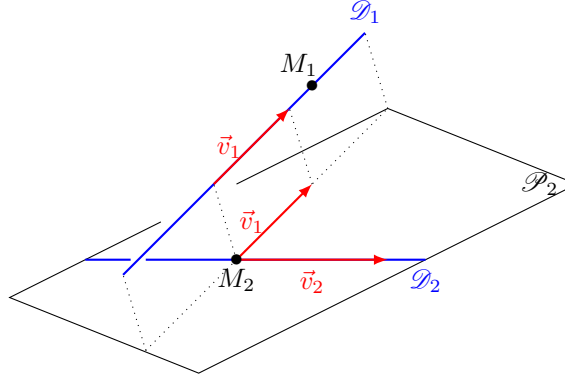
#### Cas de deux droites données par des représentations paramétriques

Soient deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de  $\mathbb{R}^3$  données par des représentations paramétriques

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2 t \\ y = y_2 + b_2 t \\ z = z_2 + c_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

On note  $M_1$  le point de  $\mathcal{D}_1$  de coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $M_2$  le point de  $\mathcal{D}_2$  de coordonnées  $(x_2, y_2, z_2)$ , et  $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  et  $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  les vecteurs directeurs. Quatre cas se présentent :

1. les deux vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont colinéaires et  $M_1$  appartient à  $\mathcal{D}_2$  : les deux droites sont confondues.
2. les deux vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont colinéaires et  $M_1$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}_2$  : les deux droites sont strictement parallèles, donc sont **coplanaires** dans le plan contenant  $M_1$  et la droite  $\mathcal{D}_2$ .
3. les deux vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont linéairement indépendants et  $M_1$  appartient au plan  $\mathcal{P}$  passant par  $M_2$  de direction vectorielle engendrée par  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  : les deux droites sont **coplanaires** (dans  $\mathcal{P}$ ) et sécantes dans  $\mathcal{P}$ .
4. les deux vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont linéairement indépendants et  $M_1$  n'appartient pas au plan  $\mathcal{P}_2$  passant par  $M_2$  de direction vectorielle engendrée par  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  : les deux droites **ne sont pas coplanaires** et donc ne s'intersectent pas.



#### Exercice 1.3.7

Soient deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites de l'espace affine euclidien donnée par leurs représentations paramétriques

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2 t \\ y = y_2 + b_2 t \\ z = z_2 + c_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour deux points  $M$  et  $N$  de l'espace, on note  $d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$  la distance entre  $M$  et  $N$ . On appelle distance entre  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  le réel positif

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \inf \{d(M, N) : M \in \mathcal{D}_1, N \in \mathcal{D}_2\}$$

On suppose que  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont pas parallèles (ni confondues).

- (a) Trouver une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}_2$  contenant  $\mathcal{D}_2$  et parallèle à  $\mathcal{D}_1$ .
- (b) Il existe alors une unique droite  $\Delta$  sécante à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  dont la direction vectorielle  $\vec{\Delta}$  est orthogonale aux directions  $\vec{\mathcal{D}}_1$  et  $\vec{\mathcal{D}}_2$  de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . On dit que  $\Delta$  est perpendicu-

laire à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ . Déterminer une représentation paramétrique de cette perpendiculaire commune à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

(c) En déduire que

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & a_1 & a_2 \\ y_2 - y_1 & b_1 & b_2 \\ z_2 - z_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

(d) Pourquoi doit-on exclure le cas de droites parallèles (au sens large) dans les questions précédentes ?

(e) Déterminer la distance  $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$  lorsque  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont parallèles.

### Cas de deux droites données par des équations cartésiennes

Soient deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de  $\mathbb{R}^3$  données par des équations cartésiennes

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z + d'_2 = 0 \end{cases}$$

où, pour définir des droites, les vecteurs  $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  et  $\vec{v}'_1 = (a'_1, b'_1, c'_1)$  forment un système de rang 2 de  $\mathbb{R}^3$ , de même que les vecteurs  $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  et  $\vec{v}'_2 = (a'_2, b'_2, c'_2)$ . On résout le système formé des quatre équations.

#### Exercices 1.3.8

- Étudier les quatre cas (droites confondues, parallèles, sécantes, non coplanaires) en fonction des coefficients.

Indication : étudier en fonction des rangs des systèmes de vecteurs

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}'_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_2\} \text{ et } \{(a_1, b_1, c_1, d_1), (a'_1, b'_1, c'_1, d'_1), (a_2, b_2, c_2, d_2), (a'_2, b'_2, c'_2, d'_2)\}.$$

- Traiter le cas d'une droite donnée par des équations cartésiennes, et d'une autre par une représentation paramétrique.

## 1.4 Utilisation la dimension 3 pour résoudre un problème de dimension 2

On considère trois points  $A(a, a')$ ,  $B(b, b')$  et  $C(c, c')$  dans le plan  $\mathcal{P}$  rapporté à un repère  $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Étudier l'alignement de ces points est souvent fastidieux surtout si les coordonnées sont données par des formules un peu compliquées (par exemple si les coordonnées sont des fractions d'entiers, ou des fractions dépendant d'un paramètre...) : on commence par former les vecteurs  $\vec{AB} = (b - a, b' - a')$  et  $\vec{AC} = (c - a, c' - a')$  par exemple, puis on calcule le déterminant

$$\begin{vmatrix} b - a & c - a \\ b' - a' & c' - a' \end{vmatrix} = (b - a)(c' - a') - (c - a)(b' - a').$$

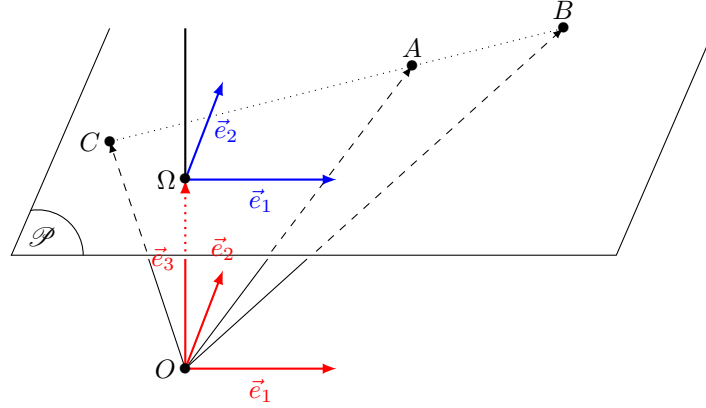
La nullité de ce déterminant équivaut à la colinéarité des vecteurs et donc à l'alignement des points.

Une méthode alternative consiste à identifier le plan  $\mathcal{P}$  avec le plan d'équation  $z = 1$  de  $\mathbb{R}^3$ . On se rapporte à un repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0) \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \quad \Omega(0, 0, 1), \quad A(a, a', 1), \quad B(b, b', 1), \quad C(c, c', 1)$$

L'alignement des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  équivaut à la coplanarité des vecteurs  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  et  $\vec{OC}$  c'est à dire à la nullité du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (ab' - a'b) - (ac' - a'c) + (bc' - b'c) = (b-a)(c' - a') - (c-a)(b' - a').$$

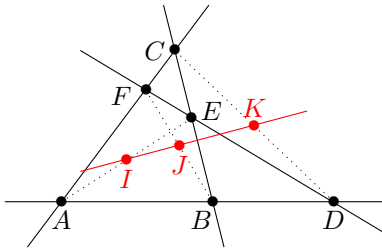


Comme on peut remplacer un vecteur par un de ses multiples, les points de coordonnées rationnelles :

$$A_1\left(\frac{m_1}{p_1}, \frac{n_1}{p_1}\right) \quad A_2\left(\frac{m_2}{p_2}, \frac{n_2}{p_2}\right) \quad A_3\left(\frac{m_3}{p_3}, \frac{n_3}{p_3}\right) \quad \text{sont alignés si et seulement si} \quad \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

#### Exercice 1.4.1

On se donne un **quadrilatère complet** à savoir six points d'intersection de quatre droites en position générale (c'est à dire deux à deux sécantes mais jamais trois droites concourantes). On note  $A, B, C$  trois des points non alignés et  $D \in (AB)$ ,  $E \in (BC)$  et  $F \in (AC)$ .



Montrer que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  milieux respectifs de  $[AE]$ ,  $[BF]$  et  $[CD]$  sont alignés.

**Indication :** on pourra considérer le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ , dans lequel  $D(d, 0)$ ,  $F(0, f)$ , donner les équations des droites  $(BC)$  et  $(DF)$  puis trouver les coordonnées de  $E$ .

On termine au moyen des coordonnées de  $I$ ,  $J$  et  $K$  en appliquant ce qui précède.

#### Remarque 1.4.2

On peut généraliser en dimension plus grande : quatre points  $A(a, a', a'')$ ,  $B(b, b', b'')$ ,  $C(c, c', c'')$  et  $D(d, d', d'')$  de l'espace de dimension 3 sont coplanaires si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## 1.5 Utilisation des nombres complexes

### 1.5.1 Le plan complexe

- L'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est un **espace vectoriel** sur  $\mathbb{R}$ , isomorphe à  $\mathbb{R}^2$  pour les opérations

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & z_1 + z_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (\lambda, z) & \mapsto & \lambda \cdot z \end{array}$$

Il admet également, comme  $\mathbb{R}^2$  une interprétation en tant que plan affine, mais avec en plus une structure euclidienne naturelle.

– **Structure affine.** On représente généralement  $\mathbb{C}$  par un plan  $\mathcal{P}$  rapporté à un repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . À un point  $M(x, y)$  du plan on associe son affixe  $z = x + iy$ . On note  $M(z)$  : « le point d'affixe  $z$  ». De même, on associe au vecteur  $\vec{v} = (a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  à son affixe  $w = a + ib$ . Ainsi,  $\vec{e}_1$  a pour affixe 1 et  $\vec{e}_2$  pour affixe  $i$ .

– **Structure euclidienne.** Si  $w_1 = x_1 + iy_1$  et  $w_2 = x_2 + iy_2$  sont les affixes des vecteurs  $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$  et  $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 w_2 &= \operatorname{Re}(\bar{w}_1 w_2) + i \cdot \operatorname{Im}(\bar{w}_1 w_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= \langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle + \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2). \end{aligned}$$

La partie réelle définit naturellement un **produit scalaire** qui confère à  $\mathbb{C}$  une structure euclidienne (dans ce contexte, le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  ci-dessus est orthonormal).

La partie imaginaire donne le **déterminant** des deux vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . On appelle parfois **produit vectoriel** ce déterminant (noté alors  $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$  qui est un nombre dans ce contexte de dimension 2). Il définit à la fois une notion d'**aire** ( $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$  étant l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ ), et une notion d'**orientation** donnée par le signe du déterminant (positif ou négatif selon que  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est directe ou non par rapport à  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ).

Ainsi si  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont des vecteurs d'affixes respectives  $w$ ,  $w_1$  et  $w_2$ , et  $M_1$  et  $M_2$  des points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$  :

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &\mapsto \operatorname{Re}(\bar{w}_1 w_2) = \frac{1}{2}(\bar{w}_1 w_2 + w_1 \bar{w}_2) \quad \text{est le produit scalaire de } \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_2; \\ (w_1, w_2) &\mapsto \operatorname{Im}(\bar{w}_1 w_2) = \frac{1}{2i}(\bar{w}_1 w_2 - w_1 \bar{w}_2) \quad \text{est le déterminant (produit vectoriel) de } \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_2; \\ w &\mapsto |w| \quad \text{est la norme (euclidienne) de } \vec{v}; \\ (z_1, z_2) &\mapsto |z_2 - z_1| \text{ est la distance (euclidienne) entre } M_1 \text{ et } M_2 \text{ notée } d(M_1, M_2) \text{ ou } M_1 M_2. \end{aligned}$$

- **Écriture complexe d'une équation cartésienne d'une droite.** Soit  $\Delta$  une droite passant par  $M_0(z_0)$  de vecteur normal d'affixe  $w = a + ib$  et soit un point  $M(z)$  du plan complexe. On a :

$$(M \in \Delta) \iff \left( \operatorname{Re}(\bar{w}(z - z_0)) = 0 \right) \iff (\bar{w}(z - z_0) + w(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0)$$

#### Nota Bene

Toute droite du plan complexe a une équation (cartésienne complexe) de la forme

$$\bar{w}z + w\bar{z} = c \quad \text{où} \quad w = a + ib \neq 0 \quad \text{et} \quad c \in \mathbb{R}.$$

$w = a + ib$  est l'affixe d'un vecteur normal,  $iw = -b + ia$  l'affixe d'un vecteur directeur.

- **Alignement et mesure algébrique.** Soient  $A(a)$  et  $B(b)$  deux points distincts du plan. Pour un point  $M(z)$  du plan, on a l'équivalence :

$$(M \in (AB)) \iff \left( \frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R} \right)$$

Pour deux points  $M(z)$  et  $N(w)$  de la droite  $(AB)$ , le réel  $\overline{MN} = \frac{w-z}{b-a} = \frac{w-a}{b-a} - \frac{z-a}{b-a}$  est la mesure algébrique sur  $(AB)$  associée au vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}$ .

### 1.5.2 Cercle et écriture trigonométrique

- Le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega(w)$  et de rayon  $r \geq 0$  ( $r > 0$  en général), souvent noté  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\Omega, r)$  est l'ensemble des points à distance  $r$  de  $\Omega$  :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} : \Omega M = r\}.$$

Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ . On a :

$$(M \in \mathcal{C}) \iff (|z-w|^2 = r^2) \iff (\bar{z}z - \bar{w}z - w\bar{z} + \bar{w}w - r^2 = 0).$$

Autrement dit, un cercle a pour équation cartésienne

$$\bar{z}z - \bar{w}z - w\bar{z} = c \quad w \in \mathbb{C} \quad c \in \mathbb{R}, \quad c + |w|^2 \geq 0.$$

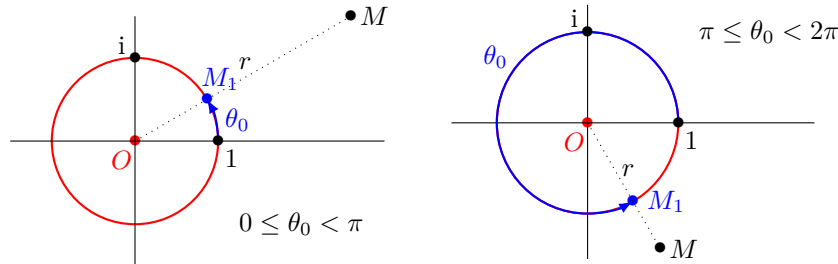
#### Remarque 1.5.1

Une équation du type  $\alpha\bar{z}z + \bar{\omega}z + \omega\bar{z} + \beta = 0$  où  $(\alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$  et  $|\omega|^2 - \alpha\beta \geq 0$  est l'équation d'un cercle si  $\alpha \neq 0$  et l'équation d'une droite si  $\alpha = 0$  et  $\omega \neq 0$ . Ce type d'équation unifie dans une même famille les droites et cercles du plan complexe. Cette remarque est importante dans le cadre de l'étude des homographies  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  qui interviennent en géométrie projective complexe de dimension 1 (sur la sphère de Riemann) et plus généralement pour l'étude des fonctions dites holomorphes (c'est à dire grosso modo des fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes qui sont dérivables au sens complexe du terme).

- **Arguments d'un nombre complexe.** Tout point  $M(z)$  du plan complexe privé de l'origine  $O(0)$  est situé sur le cercle de centre  $O(0)$  et de rayon  $r = |z| > 0$ . On peut lui associer le point  $M_1$ , d'affixe  $\frac{z}{|z|}$  sur le cercle de rayon 1 et on peut écrire

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}.$$

Le nombre  $\theta$ , appelé **(un) argument** de  $z$  et noté  $\arg(z)$  est une **mesure d'angle en radian**. Il n'est défini qu'à un multiple de  $2\pi$  près (1 tour =  $2\pi$  radian). La **détermination principale** de cette mesure,  $\theta = \theta_0 \in [0; 2\pi[$ , est la **longueur de l'arc du cercle unité** joignant le point d'affixe 1 au point  $M_1$  d'affixe  $\frac{z}{|z|}$ , orienté dans le sens trigonométrique. Toute autre valeur  $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  convient également si on s'autorise à faire en plus  $k$  tours dans le sens trigonométrique si  $k \geq 0$ , ou  $-k$  tours dans le sens inverse du sens trigonométrique si  $k < 0$ . On écrit  $\theta \equiv \theta_0 [2\pi]$  (ou  $\theta = \theta_0 [2\pi]$ ) la relation d'équivalence modulo  $2\pi$  (c'est à dire  $\theta - \theta_0$  est un multiple de  $2\pi$ ).



Propriétés :  $\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi]$   $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z [2\pi]$ .

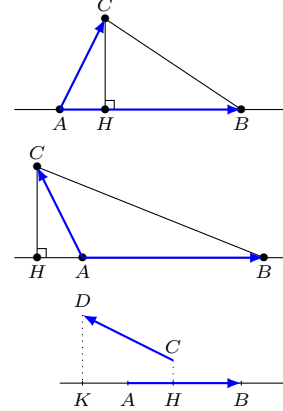
### 1.5.3 Quelques notions géométriques de base (cadre euclidien)

- **Interprétation géométrique du produit scalaire.**

Puisqu'on dispose d'une distance, on a des **mesures algébriques privilégiées** sur chaque droite : on choisit  $\overline{AB}$  de sorte que  $AB = |\overline{AB}|$  pour tous points  $A, B$ . Le produit scalaire peut être vu comme « défaut du théorème de Pythagore » pour un triangle non rectangle.

Soit  $ABC$  un triangle et  $H$  le projeté de  $C$  sur  $(AB)$ . Alors

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 - BC^2 &= AB^2 + (AH^2 + HC^2) - (HC^2 + BH^2) \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 - \overline{BH}^2 \\ &= \overline{AB}^2 + (\overline{AH} - \overline{BH})(\overline{AH} + \overline{BH}) \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{AB} \times (\overline{AH} + \overline{BH}) \\ &= \overline{AB} \times (\overline{AB} + \overline{AH} + \overline{BH}) \\ &= 2\overline{AB} \times \overline{AH} = 2\langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC} \rangle \end{aligned}$$



Plus généralement, si  $H$  et  $K$  sont les projetés orthogonaux de  $C$  et  $D$  sur  $(AB)$ , alors

$$\langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{CD} \rangle = \overline{AB} \times \overline{HK}.$$

Dans le cas du plan complexe, si  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$ ,  $D(d)$ ,  $H(h)$  et  $K(k)$  cette relation donne :

$$\operatorname{Re}((\bar{b} - \bar{a})(d - c)) = (k - h)(\bar{b} - \bar{a}) \in \mathbb{R}.$$

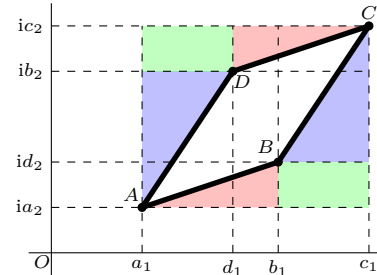
- **Interprétation géométrique du déterminant (produit vectoriel).**

On considère quatre points  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$  et  $D(d)$  formant un parallélogramme c'est à dire  $b - a = c - d$ . L'aire du parallélogramme  $ABCD$  est donnée par :

$$|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})| = |\operatorname{Im}((\bar{b} - \bar{a})(d - a))|$$

De plus le signe de ce déterminant indique si le couple de vecteurs est orienté dans le sens direct (déterminant positif comme sur le dessin pour le couple  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ ) ou indirect (déterminant négatif comme sur le dessin pour le couple  $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ ).

Sur le dessin ci-contre :  $a = a_1 + ia_2$ ,  $b = b_1 + ib_2$ ,  $c = c_1 + ic_2$  et  $d = d_1 + id_2$ .



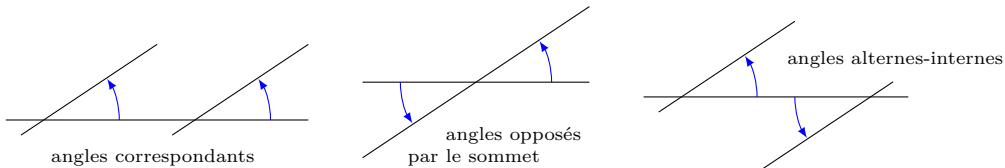
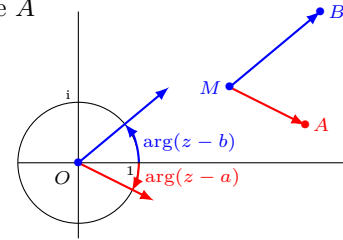
- **Mesure d'un angle défini par trois points.**

Soient trois points du plan  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $M(z)$  tels que  $M$  est distinct de  $A$  et  $B$ . La mesure en radians de l'angle  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$  est :

$$\theta = \operatorname{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{b - z}{a - z}\right) = \arg(b - z) - \arg(a - z) [2\pi]$$

$$\text{et on a } \begin{cases} \langle \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} \rangle = MA \times MB \times \cos \theta = |b - z| |a - z| \cos \theta \\ \det(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = MA \times MB \times \sin \theta = |b - z| |a - z| \sin \theta \end{cases}$$

Cas d'égalité des angles :



**Nota Bene**

On parle d'**angle géométrique** quand on identifie un angle et son opposé. Sa mesure en radian est un nombre entre 0 et  $\pi$ . **L'orientation de l'angle n'a pas d'incidence sur le cosinus, en revanche le changement d'orientation change le signe du sinus.**

**Proposition 1.5.2: Propriétés du produit scalaire**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien, on note  $(\vec{u}; \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$  le produit scalaire. On a les propriétés suivantes :

## 1. Identités remarquables.

$$(a) \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \vec{v}^2 \quad (\text{ou encore } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2);$$

$$(b) \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \vec{v}^2 \quad (\text{ou encore } \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2);$$

$$(c) \quad \langle \vec{u} + \vec{v} | \vec{u} - \vec{v} \rangle = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \quad (\text{ou encore } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

## 2. Formule du parallélogramme (ou de la médiane)

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$

## 3. Produit scalaire en fonction de la norme (identités de polarisation)

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

## 4. Théorème de Pythagore

$$(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) \iff (\vec{u} \perp \vec{v}).$$

## 5. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

$$|\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

En particulier,  $\vec{u} \mapsto \|\vec{u}\|$  est une norme.

Ces propriétés s'interprètent géométriquement de façon suivante (en exercice).

• **Formules du parallélogramme et de la médiane.** Soit  $ABDC$  un parallélogramme,  $I$  son centre (l'intersection des diagonales). On rappelle que le point  $I$  est le milieu commun de  $[AD]$  et  $[BC]$

En effet si  $A, B, C, D$  ont pour affixes  $a, b, c, d$  les milieux de  $[AD]$  et  $[BC]$  ont pour affixes  $\frac{a+d}{2}$  et  $\frac{b+c}{2}$  et

$$(b - a = d - c) \iff (b - d = a - c) \iff \left(\frac{1}{2}(b + c) = \frac{1}{2}(a + d)\right).$$

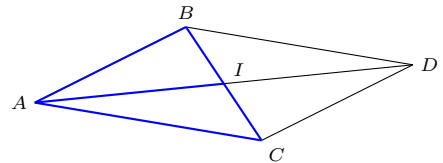
En faisant des combinaisons des formules (a), (b) et (c) de la proposition ci-dessus, on obtient les formules suivantes :

— **Formule du parallélogramme :** la somme des carrés des longueurs des diagonales égale la somme des carrés des longueurs des côtés

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + BD^2 + DC^2 + CA^2.$$

Autrement dit, si  $A(a), B(b), C(c), D(d)$ , alors :

$$|d - a|^2 + |b - c|^2 = 2(|b - a|^2 + |c - a|^2).$$





- De façon équivalente, on a la **première formule de la médiane** : dans le triangle  $ABC$  le point  $I$  est le milieu de  $[BC]$ , la longueur de la médiane  $[IA]$  issue de  $A$  satisfait

$$IA^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AC^2 - \frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{2}(|b-a|^2 + |c-a|^2) - \frac{1}{4}|b-c|^2.$$

- **Deuxième formule de la médiane** :

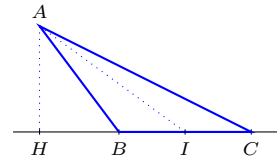
$$IA^2 = \langle \overrightarrow{AB} | \overrightarrow{AC} \rangle + \frac{1}{4}BC^2 = \operatorname{Re}((\bar{b}-\bar{a})(c-a)) + \frac{1}{4}|b-c|^2$$

- **Troisième formule de la médiane**. Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ .

$$2\langle \overrightarrow{BC} | \overrightarrow{IA} \rangle = 2\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{IH} = AB^2 - AC^2$$

ou encore, si  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$ ,  $H(h)$

$$\operatorname{Re}((\bar{c}-\bar{b})(b+c-2a)) = (\bar{c}-\bar{b})(b+c-2h) = |b-a|^2 - |c-a|^2.$$



- **Inégalité triangulaire** : (inégalité de Cauchy-Schwarz) dans un triangle  $ABC$ , la longueur d'un côté est plus petite que la somme des longueurs des deux autres côtés.

$$|AB - BC| \leq AC \leq AB + BC \quad \left( \left| \|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{BC}\| \right| \leq \|\overrightarrow{AC}\| \leq \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| \right).$$

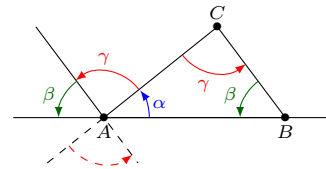
En particulier, dans le plan, pour que trois réels positifs  $p, q, r$  soient les longueurs des côtés d'un triangle, il faut et il suffit que  $|p - q| \leq r \leq p + q$ .

- **Somme des angles d'un triangle** : dans un triangle  $ABC$ , la somme des mesures des angles (aux sommets) orientés est égale à  $\pi$  modulo  $2\pi$ .

$$\operatorname{mes}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi [2\pi].$$

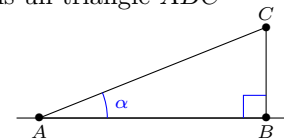
autrement dit si  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$  :

$$\frac{c-a}{b-a} \times \frac{a-b}{c-b} \times \frac{b-c}{a-c} = -1$$



- **Formules trigonométriques dans un triangle rectangle**. Dans un triangle  $ABC$  rectangle en  $B$ , si  $\alpha$  est la mesure de l'angle géométrique en  $A$  alors

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \quad \sin \alpha = \frac{BC}{AC} \quad \tan \alpha = \frac{BC}{AB}.$$

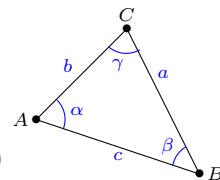


Dans un triangle  $ABC$ , on note  $\alpha, \beta, \gamma$  les mesures d'angle géométrique aux points  $A, B$  et  $C$  respectivement et  $a = BC$ ,  $b = AC$  et  $c = AB$  les longueurs de côtés.

- **Loi du cosinus (formule d'Al-Khashi)**.

La relation d'Al-Khashi suivante s'obtient en développant le carré scalaire de  $\overrightarrow{BC}$  puis en exprimant le produit scalaire en fonction du cosinus de l'angle géométrique :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$



- **Loi des sinus**.

Notons  $S$  l'aire du triangle. En prenant cette fois le déterminant (produit vectoriel) on obtient la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2S}$$

- **Formule de Héron.**

En mélangeant les lois des sinus et des cosinus on obtient la formule de Héron suivante, qui permet d'exprimer l'aire d'un triangle uniquement au moyen des longueurs des côtés :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où } p = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ est le demi-périmètre}$$

et on en déduit l'inégalité isopérimétrique dans le triangle donnant une majoration de l'aire pour un périmètre donné (le cas d'égalité est obtenu si et seulement si le triangle est équilatéral de côté  $a = \frac{2}{3}p$ ) :

$$S \leq \frac{p}{3\sqrt{3}}$$

- **Triangle isocèle et médiatrice.** Soient trois points du plan  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $\Omega(\omega)$ ,  $A$  et  $B$  distincts. Le triangle  $A\Omega B$  est isocèle en  $\Omega$  si  $\Omega A = |a - \omega| = |b - \omega| = \Omega B$ , autrement dit  $A$  et  $B$  sont situés sur un même cercle centré en  $\Omega$ .

**Proposition 1.5.3: Propriétés angulaires d'un triangle isocèle**

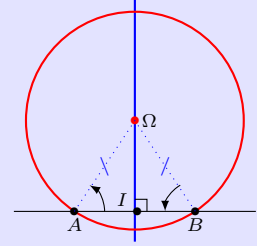
Soient trois points distincts du plan  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $\Omega(\omega)$ . Le triangle  $A\Omega B$  est isocèle en  $\Omega$  si et seulement si il satisfait une des propriétés équivalentes suivantes :

1.  $\Omega$  est sur la **médiatrice** du segment  $[AB]$ , c'est à dire la droite passant par le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  et perpendiculaire à  $(AB)$  autrement dit

$$\operatorname{Re} \left[ \left( \omega - \frac{a+b}{2} \right) (\bar{b} - \bar{a}) \right] = 0 \quad \text{ou encore} \quad \operatorname{Re} \left( \frac{\omega - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right) = 0.$$

2. il existe des mesures des angles  $(\vec{AB}, \vec{A\Omega})$  et  $(\vec{B\Omega}, \vec{BA})$  telle que

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{2} < \operatorname{mes}(\vec{AB}, \vec{A\Omega}) = \operatorname{mes}(\vec{B\Omega}, \vec{BA}) < \frac{\pi}{2} \\ \text{ou bien} & -\frac{\pi}{2} < \arg \left( \frac{\omega - a}{b-a} \right) = \arg \left( \frac{a-b}{\omega - b} \right) < \frac{\pi}{2} \\ \text{ou encore} & \frac{\omega - a}{b-a} \times \frac{\omega - b}{a-b} \text{ est un réel supérieur strictement à } \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Démonstration. Notons  $c = \frac{a+b}{2}$  l'abscisse de  $I$ , milieu de  $[AB]$ .

1. Utilisons la troisième formule de la médiane :  $2\langle \vec{I\Omega} | \vec{AB} \rangle = \Omega A - \Omega B$  autrement dit

$$2 \operatorname{Re} \left[ (\omega - c)(\bar{b} - \bar{a}) \right] = 2|b-a|^2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\omega - c}{b-a} \right] = |\omega - a|^2 - |\omega - b|^2.$$

Alors  $(|\omega - a| = |\omega - b|) \iff (\langle \vec{I\Omega} | \vec{AB} \rangle = 0)$  ce qui prouve la partie 1.

2. On a :  $c - a = \frac{b-a}{2}$  et  $c - b = \frac{a-b}{2}$  donc

$$\frac{\omega - a}{b-a} \times \frac{\omega - b}{a-b} = \left( \frac{\omega - c}{b-a} + \frac{c-a}{b-a} \right) \left( -\frac{\omega - c}{b-a} + \frac{c-b}{a-b} \right) = \frac{1}{4} - \left( \frac{\omega - c}{b-a} \right)^2.$$

Cette quantité est réelle supérieure strictement à  $\frac{1}{4}$  si et seulement si  $\frac{\omega - c}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$  c'est à dire

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\omega - c}{b-a} \right) = \frac{1}{|b-a|^2} \operatorname{Re} \left( (\omega - c)(\bar{b} - \bar{a}) \right) = 0 \quad (c \neq \omega)$$

ce qui équivaut au caractère isocèle de  $A\Omega B$  en  $\Omega$  d'après (1).

□

- **Cercle circonscrit à un triangle  $ABC$ .** Soient  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  trois points non alignés. Il existe un unique cercle passant par ces trois points : c'est le **cercle circonscrit** au triangle  $ABC$ ; son centre  $\Omega$  est le point d'intersection des trois médiatrices, nécessairement concourantes, des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$  et son rayon le réel  $\Omega A = \Omega B = \Omega C$  (conséquence de la proposition 1.5.3.)

**Exercice 1.5.4**

Montrer que la loi des sinus donne le rayon du cercle circonscrit :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

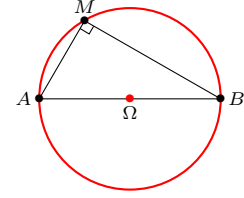
- **Cercle de diamètre le segment  $[AB]$ .** Soient  $A(a)$  et  $B(b)$  deux points distincts. Le cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$  a pour centre  $\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right)$  et rayon  $r = \frac{|b-a|}{2}$ . C'est l'ensemble des points  $M$  satisfaisant

$$\langle \overrightarrow{MA} | \overrightarrow{MB} \rangle = 0.$$

En effet, cette relation se traduit par  $\operatorname{Re}((\bar{z} - \bar{a})(z - b)) = 0$  c'est à dire

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left((\bar{z} - \bar{a})(z - b)\right) &= \bar{z}z - \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}z - \frac{a + b}{2}\bar{z} + \frac{\bar{a}b + a\bar{b}}{2} \\ &= \bar{z}z - \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}z - \frac{a + b}{2}\bar{z} + \frac{|a + b|^2}{4} - \frac{|a - b|^2}{4} = 0. \end{aligned}$$

On reconnaît là l'équation cartésienne du cercle de centre  $\Omega\left(\frac{a+b}{2}\right)$  et rayon  $r = \frac{|b-a|}{2}$ .



- **Théorème de l'angle inscrit et cocyclicité.**

**Lemme 1.5.5: Angle au centre**

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $\Omega(\omega)$  et de rayon  $r$ , et soient  $A(a)$  et  $B(b)$  deux points distincts de  $\mathcal{C}$ . Si un point  $M(z)$  du plan appartient au cercle  $\mathcal{C}$  alors :

$$2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) [2\pi] \quad \text{ou encore} \quad 2 \arg\left(\frac{b - z}{a - z}\right) = \arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) [2\pi].$$

Démonstration. On utilise la proposition 1.5.3. Si  $M$  est sur le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  passant par  $A$  et  $B$ , les deux triangles  $MA\Omega$  et  $BM\Omega$  sont tous deux isocèles en  $\Omega$ .

1. **En utilisant les mesures d'angle.** On considère les sommes des mesures d'angles orientés des deux triangles  $MA\Omega$  et  $BM\Omega$  :

$$\operatorname{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AM}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) = 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) = \pi [2\pi]$$

$$\operatorname{mes}(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BM}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) = 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) = \pi [2\pi]$$

En faisant la somme il vient :

$$2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M\Omega}) + 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MB}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) + \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega M}) = 0 [2\pi]$$

D'où

$$2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) [2\pi]$$

2. **En utilisant les affixes.** On suppose  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $\Omega(\omega)$  et  $M(z)$ . On a :

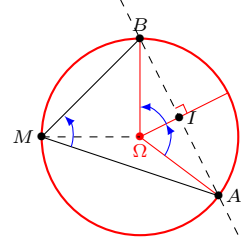
$$\frac{b-\omega}{a-\omega} = \frac{b-\omega}{b-z} \times \frac{b-z}{a-z} \times \frac{a-z}{a-\omega} = \frac{\omega-b}{z-b} \times \frac{b-z}{a-z} \times \frac{z-a}{\omega-a}.$$

En passant à l'argument, il vient :

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) = \arg\left(\frac{\omega-b}{z-b}\right) + \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) + \arg\left(\frac{z-a}{\omega-a}\right) [2\pi]$$

Comme les triangles  $MA\Omega$  et  $BM\Omega$  sont isocèles en  $\Omega$ , il vient :

$$\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) = \arg\left(\frac{b-z}{\omega-z}\right) + \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) + \arg\left(\frac{\omega-z}{a-z}\right) = 2 \arg\left(\frac{b-z}{a-z}\right) [2\pi].$$



□

### Proposition 1.5.6: Tangente à un cercle

1. Soient  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r > 0$ , et  $A(a)$  un point de  $\mathcal{C}$ . Il existe une unique droite passant par  $A$  qui n'intersecte  $\mathcal{C}$  qu'au point  $A$  : cette droite est la perpendiculaire en  $A$  à la droite  $(A\Omega)$ . On l'appelle la **tangente** à  $\mathcal{C}$  en  $A$ .
2. Deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  qui ont une tangente commune  $\mathcal{T}$  en un point  $A$  sont confondus ou bien ne s'intersectent qu'au point  $A$ . Dans ce cas, ils sont dits **tangents** en  $A$ .

#### Démonstration.

1. Le cercle de centre  $\Omega$  de rayon  $r = \Omega A$  et une droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  de vecteur normal unitaire  $\vec{v}$  d'affixe  $\alpha$  (avec  $|\alpha| = 1$ ) ont des équations de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : (\bar{z} - \bar{a})(z - a) - (\bar{\omega} - \bar{a})(z - a) - (\omega - a)(\bar{z} - \bar{a}) &= 0 \\ \mathcal{D} : \bar{\alpha}(z - a) + \alpha(\bar{z} - \bar{a}) &= 0 \quad \text{ou encore} \quad (\bar{z} - \bar{a}) = -\bar{\alpha}^2(z - a). \end{aligned}$$

Ainsi un point  $M(z)$  appartient à  $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$  si et seulement si

$$[(z - a) + \alpha(\bar{\omega} - \bar{a}) - \bar{\alpha}(\omega - a)](z - a) = 0$$

Pour que  $A$  soit l'unique point d'intersection, il faut et il suffit que

$$\alpha(\bar{\omega} - \bar{a}) - \bar{\alpha}(\omega - a) = \text{Im}(\bar{\alpha}(\omega - a)) = 0$$

ce qui traduit le fait que  $\vec{v}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{A\Omega}$  et donc que  $\mathcal{D}$  est perpendiculaire à  $(A\Omega)$ .

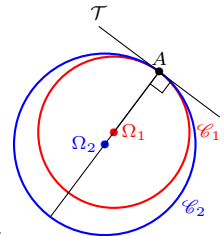
2. Soient  $\Omega_1(\omega_1)$  et  $\Omega_2(\omega_2)$  les centres respectifs de deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ayant une même tangente  $\mathcal{T}$  en un point  $A$ . D'après 1, les points  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $A$  sont alignés sur la perpendiculaire à  $\mathcal{T}$  en  $A$ . Un point  $M$  appartient à  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  si son affixe  $z$  satisfait les deux équations

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : (\bar{z} - \bar{a})(z - a) - (\bar{\omega}_1 - \bar{a})(z - a) - (\omega_1 - a)(\bar{z} - \bar{a}) &= 0 \\ \mathcal{C}_2 : (\bar{z} - \bar{a})(z - a) - (\bar{\omega}_2 - \bar{a})(z - a) - (\omega_2 - a)(\bar{z} - \bar{a}) &= 0 \end{aligned}$$

En faisant la différence entre ces équations on obtient

$$(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)(z - a) + (\omega_2 - \omega_1)(\bar{z} - \bar{a}) = 2 \text{Re}((\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)(z - a)) = 0$$

autrement dit soit  $\omega_1 = \omega_2$  auquel cas  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont confondus soit  $z - a$  est orthogonal  $\omega_1 - \omega_2$  ce qui signifie que  $M \in \mathcal{T}$  donc que  $M = A$ .



□

**Lemme 1.5.7: Angle de la tangente**

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $\Omega(\omega)$  et de rayon  $r$ , et soient  $A(a)$  et  $B(b)$  deux points distincts de  $\mathcal{C}$ . Soit  $\mathcal{T}$  la droite tangente au cercle en  $A$ . Un point  $T(t)$  du plan distinct de  $A$  appartient à  $\mathcal{T}$  si et seulement si :

$$2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) [2\pi] \quad \text{ou bien} \quad 2 \arg \left( \frac{b-a}{t-a} \right) = \arg \left( \frac{b-\omega}{a-\omega} \right) [2\pi]$$

Démonstration. Soit  $A'$  le point diamétralement opposé à  $A$ .

**1. En utilisant les angles.**

D'après le lemme de l'angle au centre :

$$2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}) = \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) [2\pi]$$

Or l'angle  $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA})$  est droit puisque  $[AA']$  est un diamètre. Ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) &= 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}) = 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{TA}) + 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{BA}) + 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{A'B}) [2\pi] \\ &= 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{TA}) + 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{BA}) \pm \pi [2\pi] \end{aligned}$$

Or  $T \in \mathcal{T} \setminus \{A\}$  si et seulement si  $\operatorname{mes}(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{TA}) = \pm \frac{\pi}{2}$  donc si et seulement si

$$\operatorname{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2 \operatorname{mes}(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) [2\pi].$$

**2. Avec l'écriture complexe.** On applique le théorème de l'angle au centre à  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $\Omega(\omega)$ ,  $A'(a')$  et  $T(t)$  :

$$2 \arg \left( \frac{b-a'}{a-a'} \right) = \arg \left( \frac{b-\omega}{a-\omega} \right) [2\pi].$$

Comme  $[AA']$  est un diamètre, le triangle  $ABA'$  est rectangle en  $B$  :  $\arg \left( \frac{a'-b}{a-b} \right) = \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . Ainsi :

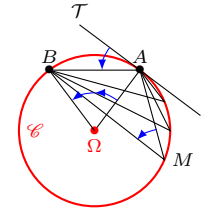
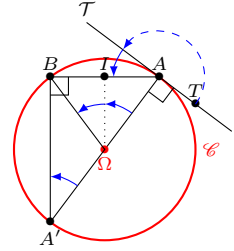
$$\begin{aligned} \arg \left( \frac{b-\omega}{a-\omega} \right) &= 2 \arg \left( \frac{b-a'}{a-a'} \right) = 2 \arg \left( \frac{b-a'}{b-a} \times \frac{b-a}{t-a} \times \frac{t-a}{a-a'} \right) \\ &= 2 \arg \left( \frac{b-a}{t-a} \right) + 2 \arg \left( \frac{t-a}{a-a'} \right) [2\pi] \end{aligned}$$

donc  $T(t)$  appartient à la droite  $\mathcal{T} \setminus \{A\}$  si et seulement si  $\arg \left( \frac{t-a}{a-a'} \right) = \pm \frac{\pi}{2}$  c'est à dire

$$\arg \left( \frac{b-\omega}{a-\omega} \right) = 2 \arg \left( \frac{b-a}{t-a} \right) [2\pi].$$

**Remarque 1.5.8**

La condition nécessaire dans le lemme précédent (c'est à dire, si le point est situé sur la tangente alors on a la propriété angulaire) est **un cas limite du théorème de l'angle au centre** lorsqu'on fait tendre le point  $M$  vers le point  $A$  : la droite  $(MA)$  se rapproche de la tangente  $\mathcal{T}$ , la droite  $(MB)$  de la droite  $(AB)$ .



□

**Corollaire 1.5.9: Théorème de l'angle inscrit, cocyclicité**

1. **Théorème de l'angle inscrit.** Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $\Omega(\omega)$  et de rayon  $r$ , et soient  $A(a)$  et  $B(b)$  deux points distincts de  $\mathcal{C}$ . Si  $C(c)$  et  $D(d)$  sont deux points de  $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$  alors :

$$\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi} \quad \text{ou bien} \quad \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right) \pmod{\pi}$$

ou encore  $\frac{b-c}{a-c} / \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*$  (cette dernière quantité s'appelle le **birapport**).

2. **Cocyclicité.** Réciproquement, soient quatre points distincts  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$ ,  $D(d)$  du plan. Si l'une des relations équivalentes de (1) est satisfaite, alors ces quatre points sont cocycliques (appartiennent à un même cercle) ou sont alignés.

Démonstration.

1. Cette première partie est une conséquence immédiate du **lemme de l'angle au centre**.
2. Pour la réciproque : supposons que  $\text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}$ 
  - Si  $A, B, C$  sont alignés, alors  $\frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}^*$  donc si  $\frac{b-c}{a-c} / \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*$  il s'ensuit que  $\frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{R}^*$  et donc que  $D \in (AB)$  ; les quatre points sont alignés.
  - Si  $A, B, D$  sont alignés, le même raisonnement s'applique donc  $C \in (AB)$  ; les quatre points sont alignés.
  - Sinon, soient  $\mathcal{C}_C$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  et  $\mathcal{C}_D$  le cercle circonscrit au triangle  $ABD$ . Notons  $\Omega_C$  et  $\Omega_D$  leurs centres respectifs. D'après le **lemme de l'angle au centre**

$$\text{mes}(\overrightarrow{\Omega_C A}, \overrightarrow{\Omega_C B}) = 2 \text{mes}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2 \text{mes}(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega_D A}, \overrightarrow{\Omega_D B}) \pmod{2\pi}$$

Aussi, d'après le lemme **lemme de l'angle de la tangente**, ces deux cercles ont la même tangente  $\mathcal{T}$  en  $A$ , formée du point  $A$  et des points  $T \neq A$  tels que

$$2 \text{mes}(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{AB}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega_C A}, \overrightarrow{\Omega_C B}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega_D A}, \overrightarrow{\Omega_D B}) \pmod{2\pi}$$

En vertu de la **proposition 1.5.6**, les deux cercles ayant une tangente et deux points distincts en commun, ils sont nécessairement confondus, et donc  $A, B, C, D$  sont cocycliques.  $\square$

**Remarques 1.5.10**

Faisons un petit point sur la notion d'angle. Une vraie définition est prématurée et sera donnée plus tard. Cependant, si on s'intéresse à la mesure d'un angle, on peut remarquer les faits suivants :

1. **Angle de demi-droites.** Un angle de vecteurs est aussi appelé angle de demi-droites. On note :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = ([AB]; [AC]).$$

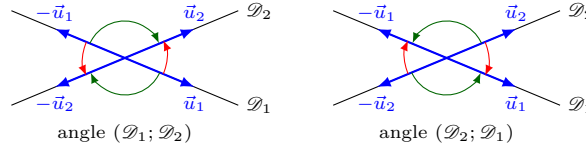
2. **Angle de droites.** On définit une **mesure d'angle entre deux droites** comme étant la **réduction modulo  $\pi$**  de la mesure de l'angle entre deux vecteurs directeurs. En effet si  $\vec{u}_1$  est vecteur directeur de  $\mathcal{D}_1$  et  $\vec{u}_2$  vecteur directeur de  $\mathcal{D}_2$ , les mesures des deux angles de vecteurs  $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$  et  $(\vec{u}_1; -\vec{u}_2)$  diffèrent de  $\pi$  modulo  $2\pi$  :

$$\text{mes}(\vec{u}_1; -\vec{u}_2) = \text{mes}(\vec{u}_1; \vec{u}_2) + \pi \pmod{2\pi}.$$

On note :

$$\text{mes}(\mathcal{D}_1; \mathcal{D}_2) = \text{mes}(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = \text{mes}(\vec{u}_1; -\vec{u}_2) \pmod{\pi}.$$

Attention : les angles restent orientés !



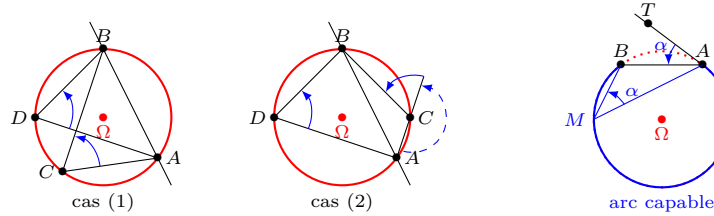
3. **Le théorème de l'angle inscrit est plutôt un théorème d'angles de droites.** Si  $C$  et  $D$  sont deux points d'un même cercle passant par  $A$  et  $B$  (distincts) alors

$$\text{mes}((CA);(CB)) = \text{mes}((DA);(DB)) \text{ [}\pi\text{]}.$$

4. **Arc capable.** Si on veut raffiner le théorème de l'angle inscrit, on distingue deux cas :

$$(1) \text{ mes}(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \text{mes}(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) \text{ [}2\pi\text{]} \quad (2) \text{ mes}(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \text{mes}(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}) + \pi \text{ [}2\pi\text{]}$$

Le premier s'obtient si  $C$  et  $D$  sont sur le même arc d'extrémités  $A$  et  $B$  c'est à dire dans le même demi-plan de frontière  $(AB)$ , le second cas si  $C$  et  $D$  sont de part et d'autre de  $(AB)$ .



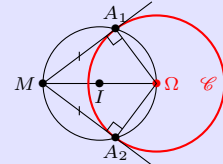
Étant donnée un angle  $(\overrightarrow{AT}; \overrightarrow{AB})$  de mesure d'angle  $\alpha$  modulo  $2\pi$ , on appelle **arc capable** l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\text{mes}(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \alpha \text{ [}2\pi\text{]}$  (cf. **lemme de la tangente**).

- **Bissectrices, cercle inscrit.**

#### Lemme 1.5.11: Tangentes communes à un cercle

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  et  $M$  un point du plan extérieur au cercle (c'est à dire  $\Omega M > r$ ). Il existe exactement deux droites tangentes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  tangentes à  $\mathcal{C}$  et passant par  $M$ . De plus, si  $A_1$  et  $A_2$  sont les points de tangence respectifs de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  avec  $\mathcal{C}$  :

1. les triangles  $\Omega A_1 M$ , et  $\Omega A_2 M$  sont rectangles en  $A_1$  et  $A_2$  ;
2.  $(\Omega M)$  est la médiatrice de  $[A_1 A_2]$  ;
3. les points  $\Omega$ ,  $A_1$ ,  $M$ ,  $A_2$  sont cocycliques sur le cercle de diamètre  $[\Omega M]$  ;
4. on a égalité des mesures d'angles :  $\text{mes}(\overrightarrow{MA_1}; \overrightarrow{M\Omega}) = \text{mes}(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MA_2}) \text{ [}2\pi\text{]}$ .



Démonstration. Tout découle du fait que la tangente  $\mathcal{D}$  en un point  $A$  à un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega$  est perpendiculaire à la droite  $(\Omega A)$ .  $\square$

#### Définition 1.5.12: Bissectrices

Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites sécantes en  $\Omega$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  **unitaires** (c'est à dire de norme 1). On considère les droites :

$\Delta_+$  passant par  $\Omega$  et dirigée par le vecteur  $\vec{v}_+ = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  ;

$\Delta_-$  passant par  $\Omega$  et dirigée par le vecteur  $\vec{v}_- = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ .

Ces deux droites  $\Delta_+$  et  $\Delta_-$  sont les deux **bissectrices** de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

**Proposition 1.5.13: Propriétés des bissectrices**

Avec les notations ci-dessus :

1. Les deux bissectrices  $\Delta_+$  et  $\Delta_-$  sont orthogonales ;
2. Un point  $M$  appartient à  $\Delta_+ \cup \Delta_-$  si et seulement si les distances  $d(M, \mathcal{D}_1)$  et  $d(M, \mathcal{D}_2)$  de  $M$  à  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont égales.
3.  $\Delta_+ \cup \Delta_-$  est le lieu des centres des cercles tangents simultanément aux deux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

Démonstration.

1. L'orthogonalité est évidente :  $\langle \vec{v}_+ | \vec{v}_- \rangle = \vec{u}_1^2 - \vec{u}_2^2 = 1 - 1 = 0$ .
2. Soit  $M$  un point du plan (distinct de  $\Omega$ , ce cas étant évident) et  $M_1$  et  $M_2$  ses projetés orthogonaux sur  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  respectivement. On a  $MM_1 = d(M, \mathcal{D}_1)$  et  $MM_2 = d(M, \mathcal{D}_2)$ . Munissons  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de mesure algébriques associée à  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ . On a donc :

$$\overrightarrow{\Omega M_1} = \overrightarrow{\Omega M_1} \cdot \vec{u}_1 \quad \overrightarrow{\Omega M_2} = \overrightarrow{\Omega M_2} \cdot \vec{u}_2.$$

- (a) Supposons que  $MM_1 = MM_2$  et considérons le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $M$  de rayon  $r = MM_1 = MM_2$ . Les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont les tangentes au cercle  $\mathcal{C}$  et passent par  $\Omega$ , donc  $(\Omega M)$  est la médiatrice de  $[M_1 M_2]$  autrement dit :

$$|\overrightarrow{\Omega M_1}| = |\overrightarrow{\Omega M_2}| = \Omega M_1 = \Omega M_2 \text{ et } (\Omega M) \perp (M_1 M_2)$$

Autrement dit  $\overrightarrow{\Omega M_1} = \varepsilon \overrightarrow{\Omega M_2}$  avec  $\varepsilon = \pm 1$ . Mais alors

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{\Omega M_2} - \overrightarrow{\Omega M_1} = \overrightarrow{\Omega M_2} \cdot (\vec{u}_2 - \varepsilon \vec{u}_1)$$

donc ou bien  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  est un multiple de  $\vec{v}_-$  (si  $\varepsilon = 1$ ) auquel cas  $M \in \Delta_+$ , ou bien  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  est un multiple de  $\vec{v}_+$  (si  $\varepsilon = -1$ ) auquel cas  $M \in \Delta_-$ .

- (b) Supposons réciproquement que  $M \in \Delta_+$  (on raisonne de façon analogue si  $M \in \Delta_-$ ). Alors :

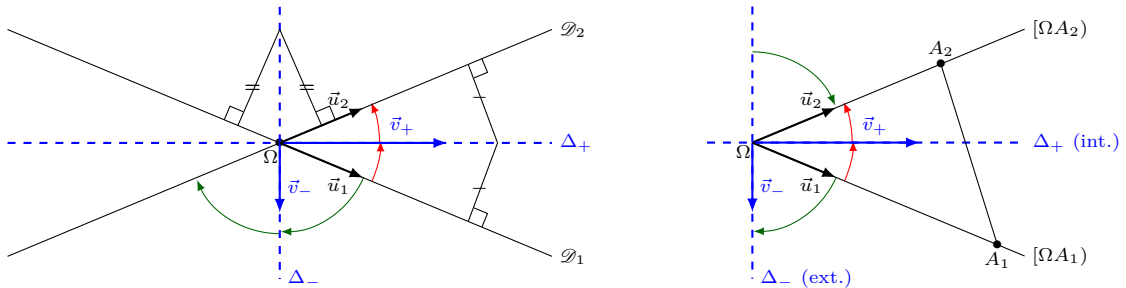
$$\langle \overrightarrow{\Omega M} | \vec{v}_- \rangle = 0 = \langle \overrightarrow{\Omega M} | \vec{u}_1 \rangle - \langle \overrightarrow{\Omega M} | \vec{u}_2 \rangle = \overrightarrow{\Omega M_1} - \overrightarrow{\Omega M_2}$$

et donc  $\Omega M_1 = \Omega M_2$ . Comme les triangles  $\Omega M M_1$  et  $\Omega M M_2$  sont rectangles respectivement en  $M_1$  et  $M_2$  on a bien en vertu du théorème de Pythagore :

$$d(M, \mathcal{D}_1) = MM_1 = MM_2 = d(M, \mathcal{D}_2).$$

3. Ce troisième point est une application directe du **lemme 1.5.11** et du point précédent.

□



Dans le cas de demi-droites  $[OA_1]$  et  $[OA_2]$  (contenues dans deux droites sécantes) avec  $\vec{u}_1 = \frac{1}{OA_1} \overrightarrow{OA_1}$  et  $\vec{u}_2 = \frac{1}{OA_2} \overrightarrow{OA_2}$ ,  $\Delta_+$  est appelée **bissectrice intérieure** de l'angle  $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ , et  $\Delta_-$  la **bissectrice extérieure**.



**Exercice 1.5.14**

1. Montrer que seule la bissectrice intérieure  $\Delta_+$  coupe le segment  $[A_1A_2]$  en un point  $A$  tel que  $\overrightarrow{\Omega A} = t\overrightarrow{v}_+$  pour un certain  $t > 0$ . (Indication : écrire les équations des droites  $(A_1A_2)$  et  $\Delta_+$  dans le repère  $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ).
2. Montrer que  $\Delta_+$  est caractérisée par la relation angulaire suivante :  $M \neq \Omega$  appartient à  $\Delta_+$  si et seulement si :

$$\text{mes}(\vec{u}_1; \overrightarrow{\Omega M}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}; \vec{u}_2) [2\pi] \quad \text{ou encore} \quad \text{mes}(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = 2 \text{mes}(\vec{u}_1; \overrightarrow{\Omega M}) [2\pi].$$

On appelle bissectrices intérieures d'un triangle  $ABC$  les trois bissectrices intérieures des couples d'angles de demi-droites  $([AB], [AC])$ ,  $([BC], [BA])$  et  $([CA], [CB])$ .

**Proposition 1.5.15: Bissectrices d'un triangle**

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle  $ABC$  non aplati sont concourantes. Le point d'intersection  $I$  est le centre de l'unique cercle tangent simultanément aux trois segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$ . Ce cercle est appelé cercle inscrit au triangle  $ABC$ .

Démonstration. Notons  $\Delta_A$ ,  $\Delta_B$ ,  $\Delta_C$  ces trois bissectrices passant respectivement par  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ .

• **les droites  $\Delta_A$  et  $\Delta_B$  sont sécantes** : si  $\Delta_A$  et  $\Delta_B$  sont parallèles de vecteur directeur  $\vec{u}$  alors  $\vec{u}$  serait colinéaire à la fois aux deux vecteurs non nuls  $\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$  et  $\frac{1}{a}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{c}\overrightarrow{BA}$  autrement dit, il existerait  $k \in \mathbb{R}^*$  tel que

$$\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC} - \frac{k}{a}\overrightarrow{BC} - \frac{k}{c}\overrightarrow{BA} = \vec{0}$$

c'est à dire

$$\left(\frac{1+k}{c} + \frac{k}{a}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{b} - \frac{k}{a}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

ce qui est impossible. Donc  $\Delta_A$  et  $\Delta_B$  sont sécantes. Notons  $I$  le point d'intersection.

• **la droite  $(IC)$  coupe le segment  $[AB]$**  : en utilisant 1 de l'exercice 1.5.3, on sait que  $\Delta_A$  coupe  $[BC]$  en un point  $A_1$  et  $\Delta_B$  coupe  $[AC]$  en un point  $B_1$ . Plaçons nous dans le repère  $(C, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$  :

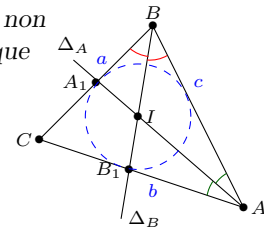
$$A(1, 0) \quad B(0, 1) \quad A_1(0, a_1) \quad B_1(b_1, 0) \quad \text{avec} \quad a_1 > 0 \quad b_1 > 0$$

La droite  $\Delta_A$  a pour équation  $x + \frac{1}{a_1}y = 1$  et  $\Delta_B$  a pour équation  $\frac{1}{b_1}x + y = 1$ . On en déduit les coordonnées  $(x_I, y_I)$  de  $I$  :

$$x_I = \frac{b_1(1 - a_1)}{1 - a_1b_1} \in ]0; 1[ \quad y_I = \frac{a_1(1 - b_1)}{1 - a_1b_1} \in ]0; 1[$$

La droite  $(CI)$  a pour équation  $\frac{x}{x_I} - \frac{y}{y_I} = 0$  et la droite  $(AB)$  pour équation  $x + y = 1$  donc elles sont sécantes au point  $C_1$  de coordonnées positives  $\left(\frac{x_I}{x_I + y_I}, \frac{y_I}{x_I + y_I}\right)$  situé sur  $[AB]$  (on remarque même que  $I \in [CC_1]$  puisque  $x_I < x_I + y_I$  et  $y_I < x_I + y_I$ ).

• **Le point  $I$  est sur  $\Delta_C$ .** Comme  $I \in \Delta_A$ , il est équidistant des deux droites  $(AB)$  et  $(AC)$  et comme  $I \in \Delta_B$ , il est équidistant des deux droites  $(BC)$  et  $(BA)$ . Par conséquent il est équidistant des deux droites  $(CA)$  et  $(CB)$  et donc  $I$  est sur une des deux bissectrices des droites  $(CA)$  et  $(CB)$ . Remarquons aussi que la droite  $(CI)$  coupe nécessairement le segment  $[AB]$ . Donc  $(CI) = \Delta_C$ . Donc les trois bissectrices intérieures sont concourantes en  $I$  équidistant des trois segments. Le fait que  $I$  est centre du cercle inscrit découle du lemme 1.5.11. L'unicité est laissée en exercice.  $\square$



### 1.5.4 Transformations affines complexes de $\mathbb{C}$

Par la suite, afin de simplifier les écritures, on identifiera les points à leurs affixes. On parlera ainsi indifféremment du point  $M$  d'affixe  $z$  si on insiste sur l'aspect géométrique, et du point  $z$  si on s'intéresse plutôt à l'aspect calculatoire.

#### Définition 1.5.16

Une application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite **affine complexe** si elle est de la forme

$$z \mapsto f(z) = az + b$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes complexes. L'application  $\vec{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\vec{f}(z) = az$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire, et donc aussi  $\mathbb{R}$ -linéaire; on l'appelle la **partie linéaire** de  $f$ .

On dit que l'application du plan dans le plan envoyant un point  $M(z)$  sur un point  $M'(f(z))$  est une **similitude directe (du plan complexe)** si  $a \neq 0$ . Pour simplifier,  $f$  sera elle-même appelée similitude directe. Sa partie linéaire  $\vec{f}$  est une **similitude vectorielle directe**.

Le cas  $a = 0$  n'est pas intéressant dans la mesure où dans ce cas  $f$  est constante. Dans la suite, on ne considère que les similitudes directes ( $a \neq 0$ ).

#### Proposition 1.5.17: Premières propriétés des similitudes directes

1. L'identité de  $\mathbb{C}$ ,  $\text{id} : z \mapsto z$  est une similitude directe.
2. La composée de deux similitudes directes est une similitude directe. Cette composée n'est généralement pas commutative.
3. Toute similitude directe est bijective et sa bijection réciproque est aussi une similitude directe.
4. Si  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$ ,  $f : z \mapsto az + b$  a un unique point fixe d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$ .

\*\*\*\*\*

Les propriétés 1, 2 et 3 nous disent que les similitudes directes du plan complexe forment **un groupe non commutatif** pour la composition. **Dans la suite, on notera  $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$  ce groupe.**

Démonstration. La propriété 1 est évidente. Pour le point 2, si  $f(z) = az + b$  et  $g(z) = cz + d$  avec  $ac \neq 0$  alors

$$f \circ g(z) = a(cz + d) + b = acz + (ad + b), \quad g \circ f(z) = c(az + b) + d = acz + (bc + d).$$

Ainsi,  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont des similitudes, distinctes l'une de l'autre si  $ad + b \neq bc + d$ . De plus

$$(f(z) = az + b = \zeta) \iff \left(z = \frac{1}{a}\zeta - \frac{b}{a}\right) \quad \text{donc} \quad f^{-1}(\zeta) = \frac{1}{a}\zeta - \frac{b}{a}.$$

Ainsi  $f$  est bijective et  $f^{-1}$  est une similitude. Enfin, si  $a \neq 1$ , alors

$$(f(z) = az + b = z) \iff \left(z = \frac{b}{1-a}\right)$$

donc  $\omega = \frac{b}{1-a}$  est l'affixe de l'unique point fixe. □

**Nota Bene : Écriture canonique d'une similitude directe à centre**

Si  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$ ,  $f : z \mapsto az + b$  a une écriture unique en fonction de son point fixe :

$$f(z) = a(z - \omega) + \omega = az + (1 - a)\omega \quad \text{où } \omega = \frac{b}{1 - a} \text{ est l'afixe du point fixe } (f(\omega) = \omega).$$

**Proposition 1.5.18**

Une similitude directe (du plan complexe) est complètement déterminée de façon unique par deux points distincts  $M_1(z_1)$ ,  $M_2(z_2)$  et leurs images  $M'_1(z'_1)$  et  $M'_2(z'_2)$  (également distinctes).

Démonstration. Il suffit de voir que le système (d'inconnues  $a$  et  $b$ )

$$\begin{cases} az_1 + b = z'_1 \\ az_2 + b = z'_2 \end{cases}$$

admet une et une seule solution  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  (car  $z_1 \neq z_2$ ) avec  $a \neq 0$  (car  $z'_1 \neq z'_2$ ).  $\square$

**Les translations**

Si  $a = 1$ , la similitude  $f : z \mapsto az + b = z + b$  est une **translation** (de vecteur  $b \in \mathbb{C}$ ). La partie linéaire d'une translation est l'identité.

**Proposition 1.5.19: Premières propriétés des translations**

1. L'identité est une translation (de vecteur nul). Aucune autre translation n'a de point fixe.
2. La composée de deux translations est une translation. Cette composée est commutative.
3. La bijection réciproque d'une translation est aussi une translation.
4. La conjuguée  $f \circ t \circ f^{-1}$  d'une translation  $t$  par tout similitude  $f$  est une translation.

\*\*\*\*\*

Les translations forment un sous-groupe (commutatif) pour la composition. La propriété 4 nous dit que ce sous-groupe est **distingué (ou normal)**. Dans la suite, on notera  $T(\mathbb{C})$  ce sous-groupe.

Démonstration. Les trois premières propriétés sont évidentes.

Vérifions le point 4. Soit  $t : z \mapsto z + u$  une translation et  $f : z \mapsto az + b$  une similitude. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$z \xrightarrow{f^{-1}} \frac{z - b}{a} \xrightarrow{t} \frac{z - b}{a} + u \xrightarrow{f} z + au$$

donc  $z \mapsto f \circ t \circ f^{-1}(z) = z + au$  est une translation de vecteur  $au = \vec{f}(u)$ .  $\square$

**Proposition 1.5.20: Éléments géométriques conservés par translation**

1. l'alignement : une translation envoie donc toute droite sur une droite.
2. les directions : une translation envoie toute droite sur une droite parallèle.
3. les distances (on dit que c'est une **isométrie**), l'orientation (on dit que c'est un **déplacement** ou une **isométrie positive**) et par voie de conséquence, les angles orientés.  
Un cercle est envoyé sur un cercle de même rayon.

Démonstration. Soit  $t : z \mapsto z + c$  une translation. Si  $M_1, M_2$  ont pour affixes  $z_1, z_2$ , leurs images  $M'_1, M'_2$  ont pour affixes  $z'_1 = z_1 + c, z'_2 = z_2 + c$ . Ainsi  $\overrightarrow{M'_1 M'_2} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  car  $z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1$ . Les propriétés ci-dessus découlent immédiatement de cette remarque.  $\square$

### Les homothéties

Si  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ , la similitude  $h : z \mapsto kz + b$  est une **homothétie** du plan complexe. On inclut également dans les homothéties le cas de l'identité :  $k = 1$  et  $b = 0$ . La partie linéaire d'une homothétie est une **homothétie vectorielle**. Vue comme application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  en prenant la base  $(1, i)$  de  $\mathbb{C}$ ,  $\vec{h}$  a pour matrice

$$k\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est toujours positif donc elle conserve l'orientation.

**Attention** : c'est parce que la dimension est 2, qui est paire, que l'orientation est préservée lorsque  $k < 0$ . En dehors de l'identité, toute homothétie  $h : z \mapsto kz + b$  a un unique point fixe  $\Omega$ , d'affixe  $\omega = \frac{b}{k-1}$ . Le nombre réel  $k$  est appelé **rapport** de l'homothétie. Une homothétie différente de l'identité est donc caractérisée par son **centre** et son **rapport** : si  $M(z)$  et  $M'(h(z))$  alors

$$h(z) = k(z - \omega) + \omega = kz + (1 - k)\omega \quad \text{ou autrement dit } \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}.$$

On distingue deux types d'homothéties très particulières, qui conservent les distances (isométries) :

- l'identité lorsque  $k = 1$  et  $b = 0$  :  $f : z \mapsto z$  tous les points sont fixes
- les symétries centrales (de centre  $\omega$ ) lorsque  $k = -1$  :  $f : z \mapsto 2\omega - z$ .

#### Proposition 1.5.21: Premières propriétés des homothéties du plan complexe

1. La bijection réciproque d'une homothétie de centre d'affixe  $\omega$  et de rapport  $k$  est aussi une homothétie, de même centre et de rapport  $\frac{1}{k}$ .
2. La conjuguée  $f \circ h \circ f^{-1}$  d'une homothétie  $h$  par une similitude  $f$  est une homothétie de même rapport.
3. La composée  $h_1 \circ h_2$  (en général non commutative) de deux homothéties  $h_1$  et  $h_2$  de rapports respectifs  $k_1$  et  $k_2$  est
  - une homothétie de rapport  $k_1 k_2$  si  $k_1 k_2 \neq 1$ ;
  - une translation si  $k_1 k_2 = 1$ .

\*\*\*\*\*

**Attention** : l'ensemble  $H(\mathbb{C})$  des homothéties ne forment pas un sous-groupe pour la composition !

#### Démonstration.

1. si  $h(z) = k(z - \omega) + \omega$  on a déjà vu que  $h^{-1}(\zeta) = \frac{1}{k}(\zeta - \omega) + \omega$ .
2. Soit  $h : z \mapsto k(z - \omega) + \omega = kz + (1 - k)\omega$  une homothétie et  $f : z \mapsto az + b$  une similitude. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$z \xrightarrow{f^{-1}} \frac{z - b}{a} \xrightarrow{h} k \frac{z - b}{a} + (1 - k)\omega \xrightarrow{f} kz + (1 - k)(a\omega + b)$$

donc  $z \mapsto f \circ h \circ f^{-1}(z) = kz + (1 - k)(a\omega + b)$  est une homothétie de rapport  $k$  et de centre d'affixe  $f(\omega) = a\omega + b$ .

3. Soient  $h_1 : z \mapsto k_1(z - \omega_1) + \omega_1$  et  $h_2 : z \mapsto k_2(z - \omega_2) + \omega_2$  deux homothéties. Alors

$$z \xrightarrow{h_2} k_2 z + (1 - k_2)\omega_2 \xrightarrow{h_1} k_1 k_2 z + k_1(1 - k_2)\omega_2 + (1 - k_1)\omega_1$$

- si  $k_1 k_2 = 1$ , cette composée  $h_1 \circ h_2$  est une translation de vecteur  $(k_1 - 1)(\omega_2 - \omega_1)$
- si  $k_1 k_2 \neq 1$ , c'est une homothétie de rapport  $k_1 k_2$  et de centre le point d'affixe

$$\frac{1 - k_1}{1 - k_1 k_2} \omega_1 + \frac{k_1 - k_1 k_2}{1 - k_1 k_2} \omega_2.$$

Remarque : généralement  $h_1 \circ h_2 \neq h_2 \circ h_1$  (les indices 1 et 2 n'ont pas des rôles symétriques). □

**Proposition 1.5.22: Éléments géom. conservés par homothétie du plan complexe**

1. L'alignement : une homothétie envoie toute droite sur une droite ;
2. Les directions : une homothétie envoie toute droite sur une droite parallèle ;
3. Une homothétie de rapport  $k$  multiplie les distances par  $|k|$  et conserve l'orientation. Par voie de conséquence, elle conserve les angles orientés (on dit que ce sont des applications **conformes**). Un cercle de rayon  $r$  est envoyé sur un cercle de rayon  $|k| \times r$ .

Démonstration. Soit  $h : z \mapsto k(z - \omega) + \omega$  une homothétie. Si  $M_1, M_2$  sont deux points d'affixes  $z_1$  et  $z_2$ , leurs images  $M'_1, M'_2$  ont pour affixes  $z'_1 = k(z_1 - \omega) + \omega$  et  $z'_2 = k(z_2 - \omega) + \omega$ . Ainsi  $\overrightarrow{M'_1 M'_2} = k \overrightarrow{M_1 M_2}$  car  $z'_2 - z'_1 = k(z_2 - z_1)$ . Les propriétés ci-dessus découlent de cette remarque.  $\square$

**Corollaire 1.5.23: Le théorème de Thalès pour des triangles**

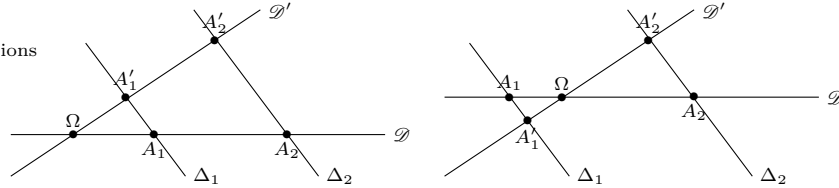
Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites sécantes en un point  $\Omega(\omega)$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux droites sécantes avec  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  en dehors du point  $\Omega$ . On note respectivement  $M_1(z_1)$  et  $M'_1(z'_1)$  les points d'intersection de  $\Delta_1$  avec  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ ,  $M_2(z_2)$  et  $M'_2(z'_2)$  les points d'intersection de  $\Delta_2$  avec  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

1. si  $\Delta_1$  est parallèle à  $\Delta_2$  alors on a égalité des rapports (réels)

$$\frac{\overline{\Omega M_2}}{\overline{\Omega M_1}} = \frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega} = \frac{z'_2 - \omega}{z'_1 - \omega} = \frac{\overline{\Omega M'_2}}{\overline{\Omega M'_1}}.$$

2. Réciproquement, si on a égalité des rapports réels  $\frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}$  et  $\frac{z'_2 - \omega}{z'_1 - \omega}$  alors  $\Delta_2$  est parallèle à  $\Delta_1$ .

Les deux configurations  
de Thalès



Démonstration.

1. L'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k = \frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}$  envoie  $M_1$  sur  $M_2$  et donc envoie la droite  $\Delta_1$ , contenant  $M_1$ , sur une droite qui lui est parallèle, contenant  $M_2$ , c'est à dire  $\Delta_2$ . D'autre part toute droite passant par  $\Omega$  est globalement conservée (puisque qu'une telle droite est envoyée sur une droite qui lui est parallèle et passant par  $\Omega$  puisqu'il est fixe). Donc  $M'_1 \in \mathcal{D}' \cap \Delta_1$  est envoyé sur l'unique point de l'intersection  $\mathcal{D}' \cap \Delta_2$  c'est à dire  $M'_2$ . Par conséquent :

$$k = \frac{z'_2 - \omega}{z'_1 - \omega}.$$

2. Réciproquement, l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega} = \frac{z'_2 - \omega}{z'_1 - \omega}$  envoie  $M_1$  sur  $M_2$  et  $M'_1$  sur  $M'_2$  donc  $\Delta_1$  sur  $\Delta_2$ . Donc ces droites sont parallèles.  $\square$

**Proposition 1.5.24: Groupe des homothéties-translations**

L'ensemble  $\text{HT}(\mathbb{C}) = \text{H}(\mathbb{C}) \cup \text{T}(\mathbb{C})$  constitué des homothéties et des translations du plan complexe est un sous-groupe non commutatif de  $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ . Le rapport d'une homothétie-translation est le rapport de l'homothétie si c'en est une et 1 si c'est une translation.

Ce sous-groupe  $\text{HT}(\mathbb{C})$  de  $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$  est le **groupe des homothéties-translations** (ou parfois des **dilatations**, dénomination trompeuse car utilisée dans d'autres contextes).

Il satisfait les propriétés suivantes (la plupart sont déjà démontrées) :

1.  $\text{HT}(\mathbb{C})$  est invariant par conjugaison (c'est un sous-groupe distingué), c'est à dire si  $f \in \text{Sim}^+(\mathbb{C})$  et  $g \in \text{HT}(\mathbb{C})$ , alors  $f \circ g \circ f^{-1} \in \text{HT}(\mathbb{C})$  (cf. propositions 1.5.19 et 1.5.21).
2.  $\text{T}(\mathbb{C})$  est un sous-groupe distingué de  $\text{HT}(\mathbb{C})$  (cas particulier de la proposition 1.5.19).
3. Une similitude directe est une homothétie-translation si et seulement si sa partie linéaire est une homothétie vectorielle (cf. définition 1.5.16).
4. Une homothétie-translation envoie toute droite sur une droite parallèle, et ce sont les seules similitudes directes à satisfaire cette propriété (c'est conséquence du point précédent : conservation de la direction vectorielle).
5. Considérons les éléments suivants de  $\text{HT}(\mathbb{C})$  :  $h_1 : z \mapsto k_1 z + (1 - k_1)\omega_1$ ,  $h_2 : z \mapsto k_2 z + (1 - k_2)\omega_2$ , ( $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ )  $t_1 : z \mapsto z + u_1$  et  $t_2 : z \mapsto z + u_2$ . Par composition, on obtient :
  - $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1 : z \mapsto z + (u_1 + u_2)$  est une translation de vecteur  $u_1 + u_2$  ;
  - $h_1 \circ t_2 : z \mapsto k_1(z + u_2) + (1 - k_1)\omega_1 = k_1 z + (1 - k_1)\left(\omega_1 - \frac{k_1}{1 - k_1}u_2\right)$  est une homothétie de rapport  $k_1$  et de centre d'axe  $\omega_1 - \frac{k_1}{1 - k_1}u_2$  ;
  - $t_2 \circ h_1 : z \mapsto k_1 z + (1 - k_1)\omega_1 + u_2 = k_1 z + (1 - k_1)\left(\omega_1 + \frac{1}{1 - k_1}u_2\right)$  est une homothétie de rapport  $k_1$  et de centre d'axe  $\omega_1 + \frac{1}{1 - k_1}u_2$  ;
  - $h_1 \circ h_2 : z \mapsto k_1 k_2 z + k_1(1 - k_2)\omega_2 + (1 - k_1)\omega_1$  est
    - une translation de vecteur  $(k_1 - 1)(\omega_2 - \omega_1)$  si  $k_1 k_2 = 1$  ;
    - une homothétie de rapport  $k_1 k_2$  et de centre d'axe  $\omega = \frac{1 - k_1}{1 - k_1 k_2}\omega_1 + \frac{k_1 - k_1 k_2}{1 - k_1 k_2}\omega_2$  si  $k_1 k_2 \neq 1$ .
6. Les homothéties ne forment pas un sous-groupe, cependant l'ensemble  $H_\omega(\mathbb{C})$  des homothéties fixant un même point d'axe  $\omega$  forment un sous-groupe de  $\text{HT}(\mathbb{C})$  et donc de  $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ , qui n'est distingué ni dans l'un ni dans l'autre : si  $f$  est une similitude et  $h \in H_\omega(\mathbb{C})$ , alors  $f \circ h \circ f^{-1} \in H_{f(\omega)}(\mathbb{C})$ .

### Proposition 1.5.25: Relation vectorielle caractéristique d'une homothétie-translation

Soient  $A(a), B(b), A'(a'), B'(b')$  quatre points du plan tels que  $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ,  $k \neq 0$ . Alors l'unique similitude directe envoyant  $A$  sur  $A'$  et  $B$  sur  $B'$  est une homothétie-translation. Plus précisément :

- si  $k = 1$ , c'est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$  d'axe  $a' - a = b' - b$  ;
- si  $k \neq 1$ , c'est une homothétie de rapport  $k = \frac{a' - b'}{b - a}$ , et si les quatre points  $A, A', B, B'$  ne sont pas alignés, le centre est le point  $\Omega$  d'axe  $\omega = b' - kb = a' - ka$ , situé à l'intersection des deux droites  $(AA')$  et  $(BB')$  (configuration de Thalès).

### Théorème 1.5.26: Théorème de Thalès

Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites non confondues et  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  trois droites sécantes avec  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  aux points  $M_1(z_1), M'_1(z'_1), M_2(z_2), M'_2(z'_2), M_3(z_3), M'_3(z'_3)$  ( $M_i \in \mathcal{D} \cap \Delta_i$  et  $M'_i \in \mathcal{D}' \cap \Delta_i$ , pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ ). On suppose  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  strictement parallèles.

1. Si  $\Delta_3$  est parallèle à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  alors on a égalité des rapports (réels)

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1}.$$

2. Réciproquement, si on a égalité des rapports (réels)  $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1}$  alors  $\Delta_3$  est parallèle à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

Démonstration. Si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles la translation  $t$  de vecteur  $\overrightarrow{M_1 M'_1}$  envoie  $M_2$  sur  $M_2'$  :

$$\overrightarrow{M_1 M'_1} = \overrightarrow{M_2 M'_2} \quad \text{donc} \quad z'_1 - z_1 = z'_2 - z_2 \quad \text{ou encore} \quad z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1.$$

Alors  $\Delta_3$  est parallèle à  $\Delta_1$  si et seulement si  $t(M_3) = M'_3$  c'est à dire  $\overrightarrow{M_3 M'_3} = \overrightarrow{M_1 M'_1}$  autrement dit si et seulement si  $z'_3 - z_3 = z'_1 - z_1 = z'_2 - z_2$  c'est à dire :

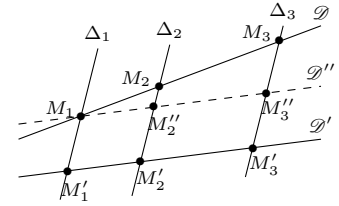
$$\frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ne sont pas parallèles, on introduit la droite  $\mathcal{D}''$  parallèle à  $\mathcal{D}'$  en  $A_1$ , intersectant  $\Delta_2$  en  $M''_2$  et  $\Delta_3$  en  $M''_3$ . On se ramène d'une part au cas précédent avec les droites  $\mathcal{D}'$  et  $\mathcal{D}''$  :

$$\Delta_3 \text{ est parallèle à } \Delta_1 \text{ si et seulement si} \quad \frac{z''_3 - z_1}{z''_2 - z_1} = \frac{z'_3 - z'_1}{z'_2 - z'_1}$$

et en vertu du **théorème de Thalès dans le triangle** pour les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}''$  :

$$\Delta_3 \text{ est parallèle à } \Delta_2 \text{ si et seulement si} \quad \frac{z''_3 - z_1}{z''_2 - z_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$



Ce qui donne le théorème de Thalès et sa réciproque. □

### Exercice 1.5.27

En exercice, démontrer les théorèmes suivants en utilisant les homothéties-translations.

### Théorème 1.5.28: Théorème de Desargues affine

Soient  $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$  trois droites non confondues et  $A, B$  deux points de  $\mathcal{D}$ ,  $A', B'$  deux points de  $\mathcal{D}'$ ,  $A'', B''$  deux points de  $\mathcal{D}''$ .

1. Si les trois droites  $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$  sont parallèles ou concourantes alors

$$((AA') \parallel (BB') \text{ et } (A'A'') \parallel (B'B'')) \implies ((AA'') \parallel (BB'')).$$

2. Réciproquement, si  $(AA') \parallel (BB')$ ,  $(A'A'') \parallel (B'B'')$  et  $(AA'') \parallel (BB'')$  alors les trois droites  $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$  sont parallèles ou concourantes.

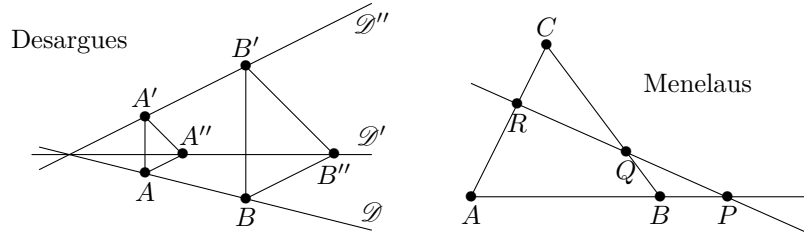
Indication : on suppose  $(AA') \parallel (BB')$  et  $(A'A'') \parallel (B'B'')$  et on considère l'homothétie-translation envoyant  $A$  sur  $B$  et  $A'$  sur  $B'$ .

### Théorème 1.5.29: Théorème de Menelaus

Soit  $ABC$  un triangle non aplati et  $P, Q, R$  trois points distincts de  $A, B$  et  $C$  situés de façon suivante :  $P \in (AB)$   $Q \in (BC)$   $R \in (CA)$ . Les points  $P, Q, R$  sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \times \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \times \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = 1.$$

Indication : on considère la composée des trois homothéties  $h_P$  de centre  $P$ ,  $h_Q$  de centre  $Q$ ,  $h_R$  de centre  $R$ , envoyant respectivement  $A$  sur  $B$ ,  $B$  sur  $C$  et  $C$  sur  $A$  : on remarque qu'elle a nécessairement un point fixe parmi  $A, B$  ou  $C$ .



### Les rotations

Si  $|a| = 1$  et  $a \neq 1$ , la similitude  $\rho : z \mapsto az + b$  est une **rotation** du plan complexe. On inclut également dans les rotations le cas de l'identité :  $a = 1$  et  $b = 0$ . La partie linéaire d'une rotation est une **rotation vectorielle**. Vue comme application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  en prenant la base  $(1, i)$  de  $\mathbb{C}$ ,  $\vec{\rho}$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a) & -\operatorname{Im}(a) \\ \operatorname{Im}(a) & \operatorname{Re}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad a = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Son déterminant vaut 1 donc elle conserve l'orientation.

En dehors de l'identité, toute rotation  $\rho : z \mapsto e^{i\theta}z + b$  ( $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ ) a un unique point fixe  $\Omega$ , d'affixe  $\omega = \frac{b}{1 - e^{i\theta}}$ . Le nombre réel  $\theta$  est appelé **angle** (mesure d'angle) de la rotation. Une rotation différente de l'identité est donc caractérisée par son **centre** et son **angle** : si  $M(z)$  et  $M'(\rho(z))$  alors

$$\rho(z) = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega \quad \text{c'est à dire } \rho(z) - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) : \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \text{mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$$

On distingue deux types de rotations très particulières :

- l'identité lorsque  $a = 1$  et  $b = 0$  :  $f : z \mapsto z$  tous les points sont fixes
- les symétries centrales (de centre  $\Omega(\omega)$ , d'angle  $\pi$ ) lorsque  $a = -e^{i\pi}$  :  $f : z \mapsto 2\omega - z$ .

### Proposition 1.5.30: Premières propriétés des rotations du plan complexe

1. La bijection réciproque d'une rotation de centre d'affixe  $\omega$  et d'angle de mesure  $\theta$  est aussi une rotation, de même centre et d'angle de mesure  $-\theta$
2. La conjuguée  $f^{-1} \circ \rho \circ f$  d'une rotation  $\rho$  par une similitude  $f$  est une rotation de même angle.
3. La composée  $\rho_1 \circ \rho_2$  (en général non commutative) de deux rotations  $\rho_1$  et  $\rho_2$  d'angles respectifs  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est
  - une rotation d'angle  $\theta_1 + \theta_2$  si  $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$  ;
  - une translation si  $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

\*\*\*\*\*

**Attention** : l'ensemble  $R(\mathbb{C})$  des rotations ne forment pas un sous-groupe pour la composition !

Démonstration. Elle est assez semblable à celle de la **proposition 1.5.21**

1. si  $\rho(z) = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$  on a déjà vu que  $\rho^{-1}(\zeta) = e^{-i\theta}(\zeta - \omega) + \omega$ .
2. Soit  $\rho : z \mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega = e^{i\theta}z(1 - e^{i\theta})\omega$  une rotation et  $f : z \mapsto az + b$  une similitude. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$z \xrightarrow{f^{-1}} \frac{z - b}{a} \xrightarrow{\rho} e^{i\theta} \frac{z - b}{a} + (1 - e^{i\theta})\omega \xrightarrow{f} e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})(a\omega + b)$$

donc  $z \mapsto f \circ \rho \circ f^{-1}(z) = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})(a\omega + b)$  est une rotation d'angle de mesure  $\theta$  et de centre d'affixe  $f(\omega) = a\omega + b$ .



3. Soient  $\rho_1 : z \mapsto e^{i\theta_1}(z - \omega_1) + \omega_1$  et  $\rho_2 : z \mapsto e^{i\theta_2}(z - \omega_2) + \omega_2$  deux rotations. Alors

$$z \xrightarrow{\rho_2} e^{i\theta_2}z + (1 - e^{i\theta_2})\omega_2 \xrightarrow{\rho_1} e^{i(\theta_1+\theta_2)}z + e^{i\theta_1}(1 - e^{i\theta_2})\omega_2 + (1 - e^{i\theta_1})\omega_1$$

donc

- si  $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$ , cette composée  $\rho_1 \circ \rho_2$  est une translation de vecteur  $(e^{i\theta_1} - 1)(\omega_2 - \omega_1)$
- si  $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$ , c'est une rotation d'angle de mesure  $\theta_1 + \theta_2$  et de centre le point d'affixe

$$\frac{1 - e^{i\theta_1}}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}}\omega_1 + \frac{e^{i\theta_1} - e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}}\omega_2.$$

Remarque : généralement  $\rho_1 \circ \rho_2 \neq \rho_2 \circ \rho_1$  (les indices 1 et 2 n'ont pas des rôles symétriques). □

### Proposition 1.5.31: Éléments géom. conservés par rotation du plan complexe

1. l'alignement : une rotation envoie toute droite sur une droite ;
2. les distances (c'est une **isométrie**), l'orientation (c'est un **déplacement** ou une **isométrie positive**) et par voie de conséquence, les angles orientés.  
Un cercle est envoyé sur un cercle de même rayon.

Démonstration. Soit  $\rho : z \mapsto k(z - \omega) + \omega$  une rotation. Si  $M_1, M_2$  sont deux points d'affixes  $z_1$  et  $z_2$ , leurs images  $M'_1, M'_2$  ont pour affixes  $z'_1 = e^{i\theta}(z_1 - \omega) + \omega$  et  $z'_2 = e^{i\theta}(z_2 - \omega) + \omega$ . Ainsi  $z'_2 - z'_1 = e^{i\theta}(z_2 - z_1)$ , donc  $M'_1M'_2 = |z'_2 - z'_1| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$ . Les propriétés ci-dessus découlent immédiatement de cette remarque. □

### Proposition 1.5.32: Groupe des déplacements

L'ensemble  $\text{Is}^+(\mathbb{C}) = \text{R}(\mathbb{C}) \cup \text{T}(\mathbb{C})$  constitué des rotations et des translations du plan complexe est un sous-groupe non commutatif de  $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ .

Ce sous-groupe de  $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$  est le **groupe des déplacements**, ou des **isométries positives**.

Il satisfait les propriétés suivantes (la plupart sont déjà démontrées) :

1.  $\text{Is}^+(\mathbb{C})$  est invariant par conjugaison (c'est un sous-groupe distingué), c'est à dire si  $f \in \text{Sim}^+(\mathbb{C})$  et  $g \in \text{Is}^+(\mathbb{C})$ , alors  $f \circ g \circ f^{-1} \in \text{Is}^+(\mathbb{C})$  (cf. propositions 1.5.19 et 1.5.30).
2.  $\text{T}(\mathbb{C})$  est un sous-groupe distingué de  $\text{Is}^+(\mathbb{C})$  (cas particulier de la proposition 1.5.19).
3. Une similitude directe est un déplacement si et seulement si sa partie linéaire est une rotation vectorielle (cf. définition 1.5.16).
4. Un déplacement envoie toute droite sur une droite et tout cercle sur un cercle de même rayon (ce sont les seules similitudes directes satisfaisant cette propriété)
5. Considérons les éléments suivants de  $\text{Is}^+(\mathbb{C})$  :  
 $\rho_1 : z \mapsto e^{i\theta_1}z + (1 - e^{i\theta_1})\omega_1$ ,  $\rho_2 : z \mapsto e^{i\theta_2}z + (1 - e^{i\theta_2})\omega_2$ ,  $t_1 : z \mapsto z + u_1$  et  $t_2 : z \mapsto z + u_2$ . Par composition, on obtient :
  - $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1 : z \mapsto z + (u_1 + u_2)$  est une translation de vecteur  $u_1 + u_2$  ;
  - $\rho_1 \circ t_2 : z \mapsto e^{i\theta_1}(z + u_2) + (1 - e^{i\theta_1})\omega_1 = e^{i\theta_1}z + (1 - e^{i\theta_1})\left(\omega_1 - \frac{e^{i\theta_1}}{1 - e^{i\theta_1}}u_2\right)$  est une rotation d'angle  $\theta_1$  et de centre d'affixe  $\omega_1 - \frac{e^{i\theta_1}}{1 - e^{i\theta_1}}u_2$  ;
  - $t_2 \circ \rho_1 : z \mapsto e^{i\theta_1}z + (1 - e^{i\theta_1})\omega_1 + u_2 = e^{i\theta_1}z + (1 - e^{i\theta_1})\left(\omega_1 + \frac{1}{1 - e^{i\theta_1}}u_2\right)$  est une rotation d'angle  $\theta_1$  et de centre d'affixe  $\omega_1 + \frac{1}{1 - e^{i\theta_1}}u_2$  ;
  - $\rho_1 \circ \rho_2 : z \mapsto e^{i(\theta_1+\theta_2)}z + e^{i\theta_1}(1 - e^{i\theta_2})\omega_2 + (1 - e^{i\theta_1})\omega_1$  est

- soit une translation de vecteur  $(e^{i\theta_1} - 1)(\omega_2 - \omega_1)$  si  $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$  ;
  - soit une rotation d'angle  $\theta_1 + \theta_2$  et de centre d'affixe  $\omega = \frac{1 - e^{i\theta_1}}{1 - e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}\omega_1 + \frac{e^{i\theta_1} - e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}{1 - e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}\omega_2$  si  $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$ .
6. Les rotations ne forment pas un sous-groupe, cependant l'ensemble  $R_\omega(\mathbb{C})$  des rotations fixant un même point d'affixe  $\omega$  forment un sous-groupe de  $\text{Is}^+(\mathbb{C})$  et donc de  $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ , qui n'est distingué ni dans l'un ni dans l'autre : si  $f$  est une similitude et  $\rho \in R_\omega(\mathbb{C})$ , alors  $f \circ \rho \circ f^{-1} \in R_{f(\omega)}(\mathbb{C})$ .

**Propriétés générales des similitudes directes**

Remarque :  $\text{HT}_\omega(\mathbb{C}) \cap \text{Is}^+(\mathbb{C})$  est l'ensemble des demi-tours (symétries centrales)  $z \mapsto 2\omega - z$  auquel on adjoint les translations. C'est un sous-groupe distingué de  $\text{HT}_\omega(\mathbb{C})$ , de  $\text{Is}^+(\mathbb{C})$  et de  $\text{Sim}^+(\mathbb{C})$ .

**Théorème 1.5.33: Décomposition d'une similitude**

1. Toute similitude directe du plan complexe est la composée de translations, de rotations et d'homothéties (on dit que ces transformations **engendrent** le groupes des similitudes directes).
2. Toute similitude qui n'est pas une translation se décompose de façon unique en la composée commutative d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation. De plus cette homothétie et cette rotation ont même centre.

Démonstration.

1. Soit  $f : z \mapsto az + b$ ,  $a \neq 0$  une similitude. On pose  $k = |a|$  et  $e^{i\theta} = \frac{a}{k}$ . Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$z \xrightarrow{\rho} e^{i\theta} z \xrightarrow{h} ke^{i\theta} z = az \xrightarrow{t} az + b \quad \text{donc } f = t \circ h \circ \rho.$$

2. Si  $f : z \mapsto az + b$  n'est pas une translation, alors  $a \neq 1$  et  $\omega = \frac{b}{1-a}$  est point fixe. On pose  $k = |a|$  et  $e^{i\theta} = \frac{a}{k}$ . Alors  $f$  est la composée commutative de la rotation  $\rho$  d'angle  $\theta$  et de l'homothétie  $h$  de rapport  $k$  qui ont pour centre commun le point d'affixe  $\omega$ .

$$z \xrightarrow{\rho} e^{i\theta}(z - \omega) + \omega \xrightarrow{h} ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega = a(z - \omega) + \omega = az + b$$

$$z \xrightarrow{h} k(z - \omega) + \omega \xrightarrow{\rho} ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega = a(z - \omega) + \omega = az + b$$

Si maintenant  $f = h_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ h_1$  où  $h_1$  est une homothétie de rapport positif et de centre  $\omega_1$  et  $\rho_2$  une rotation de centre  $\omega_2$  alors  $h_1 \circ \rho_2(\omega_1) = \rho_2 \circ h_1(\omega_1) = \rho_2(\omega_1)$  donc  $\rho_2(\omega_1)$  est fixe par  $h_1$ . Ainsi,

- soit  $h_1 = \text{id}_{\mathbb{C}}$  auquel cas  $f = \rho_2$ , et donc  $k = 1$ ,  $h = h_1 = \text{id}_{\mathbb{C}}$  et  $\rho_2 = \rho$  ;
- soit  $\rho_2 = \text{id}_{\mathbb{C}}$  auquel cas  $f = h_1$ , et donc  $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ ,  $\rho = \rho_2 = \text{id}_{\mathbb{C}}$  et  $h_1 = h$  ;
- soit  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Dans ce cas, on a de façon évidente que  $h_1 = h$  et  $\rho_2 = \rho$ .

□

**Nota Bene**

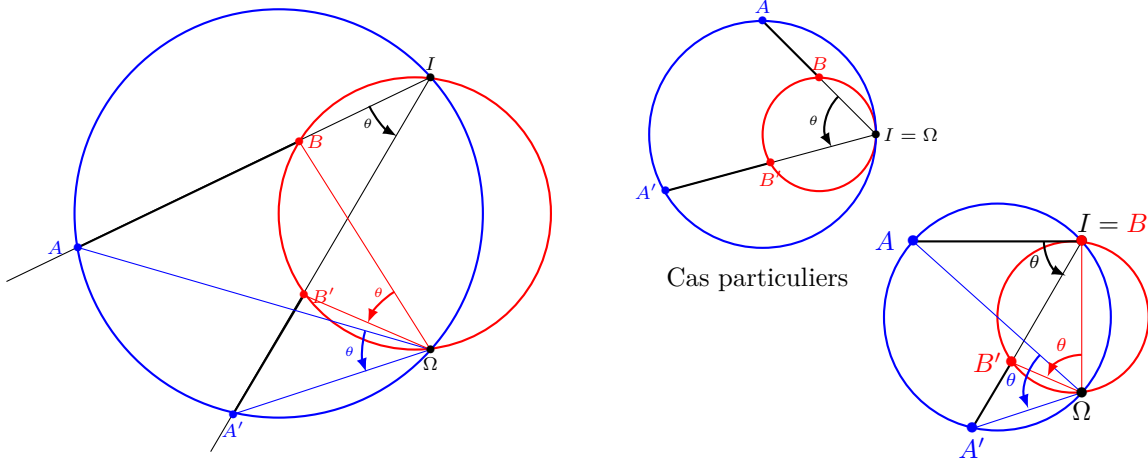
- Soit  $f : z \mapsto az + b$  ( $a \neq 0$ ) une similitude complexe. Si  $f$  n'est pas une translation ( $a \neq 1$ ),  $f$  est caractérisée par son centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$ , son rapport (positif)  $k = |a|$ , son angle de mesure  $\theta = \arg a$ .  
Vue comme application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  en prenant la base  $(1, i)$  de  $\mathbb{C}$ , la partie linéaire  $\vec{f}$  de  $f$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a) & -\operatorname{Im}(a) \\ \operatorname{Im}(a) & \operatorname{Re}(a) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- Son déterminant vaut  $k^2 > 0$  donc elle conserve l'orientation.
- Les similitudes directes du plan complexe
  1. conservent l'alignement : une droite de vecteur directeur  $u$  est envoyée sur une droite de vecteur directeur  $e^{i\theta}u$ .
  2. multiplient les distances par leur rapport  $k > 0$ , les aires par  $k^2$  ;  
conserve l'orientation, les angles orientés (applications **conformes**) ;  
envoient un cercle de rayon  $r$  sur un cercle de rayon  $k \times r$ .
- Une similitude directe (du plan complexe) est complètement déterminée de façon unique par deux points distincts et leurs images (également distinctes).
- Étant donnés deux triangles non équilatéraux ayant les mêmes angles orientés aux sommets (triangles semblables). Il existe une unique similitude directe envoyant le premier triangle sur le second.

**Centre d'une similitude donnée par deux points distincts  $A$  et  $B$  et leurs images  $A'$  et  $B'$ .**

Dans le cas générique où  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont sécantes en  $I \notin \{A, B, A', B'\}$ , et les cercles circonscrits aux triangles  $AA'I$  et  $BB'I$  s'intersectent en  $I$  et un autre point  $\Omega$ . Alors  $\Omega$  est centre de la similitude envoyant  $A$  sur  $A'$  et  $B$  sur  $B'$ .



Cas particuliers :

- Si  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont sécantes en  $I \notin \{A, B, A', B'\}$ , et les cercles circonscrits aux triangles  $AA'I$  et  $BB'I$  sont tangents en  $I$ , alors  $\Omega = I$  est centre de la similitude envoyant  $A$  sur  $A'$  et  $B$  sur  $B'$ .
- Si  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont sécantes en  $I \in \{A, B, A', B'\}$ , par exemple  $I = B$  le cercle circonscrit au triangle  $AA'I$  intersecte le cercle tangent à  $[AB]$  en  $I = B$  passant par  $B'$  et  $\Omega$  centre de la similitude envoyant  $A$  sur  $A'$  et  $B$  sur  $B'$  (situation semblable pour  $I = A$ ,  $I = A'$  ou  $I = B'$ ).
- Reste le cas où  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont parallèles auquel cas la similitude est une homothétie-translation, cas déjà traité dans la [proposition 1.5.25](#)