جامعة عمار ثليجي - الأغواط
قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

السنة الجامعية: 2017/2018
المدة: ساعة و 40 د

الإمتحان الأول في التحليل

التمرين 1 :

1) بين أن : $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}\sqrt{a+b}$

2) لتكن المجموعة A حيث : $A=\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ ,p,q\in\mathbb{N}^*\}$

- بين أن A محدودة ، ثم عين إن وجد كل من : $\min A,\inf A,\max A,\sup A$.

3) أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to a}\frac{a\sqrt{ax}-x^2}{a-\sqrt{ax}}\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

التمرين 2 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\sqrt{u_n^2+\dfrac{1}{3^n}}\right), & n\geq 1. \end{cases}$$

1) برهن أن $u_n\geq 1$ ، $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3) تحقق من أن $u_{n+1}\geq u_n+\frac{1}{4.3^n}$ ، $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

4) إستنتج أن $\forall n\geq 2$ ، $u_n\geq 1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$.

5) إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة.

التمرين 3 : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{x} & ;\quad x>0 \\ (a-b)\ [illegible]\ \sin(\frac{1}{x}) & ;\quad x<0. \end{cases}$$

1) عين قيم $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و تحقق $f(0)=1$.

2) باعتبار f مستمرة على $\mathbb{R}$، بين أن المعادلة $g(x)=f(x)+$ [illegible] $=0$ تملك على الأقل حلا في المجال $]$ [illegible] $,0[$.

3) لتكن الدالة h المعرفة ب $h(x)=[2xf($ [illegible] $)]^n$

- أ) ناقش حسب قيم $n\in\mathbb{N}$ وجود النهاية $\lim_{x\to0}h(x)$.
- ب) أوجد n و $h(0)$ حتى تكون $h(x)$ مستمرة عند 0 .

التمرين 4 : باستعمال نظرية التزيدات المنتهية. أحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{1+x}}\right)$$

بالتوفيق