2022 年 IMO 中国国家队选拔考试

测试三　第 1 天

2022 年 4 月 12 日　8:00—12:30

1. 已知平面上圆 Γ_2 在圆 Γ_1 的内部. 证明平面上存在点 P 满足如下条件:

若 l 是一条不过 P 的直线, 且 l 与 Γ_1 交于不同两点 A, B, 与 Γ_2 交于不同两点 C, D (其中 A, C, D, B 在 l 上顺次排列), 则 $\angle APC = \angle DPB$.

2. 已知正实数 α, β 满足: 对任意正整数 k_1, k_2 均有 $\lfloor k_1\alpha \rfloor \neq \lfloor k_2\beta \rfloor$, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数. 证明: 存在正整数 m_1, m_2 使得 $\dfrac{m_1}{\alpha} + \dfrac{m_2}{\beta} = 1$.

3. 给定整数 $n \geqslant 2$. 求满足下列两个条件的所有 n 元整数数组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

(1) a_1 是奇数, $1 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 且 $M = \dfrac{1}{2^n}(a_1 - 1)a_2 \cdots a_n$ 是整数;

(2) 存在 M 个 n 元整数数组 $(c_{i,1}, c_{i,2}, \ldots, c_{i,n})$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$, 满足对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant M$ 都存在 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 使得

$$c_{i,k} - c_{j,k} \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{a_k}.$$

2022 年 IMO 中国国家队选拔考试

测试三　第 2 天

2022 年 4 月 13 日　8:00—12:30

4. 求所有正整数 k, 使得平面直角坐标系中存在有限多个重心为整点的三角形, 其中任意两个三角形的交集或为空集, 或为一个公共顶点, 或为连接两个公共顶点的边, 且这些三角形的并集是一个边长为 k 的正方形 (该正方形的顶点可以不是整点, 边可以不平行于坐标轴).

5. 证明: 存在正实数 C 和 $\alpha > \frac{1}{2}$, 使得对任意正整数 n, 均存在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集 A, 满足 $|A| \geqslant Cn^{\alpha}$, 且 A 中任意两个不同数的差不是完全平方数.

6. (1) 证明: 在复平面上, 方程

$$z^{20} + 63z + 22 = 0$$

的全体复根的凸包的面积大于 π.

(2) 设 n 为正整数, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ 为 n 个奇数. 证明: 对任意总和为 1 的 n 个复数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 以及任意模长不小于 1 的复数 w, 方程

$$a_1 z^{k_1} + a_2 z^{k_2} + \cdots + a_n z^{k_n} = w$$

都至少有一个模长不超过 $3n|w|$ 的复根.

2022 年 IMO 中国国家队选拔考试

测试四　第 1 天

2022 年 4 月 16 日　8:00—12:30

1. 在 $n\times n$ $(n\geqslant 2)$ 的网格屏上, 每个单位方格初始时显示红黄蓝三种颜色之一. 每一秒钟网格屏中所有单位方格按如下方式同时变换颜色, 称为一轮变换:

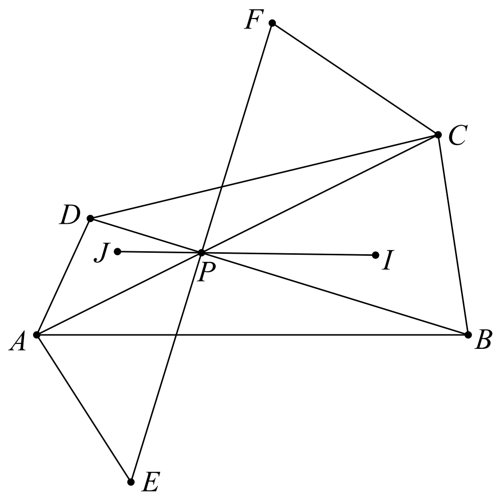
• 对当前颜色是红色的单位方格 A, 如果当前存在黄色单位方格与它有公共边, 那么下一秒钟 A 变为黄色, 否则 A 的颜色仍是红色;

• 对当前颜色是黄色的单位方格 B, 如果当前存在蓝色单位方格与它有公共边, 那么下一秒钟 B 变为蓝色, 否则 B 的颜色仍是黄色;

• 对当前颜色是蓝色的单位方格 C, 如果当前存在红色单位方格与它有公共边, 那么下一秒钟 C 变为红色, 否则 C 的颜色仍是蓝色.

证明: 如果在 $2n-2$ 轮变换后屏幕没有变成单一颜色, 那么它将永远不会变成单一颜色.

2. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ 的内心分别为 I, J. 已知 IJ, AC, BD 相交于一点 P. 过 P 且垂直于 BD 的直线与 $\angle BAD$ 的外角平分线相交于点 E, 与 $\angle BCD$ 的外角平分线相交于点 F. 证明: $PE=PF$.



3. 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足: 对任意实数 x,y, 如下两个可重集相等

$$\big\{f(xf(y)+1),\ f(yf(x)-1)\big\}=\big\{xf(f(y))-1,\ yf(f(x))+1\big\}.$$

注: $\{a,b\}=\{c,d\}$ 作为可重集相等指 $a=c$, $b=d$, 或者 $a=d$, $b=c$.

2022 年 IMO 中国国家队选拔考试

测试四　第 2 天

2022 年 4 月 17 日　8:00—12:30

4. 求所有的素数 p 和正整数 a,b,c 满足

$$2^a p^b = (p+2)^c + 1.$$

5. 设 n 是正整数, $2n$ 个非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 4$. 证明: 存在非负整数 p, q 使得 $q \leqslant n-1$, 且

$$\sum_{i=1}^{q} x_{p+2i-1} \leqslant 1, \qquad \sum_{i=q+1}^{n-1} x_{p+2i} \leqslant 1.$$

注 1 : 下标按模 $2n$ 理解, 即若 $k \equiv l \pmod{2n}$, 则 $x_k = x_l$.

注 2 : 若 $q=0$, 则第一个求和视为 0; 若 $q=n-1$, 则第二个求和视为 0.

6. 给定正整数 n, 用 D 表示 n 的所有正因子构成的集合. 设 A, B 是 D 的子集, 满足: 对任何 $a \in A$, $b \in B$, 总有 a 不整除 b 且 b 也不整除 a. 证明:

$$\sqrt{|A|} + \sqrt{|B|} \leqslant \sqrt{|D|}.$$

2022 年 IMO 中国国家队选拔考试测试三解答

1. 已知平面上圆 Γ_2 在圆 Γ_1 的内部. 证明平面上存在点 P 满足如下条件:

若 l 是一条不过 P 的直线, 且 l 与 Γ_1 交于不同两点 A, B, 与 Γ_2 交于不同两点 C, D (其中 A, C, D, B 在 l 上顺次排列), 则 $\angle APC = \angle DPB$.

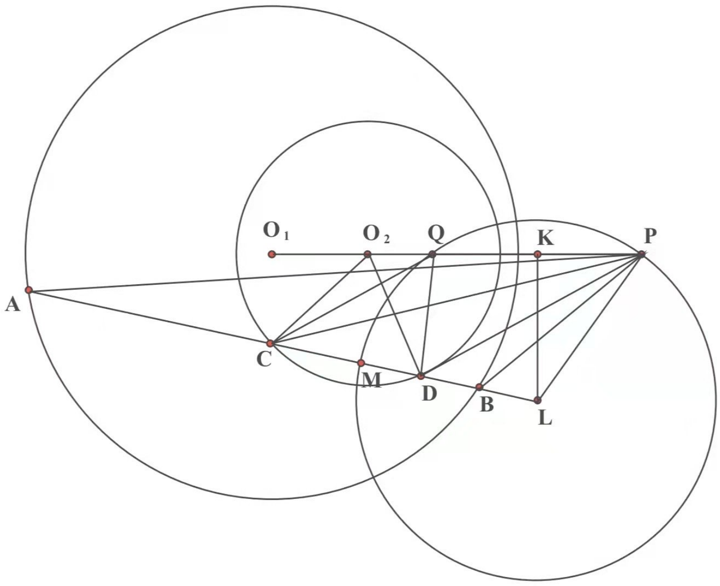
(付云皓 供题)

证明: 如图所示, 设两个圆的圆心分别为 O_1, O_2, 半径分别为 r_1, r_2, 且 $r_1 > r_2$. 我们先说明在射线 O_1O_2 上存在两点 P, Q, 使得 $O_1P \cdot O_1Q = r_1^2$, $O_2P \cdot O_2Q = r_2^2$.

先在射线 O_1O_2 上找一点 K, 使得 $O_1K = \dfrac{O_1O_2^2 + r_1^2 - r_2^2}{2O_1O_2}$. 由 $O_1O_2 \le r_1 - r_2$ 易知 $O_1K \ge r_1$. 然后在直线 O_1O_2 上找两点 P, Q 使得 $KP = KQ = \sqrt{O_1K^2 - r_1^2}$, 则 $O_1P \cdot O_1Q = r_1^2$, 另一方面,

$$\begin{aligned} O_2P \cdot O_2Q - O_1P \cdot O_1Q &= O_2K^2 - O_1K^2 = (O_1K - O_1O_2)^2 - O_1K^2 \\ &= O_1O_2^2 - 2O_1O_2 \cdot O_1K = r_2^2 - r_1^2, \end{aligned}$$

故 $O_2P \cdot O_2Q = r_2^2$.



对于任意一条题述的直线, 如果该直线与 O_1O_2 垂直, 由对称性知结论显然成立. 若不然, 由 $O_2C^2 = O_2Q \cdot O_2P$ 知 $\triangle O_2CQ \backsim \triangle O_2PC$, 故 $\dfrac{CQ}{CP} = \dfrac{r_2}{O_2P}$. 同理 $\dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{r_2}{O_2P}$, 故 $\dfrac{CQ}{CP} = \dfrac{DQ}{DP}$, 这说明 $\angle CPD$ 与 $\angle CQD$ 的平分线与 l 交于同一点 (记为 M). 同理可知 $\angle APB$ 与 $\langle AQB$ 的平分线与 l 交于同一点 (记为 M').

注意到点 P, Q, M 均在到 C, D 距离之比为 $\dfrac{CQ}{DQ}$ 的阿波罗尼斯圆上, 其圆心必在 l 上, 故圆心只能是 PQ 中垂线与 l 的交点. 同理, 点 P, Q, M' 均在到 A, B 距离之比为 $\dfrac{AQ}{BQ}$ 的阿波罗尼斯圆上, 其圆心也是同一点. 注意 K 在大圆边界或外边, 故此圆的圆心

L 一定在大圆外, 因此 M 与 M' 重合, 故

$$\angle APC = \angle APM - \angle CPM = \angle BPM - \angle DPM = \angle BPD.$$

证毕.

2. 已知正实数 α,β 满足: 对任意正整数 k_1,k_2 均有 $\lfloor k_1\alpha\rfloor \neq \lfloor k_2\beta\rfloor$, 其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数. 证明: 存在正整数 m_1,m_2 使得 $\dfrac{m_1}{\alpha}+\dfrac{m_2}{\beta}=1$.

(王彬 供题)

证明: 易知 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 是无理数 (否则存在正整数 k_1,k_2 使得 $k_1\alpha=k_2\beta$, 与题设矛盾).

若 $\alpha=\dfrac{q}{p}$ 是有理数, 则存在正整数 k_2 使得 $\dfrac{k_2\beta}{q}$ 的小数部分小于 $\dfrac{1}{q}$, 我们取 $k_1=p\left\lfloor\dfrac{k_2\beta}{q}\right\rfloor$, 此时, $k_1\alpha=q\cdot\left\lfloor\dfrac{k_2\beta}{q}\right\rfloor<k_2\beta<q\lfloor\dfrac{k_2\beta}{q}\rfloor+1$, 与题设矛盾. 故 α 是无理数, 同理 β 也是无理数.

我们称正整数对 (a,b) 是"优秀"数对, 如果 $0<b\beta-a\alpha<1$. 由题设知此时存在唯一的正整数 t 使得 $a\alpha<t<b\beta$. 记 $u=t-a\alpha$, $v=b\beta-t$, 并称优秀数对 (a,b) 对应中间数 t 与差量 (u,v). 我们证明

引理: 若优秀数对 (a_1,b_1), (a_2,b_2) 分别对应差量 (u_1,v_1), (u_2,v_2), 则 $\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{u_2}{v_2}$.

引理的证明: 记两个优秀数对分别对应中间数 t_1, t_2. 若结论不成立, 不妨设 $\dfrac{u_1}{v_1}>\dfrac{u_2}{v_2}$, 取 $\epsilon=\dfrac{u_1v_2-u_2v_1}{2}>0$.

由 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 是无理数知, 存在正整数 a_0,b_0 使得 $0<a_0\alpha-b_0\beta<\epsilon$. 另由题设知, 存在正整数 t_0 满足 $b_0\beta<t_0<a_0\alpha$. 记 $u_0=a_0\alpha-t_0, v_0=t_0-b_0\beta$. 此时若有 $\dfrac{u_1}{u_0}-\dfrac{v_1}{v_0}>1$, 则取 $L=\left\lfloor\dfrac{v_1}{v_0}\right\rfloor+1$ 使得 $\dfrac{u_1}{u_0}>L>\dfrac{v_1}{v_0}$, 即

$$u_1-Lu_0=(t_1+Lt_0)-(a_1+La_0)\alpha>0,\quad v_1-Lv_0=(t_1+Lt_0)-(b_1+Lb_0)\beta<0.$$

取 $k_1=a_1+La_0$, $k_2=b_1+Lb_0$, 有 $\lfloor k_1\alpha\rfloor=\lfloor k_2\beta\rfloor=t_1+Lt_0-1$. 与题设矛盾. 这说明 $\dfrac{u_1}{u_0}-\dfrac{v_1}{v_0}\leqslant 1$. 类似地有 $\dfrac{u_2}{u_0}-\dfrac{v_2}{v_0}\geqslant -1$. 进而有

$$u_1-\frac{u_0}{v_0}v_1\leqslant u_0,\ u_2-\frac{u_0}{v_0}v_2\geqslant -u_0,\quad\Rightarrow\quad u_1v_2-u_2v_1\leqslant u_0(v_1+v_2)<2\epsilon.$$

这与 ϵ 的定义矛盾, 引理得证.

即每个优秀数对 (a,b) 对应的比值 $\dfrac{u}{v}=\dfrac{t-a\alpha}{b\beta-t}$ 均相同. 记 (公共的) $\lambda=\dfrac{v}{u+v}\in(0,1)$, 则有 $\lambda\cdot a\alpha+(1-\lambda)\cdot b\beta=t\in\mathbb{Z}$. 我们称优秀数对的整系数线性组合为"良好"数对. 易知每个良好数对 (c,d) 均满足

$$\lambda\cdot c\alpha+(1-\lambda)\cdot d\beta=c\cdot\lambda\alpha+d\cdot(1-\lambda)\beta\in\mathbb{Z}.$$

取某个优秀数对 (a,b), 并记 $\delta=b\beta-a\alpha\in(0,1)$. 对任意 $M>0$, 我们有满足 $0<d\beta-c\alpha<M$ 且 $c>\dfrac{a}{\delta}M$ 的整数对 (c,d) 均为良好的. (取 $L=\left\lfloor\dfrac{d\beta-c\alpha}{\delta}\right\rfloor<\dfrac{M}{\delta}<\dfrac{c}{a}$, 使得 $(d-Lb)\beta-(c-La)\alpha=(d\beta-c\alpha)-L\delta\in(0,\delta)\subset(0,1)$, 从而 $(c-La,d-Lb)$ 是优秀数对, 同时 $(c,d)=(c-La,d-Lb)+L\cdot(a,b)$ 是良好的.)

取 $M=\alpha+2\beta$, 整数 $c_0>\dfrac{a}{\delta}M+1$ 及 $d_0=\left\lceil\dfrac{c_0\alpha}{\beta}\right\rceil$ 满足 $0<d_0\beta-c_0\alpha<\beta$. 由上述分析知 $(c_0,d_0),(c_0,d_0+1),(c_0-1,d_0)$ 均为良好数对, 其线性组合 $(0,1)$ 与 $(1,0)$ 也是良好数对. 这说明 $\lambda\alpha$ 与 $(1-\lambda)\beta$ 均为整数 (且为正数). 我们取正整数 $m_2=\lambda\alpha, m_1=(1-\lambda)\beta$ 使得 $\dfrac{m_2}{\alpha}+\dfrac{m_1}{\beta}=\lambda+(1-\lambda)=1$, 即 $m_1\alpha+m_2\beta=\alpha\beta$. 证毕.

3. 给定整数 $n \geqslant 2$. 求满足下列两个条件的所有 n 元整数数组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

(1) a_1 是奇数, $1 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 且 $M = \dfrac{1}{2^n}(a_1 - 1)a_2 \cdots a_n$ 是整数;

(2) 存在 M 个 n 元整数数组 $(c_{i,1}, c_{i,2}, \ldots, c_{i,n})$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$, 满足对任何 $1 \leqslant i < j \leqslant M$ 都存在 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 使得

$$c_{i,k} - c_{j,k} \not\equiv -1, 0, 1 \pmod{a_k}.$$

(丁剑、肖梁 供题)

证明: 所求数组为满足下述条件的数组:

$$\text{若 } a_2, \ldots, a_n \text{ 中恰有 } r \text{ 个奇数, 则 } 2^r \mid a_1 - 1. \qquad (*)$$

首先说明条件 $(*)$ 是必要的, 为此, 我们舍弃条件“$a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_1$”就不妨设 $a_1, \ldots, a_r$ 是奇数, $a_{r+1}, \ldots, a_n$ 是偶数. 假设已取出满足题目要求的 M 个数组. 对每个 $s \in \mathbb{Z}$, 记 $B_s = \big\{i | 1 \leqslant i \leqslant M, c_{i,n} \equiv s \pmod{a_n}\big\}$. 则

$$|B_1| + |B_2| + \cdots + |B_{a_n}| = M$$

故存在 s 使得 $|B_s| + |B_{s+1}| \geq \frac{M}{a_n/2}$. 这说明我们可以选择至少 $\frac{M}{a_n/2}$ 个数组使得它们两两之间第 n 个坐标 $c_{i,n}$ 的差都 $\equiv 0, \pm 1 \pmod{a_n}$.

对这些点继续上述操作依次考虑第 $n-1$ 个坐标模 a_{n-1}, 第 $n-2$ 个坐标模 a_{n-2}, ... 最后得到: 至少存在 $\dfrac{M}{\frac{a_n}{2} \cdots \frac{a_2}{2}} = \dfrac{a_1 - 1}{2}$ 个数组使得, 它们两两之间第 k 个坐标 $(2 \leqslant k \leqslant n)$ $c_{i,k}$ 的差都 $\equiv 0, \pm 1 \pmod{a_k}$. 但由题目条件这些数组第一个坐标两两差不为 $0, \pm 1 \pmod{a_1}$, 这时剩下的不能多于 $\frac{a_1 - 1}{2}$ 个数组. 所以之前每一步的讨论都恰好取等号. 即对每个 t, 我们都恰好取出了 $\dfrac{M}{\frac{a_n}{2} \cdots \frac{a_t}{2}}$ 个数组. 特别地, 取 $t = r + 1$,

$$\frac{M}{\frac{a_n}{2} \cdots \frac{a_{r+1}}{2}} = \frac{1}{2^r}(a_1 - 1)a_2 \cdots a_r \in \mathbb{Z}.$$

这说明 $2^r | a_1 - 1$.

接下来给出 $2^r | a_1 - 1$ 时的构造. 将条件“$a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_1$”减弱为 $a_1 = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$. 首先, 若 $a_2, \ldots, a_n$ 中有偶数, 不妨 a_n 是偶数. 假设 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ 时已找到数组 $(c_{i,1}, c_{i,2}, \ldots, c_{i,n-1})$ $(1 \leq i \leq M' = \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - 1)a_2 \cdots a_n = \frac{2}{a_n}M)$. 取 $(c_{i,1}, c_{i,2}, \ldots, c_{i,n-1}, 2c)$ $(1 \leq i \leq M', 1 \leq c \leq \frac{a_n}{2})$ 即可.

故我们只需证明 $a_2, a_3, \ldots, a_n$ 全为奇数的情形. 记 $a_1 = 2^n t + 1$. 先讨论 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 的情形, 此时 $M = t a_1^{n-1}$. 定义函数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} 2^i x_i$. 取如下 $M = t a_1^{n-1}$ 个数组:

$$\big(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}) + 2^n s\big),$$

这里 $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \{1, 2, \ldots, a_1\}$, $s \in \{1, \ldots, t\}$. 下面说明这些数组满足题目条件. 考虑上述数组和另一数组 $\big(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', f(x_1', \ldots, x_{n-1}') + 2^n s'\big)$. 若对任意 k 它们第 k

个分量之差 $\equiv 0, \pm 1 \pmod{a_1}$, 则

$$x_i - x_i' \equiv 0, \pm 1 \pmod{a_1}, \quad i = 1, \ldots, n-1; \text{ 且}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1}(x_i - x_i') + 2^n(s - s') \equiv 0, \pm 1 \pmod{a_1} \tag{$*$}$$

第一式说明求和 $\sum\limits_{i=1}^{i-1} 2^i(x_i - x_i')$ 只能 $\equiv 2^{n-1}-1, 2^{n-2}-1, \ldots, 1-2^{n-1} \pmod{a_1}$, 而 $s - s' \in \{1-t, 2-t, \ldots, t-1\}$. 若 $(*)$ 成立, 只能 $s = s'$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n-1} 2^{i-1}(x_i - x_i') = 0 \pmod{a_1}$. 由二进制表达式的唯一性得 $x_i = x_i' \pmod{a_1}$, 即这两个数组是同一数组. 这完成验证所构造的数组满足题目条件.

现在考虑 $a_1, \ldots, a_n$ 全为奇数的一般情况. 下面说明如果 $a_2 > a_1$, 我们可以划归为 $a_1, a_2-2, a_3, \ldots, a_n$ 的情况, 这样用归纳法可以划归到所有 a_i 都相等的情形, 此情况上面已经讨论. 假设在 $a_1' = a_1, a_2' = a_2 - 2, a_3' = a_3, \ldots, a_n' = a_n$ 的情况下存在满足题目要求的 $M' = \frac{1}{2^n}(a_1-1)(a_2-2)a_3\cdots a_n$ 个数组. 不妨设这些数组第 k 个坐标都在 $\{0, 1, \ldots, a_k'-1\}$ 中取值. 下面按如下方式定义新的 $M = \frac{1}{2^n}(a_1-1)a_2a_3\cdots a_n$ 个数组: 首先选取原来的 M' 个数组, 另外对 $x_2 = a_2-2$, 我们选取 $(x_1, a_2-2, x_3, \ldots, x_n)$ 当且仅当我们之前选取了 $(x_1, a_2-4, x_3, \ldots, x_n)$; 对 $x_2 = a_2-1$, 我们选取 $(x_1, a_2-1, x_3, \ldots, x_n)$ 当且仅当我们之前选取了 $(x_1, a_2-3, x_3, \ldots, x_n)$. 易证这样取出的数组满足条件. 另外, 利用之前 $2^r | a_1 - 1$ 的归纳证明时取等号的条件知, 在之前取出的 M' 个数组中, 第二个坐标为 a_2-1 和 a_2-2 的数组个数和为 $M' \cdot \frac{2}{a_2-2}$. 所以新选出的数组个数为 $M' + M' \cdot \frac{2}{a_2-2} = M$.

4. 求所有正整数 k, 使得平面直角坐标系中存在有限多个重心为整点的三角形, 其中任意两个三角形的交集或为空集, 或为一个公共顶点, 或为连接两个公共顶点的边, 且这些三角形的并集是一个边长为 k 的正方形 (该正方形的顶点可以不是整点, 边可以不平行于坐标轴).

(瞿振华 供题)

解答: 满足条件的正整数 k 为所有 3 的整倍数.

一方面, 当 $3|k$ 时, 设 $k=3t$. 考虑以 $(0,0),(3t,3t),(3t,0),(0,3t)$ 为顶点的正方形. 将它沿直线 $x=3i$, $(i=1,\ldots,t)$ 和 $y=3j$, $(j=1,\ldots,t)$ 划分成 t^2 个边长为 3 的正方形, 再将每个正方形沿某条对角线划分成 2 个等腰直角三角形, 则所得的每个三角形的重心都是整点.

另一方面, 假设某个边长为 k 的正方形具有三角剖分, 满足每个剖分出的三角形的重心都是整点. 记 V 为剖分出的所有顶点之集. 定义 V 中的二元关系 $A\sim_0 B$, 若存在两个剖分出的三角形形如 $\triangle ACD$, $\triangle BCD$. 由 $\sim_0$ 生成 V 上的等价关系 $\sim$, 即 $A\sim B$ 当且仅当存在 $A_1,\ldots,A_r$ 使得 $A\sim_0 A_1\sim_0\cdots\sim_0 A_r\sim_0 B$. 记任一点 P 的横、纵坐标分别为 x_P, y_P. 我们有:

(i) 若 $A\sim B$, 则 $3|x_A-x_B$, $3|y_A-y_B$. 这是因为: 根据传递性, 不妨设 $A\sim_0 B$, 即存在两个剖分出的三角形形如 $\triangle ACD$, $\triangle BCD$, 由于它们的重心都是整点, 故 $3|x_A+x_C+x_D$, $3|x_B+x_C+x_D$, 于是 $3|x_A-x_B$, 同理 $3|y_A-y_B$.

(ii) 集合 V 关于 $\sim$ 至多有三个等价类. 这是因为: 取定一个三角形 T_0, 对 V 中任一点 A, 总存在一列三角形 $T_0,\ldots,T_r$ 使得 T_{i-1} 与 T_i 有公共边 $(i=1,\ldots,r)$, 且 A 是 T_r 的顶点, 根据 $\sim$ 的定义, T_{i-1} 的三个顶点总相应地等价于 T_i 的三个顶点, 从而由传递性 A 等价于 T_0 的三个顶点之一.

由 (ii) 及抽屉原理知, 正方形的四个顶点中必有两个顶点等价. 再由 (i) 知 $3|k^2$ 或 $3|2k^2$, 即得 $3|k$. 证毕.

5. 证明: 存在正实数 C 和 $\alpha > \dfrac{1}{2}$, 使得对任意正整数 n, 均存在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集 A, 满足 $|A| \geqslant Cn^{\alpha}$, 且 A 中任意两个不同数的差不是完全平方数.

(余红兵 供题)

证明: 对 $n \geq 25$, 考虑 $5^{2t} \leq n < 5^{2t+2} (t \in \mathbb{N}^*)$. 我们取

$$A = \{(\alpha_{2t}, \ldots, \alpha_1)_5 \mid \alpha_{2i} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, i = 1, \ldots, t;\ \alpha_{2i-1} \in \{1, 3\}, i = 1, \ldots, t\}.$$

其中 $(\alpha_{2t}, \ldots, \alpha_1)_5$ 为 $m = 5^{2t-1}\alpha_{2t} + \cdots + 5\alpha_2 + \alpha_1$ 的 5 进制表示的简写. 显然 $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

对于 $u_1, u_2 \in A, u_1 = (a_{2t}, \ldots, a_1), u_2 = (b_{2t}, \ldots, b_1)$. 不妨假设 $u_1 > u_2$, 考虑 $u_1 - u_2$. 设 u_1 与 u_2 在 5 进制下的第一个不同位数为 $a_s \neq b_s$, 即 $a_1 = b_1, \ldots, a_{s-1} = b_{s-1}, a_s \neq b_s$. 此时 $u_1 - u_2 = (a_{2t} - b_{2t})5^{2t-1} + \cdots + (a_s - b_s)5^{s-1}$.

若 $2|s$, 则 $5^{s-1} \| (u_1 - u_2)$ ($a_s - b_s \neq 0$ 且在 $-4 \sim 4$ 之间), 故 $u_1 - u_2$ 不可能是完全平方数.

若 $2 \nmid s$, 则 $\dfrac{u_1 - u_2}{5^{s-1}} = (a_{2t} - b_{2t})5^{2t-1} + \cdots + (a_s - b_s) \in \mathbb{Z}$. 若 $u_1 - u_2$ 为完全平方数, 由 $2|s-1$ 知 $\dfrac{u_1 - u_2}{5^{s-1}}$ 也是完全平方数. 另一方面, 由 $2|s-1$ 且 $a_s \neq b_s$ 知 $\{a_s, b_s\} = \{1, 3\}$ 且 $\dfrac{u_1 - u_2}{5^{s-1}} \equiv 2$ 或 $3 \pmod 5$ 一定不是完全平方数.

因此, 对 $u_1, u_2 \in A, u_1 > u_2, u_1 - u_2$ 总不是完全平方数. 故 A 符合要求.

又 $|A| = 10^t$, 令 $\alpha = \log_{25} 10 > 1/2$, 有

$$n^{\alpha} < 5^{(2t+2)\log_{25} 10} = 10^{t+1} = 10|A|.$$

只需令 $C = \dfrac{1}{24}$, $\alpha = \log_{25} 10$ ($\alpha \in (0, 1)$) 即可.

对 $n \leq 24$, 令 $A = \{1\}$, 也有 $|A| \geqslant \dfrac{1}{24}n \geqslant \dfrac{1}{24}n^{\alpha}$.

综上, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 均可找到 A, 使得 $|A| \geqslant Cn^{\alpha}$.

注: 也可考虑 mod 16 的解答, 取

$$A = \{(\alpha_t, \ldots, \alpha_1)_{16} \mid \alpha_i \in \{2, 5, 7, 13, 15\}, i = 1, \ldots, t\}.$$

6. (1) 证明: 在复平面上, 方程

$$z^{20}+63z+22=0$$

的全体复根的凸包的面积大于 π.

(2) 设 n 为正整数, $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n$ 为 n 个奇数. 证明: 对任意总和为 1 的 n 个复数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 以及任意模长不小于 1 的复数 w, 方程

$$a_1z^{k_1}+a_2z^{k_2}+\cdots+a_nz^{k_n}=w$$

都至少有一个模长不超过 $3n|w|$ 的复根.

(姚一隽 供题)

证明: (1) 我们先证明

引理 [Gauss-Lucas 定理][1]: 多项式 $f'(z)$ 的零点均位于 $f(z)$ 的零点的闭包中.

引理的证明: 由代数基本定理, 我们知道 $f(z)$ 可以写成

$$f(z)=A(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\cdots(z-z_n)^{\alpha_n}.$$

这样, $f'(z)$ 有 (α_1-1) 重零点 z_1, (α_2-1) 重零点 z_2, $\ldots$, (α_n-1) 重零点 z_n. 对于 $f'(z)$ 的其他任何一个零点 Z, 必有

$$\frac{f'(Z)}{f(Z)}=\frac{\alpha_1}{Z-z_1}+\frac{\alpha_2}{Z-z_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{Z-z_n}=0.$$

即

$$\frac{\alpha_1}{|Z-z_1|^2}(\overline{Z}-\bar{z}_1)+\frac{\alpha_2}{|Z-z_2|^2}(\overline{Z}-\bar{z}_2)+\cdots+\frac{\alpha_n}{|Z-z_n|^2}(\overline{Z}-\bar{z}_n)=0.$$

取复共轭, 移项, 可得

$$Z=\frac{\frac{\alpha_1}{|Z-z_1|^2}z_1+\frac{\alpha_2}{|Z-z_2|^2}z_2+\cdots+\frac{\alpha_n}{|Z-z_n|^2}z_n}{\frac{\alpha_1}{|Z-z_1|^2}+\frac{\alpha_2}{|Z-z_2|^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{|Z-z_n|^2}}.$$

从而 Z 可以表示成 z_1, z_2, $\ldots$, z_n 的凸线性组合. 即得结论.

回到原题: 由引理, 我们知道, 题中所述方程的全体复根的凸包包含方程

$$20z^{19}-63=0.$$

的全体复根的凸包, 即一个半径为 $\left(\dfrac{63}{20}\right)^{1/19}$ 的圆内接正十九边形.

---

[1]这个命题最早由 Gauss 在 1836 年以隐含的方式使用, 第一个证明由法国数学家 Félix Lucas 在 1874 年给出. 这里我们基本上采用 Lucas 的想法, 具体的叙述是匈牙利数学家 Lipót Fejér 在 1907 年的论文 *Sur la racine de moindre module d'une équation algébrique(C. R. A. S. 145 (1907), 第 459–461 页)* 中描述的.

这个圆内接正十九边形的内切圆半径是

$$\left(\frac{63}{20}\right)^{1/19}\cos\frac{\pi}{19}>\left(\frac{63}{20}\right)^{1/19}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{19}\right)^2\right)>\left(\frac{63}{20}\right)^{1/19}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\right)=\frac{71}{72}\left(\frac{63}{20}\right)^{1/19}.$$

而根据

$$\left(\frac{72}{71}\right)^{19}=\left(1+\frac{1}{71}\right)^{19}<1+\frac{19}{71}+18\cdot C_{19}^2\frac{1}{72^2}<3<\frac{63}{20}.$$

所以这个正十九边形的内切圆半径大于 1, 从而命题成立.

(2) 我们证明:

(A) 对于满足题意的 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 和 w, 方程

$$a_1z^{k_1}+a_2z^{k_2}+\cdots+a_nz^{k_n}=w \tag{$*$}$$

的根的模长的最小值不超过 $3mn$.

这等价于

(B) 对于满足题意的 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 和 w, 方程

$$wz^{k_n}-a_1z^{k_n-k_1}-a_2z^{k_n-k_2}-\cdots-a_{n-1}z^{k_n-k_{n-1}}-a_n=0 \tag{$**$}$$

的根的模长的最大值 M_0 不小于 $1/(3mn)$.

由 (1) 中的引理, 方程($**$)的根的模长的最大值不小于求导之后得到的方程

$$wk_nz^{k_n-1}-a_1(k_n-k_1)z^{k_n-k_1-1}-\cdots-a_{n-1}(k_n-k_{n-1})z^{k_n-k_{n-1}-1}=0 \tag{1}$$

的根的模长的最大值, 亦即方程

$$wk_nz^{k_{n-1}}-a_1(k_n-k_1)z^{k_{n-1}-k_1}-a_2(k_{n-1}-k_2)z^{k_{n-1}-k_2}-\cdots-a_{n-1}(k_n-k_{n-1})=0 \tag{$1'$}$$

的根的模长的最大值 M_1. 从方程($1'$)出发, 重复 $n-s$ 次上述操作, 我们知道每一步得到的方程的根的模长的最大值是递减的, 于是得到

$$M_0\geqslant M_1\geqslant\cdots\geqslant M_{n-s},$$

其中 M_{n-s} 是方程

$$\begin{aligned}wk_nk_{n-1}\cdots k_{s+1}z^{k_s}-a_1(k_n-k_1)(k_{n-1}-k_1)\cdots(k_{s+1}-k_1)z^{k_s-k_1}&\\-\cdots-a_s(k_n-k_s)\cdots(k_{s+1}-k_s)=0&\end{aligned} \tag{$(n-s)'$}$$

的根的模长的最大值, 从而根据韦达定理可知

$$M_0\geqslant M_1\geqslant\cdots\geqslant M_{n-s}\geqslant\left[\frac{(k_n-k_s)\cdots(k_{s+1}-k_s)}{k_nk_{n-1}\cdots k_{s+1}}\cdot\left|\frac{a_s}{w}\right|\right]^{1/k_s}.$$

所以我们只需证明, 存在 $s\in\{1,2,\ldots,n\}$, 使得

$$\left[\frac{k_nk_{n-1}\cdots k_{s+1}}{(k_n-k_s)(k_{n-1}-k_s)\cdots(k_{s+1}-k_s)}\right]^{1/k_s}\cdot\left[\left|\frac{w}{a_s}\right|\right]^{1/k_s}\leqslant 3mn$$

即可.

注意到

$$\frac{k_p}{k_p-k_s}=1+\frac{k_s}{k_p-k_s}\leqslant\left(1+\frac{1}{k_p-k_s}\right)^{k_s},$$

我们只需证明, 存在 s, 使得

$$\left[\prod_{p=s+1}^{n}\left(1+\frac{1}{k_p-k_s}\right)\right]\cdot\left(\frac{m}{|a_s|}\right)^{1/k_s}\leqslant 3mn$$

成立.[2]

我们还注意到,

- 因为所有的 k_j 都是奇数, 从而 $k_p-k_s\geqslant 2(p-s)$, 于是
$$1+\frac{1}{k_p-k_s}\leqslant 1+\frac{1}{2(p-s)}<\frac{p-s+1}{p-s};$$
- 由 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j=1$ 可知 $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|\geqslant 1$, 从而必有 s, 使得 $|a_s|\geqslant\dfrac{1}{2^s}$, 即 $\dfrac{1}{|a_s|}\leqslant 2^s$.

以下我们分两种情况讨论:

情形 1: 如果存在 s, 使得 $k_s\geqslant 3$(s 可以是 1) 且 $|a_s|\geqslant\dfrac{1}{2^s}$, 那么 (注意到 $s\leqslant 2s-1\leqslant k_s$)

$$\begin{aligned}\left[\prod_{p=s+1}^{n}\left(1+\frac{1}{k_p-k_s}\right)\right]\cdot\left(\frac{m}{|a_s|}\right)^{1/k_s}&<\left[\prod_{p=s+1}^{n}\frac{p-s+1}{p-s}\right]\cdot m^{1/k_s}\cdot 2^{s/k_s}\\&<n\cdot\sqrt[3]{m}\cdot 2<3mn.\end{aligned}$$

情形 2: 如果上述情形不成立, 那么必然有 $k_1=1$, 且 $|a_1|\geqslant\frac{1}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}\left[\prod_{p=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k_p-k_1}\right)\right]\cdot\frac{m}{|a_s|}&\leqslant\left[\prod_{p=2}^{n}\frac{2(p-1)+1}{2(p-1)}\right]\cdot m\cdot 2\\&<\sqrt{\prod_{k=1}^{2n-2}\frac{k+1}{k}}\cdot 63\cdot 2=\sqrt{2n-1}\cdot m\cdot 2<3mn.\end{aligned}$$

从而命题成立.

[2]上述操作出自匈牙利数学家 M.Fekete 的论文 *Analoga zu den Sätze von Rolle und Bolzano fÿr komplexe Polynome und Potenzreihen mit Lüchen*（*Jahr. der deutschen Math. Verieiningung, 32(1924), 第 299-306 页*).

2022 年 IMO 中国国家队选拔考试测试四解答

1. 在 $n\times n$ $(n\geqslant 2)$ 的网格屏上, 每个单位方格初始时显示红黄蓝三种颜色之一. 每一秒钟网格屏中所有单位方格按如下方式同时变换颜色, 称为一轮变换:

• 对当前颜色是红色的单位方格 A, 如果当前存在黄色单位方格与它有公共边, 那么下一秒钟 A 变为黄色, 否则 A 的颜色仍是红色;

• 对当前颜色是黄色的单位方格 B, 如果当前存在蓝色单位方格与它有公共边, 那么下一秒钟 B 变为蓝色, 否则 B 的颜色仍是黄色;

• 对当前颜色是蓝色的单位方格 C, 如果当前存在红色单位方格与它有公共边, 那么下一秒钟 C 变为红色, 否则 C 的颜色仍是蓝色.

证明: 如果在 $2n-2$ 轮变换后屏幕没有变成单一颜色, 那么它将永远不会变成单一颜色.

(冷福生 供题)

证法一: 用 0, 1, 2 分别标记红黄蓝三种颜色. 对两个方格 u, v (或两个颜色), 定义

$$w(u,v)=\begin{cases}-1, & u \text{ 是红 (黄、蓝) 色而 } v \text{ 是黄 (蓝、红) 色;}\\ 1, & u \text{ 是黄 (蓝、红) 色而 } v \text{ 是红 (蓝、黄) 色;}\\ 0, & u,v \text{ 颜色相同.}\end{cases}$$

即 $w(u,v)$ 是 $\{-1,0,1\}$ 中与 $u-v$ 模 3 同余的数.

以单位方格为顶点，具有公共边的方格之间连边，构造简单图 G. 对每个单位方格 v，记 $v^{(t)}$ 为第 t 秒 v 的颜色. 对于 G 的每一个 (有向) 圈 $\alpha=v_1\cdots v_kv_1$, 定义

$$w_t(\alpha)=\sum_{j=1}^{k}w(v_j^{(t)},v_{j+1}^{(t)})$$

这里顶点下标 mod k 考虑. 我们证明, 在题目所述变换下, $w_t(\alpha)$ 不依赖于 t. 只需证明

$$\sum_{j=1}^{k}\left(w(v_j^{(t+1)},v_{j+1}^{(t+1)})-w(v_j^{(t)},v_{j+1}^{(t)})\right)=0.$$

为此, 只需证明对每一个 j,

$$w(v_j^{(t+1)},v_{j+1}^{(t+1)})-w(v_j^{(t)},v_{j+1}^{(t)})=w(v_j^{(t+1)},v_j^{(t)})-w(v_{j+1}^{(t+1)},v_{j+1}^{(t)}). \qquad (*)$$

首先注意到 $(*)$ 两边自动模 3 同余, 再者根据颜色改变规则, $(*)$ 右边每项都属于 $\{0,1\}$. 所以 $(*)$ 右边属于 $\{-1,0,1\}$. 只需证明 $(*)$ 左边不为 ± 2. 假如 $(*)$ 左边为 2, 则 $w(v_j^{(t+1)},v_{j+1}^{(t+1)})=1$ 且 $w(v_j^{(t)},v_{j+1}^{(t)})=-1$. 不妨 $v_j^{(t)}$ 为红, 则 $v_{j+1}^{(t)}$ 为黄. 根据颜色变化规则得 $v_j^{(t+1)}$ 为黄, 故 $v_{j+1}^{(t+1)}$ 为红. 但红色格子 $v_{j+1}^{(t)}$ 不允许在下一秒变成黄色, 矛盾. 同理可证 $(*)$ 左边不为 -2, 故 $(*)$ 成立. 所以, $w_t(\alpha)$ 不依赖于 t.

显然若某个 $w_0(\alpha)\neq 0$, α 中顶点颜色永远不单一, 因此要想屏幕最终变为单一颜色, 图 G 的每个圈 α 均需满足 $w_0(\alpha)=0$. 这意味着我们可以对每个方格 v 赋值 $h_0(v)\in\mathbb{Z}$, 使得 G 中连接任意给定顶点 u,v 的任何 (有向) 路径 $\rho=uv_1\cdots v_kv$, 均满足和式

$$w_0(u,v_1)+\left(\sum_{j=1}^{k-1}w_0(v_j,v_{j+1})\right)+w_0(v_k,v)=h_0(u)-h_0(v).$$

假设 u 是使得赋值 h_0 最大的单位方格. 由赋值的最大性, u 在下一秒不变色. 由于 $w_t(\alpha)$ 不依赖于 t, 故 $w_1(\alpha)=0$ 对每个圈 α 成立. 故我们可以对每个方格 v 类似赋值 $h_1(v)$, 并满足条件 $h_1(u)=h_0(u)$. 下说明 $h_1(u)$ 仍是函数 h_1 的最大值点. 假设不是, 即存在任一点 v 使得 $h_1(v)>h_1(u)$. 选取路线 $uv_1\cdots v_kv$, 对每条边使用 $(*)$ 并相加得到

$$(h_1(u)-h_1(v))-(h_0(u)-h_0(v))=w(u^{(1)},u^{(0)})-w(v^{(1)},v^{(0)})=-w(v^{(1)},v^{(0)}).$$

由此推出必然 $h_0(u)=h_0(v)$ 且 $v^{(1)}\neq v^{(0)}$, 即 v 点也是 h_0 的最大点. 但由赋值 h_0 的定义知, v 点的颜色不改变, 矛盾!

此外, 注意到与 u 点相邻的点 v, $h_0(v)$ 只能为 $h_0(u)$ 或者 $h_0(u)-1$. 不论哪种情况, 第 1 秒后其颜色与点 u 相同.

归纳使用上述结论知赋值 h_0 的极大值点 u 一直不变色且可以对任意时间 t 给出类似赋值 h_t 使得 $h_t(u)=h_0(u)$. 现在对任意方格 v, 若存在路径 $\rho=uv_1\cdots v_kv$, 则最多 $k+1$ 秒后, v 将变成 u 的颜色. 由于屏幕上任何两个单位方格的距离 (连接两者的最短路径长度) 不超过 $2n-1$, 因此, 若屏幕最终变为单一颜色, 最后用时不超过 $2n-2$ 秒. 证毕.

证法二: 先证明断言: 如果最终屏幕变成单一颜色, 不妨设为蓝色, 那么必存在某一方格始终为蓝色.

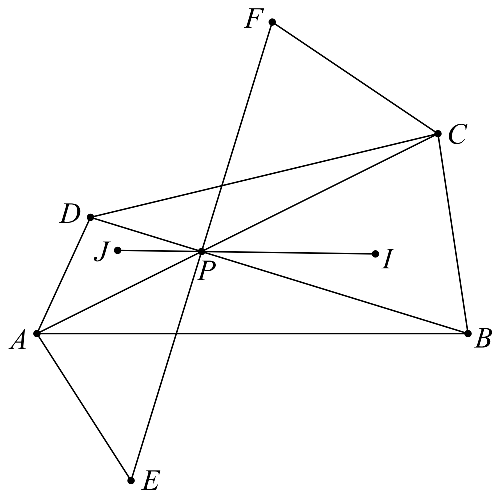
反证之, 假设最终方格全为蓝色, 但每个方格均改变过颜色. 我们构造有向图 G 如下: 以所有方格为顶点, 连接有向边 $A\to B$, 如果方格 A 和 B 相邻且存在时刻 t_0 使得: 方格 A 在 t_0-1 时不为蓝色, 而在 $t\geqslant t_0$ 时恒为蓝色; 方格 B 在 t_0-1 时为蓝色 (换言之, 方格 A 最后一次变色是由方格 B 导致的). 由于我们假定每个方格均改变过颜色, 故图 G 中每点的出度都 $\geqslant 1$, 进而图 G 中必存在一个圈 $A_1\to A_2\to\cdots\to A_k\to A_1$. 设 A_i 在 t_i 轮变换后最终变蓝, 即 A_i 在 t_i-1 时不是蓝色, 在 $t\geqslant t_i$ 时恒为蓝色. 不妨设 t_1 是 $t_1,\ldots,t_k$ 中最大者. 由 $A_1\to A_2$ 知, 在 t_1-1 时 A_1 为黄色; 由 $A_k\to A_1$ 知, 在 t_k-1 时 A_1 为蓝色, 因此一定有 $t_k<t_1$. 然而蓝色方格必须经由红色才能变成黄色, 即存在 $t_k<t'<t_1$, 使得 A_1 在 $t'-1$ 时为红色. 但是由于 $t'-1\geqslant t_k$, A_k 在 $t'-1$ 时是蓝色, 于是 A_1 迫使 A_k 在 t' 时变为红色. 这同 t_k 的定义, 即 A_k 从 t_k 时刻开始恒为蓝色, 相矛盾.

回到原题: 假设最终方格全为蓝色, 证明 $2n-2$ 轮变换后全为蓝色.

根据断言, 存在一个方格 A 始终为蓝色. 定义两方格的距离为水平距离与竖直距离之和, 则两方格的最远距离为 $2n-2$. 若 B 与 A 距离为 1, 则 B 始终不能为红色, 这意

味着: 若 B 初始为蓝色, 则 B 始终为蓝色; 若 B 初始为黄色, 则 B 在一轮变换后固定为蓝色. 现在对从某点 B 到点 A 的距离 k 从 1 到 $2n-2$ 归纳证明 B 在 k 轮变换后固定为蓝色. 假设此结论已经对 $k-1$ 证明, 若 B 与 A 距离为 k, 取与 B 相邻的点 B' 与 A 距离为 $k-1$, 由归纳知 B' 在 $k-1$ 轮变换后固定为蓝色, 那么同样的论证可以说明 B 在 k 轮变换后固定为蓝色. 此归纳证明推出所有方格在 $2n-2$ 轮变换后全变为蓝色. 证毕.

2. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ 的内心分别为 I, J. 已知 IJ, AC, BD 相交于一点 P. 过 P 且垂直于 BD 的直线与 $\angle BAD$ 的外角平分线相交于点 E, 与 $\angle BCD$ 的外角平分线相交于点 F. 证明: $PE = PF$.

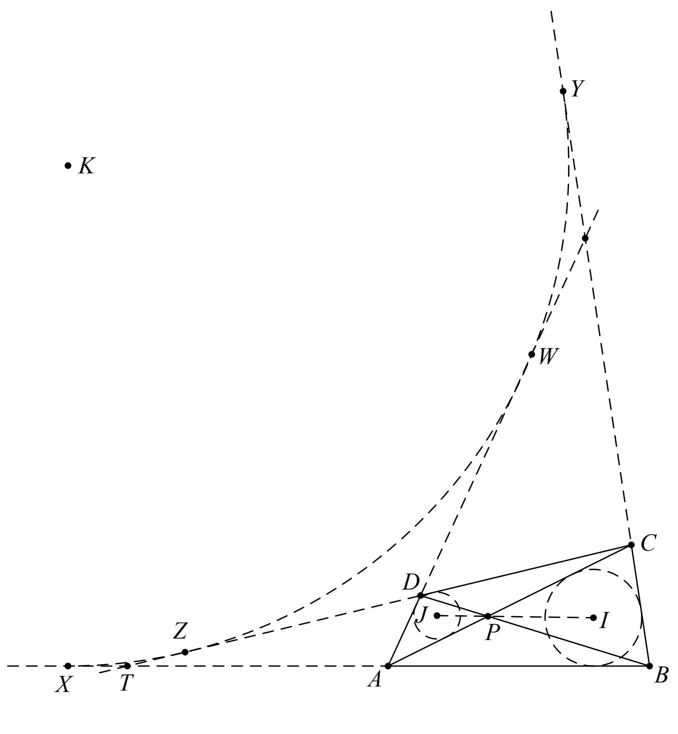


(林天齐 供题)

证法一: 若 $AB//CD$ 且 AD/BC, 则 $ABCD$ 为平行四边形. 此时, P 为 AC 中点且 $AE//CF$, 故 $PE = PF$.

以下假设 AB 与 CD 不平行. 先证明 $AB + AD = CB + CD$.

如图所示, 不妨设 BA, CD 的延长线相交于点 T. 作 $\triangle TBC$ 的 B-旁切圆 $\odot K$, 它们分别与直线 AB, BC, CD 相切于点 X, Y, Z.



因为 $\odot I, \odot J$ 的内位似中心在直线 IJ 上, 而 AC 是它们的一条内公切线, 故结合已知条件可知, $\odot I, \odot J$ 的内位似中心是 P.

熟知 $\odot I$ 与 $\odot J$ 的内位似中心 P, $\odot I$ 与 $\odot K$ 的外位似中心 B, $\odot J$ 与 $\odot K$ 的内位似中心, 三点共线, 故 $\odot J$ 与 $\odot K$ 的内位似中心在直线 BP 上. 又 CD 是 $\odot J$ 与 $\odot K$ 的一条内公切线, 故 $\odot J$ 与 $\odot K$ 的内位似中心是 D, 进而 AD 也与 $\odot K$ 相切, 记切点为 W.

由切线长定理可得

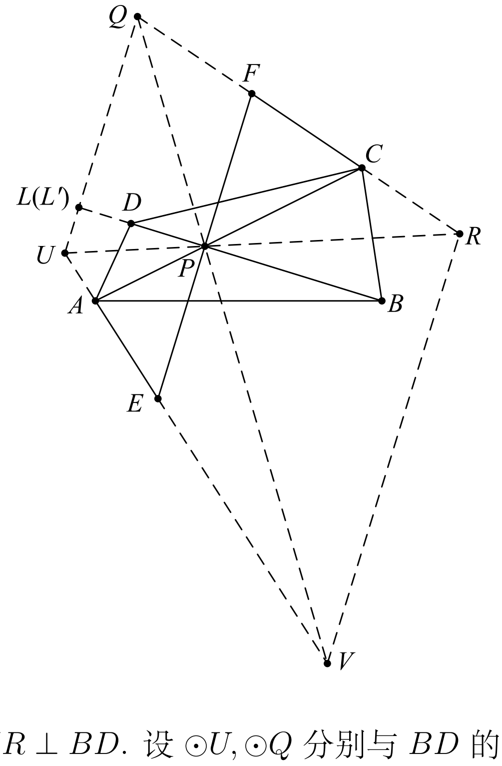
$$\begin{aligned}AB+AD&=(BX-AX)+(AW-DW)=BX-DW\\&=BY-DZ=(CB+CY)-(CZ-CD)=CB+CD.\end{aligned}$$

即

$$AB+AD=CB+CD. \tag{1}$$

设 $\triangle ABD$ 的 B-旁切圆, D-旁切圆分别是 $\odot U$, $\odot V$; $\triangle BCD$ 的 B-旁切圆, D-旁切圆分别是 $\odot Q, \odot R$.

下面证明 UR, VQ 相交与点 P. 考虑 $\odot K, \odot U, \odot R$, 熟知 $\odot K$ 与 $\odot U$ 的外位似中心 A, $\odot K$ 与 $\odot R$ 的内位似中心 C, $\odot U$ 与 $\odot R$ 的内位似中心, 三点共线. 而 BD 是 $\odot U$ 与 $\odot R$ 的内公切线, 故 $\odot U$ 与 $\odot R$ 的内位似中心是 P. 进而 UR 过点 P. 同理 VQ 也过点 P.



再证明 $UQ\perp BD$, $VR\perp BD$. 设 $\odot U, \odot Q$ 分别与 BD 的延长线相切于点 L, L', 则

$$BL=\frac{1}{2}(AB+AD+BD),\ BL'=\frac{1}{2}(CB+CD+BD).$$

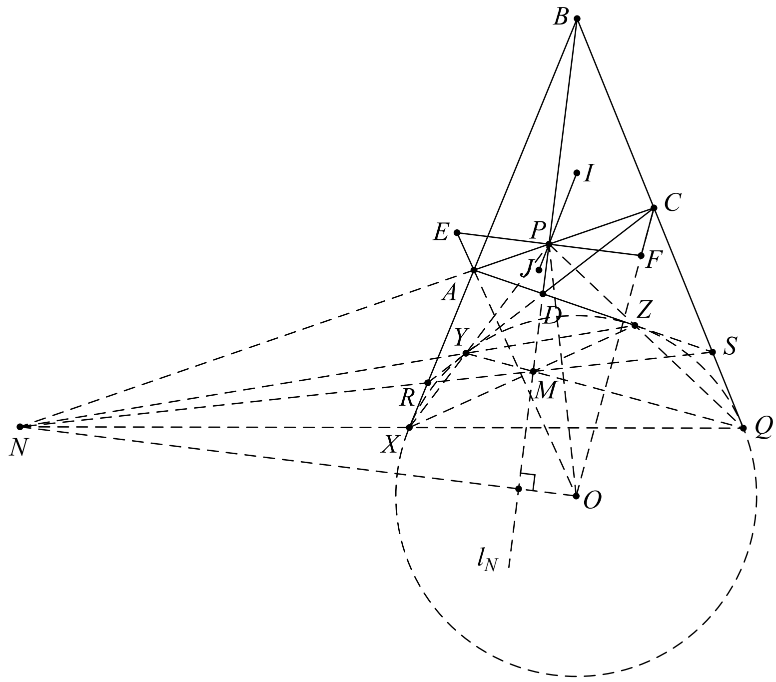
结合(1)式可知 $BL=BL'$, 故 L, L' 重合. 因此 $UQ\perp BD$. 同理 $VR\perp BD$.

又 $EF\perp BD$, 故 $UQ//EF//VR$. 于是

$$\frac{PE}{UQ}=\frac{VP}{VQ}=\frac{RF}{RQ}=\frac{PF}{UQ},$$

因此 $PE=PF$. 证毕.

证法二: (根据陈梓青同学的解答整理)



若 $AB//CD$ 且 $AD//BC$, 同证法一易证. 以下不妨假设 AB 与 CD 不平行. 同证法一得到四边形 $ABCD$ 有旁切圆 $\odot O$, 与四边所在直线 AB,BC,CD,DA 分别相切于点 X,Q,Y,Z. 设 $AD\cap BC=S$, $AB\cap CD=R$.

由圆外切四边形在旁切圆下的牛顿定理知: AC,BD,XY,ZQ 四线交于点 P; AC,RS,YZ,XQ 四线交于点 N; BD,RS,XZ,QY 四线交于点 M.

此时考虑圆内接四边形 $XYZQ$ 可知, 点 M,P 皆位于点 N 关于 $\odot O$ 的极线 ℓ_N 上, 即 $MP=\ell_N$. 故 $ON\perp PM$, 即 $ON\perp BD$. 在完全四边形 $BARDSC$ 中, $A,C;P,N$ 成调和点列, 故 $ON,OP;OA,OC$ 成调和线束. 因为 $EF\perp BD$, 故 $EF//NO$, 从而 P 为 EF 中点. 证毕.

3. 求所有的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足: 对任意实数 x,y, 如下两个可重集相等

$$\big\{f(xf(y)+1),\ f(yf(x)-1)\big\}=\big\{xf(f(y))-1,\ yf(f(x))+1\big\}. \qquad (*)$$

注: $\{a,b\}=\{c,d\}$ 作为可重集相等指 $a=c$, $b=d$, 或者 $a=d$, $b=c$.

(肖梁 供题)

解答: 所求的所有函数为 $f(x)=x$ 和 $f(x)=-x$. 易验证这两个函数满足$(*)$.

以下所有集合理解为可重集. 在$(*)$中取 $x=y=0$ 得 $\{f(1),f(-1)\}=\{1,-1\}$. 先考虑 $f(1)=1$ 的情形. 往证 $f(x)=x$ $(x\in\mathbb{R})$.

第 1 步: 证明 $f(n)=n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

首先说明 $f(0)=0$. 在$(*)$中取 $x=0$ 得 $\big\{f(1),\ f(yf(0)-1)\big\}=\big\{-1,\ yf(f(0))+1\big\}$. 若 $f(0)\neq 0$, 在上式取 $y=\dfrac{2}{f(0)}$, 左边为 $\{1,\ 1\}$ 不可能包含右边的 -1.

下面归纳证明 $f(n)=n$ $(n\in\mathbb{N})$. $n=1$ 已知. 假设 $f(m)=m$ 对 $m\leqslant n$ 成立. 在$(*)$中取 $x=1, y=n$ 得

$$\big\{f(n+1),\ f(n-1)\big\}=\big\{n-1,n+1\big\}$$

由此推出 $f(n+1)=n+1$, 完成归纳证明. 用类似的方法取 $x=1$, $y=-n$ 可以归纳证明 $f(-n)=-n$ 对 $n\in\mathbb{N}$ 成立. 这完成第 1 步.

第 2 步: 证明 f 是双射.

f 是满射因为在$(*)$中取 $y=1$ 右边有一项 $xf(f(1))-1=x-1$ 可以取得所有实数. 根据左边的形式, 它一定在 f 的像集内.

再证 $f(y_0)=0$ 推出 $y_0=0$. 反设 $y_0\neq 0$, 在$(*)$中取 $y=y_0$ 得

$$\big\{f(1),\ f(y_0f(x)-1)\big\}=\big\{-1,\ y_0f(f(x))+1\big\}.$$

必然有 $1=f(1)=y_0f(f(x))+1$. 所以 $f(f(x))=0$ 对所有 x 成立. 这与 $f(1)=1$ 矛盾.

下证 f 是单射. 若 $y_1\neq y_2$ 满足 $f(y_1)=f(y_2)\neq 0$. 在$(*)$中分别取 $y=y_1$ 和 $y=y_2$ 得

$$\begin{aligned}\big\{f(xf(y_1)+1),\ f(y_1f(x)-1)\big\} &= \big\{xf(f(y_1))-1,\ y_1f(f(x))+1\big\},\\ \big\{f(xf(y_2)+1),\ f(y_2f(x)-1)\big\} &= \big\{xf(f(y_2))-1,\ y_2f(f(x))+1\big\}.\end{aligned}$$

注意到上面两式中左右两边的第一个元素都对应相等.

若某个 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x_0f(y_1)+1)\neq x_0f(f(y_1))-1$, 则

$$y_1f(f(x_0))+1=f(xf(y_1)+1)=f(xf(y_2)+1)=y_2f(f(x_0))+1$$

由此得 $y_1f(f(x_0))=y_2f(f(x_0))$, 得 $f(f(x_0))=0$ 推出 $x_0=0$.

所以若 $x\neq 0$, $f(xf(y_1)+1)=xf(f(y_1))-1$. 由此得到 $f(x)=ax+b$ $(a,b\in\mathbb{R},\ x\neq 1)$ 是线性函数. 但 $f(n)=n$ $(n\in\mathbb{Z})$. 得到 $a=1, b=0$. 故 $f(x)=x$ 亦是单射.

第 3 步: 证明对任意 $n\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{R}$, 有

$$f\Big(f\Big(\frac{n}{f(y)}\Big)\Big)=\frac{n}{y}. \tag{1}$$

只需考虑 $n\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 的情形. 在(∗)中取 $x=\dfrac{n}{f(y)}$ 得

$$\Big\{n+1,\ f\Big(yf\Big(\frac{n}{f(y)}\Big)-1\Big)\Big\}=\Big\{n\frac{f(f(y))}{f(y)}-1, yf\Big(f\Big(\frac{n}{f(y)}\Big)\Big)+1\Big\}. \tag{2}$$

同样在(∗)中用 y 代替 x, $\dfrac{n}{f(y)}$ 代替 y 得

$$\Big\{n-1,\ f\Big(yf\Big(\frac{n}{f(y)}\Big)+1\Big)\Big\}=\Big\{n\frac{f(f(y))}{f(y)}+1, yf\Big(f\Big(\frac{n}{f(y)}\Big)\Big)-1\Big\}. \tag{3}$$

若某个 $y_0\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 使得 $n\neq y_0f\Big(f\Big(\dfrac{n}{f(y_0)}\Big)\Big)$, 则由(2)和(3)分别得

$$n+1=n\frac{f(f(y_0))}{f(y_0)}-1,\qquad n-1=n\frac{f(f(y_0))}{f(y_0)}+1.$$

取两式的差得到 $2=-2$ 矛盾.

第 4 步: 对 $\alpha\in\mathbb{Q}$ 和 $y\in\mathbb{R}$, 证明 $f(\alpha y)=\alpha f(y)$.

只需讨论 $\alpha\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 的情况. 在(1)中以 $f\Big(\dfrac{m}{f(y)}\Big)$ $(m\in\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ 代替 y 得到

$$f\Big(f\Big(\frac{n}{f\big(f\big(\frac{m}{f(y)}\big)\big)}\Big)\Big)=\frac{n}{f\big(\frac{m}{f(y)}\big)}.$$

再带入(1)到左边括号内的分母中

$$f\Big(f\Big(\frac{n}{m}y\Big)\Big)=\frac{n}{f\big(\frac{m}{f(y)}\big)}$$

再在上式中 $\dfrac{t}{f(y)}$ $(t\in\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ 代替 y 得到

$$\frac{nt/m}{y}=f\Big(f\Big(\frac{n}{m}\frac{t}{f(y)}\Big)\Big)=\frac{n}{f\big(\frac{m}{f(\frac{t}{f(y)})}\big)}$$

整理得 $f\Big(\dfrac{m}{f(\frac{t}{f(y)})}\Big)=\dfrac{m}{t}y$. 对两边取 f 得到

$$\frac{m}{t}f(y)=f\Big(f\Big(\frac{m}{f\big(\frac{t}{f(y)}\big)}\Big)\Big)=f\Big(\frac{m}{t}y\Big).$$

完成第 4 步的证明.

第 5 步: 证明 $f(y+a)=f(y)+a$ 对 $y\in\mathbb{R}$ 和 $a\in\mathbb{Q}$ 成立.

在(*)中取 $x=\dfrac{1}{r}\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ 得

$$\Big\{f\Big(\frac{1}{r}f(y)+1\Big),\ f\Big(\frac{1}{r}y-1\Big)\Big\}=\Big\{\frac{1}{r}f(f(y))-1,\ \frac{1}{r}y+1\Big\}$$

利用第 4 步并两边乘以 r 得

$$\big\{f(f(y)+r),\ f(y-r)\big\}=\big\{f(f(y))-r,\ y+r\big\}. \tag{4}$$

我们往证 $f(y-r)=f(f(y))-r$. 假若有某个 $y_0\in\mathbb{R}, r_0\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 使得 $f(y_0-r_0)=y_0+r_0$. 在(4)中取 $y=y_0-r_0$, $r=-2r_0$ 得

$$\big\{f(f(y_0-r_0)-2r_0),\ f(y_0-r_0+2r_0)\big\}=\big\{f(f(y_0-r_0))+2r_0,\ y_0-3r_0\big\}.$$

整理得

$$\big\{y_0+r_0,\ f(y_0+r_0)\big\}=\big\{f(y_0+r_0)+2r_0,\ y_0-3r_0\big\}.$$

因为左边的 $y_0+r_0\neq y_0-3r_0$, 故 $y_0+r_0=f(y_0+r_0)+2r_0$, 即 $f(y_0+r_0)=y_0-r_0$. 但这样左右两边变成 $\big\{y_0+r_0,\ y_0-r_0\big\}=\big\{y_0+r_0,\ y_0-3r_0\big\}$. 它们显然不等, 矛盾.

所以我们得到 $f(y-r)=f(f(y))-r$ 对所有 $y\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ 成立. 取两个不同的 r 相减易得 $f(y+a)=f(y)+a$ 对所有 $y\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{Q}$ 成立.

第 6 步: 证明 $f(y)=y$ $(y\in\mathbb{R})$

结合第 5 步和(4)得到

$$\big\{f(f(y))+r,\ f(y)-r\big\}=\big\{f(f(y))-r,\ y+r\big\}$$

两边集合元素分别求和得到 $f(f(y))+f(y)=f(f(y))+y$, 即 $f(y)=y$.

现在考虑 $f(1)=-1$ 的情形. 往证 $f(x)=-x$ $(x\in\mathbb{R})$

第 1 步: 证明 $f(n)=-n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

在(*)中取 $y=1$ 和分别取 $x=1,-1$ 得

$$\big\{f(0),\ f(-2)\big\}=\big\{0,\ 2\big\},\quad \big\{f(2),\ f(0)\big\}=\big\{-2,\ 0\big\}.$$

由此得 $h(0)=0$, $h(2)=2$, $h(-2)=-2$.

下面对 $|n|$ 进行归纳法证明 $f(n)=-n$. $|n|=1,2$ 已证. 假设已经证明 $|n|\leqslant n_0$ $(n_0\geqslant 2)$ 时已证. 在(*)中取 $y=1$ 和分别取 $x=n_0,-n_0$ 得

$$\begin{aligned}\big\{f(-n_0+1),\ f(f(n_0)-1)\big\}&=\big\{n_0-1,\ f(f(n_0))+1\big\},\\ \big\{f(n_0+1),\ f(f(-n_0)-1)\big\}&=\big\{-n_0-1,\ f(f(-n_0))+1\big\}\end{aligned}$$

由此可导出 $f(n_0+1)=-n_0-1$, $f(-n_0-1)=n_0+1$. 这完成第 1 步的归纳证明.

第 2 步: 证明 $f(x)=-x$ 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 成立.

首先和 $f(1)=1$ 的情形一样可以证明 f 为满射.

对非零整数 n 和 $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 在(*)中分别取 $x = \dfrac{n}{f(z)}$, $y = z$, 以及 $x = z$, $y = \dfrac{n}{f(z)}$ 得到

$$\Big\{-n-1,\ f\Big(zf\Big(\frac{n}{f(z)}\Big)-1\Big)\Big\} = \Big\{n\frac{f(f(z))}{f(z)}-1, zf\Big(f\Big(\frac{n}{f(z)}\Big)\Big)+1\Big\}, \tag{5}$$

$$\Big\{-n+1,\ f\Big(zf\Big(\frac{n}{f(z)}\Big)+1\Big)\Big\} = \Big\{n\frac{f(f(z))}{f(z)}+1, zf\Big(f\Big(\frac{n}{f(z)}\Big)\Big)-1\Big\}.$$

若对某个 $z = z_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(f(z_0)) \neq -f(z_0)$, 由(5)中两式得

$$-n-1 = zf\Big(f\Big(\frac{n}{f(z)}\Big)\Big)+1, \qquad -n+1 = zf\Big(f\Big(\frac{n}{f(z)}\Big)\Big)-1.$$

两式相减得 $2=-2$. 矛盾.

所以 $f(f(z_0)) = -f(z_0)$. 但 f 是满射. 所以 $f(x) = -x$ 对 $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ 成立. 而 $f(0)=0$ 已证.

综合两种情况得, 所求的函数为 $f(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$ 和 $f(x) = -x$ $(x \in \mathbb{R})$.

4. 求所有的素数 p 和正整数 a,b,c 满足

$$2^a p^b=(p+2)^c+1.$$

（瞿振华 供题）

解答: 显然 p 是奇数, $p\geq 3$. 若 $c=1$, 则

$$p+3=2^a p^b\geq 2p\geq p+3,$$

只能 $p=3$, $a=b=1$, 得一组解 $(p,a,b,c)=(3,1,1,1)$. 以下假设 $c\geq 2$.

情形 1: c 是奇数. 设 q 是 c 的一个素因子, 由于 $(p+2)^q+1\mid(p+2)^c+1$, 故

$$(p+2)^q+1=2^\alpha p^\beta. \tag{1}$$

显然 $\alpha>0$. 注意到 $(p+2)^q+1=(p+3)A$, 其中

$$A=(p+2)^{q-1}-(p+2)^{q-2}+\cdots+1>(p+2)^{q-1}-(p+2)^{q-2}=(p+2)^{q-2}(p+1)>p^{q-1},$$

且 A 是奇数, 故 A 是 p 的方幂, $A\geq p^q$, $\beta\geq q$. (1) 两边模 p 得 $2^q\equiv -1 \pmod p$, 故 2 模 p 的阶为 2 或 $2q$.

若 2 模 p 的阶为 2, 则 $p=3$. 此时(1)为 $5^q+1=2^\alpha 3^\beta$. 由于 $5^q+1\equiv 2 \pmod 4$, 故 $\alpha=1$. 又由升幂定理, $v_3(5^q+1)=v_3(5+1)+v_3(q)\leq 2$, 故 $\beta\leq 2$. 检验 $\beta=1,2$ 可知均不合要求.

若 2 模 p 的阶为 $2q$, 则有 $2q\mid p-1$, 从而 $q\leq\dfrac{p-1}{2}<\dfrac{p}{2}$. 在(1)两边除以 p^q, 并利用 $(1+\dfrac{1}{x})^x<e$, $x\geq 1$, 有

$$2^\alpha p^{\beta-q}=\left(1+\frac{2}{p}\right)^q+p^{-q}<\left(1+\frac{2}{p}\right)^{\frac{p}{2}}+p^{-q}<e+3^{-3}<3,$$

故 $\beta=q$, $\alpha=1$. 再由 $2\cdot p^q=(p+2)^q+1=(p+3)A$, 可得 $A=p^q$, $p+3=2$, 矛盾.

情形 2: c 是偶数, 设 $2^d\| c$, $d\geq 1$. 则 $(p+2)^{2^d}+1\mid(p+2)^c+1$, 故

$$(p+2)^{2^d}+1=2^\alpha p^\beta.$$

由于 $(p+2)^{2^d}+1\equiv 2 \pmod 4$, 故 $\alpha=1$.

$$(p+2)^{2^d}+1=2\cdot p^\beta. \tag{2}$$

(2)两边模 p 可得 $2^{2^d}\equiv -1 \pmod p$, 故 2 模 p 的阶为 2^{d+1}, 于是 $2^d<\dfrac{p}{2}$. 由于

$$p^{\beta+1}>2\cdot p^\beta=(p+2)^{2^d}+1>p^{2^d},$$

故 $\beta\geq 2^d$. (2)两边除以 p^{2^d}, 有

$$2\cdot p^{\beta-2^d}=\left(1+\frac{2}{p}\right)^{2^d}+p^{-2^d}<\left(1+\frac{2}{p}\right)^{\frac{p}{2}}+p^{-2^d}<e+3^{-2}<3,$$

故 $\beta = 2^d$.

若 $d \geq 2$, 则由 $2^{d+1} \mid p-1$ 可得 $p \equiv 1 \pmod 8$. 由(2)有 $p^{2^d} - 1 = (p+2)^{2^d} - p^{2^d}$. 分析两边的 2 因子个数,

$$v_2(p^{2^d} - 1) = v_2(p^2 - 1) + d - 1 \geq d + 3,$$

而

$$v_2((p+2)^{2^d} - p^{2^d}) = v_2((p+2)^2 - p^2) + d - 1 = v_2(2) + v_2(2p+2) + d - 1 = d + 2,$$

矛盾. 故 $d = 1$, $2p^2 = (p+2)^2 + 1$, 得 $p = 5$. 再回到原方程, $c = 2k$, k 是奇数, 而 $a = 1$, 我们有

$$2 \cdot 5^b = 7^{2k} + 1.$$

由升幂定理, $b = v_5(7^{2k} + 1) = v_5(7^2 + 1) + v_5(k) \leq 2 + \dfrac{k}{5}$. 若 $k \geq 3$, 则

$$2 \cdot 5^b \leq 2 \cdot 5^{2+\frac{k}{5}} = (7^2 + 1) \cdot 5^{\frac{k}{5}} < 7^{2k} + 1,$$

矛盾. 故 $k = 1$, 从而 $c = 2$, $b = 2$, 又得到一组解 $(p, a, b, c) = (5, 1, 2, 2)$.

综上所述, 共有两组满足条件的解 (p, a, b, c), 是 $(3, 1, 1, 1)$ 和 $(5, 1, 2, 2)$.

5. 设 n 是正整数, $2n$ 个非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = 4$. 证明: 存在非负整数 p, q 使得 $q \leqslant n-1$, 且

$$\sum_{i=1}^{q} x_{p+2i-1} \leqslant 1, \qquad \sum_{i=q+1}^{n-1} x_{p+2i} \leqslant 1.$$

注 1 : 下标按模 $2n$ 理解, 即若 $k \equiv l \pmod{2n}$, 则 $x_k = x_l$.

注 2 : 若 $q = 0$, 则第一个求和视为 0; 若 $q = n-1$, 则第二个求和视为 0.

(命题组 供题)

证法一: 按奇偶位置分组, 记 $A = x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}, B = x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n}$, 并定义奇/偶组的部分和序列: $A(0) = B(0) = 0$,

$$\begin{cases} A(2k+1) = A(2k) + x_{2k+1} \\ B(2k+1) = B(2k) \end{cases}, \quad \begin{cases} A(2k+2) = A(2k+1) \\ B(2k+2) = B(2k+1) + x_{2k+2} \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

角标模 $2n$ 理解, 部分和周期增长: $A(k+2n) = A(k) + A, B(k+2n) = B(k) + B$. 我们再连续化 (变成分段线性), 即对非负实数 t, 定义

$$A(t) = A(\lfloor t \rfloor) + (t - \lfloor t \rfloor)[A(\lfloor t \rfloor + 1) - A(\lfloor t \rfloor)], \;\; B(t) = B(\lfloor t \rfloor) + (t - \lfloor t \rfloor)[B(\lfloor t \rfloor + 1) - B(\lfloor t \rfloor)].$$

这样 $A(\cdot), B(\cdot)$ 均为 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 上的连续不减函数, 并仍然周期增长.

由于 $A + B = 4$ 知存在正整数 L 满足 $\lfloor \frac{L}{A} \rfloor + \lfloor \frac{L}{B} \rfloor \geqslant L$. 对 $l = 0, 1, 2, \ldots, L$, 由 $A(\cdot)$ 的连续性知可以选取适当的 $t_l \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 满足 $A(t_l) = l$, (我们选取 $t_0 = 0$). 由于 $L \geqslant A\lfloor \frac{L}{A} \rfloor = A(2n \cdot \lfloor \frac{L}{A} \rfloor)$, 我们可以要求 $t_L \geqslant 2n \cdot \lfloor \frac{L}{A} \rfloor$. 这样

$$B(t_L) - B(t_0) = B(t_L) \geqslant B\Big(2n \cdot \Big\lfloor \frac{L}{A} \Big\rfloor\Big) \geqslant B\Big\lfloor \frac{L}{A} \Big\rfloor \geqslant B\Big(L - \Big\lfloor \frac{L}{B} \Big\rfloor\Big) \geqslant (B-1) \cdot L.$$

因此存在某个 $l = 0, 1, \ldots, L-1$ 满足 $B(t_{l+1}) - B(t_l) \geqslant (B-1)$, 即 $B(t_l + 2n) - B(t_{l+1}) \leqslant 1$. 取非负整数 c, d 满足 $2c \leqslant t_l \leqslant 2c+2, \quad 2d-1 \leqslant t_{l+1} \leqslant 2d+1$. 我们有:

$$A(t_1) \leqslant A(2c+1) = A(2c+2), \quad A(t_{l+1}) \geqslant A(2d) = A(2d-1)$$
$$B(t_1) \geqslant B(2c+1) = B(2c), \quad B(t_{l+1}) \leqslant B(2d) = B(2d+1)$$

这样

$$\begin{array}{rrrr} x_{2c+3} + x_{2c+5} + \cdots + x_{2d-1} = & A(2d) - A(2c+1) \leqslant & A(t_{l+1}) - A(t_l) = & 1 \\ x_{2d+2} + x_{2d+4} + \cdots + x_{2c+2n} = & B(2c+1+2n) - B(2d) \leqslant & B(t_l + 2n) - B(t_{l+1}) \leqslant & 1 \end{array}$$

即 $p = 2c+2, q = d-c-1$ 满足题目要求. (若 $q < 0$, 则重置 $q = 0$; 若 $q \geqslant n$, 则重置 $q = n-1$.)

证毕.

证法二: 设 $x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1} = A, \;\; x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n} = B$.

若 A,B 中有一个小于等于 1, 结论显然. 若 $A>1,B>1$, 对 $0\le k\le n-1$, 设 $m(k)\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 满足

$$\sum_{i=0}^{m(k)} x_{2k+2i+1}>1 \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m(k)-1} x_{2k+2i+1}\le 1. \tag{2}$$

注意到, 若 $x_{2k+2m(k)+2}+x_{2k+2m(k)+4}+\cdots+x_{2k+2n-2}\le 1$, 则此式与(2)即构成符合题意的情形 $(p=2k,q=m(k))$.

考虑

$$x_{2k+2m(k)+2}+x_{2k+2m(k)+4}+\cdots+x_{2k+2n-2}>1. \tag{3}$$

现在, 以 $0,1,2,\cdots,n-1$ 为顶点, 从 k 向 $k+m(k)+1$ 引一条边 (模 n 意义下). 易知此图中有圈, 不妨设 $k_1\to k_2\to\cdots\to k_t\to k_1$ 是一个最短圈.

若 $t=1$, 则 $\sum\limits_{i=0}^{n-2} x_{2k_1+2i+1}\le 1$, 令 $p=2k_1$, $q=n-1$ 即可.

若 $t>1$, 设

$$\left\{\frac{k_2-k_1}{n}\right\}+\left\{\frac{k_3-k_2}{n}\right\}+\cdots+\left\{\frac{k_t-k_{t-1}}{n}\right\}+\left\{\frac{k_1-k_t}{n}\right\}=s.$$

即当 $k=k_1,k_2,\dots,k_t$ 时，(1)的加数共 $s\cdot n$ 个, 且由引边的条件知 $x_1,x_3,\dots,x_{2n-1}$ 中的每一项都被加了 s 次. 另一方面, 当 $k=k_1,k_2,\dots,k_t$ 时，(3)的加数共 $(t-s)\cdot n$ 个, 且由引边的条件知 $x_2,x_4,\dots,x_{2n}$ 中的每一项都被加了 $t-s$ 次, 这是因为 x_{2j} 在(3)被加当且仅当 x_{2j+1} 没在(1)中被加.

现将 $k=k_1,k_2,\dots,k_t$ 时的(1)加起来得 $s\cdot A>t$. 同理, 将 $k=k_1,k_2,\cdots,k_t$ 时的(3)加起来得 $(t-s)\cdot B>t$. 此时, $A+B>t\left(\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t-s}\right)\ge 4$, 矛盾.

证毕.

证法三: 设 $x_1+x_3+\cdots+x_{2n-1}=A,\ \ x_2+x_4+\cdots+x_{2n}=B$. 同样, 不妨设 $A>1,B>1$. 我们证明存在 k 使得

$$x_{2k}\ge x_{2k+1}\cdot\frac{B}{A}$$

$$x_{2k}+x_{2k+2}\ge(x_{2k+1}+x_{2k+3})\cdot\frac{B}{A}$$

$$\cdots$$

$$x_{2k}+x_{2k+2}+\cdots+x_{2k+2n-2}\ge(x_{2k+1}+x_{2k+3}+x_{2k+2n-1})\cdot\frac{B}{A}$$

令 $a_i = x_{2i} - x_{2i+1} \cdot \dfrac{B}{A}$, 则 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0$. 由熟知结论, 存在 k 使得

$$\begin{aligned} a_k &\geq 0 \\ a_k + a_{k+1} &\geq 0 \\ &\cdots \\ a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n-1} &\geq 0 \end{aligned}$$

即得.

不妨设 $k = 0$ (否则所有角标减 $2k$), 设 $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 使

$$\sum_{i=0}^{m} x_{2i+1} > 1, \quad \sum_{i=0}^{m-1} x_{2i+1} \leq 1.$$

我们取 $p = 0, q = m$, 只需证

$$x_{2m+2} + x_{2m+4} + \cdots + x_{2n-2} \leq 1.$$

事实上,

$$\begin{aligned} & x_{2m+2} + x_{2m+4} + \cdots + x_{2n-2} \\ = & B - (x_0 + x_2 + \cdots + x_{2m}) \\ \leq & B - (x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m+1}) \cdot \frac{B}{A} \\ < & B - \frac{B}{A} = 1 + \frac{AB - A - B}{A} \\ \leq & 1. \quad (AB \leq 4 = A + B) \end{aligned}$$

证毕.

6. 给定正整数 n, 用 D 表示 n 的所有正因子构成的集合. 设 A, B 是 D 的子集, 满足: 对任何 $a \in A$, $b \in B$, 总有 a 不整除 b 且 b 也不整除 a. 证明:

$$\sqrt{|A|} + \sqrt{|B|} \leqslant \sqrt{|D|}.$$

(艾颖华 供题)

证法一: 将 D 分解为如下四个子集的不交并 $D = X \cup Y \cup Z \cup W$, 其中

$$X = \{x \in D : \exists a|x, \exists b|x\}, \quad Y = \{x \in D : \exists a|x, \nexists b|x\},$$
$$Z = \{x \in D : \nexists a|x, \exists b|x\}, \quad W = \{x \in D : \nexists a|x, \nexists b|x\}.$$

注意到, 题目条件表明 $A \subseteq Y, B \subseteq Z$, 我们只需证明更强的结论: 对 D 的任何两个非空子集 A, B, 总有 $\sqrt{|Y|} + \sqrt{|Z|} \le \sqrt{|D|}$. 此不等式等价于

$$|Y| + |Z| + 2\sqrt{|Y| \cdot |Z|} \le |D| = |X| + |Y| + |Z| + |W| \iff 2\sqrt{|Y| \cdot |Z|} \le |X| + |W|,$$

此不等式可由不等式 $|Y| \cdot |Z| \le |X| \cdot |W|$ 推出, 后者又可以改写为

$$(|X|+|Y|)(|X|+|Z|) = |X|(|X|+|Y|+|Z|)+|Y|\cdot|Z| \le |X|(|X|+|Y|+|Z|)+|X|\cdot|W| = |X|\cdot|D|.$$

令 $U = X \cup Y, V = X \cup Z$, 则上述不等式为 $|U| \cdot |V| \le |U \cap V| \cdot |D|$. 注意到, $U = \{x \in D : \exists a|x\}$ 满足: 如果 $x \in U$ 且 $x|x'$, 则 $x' \in U$, 称 D 的这种子集为向上封闭的; 类似的 $V = \{x \in D : \exists b|x\}$ 也是 D 的向上封闭的子集.

下面证明: 对于 D 的非空的向上封闭的子集 U, V, 有 $|U| \cdot |V| \le |U \cap V| \cdot |D|$.

设 n 的素因子分解为 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 我们对 k 进行归纳. 将 p_k, α_k 分别记为 p, α, 记 $n = p^\alpha n'$. 定义 $D_k = \{x \in D | v_p(x) = k\}$, $U_k = U \cap D_k$, $V_k = V \cap D_k$. 对每个 $k = 0, 1, \ldots, \alpha - 1$, 对任何 $x \in U_k$, 由 U 向上封闭可知 $px \in U_{k+1}$, 这表明 $|U_k| \le |U_{k+1}|$, 即 $\{|U_k|\}_k$ 是递增的; 类似的, $\{|V_k|\}_k$ 也是递增的. 注意到 $\frac{1}{p^k}U_k, \frac{1}{p^k}V_k$ 是 $\frac{1}{p^k}D_k = D(n')$ 的向上封闭子集, 由归纳假设可得

$$|(\frac{1}{p^k}U_k) \cap (\frac{1}{p^k}V_k)| \ge \frac{1}{|D(n')|} \cdot |(\frac{1}{p^k}U_k)| \cdot |(\frac{1}{p^k}V_k)|,$$

即有 $|U_k \cap V_k| \ge \dfrac{1+\alpha}{|D|}|U_k| \cdot |V_k|$. 结合排序不等式可得

$$\begin{aligned} |U \cap V| = \sum_{k=0}^{\alpha} |U_k \cap V_k| &\ge \frac{1+\alpha}{|D|} \sum_{k=0}^{\alpha} |U_k| \cdot |V_k| \\ &\ge \frac{1+\alpha}{|D|} \cdot \frac{1}{1+\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\alpha} |U_k|\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\alpha} |V_k|\right) \\ &= \frac{1}{|D|}|U| \cdot |V|. \end{aligned}$$

证毕.

证法二: (根据张志成同学的解答整理)

引理: 设 t 为正整数, $M_1, \ldots, M_t$ 是有限集 P 的 t 个两两不等的子集, 则集合 $\{M_i \setminus M_j | 1 \leqslant i, j \leqslant t\}$ 至少有 t 个元素.

引理的证明: 对 $|M_1 \cup \cdots \cup M_t| = k$ 归纳. 当 $k = 0$ 时, 结论显然. 下设 $k \geqslant 1$ 且小于 k 时引理成立. 任取 $a \in M_1 \cup \cdots \cup M_t$, 不妨设 a 属于 $M_1, \ldots, M_s$, 不属于 $M_{s+1}, \ldots, M_t$, $1 \leqslant s \leqslant t$. 若 $s = t$, 则用 $M_i \setminus \{a\}$ 代替 M_i, 由归纳假设知结论成立. 下设 $s < t$, 定义四个集族

$$S_1 = \{M_i, 1 \leqslant i \leqslant s | \exists s+1 \leqslant j \leqslant t, M_i \setminus \{a\} = M_j\}, \quad S_2 = \{M_1, \ldots, M_s\} \setminus S_1,$$

$$S_3 = \{M \setminus \{a\} | M \in S_1\}, \quad S_4 = \{M_{s+1}, \ldots, M_t\} \setminus S_3,$$

则 S_1, S_2, S_3, S_4 构成 $\{M_1, \ldots, M_t\}$ 的一个划分. 再记 $S_5 = \{M \setminus \{a\} | M \in S_2\}$, 知 $|S_1| = |S_3|$, $|S_2| = |S_5|$.

(i) 对 S_3 应用归纳假设知, $\{M \setminus N | M, N \in S_3\}$ 至少有 $|S_3|$ 个元素. 从而

$$\{(M \cup \{a\}) \setminus N | M, N \in S_3\} = \{M \setminus N | M \in S_1, N \in S_3\}$$

至少有 $|S_3|$ 个元素.

(ii) 对 $S_3 \cup S_4 \cup S_5$ 应用归纳假设知, $\{M \setminus N | M, N \in S_3 \cup S_4 \cup S_5\}$ 至少有 $|S_3| + |S_4| + |S_5|$ 个元素. 对 $M, N \in S_3 \cup S_4 \cup S_5$ 作如下讨论:

- 若 M, N 均不属于 S_5, 则 $M \setminus N$ 形如 $M_i \setminus M_j$, 其中 $M_i, M_j \in S_3 \cup S_4$.
- 若 M, N 均属于 S_5, 则 $M \setminus N = (M \cup \{a\}) \setminus (N \cup \{a\})$ 形如 $M_i \setminus M_j$, 其中 $M_i, M_j \in S_2$.
- 若 $M \notin S_5, N \in S_5$, 则 $M \setminus N = M \setminus (N \cup \{a\})$ 形如 $M_i \setminus M_j$, 其中 $M_i \in S_3 \cup S_4$, $M_j \in S_2$.
- 若 $M \in S_5, N \notin S_5$, 且 $M \setminus N$ 不能表示为前三种, 则 $(M \setminus N) \cup \{a\} = (M \cup \{a\}) \setminus N$ 形如 $M_i \setminus M_j$, 其中 $M_i \in S_2$, $M_j \in S_3 \cup S_4$, 且它与之前的 $(M' \cup \{a\}) \setminus N'$, $M', N' \in S_3$ 不重复（否则, $M \setminus N = M' \setminus N'$, 同 $M \setminus N$ 不能表示为前三种相矛盾）.

综合 (i) 和 (ii) 知, $\{M_i \setminus M_j | 1 \leqslant i, j \leqslant t\}$ 的元素个数至少为

$$|S_3| + |S_3| + |S_4| + |S_5| = |S_1| + |S_3| + |S_4| + |S_5| = t.$$

引理得证.

回到原题. 设 $G = \{\gcd(a, b) | a \in A, b \in B\}$, $L = \{\operatorname{lcm}(a, b) | a \in A, b \in B\}$. 由题设条件知, A, B, G, L 两两不交且 $A \cup B \cup G \cup L \subseteq D$. 故只需证:

$$\sqrt{|A|} + \sqrt{|B|} \leqslant \sqrt{|A| + |B| + |G| + |L|},$$

即: $2\sqrt{|A||B|} \leqslant |G|+|L|$, 进而只需证: $|A|\cdot|B| \leqslant |G|\cdot|L|$.

我们定义两个映射

$$\begin{aligned}\rho_1 : A\times B \to D\times D, &\quad (a,b)\mapsto (\gcd(a,b),\operatorname{lcm}(a,b)),\\ \rho_2 : G\times L \to D\times D, &\quad (x,y)\mapsto (\gcd(x,y),\operatorname{lcm}(x,y)),\end{aligned}$$

并试图证明

$$(*)\qquad \text{对于每个 } (g,l)\in D\times D,\ |\rho_1^{-1}(g,l)| \leqslant |\rho_2^{-1}(g,l)|.$$

这会推出 $|A\times B| \leqslant |G\times L|$, 从而完成证明.

现在证明 $(*)$. 若 $|\rho_1^{-1}(g,l)|=0$, 则结论显然. 下设 $|\rho_1^{-1}(g,l)|=t>0$, 并设

$$\rho_1^{-1}(g,l)=\{(gm_i,gn_i)|i=1,\ldots,t\},$$

其中 $gm_i\in A$, $gn_i\in B$, $m_in_i=l/g$, 且 m_i 和 n_i 互素. 记

$$P=\{p^\alpha|p\text{是素数},\alpha\geqslant 1,p^\alpha||l/g\},\quad P_i=\{p^\alpha|p\text{是素数},\alpha\geqslant 1,p^\alpha||m_i\},$$

则 $P_i\subseteq P$, 且 $m_i=\prod\limits_{p^\alpha\in P_i}p^\alpha$, $n_i=\prod\limits_{p^\alpha\in P\setminus P_i}p^\alpha$. 于是对任意 $1\leqslant i,j\leqslant t$,

$$\gcd(m_i,n_j)=\prod_{p^\alpha\in P_i\setminus P_j}p^\alpha,\quad \operatorname{lcm}(m_j,n_i)=\prod_{p^\alpha\in P_j\cup(P\setminus P_i)}p^\alpha,$$

其中 $P_j\cup(P\setminus P_i)$ 恰为 $P_i\setminus P_j$ 在 P 中的补集, 因此 $\gcd(m_i,n_j)$ 和 $\operatorname{lcm}(m_j,n_i)$ 互素且乘积为 l/g. 记

$$x_{ij}:=g\cdot\gcd(m_i,n_j)=\gcd(gm_i,gn_j),\quad y_{ij}:=g\cdot\operatorname{lcm}(m_j,n_i)=\operatorname{lcm}(gm_j,gn_i),$$

则 $x_{ij}\in G$, $y_{ij}\in L$, 且 $\rho_2(x_{ij},y_{ij})=(g,l)$. 根据引理, 由于 $P_1,\ldots,P_t$ 是 P 的 t 个两两不等的子集, 故集合 $\{P_i\setminus P_j|1\leqslant i,j\leqslant t\}$ 至少有 t 个元素, 从而 $\{(x_{ij},y_{ij})|1\leqslant i,j\leqslant t\}$ 至少有 t 个元素, 即知 $|\rho_2^{-1}(g,l)|\geqslant t$. 证毕.