Université des Sciences et de la technologie USTO-MB.
Faculté des Mathématiques-Informatique.
1ère Année MI

Examen final d'Analyse 1

Mardi 15/ 01/ 2019 Durée: 1h30min

Les calculatrices, téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in N}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{11}{4} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - \frac{7}{4}} + \frac{5}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que : $\frac{5}{2} < u_n < 4$, $\forall n \in N$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in N}$.
3. Déduire la convergence de $(u_n)_{n\in N}$ puis calculer sa limite.
4. Soit l'ensemble $E = \{u_n \ , n \in N\}$, déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice2. Considérons f la fonction définie de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, puis calculer sa dérivée sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. En utilisant le théorème des accroissements finis; montrer que pour tout x, tel que $0 < x \leq \frac{1}{2}$

$$f(x) < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

en déduire que f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

4. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , et qu'elle est continue et strictement croissante.
5. Déterminer $D_{f^{-1}}$ le domaine de définition de f^{-1}

NB. Il n'est pas demandé de calculer $f^{-1}(x)$.

Exercice3.

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$ et G_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
2. Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f admet un point d'inflexion A et préciser ses coordonnées .
4. Quelle est l'équation de la tangente (T_A) à G_f au point A?
   En déduire que pour tout $x \geq 1$: $e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2+1)$.

Bon courage