جامعة منشوري قسنطينية

كلية العلوم- هيكل الجدع المشتراك للعلوم الدقيقة

التكتولوجيا والإعلام الآلي

الامتحان اللصلي قياري 2008

التطيل ا MIAS

المتمرين1

المانا کان
$$Z^n + \frac{1}{Z^n} = 2\cos n \arg Z$$
 نان $\overline{Z} + \frac{1}{\overline{Z}} = 2\cos \arg Z$ المانا -1

بنا کان
$$Z'=\frac{Z}{1+|Z|}$$
 فین $Z'=\frac{Z}{1+|Z|}$ لملاا۲

المجان المجان على
$$\frac{1+ia}{1-ia} = \cos\theta - i\sin\theta$$
 المجان على $a = tg\frac{\theta}{2}$ م

4. إذا كانت المنتقلية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناهسة ومحدودة من الأدنى فإنها منتقلية محدودة.

$$(u_n \cdot v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$
 متقاربة وكانت المنتقبة العددية $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وكانت المنتقبة العددية

متقاربة فان المنتقليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان لمانا؟

التعرين2

رجدها الأعلى وحدها الأنثى.
$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{(-1)^{m+1}}{n}, \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
 ارجد حدما الأعلى وحدها الأنثى.

$$|Z| < 1$$
 نان نام الس $|Z| > 0$ نان نام الس $|Z| > 0$ نام السام ال

ئتىرىن3

 $n \in \mathbb{N}$ لئكن المنتقلية المديوة $u_n = 1$ المعرفة ب $u_n = 1$ ومن أجل التكن المنتقلية المديوة

$$u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$$

$$f(x) = \frac{3+2x}{2+x}$$
 :-1

$$f(x) \ge 1$$
 بر هن أنه إذا كان $1 \le x \ge 1$ فإن أنه إذا كان (a

$$u_n \ge 1$$
 اثبت أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، $n \in \mathbb{N}$ موجودة و (b

سار سنبع

2 إذا كانت المنتقلية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، كيف تكون نهايتها؟ 3 أثبت أن المتقالية محدودة من الأجلى بـ: 3 4 حدد اتجاء تغير المتقلية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ماذا تستنتج؟

 $v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$:... $n \in \mathbb{N}$ بالمعرفة من أجل $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بالمحرفة المعرفة من أجل $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بالمحرفة من حدها الأول وأسلسها. (a) متالية هندسية عين حدها الأول وأسلسها. ($(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

بالنوطيف

<u>التمزين 1</u>

1۔ نعلم ان

$$\overline{Z} = \overline{Z} \left(\cos \arg \overline{Z} + i \sin \arg \overline{Z} \right) - \overline{Z} \left(\cos(-\arg Z) + i \sin(-\arg Z) \right)$$

$$= \overline{Z} \left(\cos(\arg Z) - i \sin(\arg Z) \right) \wedge \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{\cos(\arg Z) + i \sin(\arg Z)}{|Z|}$$

$$= \sqrt{Z} + \frac{1}{\overline{Z}} = \left(Z! + \frac{1}{|Z|} \right) \cos(\arg Z) - i \left(|Z| - \frac{1}{|Z|} \right) \sin(\arg Z) = 2 \cos \arg Z \rightarrow$$

$$= \overline{Z} + \frac{1}{|Z|} = 0 \Rightarrow \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|} = \frac{(|Z| - 1)(|Z| + 1)}{|Z|} = 0 \Rightarrow |Z| = 1$$

وعليه فإن

$$Z^{n} - Z^{n} \{\cos n \arg Z + i \sin n \arg Z\} = \cos n \arg Z + i \sin n \arg Z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z^{n}} = \cos n \arg Z - i \sin n \arg Z$$

$$\Rightarrow Z^{n} + \frac{1}{Z^{n}} = \cos n \arg Z + i \sin n \arg Z + \cos n \arg Z - i \sin n \arg Z$$

$$= 2 \cos n \arg Z$$

2۔ نعلم ان

cos arg
$$Z' - \frac{X'}{Z'} - \frac{\frac{|X|}{|X|}}{\frac{|X|}{|X|}} - \frac{X}{|Z|} - \cos \operatorname{arg} Z$$

$$\Rightarrow \operatorname{arg} Z' = \operatorname{arg} Z$$

$$\sin \operatorname{arg} Z' - \frac{Y'}{|Z'|} - \frac{1+|Z|}{\frac{|Z|}{|X|}} - \frac{y}{|Z|} - \sin \operatorname{arg} Z$$

3_ لنينا:

$$\left\langle \frac{1+ia}{1-ia} - \frac{1+itg\frac{\theta}{2}}{1-itg\frac{\theta}{2}} - \frac{\left(1+itg\frac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(ig\frac{\theta}{2}\right)^2} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(1-\left(ig\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2itg\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\left\langle -\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\left(\sin^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos^2\theta$$

ig(ig)منتاقصمة نعني بنكك أن $u_n \leq u_0 o au_n ig
otag$ أي محدودة من الاعلى ويما أتيا $(u_n)_{mn} = 4$ $(\sqrt{\sqrt{u_n}} = (-1)^n \wedge v_n = (-1)^{n+1}]$ 25 -5 $\exists q. p. n \in IN^* \Rightarrow \frac{1}{q} \le 1, \frac{1}{p} \le 1 \land \frac{1}{n} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \le 3 \Rightarrow -6$ $\exists q. p. n \in IN^* \Rightarrow \frac{1}{q} \le 1, \frac{1}{p} \le 1 \land \frac{1}{n} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \le 3 \Rightarrow -6$ $A_1 = i - 3 + \frac{1}{2n - 1}, n \in IN^* \implies \forall n \in IN^*, 2n - 1 \ge 1 \implies 0 < \frac{1}{2n - 1} \le 1$ $= -1 < -1 - \frac{1}{2n - 1} \le 0 \Rightarrow \inf A_1 = 1 \land \sup A_2 = 0$ $A_2 = A - \frac{1}{2\pi}, n \in IN^* \implies \forall n \in IN^*, 2n \ge 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \le -\frac{1}{2n} < 0$ $\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \inf J_2 = \frac{1}{2} \land \sup J_3 = 1$ $\lim_{t \to 0} A = \min \{\inf_{t \in \mathcal{A}_1} A_1, \inf_{t \in \mathcal{A}_2} A_2 \} = \lim_{t \to 0} A = \max \{\sup_{t \in \mathcal{A}_2} A_2 \} = 1$ (1) $\frac{Z}{1+Z^2} = \frac{X+iY}{1+(X+iY)} = \frac{X+iY}{1+(Y^2-Y^2)} = \frac{X+iY}{1+(X^2-Y^2)}$ $\frac{1+Z^{2}-1+(X+\Omega)}{(X+iY)\times((1+X^{2}-Y^{2})-2iX)} = \frac{(X+iY)\times((1+X^{2}-Y^{2})-2iX)}{(1+X^{2}-Y^{2})^{2}+4(XY)^{2}} = \frac{X(1+X^{2}-Y^{2})+2XY^{2}+iY((1+X^{2}-Y^{2})-2X^{2})}{(1+X^{2}-Y^{2})^{2}+4(XY)^{2}}$ $\sqrt{\frac{X(1+X^2-Y^2)+2XY^2+iY(1-X^2-Y^2)}{(1+X^2-Y^2)^2-4(XY)^2}}$

 $(1-X^2-Y^2)r > 0 \Leftrightarrow 1-X^2-Y^2 > 0$

(i)
$$x \ge 1 \Rightarrow 3 + 2x > 2 + x > 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x} > 1$$
 (a)

وبما أن
$$u_1 = f(u_0) > 1$$
 وبما أن $n \in IN. u_{n+1} = f(u_n)$ وكان (b

صحیحهٔ من أجل n أي $|f(u_{n-1})>1$ ومنما سبق فهي صحیحهٔ من أجل n+1 والشتي $u_n-f(u_{n-1})>1$

 $\forall n \in IN, u_n > 1$ $\forall n \in IN, u_n$

 $(\gamma)^{2}$ کا $I = f(I) - \frac{3+2I}{2+I}$ $I > 1 \Rightarrow I^2 = 3 \Rightarrow I = \sqrt{3}$ فين $\lim_{n \to +\infty} u_n = I$ $I \in IR - 2$

نعبر ہے۔، المُدّی مرفض، المُدّر ہے۔، المُدّی مرفض، n=0 فان n=0 فان n=0 لنفرض صحتها من أجل n=0 فان n=0 لنفرض صحتها من أجل n+1 عالفعل: n=1 وتبر هن صحتها من أجل n+1 عالفعل: n=1

$$\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{3} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - \sqrt{3} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + u_n (2 - \sqrt{3})}{2 + u_n} \le \frac{3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2 + u_n} = 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{3 + 2u_n - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{3 - u_n^2}{2 + u_n}$$

$$-\frac{\sqrt{3} - u_n \sqrt{\sqrt{3} + u_n}}{2 + u_n} \ge 0$$

أي المنتقلية متز ايدة ومحدودة من الأعلى فهي منة

-5

 $\sqrt{v_n} = \frac{u_{n-1} - \sqrt{3}}{u_{n-1} + \sqrt{3}} = \frac{3 + 2u_{n-2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}u_{n-2}}{3 + 2u_{n-2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}u_{n-2}} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + (2 - \sqrt{3})u_{n-2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2) + (2 + \sqrt{3})u_{n-2}}$

$$v_{0} = \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(u_{n-2} - \sqrt{3}\right)}{\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(u_{n-2} + \sqrt{3}\right)} = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)v_{n-1}$$

$$v_{0} = \frac{u_{0} - \sqrt{3}}{u_{0} + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \wedge r = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \quad \text{i.i.} \quad \text{i.i.}$$

جامعة منتورى قسنطينة

كلية الطوم- هيكل الجدع المشترك للطوم الدقيقة

التكنولوجيا والإعلام الآلي

الامتحان القصلي فيفري 2008

MIAS I ا

التمرين1

ادا کان
$$Z^n + \frac{1}{Z^n} = 2\cos n \arg Z$$
 فان $\overline{Z} + \frac{1}{\overline{Z}} = 2\cos \arg Z$ الماذا؟

2_ إذا كان
$$Z' = \frac{Z}{1+|Z|}$$
 فإن $Z' = \frac{Z}{1+|Z|}$ لماذا؟

4. إذا كانت المنتالية العدية $u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فإتها متتالية محدودة.

$$(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
 متقاربة وكانت المنتالية العددية $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وكانت المنتالية العددية $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

متقاربة فإن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان لماذا؟

9- إذا كانت
$$A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{n}, \ p,q,n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
 فإن محدودة من الأعلى بـــ 2,5: لماذا $A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{n}, \ p,q,n \in \mathbb{N}^* \right\}$

التمرين2

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
 اوجد حدها الأعلى وحدها الأدنى.

التمرين3

 $n \in \mathbb{N}$ لتكن المنتقلية العددية u_n المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل التكن المنتقلية العددية

$$u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$$

$$f(x) = \frac{3+2x}{2+x}$$
 : المعرفة بـ 1

$$f(x) \ge 1$$
 برهن أنه إذا كان $x \ge 1$ فإن (a

$$u_n \ge 1$$
 موجودة و u_n ، $n \in \mathbb{N}$ اثبت أنه من أجل (b

٠٠/٠٠ يذبع

2 إذا كانت المنتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، كيف تكون نهايتها -2

 $\sqrt{3}$ بـ: $\sqrt{3}$ من الأعلى بـ: $\sqrt{3}$ من الأعلى بـ: $\sqrt{3}$ منا تمنتنج? حدد اتجاه تغير المنتالية $(u_n)_{min}$

 $v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$:-- $n \in \mathbb{N}$ المعرفة من أجل $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة من أجل $n \in \mathbb{N}$ المعرفة من أجل

اثبت ان $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالیة هندسیة عین حدها الأول واسلسها. (a اثبت ان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ اکتب $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

بالتوضيق

<u>التمرين 1</u>

1_ نعلم أن

$$\overline{Z} = |\overline{Z}|(\cos \arg \overline{Z} + i \sin \arg \overline{Z}) = |Z|(\cos(-\arg Z) + i \sin(-\arg Z))$$

$$= |Z|(\cos(\arg Z) - i \sin(\arg Z)) \wedge \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{\cos(\arg Z) + i \sin(\arg Z)}{|Z|}$$

$$\wedge \overline{Z} + \frac{1}{\overline{Z}} = \left(|Z| + \frac{1}{|Z|}\right) \cos(\arg Z) - i \left(|Z| - \frac{1}{|Z|}\right) \sin(\arg Z) = 2 \cos \arg Z \Rightarrow$$

$$|Z| - \frac{1}{|Z|} = 0 \Rightarrow \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|} = \frac{(|Z| - 1)(|Z| + 1)}{|Z|} = 0 \Rightarrow |Z| = 1$$

وعليه فإن

 $Z^{n} = |Z|^{n} (\cos n \arg Z + i \sin n \arg Z) = \cos n \arg Z + i \sin n \arg Z$ $\wedge \frac{1}{Z^{n}} = \cos n \arg Z - i \sin n \arg Z$ $\Rightarrow Z^{n} + \frac{1}{Z^{n}} = \cos n \arg Z + i \sin n \arg Z + \cos n \arg Z - i \sin n \arg Z$ $= 2 \cos n \arg Z$

2_ نطم أن

$$\begin{cases}
\cos \operatorname{arg} Z' = \frac{X'}{|Z'|} = \frac{\frac{X}{1+|Z|}}{\frac{|Z|}{|Z|}} = \frac{X}{|Z|} = \cos \operatorname{arg} Z \\
\Rightarrow \operatorname{arg} Z' = \operatorname{arg} Z
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arg} Z' = \operatorname{arg} Z$$

$$\sin \operatorname{arg} Z' = \frac{Y'}{|Z'|} = \frac{1+|Z|}{\frac{|Z|}{|Z|}} = \frac{Y}{|Z|} = \sin \operatorname{arg} Z$$

3_ لدينا:

$$\sqrt{\frac{1+ia}{1-ia}} = \frac{1+itg\frac{\theta}{2}}{1-itg\frac{\theta}{2}} = \frac{\left(1+itg\frac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(tg\frac{\theta}{2}\right)^2} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(1-\left(tg\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2itg\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$= \sin\theta = \sin\theta = \sin\theta$$

$$\sin\theta = \sin\theta$$

$$\sin\theta = \sin\theta$$

$$\sin\theta = \sin\theta$$

$$\sin\theta = \sin\theta$$

ر $(N)_{m \in IN}$ متناقصة نعني بنلك أن $u_n \leq u_0 \leq IN$ أي محدودة من الأعلى وبما أنها $(u_n)_{m \in IN}$ محدودة من الأدني فهي إذن محدودة. $(\sqrt{u_n} = (-1)^n \wedge v_n = (-1)^{n+1})$ کے یکفی اخد 5 $\forall q, p, n \in IN^* \Rightarrow \frac{1}{q} \le 1, \frac{1}{p} \le 1 \land \frac{1}{n} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \le 3$ نعلم أن: 3 $\Rightarrow q, p, n \in IN^* \Rightarrow \frac{1}{q} = 1, \frac{1}{p} \le 1 \land \frac{1}{n} = 1$ ينتج $\Rightarrow q, p, n \in IN^* \Rightarrow \frac{1}{q} \le 1, \frac{1}{p} \le 1 \land \frac{1}{n} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \le 3$

$$A_{1} = \left\{ -1 + \frac{1}{2n-1}, n \in IN^{*} \right\} \Rightarrow \forall n \in IN^{*}, 2n-1 \ge 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n-1} \le 1$$
$$\Rightarrow -1 < -1 + \frac{1}{2n-1} \le 0 \Rightarrow \inf A_{1} = -1 \land \sup A_{1} = 0$$

 $A_2 = \left\{ 1 - \frac{1}{2n}, n \in IN^* \right\} \Rightarrow \forall n \in IN^*, 2n \ge 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n} \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2n} < 0$ $\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2\pi} < 1 \Rightarrow \inf A_2 = \frac{1}{2} \land \sup A_2 = 1$

 $\inf A = \min \{\inf A_1, \inf A_2\} = -1 \land \sup A = \max \{\sup A_1, \sup A_2\} = 1$

$$\frac{Z}{1+Z^{2}} = \frac{X+iY}{1+(X+iY)} = \frac{X+iY}{1+X^{2}-Y^{2}+2iXY}$$

$$= \frac{(X+iY)\times\left(\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)-2iXY\right)}{\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)^{2}+4(XY)^{2}}$$

$$= \frac{X\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)^{2}+2XY^{2}+iY\left(\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)-2X^{2}\right)}{\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)^{2}+4(XY)^{2}}$$

$$= \frac{X\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)+2XY^{2}+iY\left(1-X^{2}-Y^{2}\right)}{\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)^{2}+4(XY)^{2}}$$

$$= \frac{X\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)+2XY^{2}+iY\left(1-X^{2}-Y^{2}\right)}{\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)^{2}+4(XY)^{2}}$$

$$= \frac{X\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)+2XY^{2}+iY\left(1-X^{2}-Y^{2}\right)}{\left(1-X^{2}-Y^{2}\right)^{2}+4(XY)^{2}}$$

$$= \frac{X\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)+2XY^{2}+iY\left(1-X^{2}-Y^{2}\right)}{\left(1-X^{2}-Y^{2}\right)^{2}+4(XY)^{2}}$$

$$= \frac{X\left(1+X^{2}-Y^{2}\right)+2XY^{2}+iY\left(1-X^{2}-Y^{2}\right)}{\left(1-X^{2}-Y^{2}\right)^{2}+4(XY)^{2}}$$

$$\widehat{\ell}(x \ge 1 \Rightarrow 3 + 2x > 2 + x > 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x} > 1 \text{ (a}$$

ولكن
$$u_1 = f(u_0) > 1$$
 ويما أن $\forall n \in IN, u_{n+1} = f(u_n)$ ولكن (b

صحيحة من أجل n أي $|f(u_{n-1})>1$ ومنما سبق فهي صحيحة من أجل n+1 والذي $u_n=f(u_{n-1})>1$

 $\forall n \in IN, u_n > 1$ موجودة و $\forall n \in IN, u_n$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = f(l) = \frac{3+2l}{2+l}, l > 1 \Rightarrow l^2 = 3 \Rightarrow l = \sqrt{3}$$
 فإن المجدر
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l, l \in IR -2$$

الثاني مرفض.
$$u_0 = 1 < \sqrt{3}$$
 فإن $n = 0$ فإن $n = 0$ لنفرض صحتها من أجل n أي $u_0 = 1 < \sqrt{3}$: $u_0 = 1 < \sqrt{3}$ المراجع من أجل $u_0 = 1 < \sqrt{3}$: $u_0 = 1 < \sqrt{3}$ المراجع من أجل $u_0 = 1 < \sqrt{3}$: $u_0 = 1 < \sqrt{3}$ المراجع من أجل $u_0 = 1 < \sqrt{3}$: $u_0 =$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{3 + 2u_n - 2u_n - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{3 - u_n^2}{2 + u_n}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3} - u_n\right)\left(\sqrt{3} + u_n\right)}{2 + u_n} \ge 0$$

أي المتثالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متة

-5

$$v_{n} = \frac{u_{n-1} - \sqrt{3}}{u_{n-1} + \sqrt{3}} = \frac{3 + 2u_{n-2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}u_{n-2}}{3 + 2u_{n-2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}u_{n-2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) + (2 - \sqrt{3})u_{n-2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2) + (2 + \sqrt{3})u_{n-2}}$$

$$v_{0} = \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(u_{n-2} - \sqrt{3}\right)}{\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(u_{n-2} + \sqrt{3}\right)} = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)v_{n-1}$$

$$v_{0} = \frac{u_{0} - \sqrt{3}}{u_{0} + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \wedge r = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \quad \text{old whe } 3$$

$$v_{n} = \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(u_{n-2} - \sqrt{3}\right)}{\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(u_{n-2} + \sqrt{3}\right)} = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^{2} \times \frac{\left(u_{n-3} - \sqrt{3}\right)}{\left(u_{n-3} + \sqrt{3}\right)} = \dots$$

$$= \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^{n-1} \times \frac{\left(u_{0} - \sqrt{3}\right)}{\left(u_{0} + \sqrt{3}\right)} = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^{n-1} \times \frac{\left(1 - \sqrt{3}\right)}{\left(1 + \sqrt{3}\right)}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n} - \sqrt{3}}{u_{n} + \sqrt{3}} \Rightarrow v_{n+1}\left(u_{n} + \sqrt{3}\right) = u_{n} - \sqrt{3} \Rightarrow u_{n}\left(1 - v_{n+1}\right) = \sqrt{3}\left(v_{n+1} + 1\right)$$

$$\Rightarrow u_{n} = \frac{\sqrt{3}\left(v_{n+1} + 1\right)}{\left(1 - v_{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{3}\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^{n} \times \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)}{\left(1 - \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^{n} \times \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_{n} = \sqrt{3}.$$

$$v_{n+1} = \frac{v_{n} - \sqrt{3}}{u_{n} + \sqrt{3}} \Rightarrow v_{n+1}\left(u_{n} + \sqrt{3}\right) = u_{n} - \sqrt{3} \Rightarrow u_{n}\left(1 - v_{n+1}\right) = \sqrt{3}\left(v_{n+1} + 1\right)$$

$$\Rightarrow u_{n} = \frac{\sqrt{3}\left(v_{n+1} + 1\right)}{\left(1 - v_{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{3}\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^{n} \times \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)}{\left(1 - \sqrt{3}\right)} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_{n} = \sqrt{3}.$$