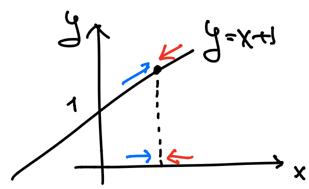
§2 函数的极限

复习 自变量变化过程 $\begin{cases} \text{数列}: n\to\infty \\ \text{函数}: x\to\infty\ (\pm\infty) \text{ 或 } x\to a \end{cases}$

§1 函数极限的定义: $x\to a$ 型

引例: ① $y=x+1$. 研究 $\underbrace{x\to 1}_{\text{双向趋近}}$ 时 y 的趋向

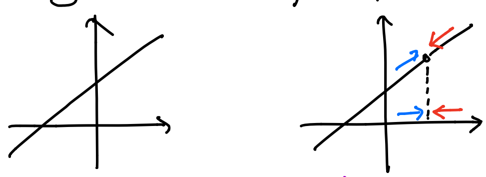


有 $\left.\begin{array}{l} x\to 1^-,\ y\to 2 \\ x\to 1^+,\ y\to 2 \end{array}\right\}$ $x\to 1,\ y\to 2.$

② $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, 研究 $x\to 1$ 时 y 的趋向 (比较: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$)

($x\to 1$: $x\neq 1$ 但 $\forall\varepsilon>0$, $|x-1|<\varepsilon$)

另一个函数: $y=x+1$ v.s. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $(x\neq 1)$



(Recall: 极限就是 x 变化时 y 趋向的目标.)

⇝ Upshot: $x\to a$ 时, $f(x)$ 极限 $\begin{cases} \text{与 } f(x) \text{ 在 } x=a \text{ 处有无定义无关} \\ \text{与 } f(a) \text{ 的值无关 (若有定义)} \end{cases}$

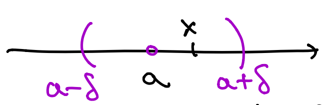
③ $y=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 3, & x=1 \end{cases}$ 也有 $x\to 1$, $y\to 2$.

控制接近程度.

定义1 (ε-δ) $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

称 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时以 A 为极限. 记作 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to a)$.

注释 ① $0<|x-a|<\delta$ 的含义:



去心 δ-邻域 (挖掉 a)

⇝ $\{x\in\mathbb{R} \mid 0<|x-a|<\delta\} = \mathring{U}(a,\delta) = (a-\delta,a)\cup(a,a+\delta) = (a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$.

Eg. $y=y(x)$ 可由方程 $y\ln y - x + y = 0$ 确定. 判定曲线 $y=f(x)$ 在 $\underbrace{(1,1)\text{附近}}_{\text{邻域}}$ 的凹凸性.

⇝ 邻域(非去心) $U(a,\delta) := \{x\in\mathbb{R} \mid |x-a|<\delta,\ \delta>0\}$.

注意 "附近"是多近一般不重要 (不关心 δ 的值)

⇝ 简记 $U(a,\delta)=U(a)$, $\mathring{U}(a,\delta)=\mathring{U}(a)$

$a-\delta<x<a$

$\Updownarrow$

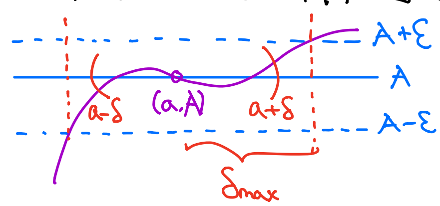
- 去心左邻域 $a-\delta$ a $\mathring{U}^-(a,\delta)=\{x \mid \overbrace{0<a-x<\delta}\}$
- 去心右邻域 a $a+\delta$ $\mathring{U}^+(a,\delta)=\{x \mid 0<x-a<\delta\}$

② "$\forall\varepsilon>0$" → ε 可以任意小

"$\exists\delta>0$" → 总可找到 a 附近一个不包括 a 的区域

在该区域内, $f(x)$ 与 A 的接近程度任意好

③ $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 与 $\exists\delta>0\ \forall\varepsilon>0$ 不同. 定义是先选定一个 ε.



例1 $\lim\limits_{x\to a} C = C$ (C为一个常数)

证明 $|f(x)-C| = |C-C| = 0$ $(f(x)=C)$.

$\forall\varepsilon>0$, 任取 $\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)-C|<\varepsilon$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} C = C$.

例2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

已假设

证明 $\forall\varepsilon>0$, 需要在 $0<\boxed{|x-1|<\delta}$ 时 比较

选定ε (相当于ε已知)

有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right| = \boxed{|x-1|<\varepsilon}$. ← 希望有

$\|$ $x+1$ $(x\neq 1)$ 在 $|x-1|>0$ 时成立.

⇝ 可取 $\boxed{\delta}=\varepsilon>0$. 最终目标: 选取 $\delta=\delta(\varepsilon)$

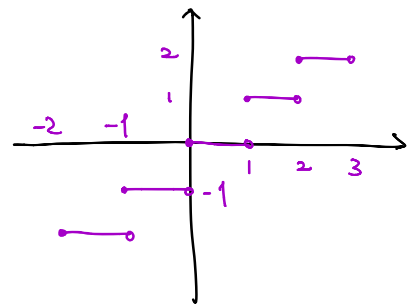
$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\varepsilon>0$, s.t. $\left(0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon\right)$.

引例 研究 $\lim\limits_{x\to 0}[x]$,

$[x]$ = 不超过 x 的最大整数.

$x\to 0^+$, $[x]\to 0$.

$x\to 0^-$, $[x]\to -1$



定义2 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 当 $x\in(a-\delta,a)=\mathring{U}^-(a,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

则称 A 为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左极限. 记为 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$.

定义3 $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 当 $x\in(a,a+\delta)=\mathring{U}^+(a,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

则称 A 为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的右极限. 记为 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$.

例 $\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$.

定理1 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 分别存在且相等.

注 只要是以下情形之一, 极限就不存在

(i) 左右极限至少一个不存在

(ii) 左右极限不相等

证明: $(\Rightarrow)$ 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

当 $x>a$ 时, $0<x-a<\delta$, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

即 $x\in(a,a+\delta)$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$.

而 $x<a$ 的情形同理可证.

$(\Leftarrow)$ 若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A$,

则 $\forall\varepsilon>0$, $\boxed{\exists\delta_1>0}$ 当 $0<x-a<\delta_1$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\boxed{\exists\delta_2>0}$ 当 $0<a-x<\delta_2$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$

⚠ 此处二者不相同 $\rightsquigarrow$ 取 $\underline{\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}}$.

Key 找到合适的 δ 即可 (可能有很多合适的 δ).

则当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. □

例3 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$ 存在，求 a 及极限值.

分析 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

$x\to0^+$: $\frac{1}{x},\frac{2}{x}\to+\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}},e^{\frac{2}{x}}\to+\infty$

且 $a[x]\to0$

$x\to0^-$: $\frac{1}{x},\frac{2}{x}\to-\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}},e^{\frac{2}{x}}\to0$

且 $a[x]\to-1$

解答 (1) $\lim\limits_{x\to0^+}\boxed{\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}} \xlongequal{令t=\frac{1}{x}} \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^{t})} \overset{洛}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}{\frac{e^{t}}{1+e^{t}}}$

$\frac{\infty}{\infty}$型 (洛必达法则)

洛必达法则：求导后极限不存在 $\not\Rightarrow$ 原极限不存在.

$\Downarrow$

法则失效

$$=2\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}+e^{t}}{e^{2t}+1}=2\lim_{t\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{e^{t}}}{1+\frac{1}{e^{2t}}}=2$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=2+0=2$ (四则运算，单侧极限)

(2) $\lim\limits_{x\to0^-}\boxed{\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}}^{\frac{0}{0}型}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$

等价无穷小, $\ln(1+t)\sim \ln t$, $t\to0$.

(有很多注意事项，以后再说)

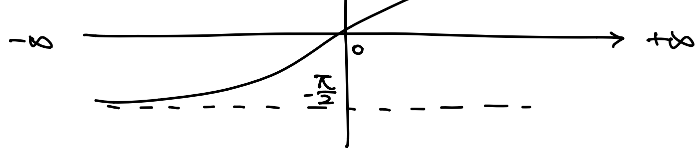
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0-a=-a$

须有 $-a=2 \Rightarrow a=-2$，极限值为2. □

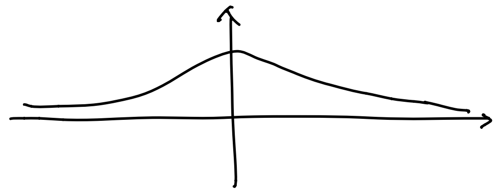
§2 函数极限的定义：$x\to\infty$型

引例 ① $y=e^x$: $x\to+\infty$, $e^x\to+\infty$; $x\to-\infty$, $e^x\to0$.

② $y=\arctan x$:

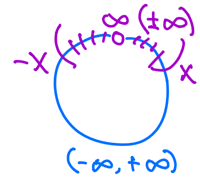


③ $y=e^{-x^2}$:



备注 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 只在 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 时才能用.

E.g. $x\to\infty$, $e^{-x^2}\to 0$.



定义4 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$ 使得当 $x>X$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

则称 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to+\infty)$.

定义5 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X<0$ 使得当 $x<X$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

则称 $x\to-\infty$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to-\infty)$.

定义6 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$ 使得当 $|x|>X$ 时, 总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

则称 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$.

例4 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$ （直观: $\dfrac{\text{有界}}{\text{正无穷}}\to 0$）

今后的重要结论: 有界 × 无穷小量 = 无穷小量

证明 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right| = \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\forall\varepsilon>0$, 若要使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$, 只须 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$

$\rightsquigarrow$ 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$, 当 $x>X$ 时有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$. □

§3 函数极限的性质

Ⓐ 唯一性　定理2 若有极限, 则必唯一.

证明 只证 $x\to a$. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$ 且 $A\ne B$ (反证)

不妨设 $A>B$，取 $\varepsilon=\frac{A-B}{2}>0$

⇝ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Rightarrow \exists\,\delta_1>0$，若 $0<|x-a|<\delta_1$，有

$$|f(x)-A|<\frac{A-B}{2} \Leftrightarrow \frac{A+B}{2}<f(x)<\frac{3A-B}{2}. \quad ①$$

又 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B \Rightarrow \exists\,\delta_2>0$，若 $0<|x-a|<\delta_2$，有

$$|f(x)-B|<\frac{A-B}{2} \Leftrightarrow \frac{3B-A}{2}<f(x)<\frac{A+B}{2}. \quad ②$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则有 $0<|x-a|<\delta$ 时，

①② $\Rightarrow A\le B$（与 $A>B$ 矛盾）. □

作应用：要说明函数极限不存在：用定理之$\boxed{\text{逆否命题}}$.

E.g. $\lim\limits_{x\to0}[x]$ 若存在，则 $\lim\limits_{x\to0^+}[x]=\lim\limits_{x\to0^-}[x]$

(矛盾).

原命题：若A则B

⇕

逆否命题：若非B，则非A.

类似地，$\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 不存在

E.g. $\lim\limits_{x\to+\infty}\boxed{\frac{\int_0^x|\sin t|\,dt}{x}}$ （$\frac{\infty}{\infty}$型）

考虑洛必达：$\left(\int_0^x|\sin t|\,dt\right)'=|\sin x|$（在 $x\to+\infty$ 时无极限）

⇒ 洛必达此时失效.

$\boxed{\text{重要的备注}}$ Ⓐ 正确的归纳方式

极限
- 存在确定的值
  - 有限值（如 $\frac{1}{x}\to0$, $x\to\infty$）
  - $\pm\infty$（如 $e^x\to+\infty$, $x\to+\infty$）
- 不存在确定的值（如 $\sin x$, $x\to+\infty$）

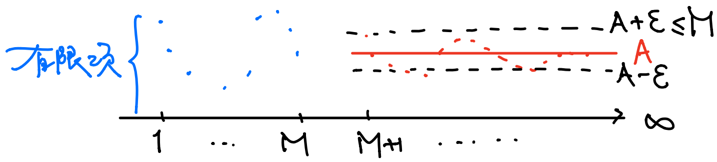
Ⓑ 书上的归纳方式

极限
- 存在 — 有唯一的有限值
- 不存在 — 无确定的值或等于 $\pm\infty$.

Ⓑ 局部有界性

Recall 数列：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则 $\exists\, M>0$ 使 $|a_n|\le M$ $(\forall n)$. ⇝ 全局有界性.

原因：ε–δ 语言 ⇝ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\, M>0$ 使当 $n\ge M$ 时，$|a_n-A|<\varepsilon$.



$\rightsquigarrow$ 取 $M=\max\{a_1,\cdots,a_M, A+\varepsilon\}$.

例：对 $y=\frac{1}{x}$：可选 $X>0$ 使得当 $x>X$ 时，y 有界

但 $0<x<X$ 时 y 无界. 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ (存在极限)

所以 函数在 $x\to+\infty$ (或 $-\infty$) 时极限存在 $\not\Rightarrow$ 全局有界.

$\Rightarrow$ 局部有界.

定理3 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则 $\exists\,\delta>0, M>0$ 使得当 $\underbrace{0<|x-a|<\delta}$ 时，$|f(x)|\le M$.

注意：不包含 a 本身 (why?)

看本节前面第一个引例

证明 参照数列收敛则有界的证明.

重要注释 ① x 的其它趋向过程也仿此定义

E.g. $f(x)\to A\ (x\to+\infty)$，则 $\exists\,X>0, M>0$，使得

当 $x>X$ 时，$|f(x)|\le M$

② 当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $|f(x)|\le M$

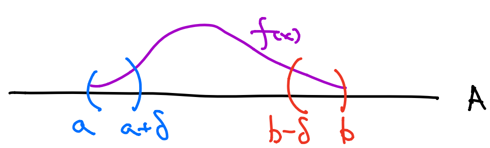
$\Rightarrow$ 有界只在局部的去心邻域内成立.

③ 当 $x\to a$ 时，这个定理可单独使用

(未来会结合其它性质使用，如闭区间上连续函数的有界).

推论 ① 若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，则 $\exists\,\delta>0, M>0$, s.t. 在 $0<x-a<\delta$ 时，$|f(x)|\le M$.

② 若 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，则 $\exists\,\delta>0, M>0$, s.t. 在 $0<b-x<\delta$ 时，$|f(x)|\le M$



例5 证明：$f(x)=\dfrac{|x|\cdot\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}$ 在区间 $(-1,0)$ 内有界.

(细节) 术语：开区间内 / 闭区间上.

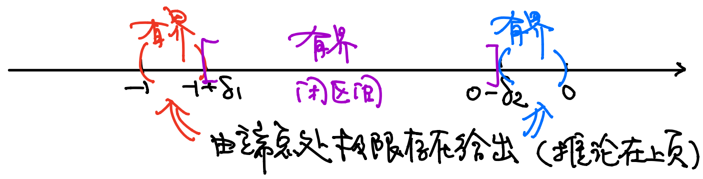
分析与预备知识 ① 初等函数在定义区间上连续

故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内连续.

② 闭区间上的连续函数必有界.

(问题：怎样用闭区间上连续函数的有界性证明其在开区间内有界？)

思路：



证明 连续：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续.

① $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\dfrac{\sin 3}{18}$

$\Rightarrow \exists \delta_1>0$ s.t. $f(x)$ 在 $(-1,-1+\delta_1)$ 内有界.

② $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\dfrac{\sin 2}{4}$.

约分剩 -1

$\Rightarrow \exists \delta_2>0$ s.t. $f(x)$ 在 $(-\delta_2,0)$ 内有界.

又 $f(x)$ 在 $[-1+\delta_1,-\delta_2]$ 上有界

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界. □

© 保号性

定理4 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A>0$ (或 <0)，则 $\exists\delta>0$ s.t. 当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$f(x)>0$ (或 <0).

推论 若 $f(x)>0\ (x\to a)$，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.