

§2 极限与极限

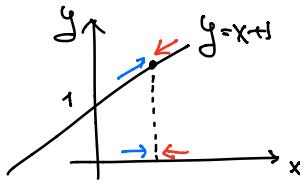


复习 自变量变化过程 $\begin{cases} \text{数列: } n \rightarrow \infty \\ \text{函数: } x \rightarrow \infty (\pm\infty) \text{ 或 } x \rightarrow a \end{cases}$

3.1 函数极限的定义: $x \rightarrow a$ 型

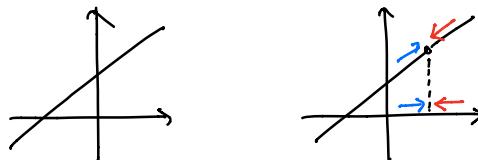
数轴逼近

例题: ① $y = x + 1$, 研究 $x \rightarrow 1$ 时 y 的趋向
 $\begin{cases} x \rightarrow 1^-, y \rightarrow 2 \\ x \rightarrow 1^+, y \rightarrow 2 \end{cases} \quad x \rightarrow 1, y \rightarrow 2.$



② $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, 研究 $x \rightarrow 1$ 时 y 的趋向 (比较: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$)
 $(x \rightarrow 1: x \neq 1 \text{ 且 } \forall \varepsilon > 0, |x-1| < \varepsilon)$

另-→ 函数: $y = x + 1$ v.s. $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} (x \neq 1)$



(Recall: 极限就是 x 变化时
y 趋向的图形.)

→ Upshot: $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 的极限 $\begin{cases} f(x) 在 x = a 处 有 定义 无 定义 \\ 与 f(a) 的值无关 (若有意义) \end{cases}$

③ $y = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ 也 $\nrightarrow x \rightarrow 1, y \rightarrow 2.$

控制接近程度.

定理 1 ($\varepsilon-\delta$) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时 恒有 $|f(x)-A| < \varepsilon$.

称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow a$ 时 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow a)$.

证明 ① $0 < |x-a| < \delta$ 的含义:

$\Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\} = U(a, \delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$.

E.g. $y = y(x)$ 的由方程 $y - x + y = 0$ 解得. 判定曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, 1)$ 附近
的凹凸性.

凹

\hookrightarrow 邻域 (邻域) $U(a, \delta) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta, \delta > 0\}$.

注意 “附近” 是靠近 - 一般不重叠 (不关心 δ 的大小)

\hookrightarrow 简记 $U(a, \delta) = U(a)$, $U^-(a, \delta) = U(a) \uparrow_{a-\delta < x < a}$

$$\begin{cases} \text{左心左邻域} & \xrightarrow[a-\delta]{\quad} \\ \text{左心右邻域} & \xrightarrow[a]{\quad} \end{cases} \quad U^-(a, \delta) = \{x \mid \underbrace{a - \delta < x < a}\} \\ U^+(a, \delta) = \{x \mid 0 < x - a < \delta\}$$

② “ $\forall \varepsilon > 0$ ” \rightarrow 存在 $\delta > 0$.

“ $\exists \delta > 0$ ” \rightarrow 总存在 $\delta > 0$ 附近一个不包含 a 的区域

在该区域内, $f(x)$ 与 A 的接近程度任意好

例 1 $\lim_{x \rightarrow a} C = C$ (C 为一个常数)

证明 $|f(x) - C| = |C - C| = 0$ ($f(x) = C$).

$\forall \varepsilon > 0$, 存取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $|f(x) - C| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} C = C$.

例 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 需要在 $0 < |x - 1| < \delta$ 时

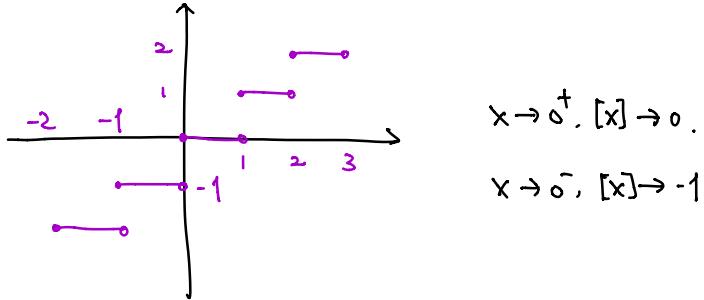
$$|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2| = |x - 1| < \varepsilon.$$

$x+1$ 在 $|x-1| > 0$ 时成立.

\hookrightarrow 取 $\delta = \varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0$, s.t. $(0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2| < \varepsilon)$.

例 3 研究 $\lim_{x \rightarrow \infty} [x]$, $[x] =$ 不超过 x 的最大整数.



定理2 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ 使 } x \in (a-\delta, a) = U^-(a, \delta) \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon$

则称 A 为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左极限. 记为 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$.

定理3 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ 使 } x \in (a, a+\delta) = U^+(a, \delta) \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon$

则称 A 为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的右极限. 记为 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$.

例 $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$.

定理1 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 分别存在且相等.

(注) 只要是以下情况之一, 极限就不存在

(i) 左右极限至少一个不存在

(ii) 左右极限不相等

证明: (\Rightarrow) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

当 $x > a$ 时, $0 < x-a < \delta$, 则 $|f(x) - A| < \varepsilon$

若 $x \in (a, a+\delta)$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$.

若 $x < a$ 时, 同理可证.

(\Leftarrow) 若 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$,

则 $\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \exists \delta_1 > 0 & \text{当 } 0 < x-a < \delta_1 \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon \\ \exists \delta_2 > 0 & \text{当 } 0 < a-x < \delta_2 \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon \end{cases}$

△ 此处 = 表示不相等

\Rightarrow 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

则 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

key 定义法
取 δ 即可
(且仅有极点
全在 $(0, \delta)$).

□

題3 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})} + a[x] \right)$ 存在，求 a 及極限值。

分析 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$x \rightarrow 0^+: \frac{1}{x}, \frac{2}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}, e^{\frac{2}{x}} \rightarrow +\infty$$

$$\therefore a[x] \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0^-: \frac{1}{x}, \frac{2}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}, e^{\frac{2}{x}} \rightarrow 0$$

$$\therefore a[x] \rightarrow -1$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^t)} \stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}{\frac{e^t}{1+e^t}}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型 (洛必達法則)

洛必達法則：求導後極限不存在 \Rightarrow 原极限不存在。

法則失敗

$$= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2t} + e^t}{e^{2t} + 1} = 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^t}}{1 + \frac{1}{e^{2t}}} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 + 0 = 2 \quad (\text{因原題無理根號})$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

等价无穷小， $\ln(1+t) \sim \ln t$, $t \rightarrow 0$.

(原題無理根號，忽略此項)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) > 0 - a = -a$$

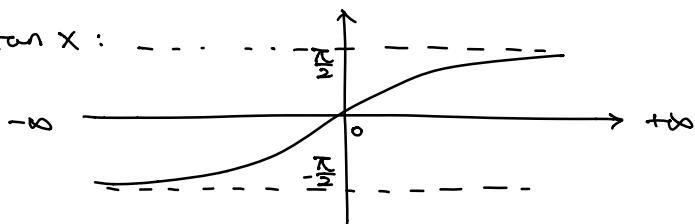
$$\therefore -a = 2 \Rightarrow a = -2, \text{ 極限值为 } 2.$$

□

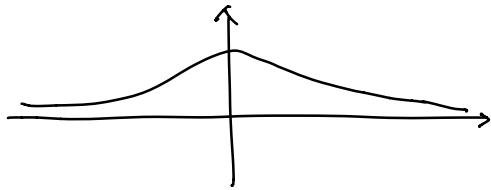
2. 繼數极限 (如 $x: x \rightarrow \infty$)

題3 ① $y = e^x$: $x \rightarrow +\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$.

② $y = \arctan x$:



$$\textcircled{3} \quad y = e^{-x^2}$$



若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 則稱之為極限.

E.g. $x \rightarrow \infty, e^{-x^2} \rightarrow 0$.

定義 4 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ 使得當 $x > X$ 時, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

即 $\forall x \rightarrow +\infty$ 時, $f(x) \vee A$ 為 ε -鄰域, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$.

定義 5 $\forall \varepsilon > 0, \exists X < 0$ 使得當 $x < X$ 時, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

即 $\forall x \rightarrow -\infty$ 時, $f(x) \vee A$ 為 ε -鄰域, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$.

定義 6 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$ 使得當 $|x| > X$ 時, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

即 $\forall x \rightarrow \infty$ 時, $f(x) \vee A$ 為 ε -鄰域, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$.

例 4 証明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$ (由 $\frac{\text{正弦}}{\text{正元}} \rightarrow 0$)

令 δ 為重要定理: 有界 \times 无穷小量 = 无穷小量

$$\text{証明} \quad \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{若要使 } \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ 只须 } \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \text{取 } X = \frac{1}{\varepsilon^2}, \text{ 則 } x > X \text{ 时有 } \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0. \quad \square$$

§3 連續與极限的性质

(1) 唯一性 定理 2 若有极限, 則必唯一.

證明 設 $x \rightarrow a$. 令 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ 且 $A \neq B$ (反證)

不妨设 $A > B$, 取 $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow \exists \delta_1 > 0, \forall 0 < |x-a| < \delta_1, \forall$

$$|f(x) - A| < \frac{A-B}{2} \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} < f(x) < \frac{3A-B}{2}. \quad ①$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \Rightarrow \exists \delta_2 > 0, \forall 0 < |x-a| < \delta_2, \forall$

$$|f(x) - B| < \frac{A-B}{2} \Leftrightarrow \frac{3B-A}{2} < f(x) < \frac{A+B}{2}. \quad ②$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$

$$①② \Rightarrow A \leq B \quad (\text{与 } A > B \text{ 矛盾}). \quad \square$$

作应用：要说明函数极限不存在，用反证法，逆否命题。

E.g. $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$ 不存在, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x]$ (矛盾). 逆否命题：若 $A \wedge B$

类似地, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在

逆否命题：若非 B , 则非 A .

E.g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^x |\sin t| dt \right] / x$ ($\infty - \infty$ 型)

考虑洛必达法则: $(\int_0^x |\sin t| dt)' = |\sin x|$ (在 $x \rightarrow +\infty$ 时无极限)
 \Rightarrow 法则比对失败.

重要的备注

① 正确的归结方式

极限 $\left\{ \begin{array}{l} \text{存在确定的值} \\ \text{不存在确定的值} \end{array} \right\}$ 不存在 (如 $\frac{1}{x} \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$)
 $\pm\infty$ (如 $e^x \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty$)
不存在确定的值 (如 $\sin x, x \rightarrow +\infty$)

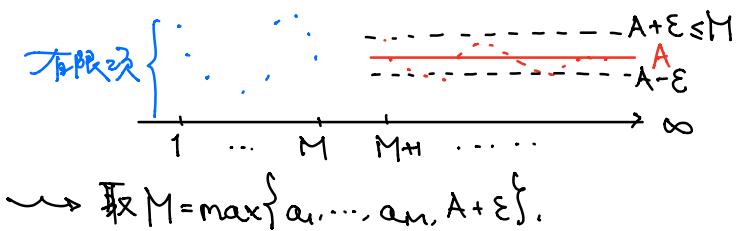
② 错误的归结方式

极限 $\left\{ \begin{array}{l} \text{存在一个唯一确定的极限值} \\ \text{不存在一个确定的极限值或等于} \pm\infty \end{array} \right.$

③ 有界性

Recall 定义: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\exists M > 0$ 使 $|a_n| \leq M (\forall n)$. 全称量词.

即: $\varepsilon - \delta$ 语言 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ 使当 $n \geq M$ 时, $|a_n - A| < \varepsilon$.



例：对 $y = \frac{1}{x}$: 对于 $x > 0$ 使得当 $x > X$ 时， y 有界

但 $0 < x < X$ 时 y 无界。而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ (不存在极限)

所以 通常在 $x \rightarrow +\infty$ (或 $-\infty$) 处极限存在 \Rightarrow 全局有界。

✓ 局部有界。

定理3 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则 $\exists \delta > 0$, $M > 0$ 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x)| \leq M$.
注意：不包含 a 本身 (why?)

证明 参照数列收敛的有界性的证明。

看本节前面第一个引例

重要注释 ① x 和其它趋向过程是平行此定理

E.g. $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow +\infty$), 则 $\exists X > 0$, $M > 0$, 使得
当 $x > X$ 时, $|f(x)| \leq M$

② $\exists 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M$

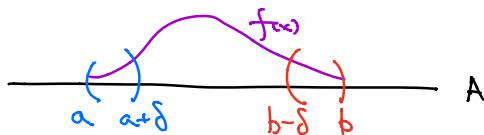
\Rightarrow 有界只在局部的去心邻域内成立。

(3) 当 $x \rightarrow a$ 时, 这个定理同样使用

(未来会结合其它性质使用, 如闭区间上连续函数必有界),

推论 ① 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, $M \exists \delta > 0$, $M > 0$, s.t. 在 $0 < x - a < \delta$, $|f(x)| \leq M$.

② 若 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$, $M \exists \delta > 0$, $M > 0$, s.t. 在 $b - x < \delta$, $|f(x)| \leq M$



证明 证明: $f(x) = \frac{|x| \cdot \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)}$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有界.

(细节) 术语: 开区间内 / 闭区间上.

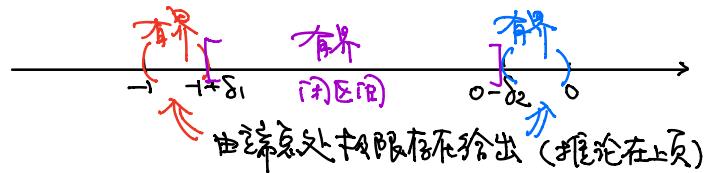
分析与预备知识 ① 和等函数在定义区间上连续

故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内连续.

② 闭区间上的连续函数必有界.

(问题: 怎样用闭区间上连续函数的有界性证明其在开区间内有界?)

思路:



证明 连续: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处连续.

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 3}{18}$$

$\Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ s.t. $f(x)$ 在 $(-1, -1 + \delta_1)$ 内有界.

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 2}{4}.$$

分子乘 -1

$\Rightarrow \exists \delta_2 > 0$ s.t. $f(x)$ 在 $(-\delta_2, 0)$ 内有界.

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[-1 + \delta_1, -\delta_2]$ 上有界

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界. \square

③ 保号性

定理 4 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$ ($\forall \epsilon < 0$), 则 $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall 0 < |x-a| < \delta$, $f(x) > 0$ ($\forall x \neq a$).

推论 若 $f(x) > 0$ ($x \rightarrow a$), 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.