USTHB, Faculté de mathématiques Année universitaire 2014-2015 Section 1, 1ère année
Licence M.I.

EXAMEN FINAL D'ANALYSE 1

N. B. Il est interdit d'utiliser pendant le déroulement de l'examen tout matériel électronique (calculatrice, téléphone portable, ...), le stylo effaceur et le stylo rouge. En outre, les téléphones portables doivent être éteints. Il sera accordé une importance capitale à la rédaction et à la clarté des démonstrations.

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{x^2-a}\right), \quad a\in\mathbb{R}; \qquad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7}-3\sqrt{3-x}}.$$

Exercice 2 : Soit $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m},\ m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

i) Vérifier que la partie A est bornée et déterminer ensuite $\sup A$, $\max A$ et $\inf A$.

ii) $\min A$ existe-t-il? Justifier votre réponse.

Exercice 3 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $w_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ et $v_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}$ où $\alpha>1$.

1) Vérifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_{2n+1}-w_{n+1}\geq\frac{1}{2}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

$*$ 2) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_{2n+2}\leq 1+\frac{2}{2^\alpha}v_{n+1}$ et conclure que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

3) Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{nu_n}, & n\in\mathbb{N}^*,\\ u_1=1. \end{cases}$$

a) Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geq 1$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

b) Montrer que pour tout $n\geq 2$, $u_n=u_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{ku_k}$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée. Indication : Raisonner par l'absurde et utiliser les questions 1), 3.a) et 3.b).

Conclure.

4) Considérons un nombre réel $\beta>0$. Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ $\exists n\geq N$, tel que l'on ait $u_n\leq n^\beta$. Indication : Raisonner par l'absurde et utiliser les questions 2) et 3).

En déduire qu'il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{\varphi(n)}}{\varphi(n)^\gamma}=0, \quad \forall\gamma>0.$$

USTHB, Faculté de mathématiques Année universitaire 2014-2015 Section 1, 1ère année
Licence M.I.

CORRIGE DE L'EXAMEN FINAL D'ANALYSE 1

Exercice 1 : On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{x^2-a}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{x^2-a}\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{x^2-a}\right)}{\left(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{x^2-a}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\frac{(x^2+a-x^2+a)}{\left(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{x^2-a}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2ax}{\left(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{x^2-a}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{a}{x^2}}} = a, \qquad \text{(2 pts)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7}-3\sqrt{3-x}} &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7}-3\sqrt{3-x}}\times\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}\times\frac{\sqrt{x+7}+3\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+7}+3\sqrt{3-x}}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{2x-(x+2)}{x+7-9(3-x)}\times\frac{\sqrt{x+7}+3\sqrt{3-x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{10x-20}\times\frac{\sqrt{x+7}+3\sqrt{3-x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{1}{10}\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+7}+3\sqrt{3-x}} = \frac{3}{20}. \qquad \text{(2 pts)}
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Soit $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m},\ m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

i) Vérifions que la partie A est bornée et déterminons ensuite $\sup A$, $\max A$ et $\inf A$. En effet, pour tout $x\in A$, $\exists n,m\in\mathbb{N}^*$ tels que $x=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$ et $0<\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\leq 2$. Par suite A est une partie majorée par 2 et minorée par 0. Puisque $2=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\in A$, il s'ensuit que $\max A=2$ et ainsi $\sup A=\max A=2$. Soit maintenant $\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N}<\varepsilon$. Le nombre $x_0=\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}\in A$. Ainsi $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in A,\ 0<x<0+\varepsilon$. D'où $\inf A=0$. (3 pts)

ii) $\min A$ n'existe pas, car $0\notin A$ puisque $\forall n,m\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\neq 0$. (1 pt)

Exercice 3 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $w_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$ et $v_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}$ où $\alpha>1$.

1) Vérifions que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_{2n+1}-w_{n+1}\geq\frac{1}{2}$. En effet, soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $w_{n+1}-w_n=\frac{1}{n}>0$ et $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n^\alpha}>0$. Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes. On a aussi

$$w_{2n+1}-w_{n+1}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=(2n-(n+1)+1)\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

On en déduit que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy et par suite diverge. Mais puisque elle est strictement croissante, on obtient donc $\lim_{n\to+\infty} w_n=+\infty$. (3.5 pts)

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n+2} \leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} v_{n+1}$ et concluons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. En effet, on a

$$\begin{aligned}
v_{2n+2} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \\
&\leq 1 + \frac{2}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1 + \frac{2}{2^\alpha} v_{n+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, comme la suite (v_n) est strictement croissante on a

$$v_{n+1} \leq v_{2n+2} \leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} v_{n+1}$$

et donc puisque $\alpha > 1$

$$0 < v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{1 - \frac{2}{2^\alpha}}.$$

Alors (v_n) est majorée et on conclut que (v_n) converge. (1.5 pts)

3) Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + \dfrac{1}{nu_n}, \qquad n \in \mathbb{N}^*, \\ u_1 &= 1. \end{cases}$$

a) Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. En effet, par récurrence. Pour $n = 1$, c'est vrai car $u_1 = 1 \geq 1$. Supposons que $u_n \geq 1$ et par suite $nu_n > 0$ et donc on peut inverser ce nombre : $\frac{1}{nu_n} > 0$ et donc $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu_n} \geq 1 + 0 = 1$. Donc la propriété est vraie à l'ordre $n+1$. De plus $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{nu_n} > 0$. Par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. (1.5 pts)

b) Montrons que pour tout $n \geq 2$, $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{ku_k}$. En effet, par récurrence également. Pour $n = 1$, on a bien $u_2 = u_1 + \frac{1}{1u_1} = u_1 + \sum_{k=1}^{2-1} \frac{1}{ku_k}$. Donc c'est vrai à l'ordre $n = 2$. Supposons que $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{ku_k}$. On a alors

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu_n} = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{ku_k} + \frac{1}{nu_n} = u_1 + \sum_{k=1}^{(n+1)-1} \frac{1}{ku_k}. \qquad \text{(1 pt)}$$

c) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée. Raisonnons par l'absurde. Alors $\exists M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq M$. Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{ku_k} \geq \frac{1}{kM}$ et donc,

$$M \geq u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{ku_k} \geq u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{kM} = u_1 + \frac{1}{M} w_n$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n \leq (M - u_1)\, M$$

ou encore $(w_n)_n$ est majorée. Contradiction car $\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, on conclut que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. (1.5 pts)

i) Considérons un nombre réel $\beta > 0$. Montrons que pour tout $N \in \mathbb{N}^* \ \exists n \geq N$, tel que l'on ait $u_n \leq n^\beta$.
Raisonnons par l'absurde : Donc $\exists N \in \mathbb{N}^* \ \forall n \geq N$, on a $u_n > n^\beta$. Ainsi, $\forall k \geq N \ \frac{1}{ku_k} < \frac{1}{k^{\beta+1}}$ et par suite

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{ku_k} < \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^{\beta+1}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\beta+1}} = v_n \text{ avec } \alpha = \beta + 1 > 1$$

et comme $(v_n)_n$ est majorée, $\exists a > 0$ tel que $\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{ku_k} < v_n < a$. Notons

$$S_N = u_1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{ku_k} \text{ et } M = S_N + a.$$

On a pour $n \geq N$

$$u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{ku_k} = u_1 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{ku_k} + \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{ku_k} < S_N + \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{ku_k} < S_N + a = M$$

Donc (u_n) est majorée. Contradiction, car $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Ainsi on a montré

$$\forall \beta > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \geq N, \quad u_n \leq n^\beta.$$

Nous déduisons qu'il existe une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{\varphi(n)}}{\varphi(n)^\gamma} = 0, \quad \forall \gamma > 0.$$

En effet, prenons $\beta = \frac{\gamma}{2} > 0$ et prenons successivement $N = 1$, $\exists n_1 \geq 1$, $u_{n_1} \leq n_1^\beta$, ensuite $N_2 = n_1 + 1$, donc $\exists n_2 \geq N_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} \leq n_2^\beta$, et de proche en proche on a construit une suite de nombres $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante avec $\lim n_k = +\infty$ telle que $u_{n_k} \leq n_k^\beta$. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(k) = n_k$. On a

$$0 \leq \frac{u_{\varphi(k)}}{\varphi(k)^\gamma} = \frac{u_{n_k}}{n_k^\gamma} \leq \frac{n_k^\beta}{n_k^\gamma} = \frac{1}{n_k^\beta}$$

et en passant à la limite

$$0 \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{\varphi(k)}}{\varphi(k)^\gamma} \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{n_k^\beta} = 0. \qquad \text{(3 pts)}$$

70 DA

USTHB,
Faculté de Mathématiques.

Année 2014/2015
Section 5, M.I-Analyse.

Epreuve d'Analyse
(Durée : 1h30)

Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits, et aucun document n'est permis.

Exercice 1. (4 pts)
Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini comme suit :

$$A = \{\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Montrer que A possède une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Exercice 2. (8 pts)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < b < a$. On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de nombres réels par la donnée de leur premier terme u_0 et v_0, tels que $u_0 < v_0$, et des relations de recurrences :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{bu_n + av_n}{a+b}.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $v_n - u_n > 0$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante et que la suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante.
3. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite l.
4. Ecrire $v_n - u_n$ et $v_n + u_n$ en fonction de a, b, u_0 et v_0.
5. En déduire la valeur de la limite l.

Exercice 3. (8 pts)
Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle définies par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^4+1} - (x^2+a) + \frac{1-\cos(bx)}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(bx)}{x^2} + 1 - a & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.

1. Déterminer les valeurs de a et b pour que f soit continue en $x_0 = 0$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -3$.
(Indication : $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$.)

Dans la suite, a et b sont les valeurs trouvées dans la question 1.

2. Etudier la dérivabilité de la fonction $h = f - g$ en $x_0 = 0$.
3. Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$, tel que $h(c) - 2c = 0$.
4. Déterminer le développement de Maclaurin avec reste de Lagrange à l'ordre 4 de la fonction $x^2 g(x)$.
5. En déduire :

$$x^2 g(x) < 1 + \frac{2}{3}x^4, \text{ pour tout } x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Correction de l'Épreuve d'Analyse

Exo 1 :

$A = \{ \sin n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad -1 + 0 < \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$

$A \neq \emptyset$ majoré $\Rightarrow$ Sup A existe

$A \neq \emptyset$ minoré $\Rightarrow$ Inf A existe

$2 = \sin 1\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1} \in A$ et 2 majorant de $A \Rightarrow \boxed{\operatorname{Sup} A = 2}$

Montrons que $\operatorname{Inf} A = -1$.

$A = \{ \sin n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n},\ n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^* \} \cup \{ \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n},\ n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N} \}$

$\cup \{ \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n},\ n = 4k+3,\ k \in \mathbb{N} \}$

$= \underbrace{\{ \frac{1}{2k},\ k \in \mathbb{N}^* \}}_{A_1} \cup \underbrace{\{ 1 + \frac{1}{4k+1},\ k \in \mathbb{N} \}}_{A_2} \cup \underbrace{\{ -1 + \frac{1}{4k+3},\ k \in \mathbb{N} \}}_{A_3}$

1) $\operatorname{Inf} A_1 = 0$. En effet, on utilise pour cela la caractérisation de la borne inférieure.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2k_\varepsilon} < \varepsilon$.

$\frac{1}{2k_\varepsilon} < \varepsilon \iff k_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$

On choisit $k_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}^*$. D'où $\operatorname{Inf} A_1 = 0$

2) $\operatorname{Inf} A_2 = 1 + \operatorname{Inf} \{ \frac{1}{4k+1},\ k \in \mathbb{N} \} = 1 + 0 = 1$

2) $\operatorname{Inf} A_3 = -1 + \operatorname{Inf} \{ \frac{1}{4k+3},\ k \in \mathbb{N} \} = -1 + 0 = -1$

} Par caract. borne inf.

Il s'ensuit $\operatorname{Inf} A = \min \{ \underbrace{\operatorname{Inf} A_1}_{0}, \underbrace{\operatorname{Inf} A_2}_{1}, \underbrace{\operatorname{Inf} A_3}_{-1} \} = \boxed{-1}$

Exo 2 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$.

Considérons les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_0, V_0 \in \mathbb{R}$ où $U_0 < V_0$

et par $U_{n+1} = \dfrac{aU_n + bV_n}{a+b}$ et $V_{n+1} = \dfrac{bU_n + aV_n}{a+b}$

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n > 0$

Pour $n = 0$, on a par hyp. $V_0 - U_0 > 0$

Supp. que $V_n > U_n$ et montrons que $V_{n+1} > U_{n+1}$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{bU_n + aV_n - aU_n - bV_n}{a+b} = \frac{b(U_n - V_n) + a(V_n - U_n)}{a+b}$$

$$= \frac{(V_n - U_n)(a-b)}{a+b} > 0 \quad \text{car } V_n - U_n > 0 \text{ et } a > b > 0$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n > 0$

2) • $v_{n+1} - v_n = \dfrac{bu_n + av_n}{a+b} - v_n = \dfrac{bu_n + \cancel{av_n} - \cancel{av_n} - bv_n}{a+b}$

$= \dfrac{b(u_n - v_n)}{a+b} < 0$ car $u_n - v_n < 0$ d'après 1) et $a, b > 0$.

D'où (v_n) est une suite strictement décroissante

• $u_{n+1} - u_n = \dfrac{au_n + bv_n}{a+b} - u_n = \dfrac{\cancel{au_n} + bv_n - \cancel{au_n} - bu_n}{a+b}$

$= \dfrac{b(v_n - u_n)}{a+b} > 0$ car $v_n - u_n > 0$ et $a, b > 0$.

D'où (u_n) est une suite strictement croissante.

3) Montrons que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

D'après 1) $u_n < v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

et d'après 2) $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$. D'où

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 < u_n < v_n < v_0$

Donc (u_n) strictement croissante majorée par v_0, elle converge

et (v_n) " décroissante minorée par u_0, elle converge.

Soit $l = \lim u_n$ et soit $l' = \lim v_n$

On a : $l = \dfrac{al + bl'}{a+b}$ car $u_{n+1} = \dfrac{au_n + bv_n}{a+b}$

et par suite, $\cancel{la} + lb = \cancel{al} + bl'$ c-à-d $lb = l'b$.

Comme $b > 0$, on simplifie pour trouver $\boxed{l = l'}$.

4) $v_n - u_n = \dfrac{a-b}{a+b}(v_{n-1} - u_{n-1}) \quad (*)$

Posons $w_n = v_n - u_n$.

$(*) \iff \dfrac{w_n}{w_{n-1}} = \dfrac{a-b}{a+b}$ et (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{a-b}{a+b}$.

On obtient alors $\forall n$, $w_n = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^n \cdot w_0 = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^n (v_0 - u_0)$.

C-à-d $\boxed{v_n - u_n = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^n (v_0 - u_0)}$

$v_n + u_n = \dfrac{au_{n-1} + bv_{n-1} + bu_{n-1} + av_{n-1}}{a+b} = \dfrac{v_{n-1}(a+b) + u_{n-1}(a+b)}{a+b}$

$= \dfrac{(a+b)(v_{n-1} + u_{n-1})}{a+b} = v_{n-1} + u_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $(u_n+v_n)_n$ est une suite stationnaire. Elle vaut alors u_0+v_0, c-à-d $\boxed{u_n+v_n=u_0+v_0}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

5) $v_n+u_n=u_0+v_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} u_n+\lim_{n\to\infty} v_n=u_0+v_0$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty} v_n$, posons $l=\lim u_n=\lim v_n$

On aura donc, $l+l=u_0+v_0$ c-à-d $\boxed{l=\dfrac{u_0+v_0}{2}}$

Exo3 :

Soient $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^4+1}-(x^2+a)+\dfrac{1-\cos bx}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

et $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos bx}{x^2}+1-a & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

et prenons $a,b\in\mathbb{R}_+^*$.

1) f continue en $x_0=0 \iff \lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\sqrt{x^4+1}-(x^2+a)+\frac{2\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)}{\sqrt{x^4+1}+x^2}-a+2\,\frac{\sin^2\left(\frac{bx}{2}\right)}{\left(\frac{bx}{2}\right)^2}\cdot\frac{b^2}{4}$$

$$=\lim\underbrace{\frac{x^4+1-x^4}{\sqrt{x^4+1}+x^2}}_{\to 1}-a+\frac{b^2}{2}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{bx}{2}\right)}{\left(\frac{bx}{2}\right)}\right)^2}_{\to 1}=1-a+\frac{b^2}{2}.$$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)\iff \boxed{1-a+\dfrac{b^2}{2}=0}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3\iff\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4+1}-x^2-a+\frac{1-\cos bx}{x^2}=-3$$

$$\iff\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x^4+1-x^4}{\sqrt{x^4+1}+x^2}}_{\to 0}-a+\frac{1-\cos bx}{x^2}=-3 \qquad (*)$$

la f^t $x\mapsto 1-\cos bx$ est bornée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$. $\Big\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\cos bx}{x^2}=0$

$(*)\iff -a=-3$ et donc $\boxed{a=3}$

$a=3\Rightarrow\boxed{b=2}$

2) Soit $h(x) = f(x) - g(x)$

$$= \begin{cases} \sqrt{x^4+1} - x^2 - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \sqrt{x^4+1} - x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2 - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4+1-(x^2+1)^2}{x\sqrt{x^4+1}+x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x\cancel{^2}}{\cancel{x}\sqrt{x^4+1}+x^2+1} = 0$$

D'où h est dérivable en $x_0 = 0$ et $h'(0) = 0$.

3) Soit $k(x) = h(x) - 2x = \sqrt{x^4+1} - x^2 - 1 - 2x$

k continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-1,1]$

$k(-1) = (\sqrt{2}-2)+2 = \sqrt{2} > 0$

$k(1) = (\sqrt{2}-2)-2 = \sqrt{2}-4 < 0$

D'après le Th. des V.I, il existe $c \in]-1,1[$: $k(c) = 0$

c.à.d $h(c) - 2c = 0$

(Rq : On aurait pu dire directement sans passer par le Th. des V.I que $c = 0$ est une solution de $h(c) - 2c = 0$)

4) $\underbrace{x^2 g(x)}_{G(x)} = 1 - \cos 2x - 2x^2$

$G'(x) = 2\sin 2x - 4x$, $G^{(2)}(x) = 4\cos 2x - 4$

$G^{(3)}(x) = -8\sin 2x$, $G^{(4)}(x) = -16\cos 2x$

$G^{(5)}(x) = +36\sin 2x$.

Formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à l'ordre 4 de G est :

$$G(x) = \overbrace{G(0)}^{0} + x\overbrace{G'(0)}^{0} + \frac{x^2}{2!}\overbrace{G^{(2)}(0)}^{0} + \frac{x^3}{3!}\overbrace{G^{(3)}(0)}^{0} + \frac{x^4}{4!}G^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!}G^{(5)}(c), \text{ (c compris strictement entre 0 et } x\text{)}$$

$$= -\frac{16x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}36\sin 2c = -\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{15}\sin 2c.$$

4

Faculté de Mathématiques. USTHB. 1ère année MI-Section 6.	ANALYSE 1. Epreuve finale. (14 janvier 2015)	Année universitaire 2014-2015. Durée 1 h 30 min.

Exercice 1 (5 points) . *Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1. On définit la suite numérique $(u_n)_n$ par :*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \quad \text{pour } n \geq 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.
2. *Montrer que la suite* $(u_n)_n$ *est strictement décroissante.*
3. *En déduire que la suite* $(u_n)_n$ *est convergente - Déterminer sa limite.*
4. *On pose* $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. *- Déterminer :* $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ *et* $\min A$.

Exercice 2 (5 points) . *Soient a, b deux nombres réels et f la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x + b & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

1. *Donner le domaine de définition de la fonction f.*
2. *Pour quelles valeurs de a et b, f est-elle continue au point $x_0 = 0$?*
3. *Peut-on trouver a et b, pour que f soit dérivable au point $x_0 = 0$?*

Exercice 3 (5 points) . *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n+1}$.*

1. *Peut-on appliquer le théorème de Rolle à la fonction f définie par :*

$$f(x) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad sur \quad [0,1]?$$

2. *En déduire que l'équation*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = x^n$$

possède une solution dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 4 (5 points) . *Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :*

$$f(x) = \exp(x) - x - 1 \quad et \quad g(x) = (1-x)\exp(x) - 1.$$

1. *Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.*
2. *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que l'on a :*

$$\forall x \in]0,1[, \quad 1 + x < \exp(x) < \frac{1}{1-x}.$$

Bon courage.

[1]**Attention : Tout résultat non justifié, ne sera pas pris en considération. Il sera tenu compte de la présentation de la copie.**

Faculté de Mathématiques.
USTHB.
1ère année MI-Section 6.

ANALYSE 1.
Corrigé de l'épreuve finale.
(Du 14/01/2015)

Année universitaire
2014-2015

Exercice 1 (5 points) . *On a la suite récurrente $(u_n)_n$, définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha > 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \quad \text{pour } n \geqq 0. \end{cases}$$

1. *Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$. (*)*
L'inégalité (*) est vérifiée pour $n = 0$, puisque $u_0 = \alpha > 1$.
Supposons $u_n > 1$, puis montrons que $u_{n+1} > 1$.
On a $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n+2} > 0$, (puisque $u_n > 1$, par l'hypothèse de récurrence).
Donc $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$. (01 point.)

2. *Montrons que la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.*
Pour cela étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.
On a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 2} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}.$$
Comme, $u_n > 1 \iff 1 - u_n < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante. (02 points.)

3. *La suite $(u_n)_n$ est d'après (1) minorée, d'après (2) strictement décroissante, donc elle est convergente.* (0, 5 point.)
Soit l sa limite, alors l vérifie la relation :
$$l = \frac{2\,l + 1}{l + 2},$$
ce qui est équivalent à $l^2 - 1 = 0$, d'où $l = +1$, (car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$), (0, 5 point.)

4. *On a $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.*
Comme la suite (u_n) est strictement décroissante et $u_0 = \alpha$, alors $\sup A = \max A = \alpha$.
La suite (u_n) ést strictement décroissante, minorée par 1 et convergente vers $l = 1$, donc $\inf A = 1$.
Mais $\inf A = 1 \notin A$, donc $\min A$ n'existe pas. (1 point= $4 \times 0,25$ point.)

Exercice 2 (5 points) . *Soient a, b deux nombres réels et f la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x + b & si \quad x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos x}{x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

1. *Le domaine de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}$* (1 point.)

2. *La fonction f est continue au point $x_0 = 0$ si et seulement si on a :*
$$\lim_{x \to 0^-} (a \sin x + b) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = f(0) = b \qquad (1)$$
Il est facile de voir que $\lim_{x\to 0^-}(a \sin x + b) = b$, ceci d'une part.
D'autre part on a,
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} 2\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{2\,\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \qquad (2)$$
De (1) et (2), on déduit que $b = \frac{1}{2}$.
Donc f est continue au point $x_0 = 0$, pour $b = \frac{1}{2}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$ (1 point+1 point.)

3. *La fonction f est dérivable au point $x_0 = 0$ si et seulement si on a :*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = l \text{ (existe et finie)} \qquad (3)$$

comme on a $f(0) = b = \frac{1}{2}$ (condition de continuité de f au point 0,) alors la relation (3) implique,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{a \sin x}{x} = a = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2(1-\cos x) - x^2}{2x^3} = 0, \qquad (4)$$

(4) entraine $a = 0$. (Cette limite se calcule à l'aide de la règle de l'Hôpital par exemple.)
Par conséquent, f est dérivable au point $x_0 = 0$, pour $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$. (0,5 pt+0,5 pt+1 pt.)

Exercice 3 (5 points) .

1. *f est une fonction polynomiale, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle vérifie les conditions du théorème de Rolle.*
   En effet, f est :
   - *Continue sur l'intervalle $[0, 1]$*
   - *Dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$*
     et on a :
   - *$f(0) = f(1) = 0$, puisque $f(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$*

   Par conséquent, on peut donc lui appliquer le théorème de Rolle sur $[0, 1]$ (3 points.)
2. *Le théorème de Rolle appliqué à la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$, implique qu'il existe un nombre réel $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.*
   Comme on a $f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} - x^n$, alors

   $$f'(c) = 0 \iff a_0 + a_1 c + \cdots + a_{n-1}c^{n-1} - c^n = 0 \iff a_0 + a_1 c + \cdots + a_{n-1}c^{n-1} = c^n,$$

   d'où l'on déduit que l'équation $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = x^n$ possède une solution dans l'intervalle $]0, 1[$. (2 points.)

Exercice 4 (5 points) . *On a,*

$$f(x) = \exp(x) - x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = (1 - x)\exp(x) - 1.$$

1. *Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :*

   $$f'(x) = \exp(x) - 1 \quad \text{et} \quad g'(x) = -x\exp(x) \qquad (0,5 \text{ point.})$$

   (0,5 point.)
2. *On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f(t) = \exp(t) - t - 1$ sur l'intervalle $[0, x]$ avec $0 < x < 1$, pour montrer que*

   $$1 + x < \exp(x),$$

   puis à la fonction g sur $[0, x]$, pour prouver la deuxième inégalité.
   Ces deux fonctions sont continues sur $[0, x]$, dérivables sur $]0, x[$ où $0 < x < 1$, alors il existe $c_1 \in]0, x[$ tel que :

   $$\exp(x) - x - 1 = x(\exp(c_1) - 1), \qquad (5)$$

   et il existe $c_2 \in]0, x[$ tel que :

   $$(1 - x)\exp(x) - 1 = x(-c_2 \exp(c_2)) \qquad (6)$$

Comme on a : $0 < c_1 < x < 1$, *alors* $1 < \exp(c_1) < \exp(x) < \exp(1)$, *d'où l'on déduit que* $x(\exp(c_1) - 1) > 0$, *par suite la relation* (5) *implique,*

$$\exp(x) - x - 1 > 0 \iff \exp(x) > x - 1, \quad \forall x \in]0, x[, \quad (2\,points.) \tag{7}$$

de même de $0 < c_2 < x < 1$ *on déduit que* $x(-c_2 \exp(c_2)) < 0$ *et la relation* (6) *implique,*

$$(1 - x)\exp(x) - 1 < 0 \iff \exp(x) < \frac{1}{1 - x}, \quad \forall x \in]0, x[, \quad (2\,points.) \tag{8}$$

car $1 - x > 0$.
Enfin, des inégalités (7) *et* (8), *on déduit que,*

$$\forall x \in]0, 1[, \quad 1 + x < \exp(x) < \frac{1}{1 - x}.$$

Fin du corrigé.