Dimanche 13 Janvier 2019 Analyse I. Semestre 01

كلية العلوم الدقيقة
جامعة جيلالي ليابس

Faculté des Sciences Exactes
Université Djillali Liabès

EXAMEN D'ANALYSE N° 1

DURÉE 1h 30mn.

Exercice 1 Soit la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x+2)$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. Soit la suite u_n définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et la donnée du premier terme $u_0 = 3$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq -1$
3. Etudier la monotonie de cette suite .
4. Est-elle convergente ?. Si oui ; quelle est sa limite ?
5. On se donne la suite

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_n = \ln[(u_0+2)(u_1+2).......(u_{n-1}+2)], \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n = 3 - u_n$.

6. En déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (u_0+2)(u_1+2).....(u_{n-1}+2)$ e^4

Exercice 2 Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{60}$

Exercice 3 Pour quelles conditions la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^n sin\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0; \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

1. est continue en 0 ?
2. est dérivable en 0 ?
3. a une dérivée continue en 0 ?

Exercice 4 *Calculer* $(x \sinh x)^{(100)}$*puis former le déveleoppement de Mac-Laurin (au voisinage de 0)*

BON COURAGE