# 数学模型 Lecture Notes

Zhennan Zhou

2021 年 5 月 2 日

PRELIMINARY DRAFT. NOT FOR WIDE CIRCULATION.

## 5 边值问题及其应用

Science is a differential equation. Religion is a boundary condition.

—-Alan Turing

在微分方程模型中，边值问题是由一个微分方程和一组被称为边界条件的约束条件构成的。边值问题的解通常是符合约束条件的微分方程的解。回忆在第4章中，我们得到的 Euler-Lagrange 方程需要加上相应的边界条件，才能给出目标泛函的最优解。

同学们在学习这一章的时候要注意两条线索，一是边值问题的理论和初值问题的区别，二是边值问题的解的结构和线性代数问题的解的结构的相似之处。

### 5.1 初值问题和边值问题

在微分方程模型中，一个初值问题由一个微分方程

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = f(t, \boldsymbol{y}(t)) \quad \text{with} \quad f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

和初值条件 $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$ 组成。这里，变化率函数的定义域 $\Omega$ 是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 中的一个开集，而初值条件可以看作是这个定义域中的一个点，即 $(t_0, \boldsymbol{y}_0) \in \Omega$。

**Example.** 考虑方程 $\phi'' + \lambda\phi = 0$, 和初值条件 $\phi(0) = a$ and $\phi'(0) = b$。如果我们令 $y_1 = \phi$，$y_2 = \phi'$，则我们有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\lambda y_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

边值问题（Boundary value problems，BVP）和初值问题有相似之处，他们都包含一个微分方程。但是，一个边值问题的条件是**在自变量的定义域边界上给出**的，而初值问题的条件都在自变量的同一点给出。

在本章中，我们只考虑一维的二阶微分方程的边值问题。

**Example (5.1).** 考虑下面的边值问题

$$\begin{cases} \phi'' + \lambda\phi = 0, \quad 0 < x < L, \\ \text{B.C.（边值条件）:} \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(L) = 0. \end{cases}$$

显然，方程有一个满足边值条件的解 $\phi(x) \equiv 0$，这个解是平凡解。下面我们希望寻找**非平凡解**。

这个方程的特征方程为（这类方程的通解的形式为 $e^{cx}$）: $c^2 + \lambda = 0$。

- 当 $\lambda<0$ 时，通解可以表示为 $\phi=c_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$。而由边界条件知 $c_1=c_2=0$。（这时候只有平凡解。）

- 当 $\lambda=0$ 时，通解可以表示为 $\phi=c_1x+c_2$。而由边界条件知 $c_1=c_2=0$。（这时候只有平凡解。）

- 当 $\lambda>0$ 时，通解可以表示为 $\phi=c_1\sin(\sqrt{\lambda}x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}x)$。有边界条件知，$c_2=0$ 和 $c_1\sin(\sqrt{\lambda}L)=0$。于是我们得到一族非平凡解和他们对应的 $\lambda$ 的值

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad \phi_n=c_1\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

这个BVP其实是一个 Sturm-Liouville 特征值问题。(详见 5.3 节)

我们假设 $\phi$ 在区间 $(a,b)$ 上满足某个二阶的微分方程，在边界上，我们一般有如下几类的边界条件：

- $\phi=c$, first kind / Dirichlet （第一类/狄利克雷）.

- $\phi'=c$, second kind / Neumann （第二类/诺伊曼）.

- $g\phi'+h\phi=c$, third kind / Robin（第三类）.

- $\phi(a)=\phi(b)$ and $\phi'(a)=\phi'(b)$, periodic（周期）.

特别地，对于前三类B.C.，当 $c=0$ 时，我们称 B.C. 是齐次的（homogeneous）。

## 5.2 初边值问题

本节中，我们通过一些具体的初边值问题来理解研究 BVP 的动机。

我们假设 $u(x,t)$ 表示一个一维导热杆 $0<x<L$ 的温度，它的时间演化满足如下的热传导方程

$$u_t=ku_{xx},\quad u(x,0)=u_0(x),\quad 0<x<L$$

这里 $k$ 是导热系数。我们回忆知，这是一个守恒律模型，而通量函数是 $-ku_x$。除了初值条件之外，在 $x=0,L$ 这两处，我们需要给出边界条件，从而这个完整的问题是一个初边值问题。这里，我们以 $x=0$ 这端为例，来看一些具体的边值条件：

- **给定温度，Prescribed temperature at $x=0$.** $u(0,t)=u_B(t)$.

- **绝热条件，Insulated boundary at $x=0$.** 有时我们可以限定通量函数 $-ku_x(0,t)=\phi(t)$. 特别的，当这一端是完美绝热的时候，我们有 $u_x(0,t)=0$。

- **牛顿冷却定律：Newton's law of cooling at $x=0$.** 如果我们假设在 $x=0$ 处的热通量正比于，这一端的温度和环境温度的差别，那么就有 $-ku_x(0,t)=-H\big[u(0,t)-u_B(t)\big]$，这里 $H$ 被称为传热系数。

特别地，如果 B.C. 是不依赖于时间的（time independent）或称作是稳定的（steady），那么方程的解也许会渐进地趋向一个平衡态（稳态），那么对于平衡态，显然我们有 $u_t=0$。

例如，如果我们给出如下的 B.C.:

$$u(0,t)=T_1,\quad u(L,t)=T_2.$$

那么，稳态解 $u(x,t)=u(x)$ 就满足如下的 BVP

$$u_{xx}=0,\quad u(0)=T_1\quad u(L)=T_2.$$

（这时候的稳态解是什么呢？对应怎么样的解读呢？）

另外一种得到 BVP 的情况是通过分离变量法（method of separation of variables），分离变量法同学们会在偏微分方程等课程中系统学习。我们考虑一维二阶波方程的初边值问题，这里 $u = u(x,t)$ 表示弹性绳索在时间 $t$ 距离平衡位置 $x$ 的位移（参考4.2节的推导）。

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ \text{B.C.}: \quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \\ \text{I.C.}: \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

我们考虑一种特殊的解的形式，分别依赖于 $x$ 和 $t$ 的两个一元函数的乘积，

$$u(x,t) = \phi(x)h(t).$$

代入方程，我们得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dx^2} := -\lambda.$$

注意到，上式的左端是一个 $t$ 的函数，中间是一个 $x$ 的函数，所以，这个等式成立的唯一可能是，它们都是常值函数。我们设这个常数叫做 $-\lambda$，再通过匹配 B.C.'s 我们得到下面的 BVP

$$\phi_{xx} + \lambda\phi = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(L) = 0.$$

这个 BVP 正是我们在 5.1 节考虑的第一个 BVP 例子。

## 5.3 Sturm-Liouville Problems（施图姆-刘维尔，S-L）

**Definition.** S-L微分方程

$$\mathscr{L}\phi + \lambda\sigma\phi = 0, \quad \text{where} \quad \mathscr{L}\phi = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi}{dx}\right) + q\phi.$$

**Definition.** Regular S-L 特征值问题：求满足 S-L 微分方程的非平凡解（$\phi \equiv 0$ 是平凡解），使得它们满足下面的 B.C.'s

$$\beta_1\phi(a) + \beta_2\phi'(a) = 0, \quad \beta_3\phi(b) + \beta_4\phi'(b) = 0,$$

这里，$\beta_i$ 是实数，$q, p$ 和 $\sigma$ 是实值连续函数，并且在 $[a,b]$ 这个闭区间上 $p > 0$ $\sigma > 0$。

注意，

1. 这里考虑的边界条件都是齐次的。
2. 这里的 $\lambda$ 是未指定的。事实上，只有对一些特殊的 $\lambda$，这个边值问题才有非平凡的解。我们把这些存在非平凡解的 $\lambda$ 称为特征值，记为 $\lambda_n$，而这些非平凡的解称为特征函数，记为 $\phi_n(x)$。

注意，一般来说，$\phi_n(x)$ 可以是复数值的，但是为了简化分析，本章中，我们只考虑$\phi_n(x)$是实数值的情况。

Sturm-Liouville 问题的数学理论是常微分方程的重要内容之一。我们来总结一些 Regular S-L 特征问题的基本性质：

**Property 1.** 特征值 $\lambda_n$ 都是实的。

**Property 2.** 特征值序列满足 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$，并且当 $n \to \infty$ 时，$\lambda_n \to \infty$

**Property 3.** $\phi_n(x)$ 构成一组“完备”的集合，即对于定义在 $[a,b]$ 上的“充分好”的任意函数 $f(x)$，我们有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

（“完备”和“充分好”的具体定义超出了本课程的范围。）

**Property 4.** 属于不同特征值的特征函数关于权函数 $\sigma$ 正交，即

$$\int_a^b \phi_n \phi_m \sigma dx = 0, \quad \text{if} \quad \lambda_n \neq \lambda_m.$$

第3、4条性质结合在一起，我们可以利用正交性求解系数 $c_n$，即

$$\int_a^b \phi_n f \sigma dx = c_n \int_a^b \phi_n \phi_n \sigma dx.$$

我们回忆知，在 Example (5.1) 中，$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $\phi_n = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$。于是上面这些性质都可以轻松检验。而此时的级数展开正是一种正弦级数。

这些性质的证明我们会在《常微分方程》中学习,（所以本课就不再给出细节了，）它们主要依赖于regular S-L 微分算子的自伴性。注意，正如边值问题包括微分方程和边界条件两部分，我们一般说的 regular S-L 微分算子或者 regular S-L （特征值）问题是包括微分公式和边界条件两部分的。

我们容易直接验证如下的格林公式（Green's formula）。

**Green's formula.** 对于任意的光滑函数 $u(x), v(x)$，我们有

$$\int_a^b [u\mathscr{L}v - v\mathscr{L}u] dx = p(uv' - vu')|_a^b.$$

如果我们进一步假设 $u, v$ 满足 regular S-L eigenvalue problem 的边值条件，那么就有

$$\int_a^b [u\mathscr{L}v - v\mathscr{L}u] dx = 0.$$

有时候，人们更习惯把上式写成内积的形式 $\langle u, \mathscr{L}v\rangle = \langle \mathscr{L}u, v\rangle$，并且称算子 $\mathscr{L}$ 是自伴的，但是自伴的严格定义超出了本课程的范围，我们就不具体讨论了。

基于 Property 3、4，下面介绍特征函数展开法（the method of eigenfunction expansions）。

我们考虑一个由微分方程 $\mathscr{L}u = f$ 和某些齐次边值条件给出的边值问题（BVP）。这里，微分算子 $\mathscr{L}$ （含边界条件）满足 Regular S-L 的假设。

于是，我们可以求解满足相同边界条件的特征值问题

$$\mathscr{L}\phi_n + \lambda_n \sigma \phi_n = 0,$$

并利用特征函数将方程的解展开成级数的形式

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

由$\mathscr{L}$的线性，（并假设 $\mathscr{L}$ 和级数的求和可以交换顺序）可得

$$\mathscr{L}u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathscr{L}\phi_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma \phi_n.$$

再由正交性，我们有

$$a_n = \frac{\int_a^b f\phi_n dx}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx} = \frac{\int_a^b f\phi_n dx_0}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx'}.$$

注意，解可以被写成一个定积分的形式

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x)=\int_a^b f(x_0)G(x,x_0)dx_0,$$

这里

$$G(x,x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)\phi_n(x_0)}{-\lambda_n\int_a^b\phi_n^2(x')\sigma(x')dx'}.$$

## 5.4 柯西（Cauchy）问题的分离变量法：含时的薛定谔方程*

特征函数展开法对于理解和求解 PDE 模型也有着举足轻重的作用，最常见的应用方式就是分离变量法。本小节中，我们以含时的薛定谔方程为例，简单介绍分离变量法。

很多时候，一些含时的 PDE 模型的状态变量是很难给出有物理意义的边界条件的，或者天真地给出边界条件很容易造成数学上的不相容。有时候，为了避开有限区间的边值条件问题，我们会考虑全空间的柯西问题，这种柯西问题可以看作是 ODE 模型中，初值问题的推广。比如一维的含时薛定谔方程

$$i\hbar u_t=Hu=-\frac{\hbar^2}{2m}u_{xx}+V(x)u,\quad x\in(-\infty,\infty),\quad u(x,0)=u_0(x).$$

虽然缺少在无穷远初边界条件，但是我们希望势能函数 $V(x)$ 在无穷远附近增长地足够快，而使得方程的解在无穷远附近下降到 0 的速度足够快。

我们也可以考虑相应的特征值问题，即不含时的薛定谔方程，

$$H\Psi_n(x)=E_n\Psi_n(x).$$

并且规定特征函数 $\Psi_n(x)$ 在无穷远附近下降到 0 的速度足够快。这样的特征函数也叫做束缚本征态。可惜的是，只有在极少数的情况，人们才能解析的求出这些特征值和特征函数。最著名特例之一就是量子谐振子问题，这时候势能项是一个二次函数，$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，这时候的特征值和特征函数为

$$E_n=\hbar\omega(n+\frac{1}{2}),\quad \Psi_n=\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right).$$

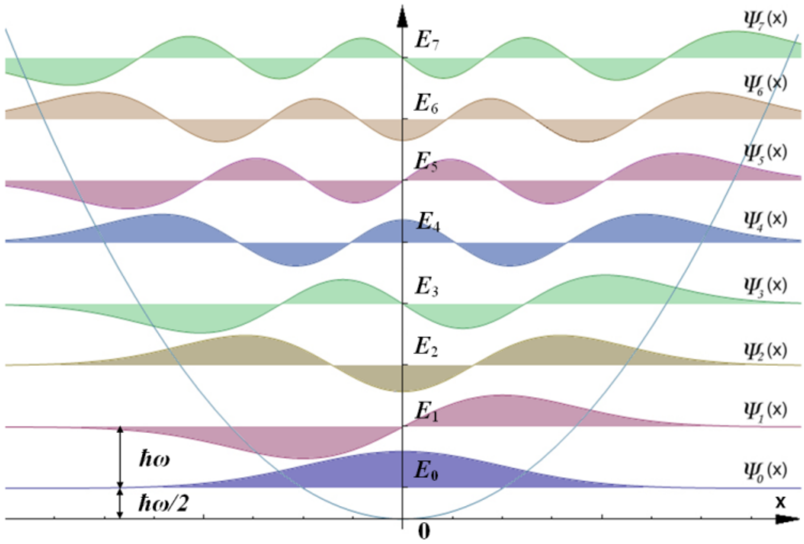
这里，$H_n$ 是 Hermite 多项式，而 $\Psi_n$ 是 Hermite 函数，$\{\Psi_n\}$ 形成了 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组规范正交基（见下图）。

对于量子谐振子问题，我们也可以使用特征函数展开法求解含时的薛定谔方程，令

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\Psi_n(x).$$

领用初值条件和 $\{\Phi_n\}$ 的规范正交性，我们可得

$$c_n(t)=e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}\int_{\mathbb{R}}u_0(x)\Psi_n(x)dx.$$




## 5.5 Green's function and Fredholm alternative (格林函数和弗雷德霍姆二择一)

回顾一下 5.3 节中的例子，$[a,b]$区间上的两点边值问题：$\mathscr{L}u = f$ 加上某些边界条件。我们最终把解表示为了

$$u(x) = \int_a^b f(x_0)G(x,x_0)dx_0.$$

可以对这个解的表示形式做如下的解读：

- $u(x)$ 是解在$x$处的值；
- 我们把f(x)看作源（source，或者是原因），$f(x_0)$ 是源在$x_0$处的值；
- $G(x,x_0)$ 是$x_0$处的源对于$x$处的解的影响大小（这种影响可正可负）；
- 这种解的表示说明，解在$x$处的值受整个区间$[a,b]$内所有源的影响，这种影响在汇总过程（积分）中又被影响函数$G(x,x_0)$所加权修正。

从上个例子来看，这种影响函数只跟微分算子 $\mathscr{L}$ 和边界条件有关，而跟源函数 $f$ 无关。如果能求出来 $G(x,x_0)$，对于方程的求解和分析都有很大的好处。我们把 $G(x,x_0)$ 叫做格林函数（Green's function）。

为了介绍 Green's function，我们需要先引入 Dirac-delta function（或者简称 delta function）。Delta function是一种广义函数，我们这里不研究它的严格数学定义，而是直观地做一个理解。

首先我们定义一个一维的示性函数

$$\chi_{x_i,\Delta x}(x) = \begin{cases} 1, & x_i < x < x_i + \Delta x; \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

如果我们将$[a,b]$区间以$\Delta x$为间隔剖分成$N$份，令剖分格点为$x_i$，于是

$$x_i = a + i\Delta x, \quad i = 0,\cdots,N, \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}.$$

这样，我们就可以对$[a,b]$区间上的函数$f(x)$做分片常数的逼近

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\chi_{x_i,\Delta x}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{\chi_{x_i,\Delta x}(x)}{\Delta x}\Delta x.$$

注意，上述最右端是一个黎曼和的形式，而且我们自然地期待

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\frac{\chi_{x_i,\Delta x}(x)}{\Delta x}\Delta x \xrightarrow{\Delta x\to 0} f(x).$$

同时我们也期待上式的左端可以表达成一个（广义）积分的形式。于是我们形式上定义

$$\frac{\chi_{x_i,\Delta x}(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x\to 0} \delta(x-x_i) = \begin{cases} \infty, & x = x_i; \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases},$$

同时我们要求

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')dx'.$$

这样我们就完成了 Dirac-delta function 的形式定义。

现在我们介绍一些 Dirac-delta function 的性质。

- 我们有 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x')dx'$. 事实上，$\forall\varepsilon>0, 1 = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\delta(x-x')dx'$.
- 我们有 $\delta(c(x-x')) = \frac{1}{|c|}\delta(x-x')$。特别的，$\delta(x-x') = \delta(x'-x)$。
- 定义：Heaviside step function

  $$H(x-x') = \begin{cases} 0, & x < x', \\ 1, & x > x'. \end{cases}$$

  显然我们有，

  $$H(x-x') = \int_{-\infty}^{x}\delta(x_0-x')dx_0.$$

  于是，在一种“弱”的意义下，我们有

  $$\frac{d}{dx}H(x-x') = \delta(x-x').$$

- 考虑$[a,b]$上的两点边值问题 $\mathscr{L}u = f$ 加一定的齐次边界条件。我们希望问题的解可以表示为

  $$u(x) = \int_a^b f(x')G(x,x')dx'. \tag{5.1}$$

  特别的，如果我们令$f(x) = \delta(x-x_s)$, 它可以解读为是聚集在 $x = x_s \in (a,b)$ 的源。那么，

  $$u(x) = \int_a^b \delta(x'-x_s)G(x,x')dx' = G(x,x_s).$$

  于是，我们推出了格林函数满足如下的 BVP

  $$\begin{cases} \mathscr{L}G(x,x_s) = \delta(x-x_s), & a<x<b, \\ G(x,x_s) & \text{satisfies the same (homogeneous) B.C.'s as the original BVP.} \end{cases} \tag{5.2}$$

  事实上，我们可以把(5.2)看作格林函数的等价定义。接下来，我们用(5.2)和原 BVP 来反向推导(5.1)。

  我们回忆可知，如果$u, v$满足相同的齐次边界条件，那么根据 Green's formula

  $$\int_a^b [u\mathscr{L}v - v\mathscr{L}u]dx = 0.$$

  于是，如果我们令

  $$v = G(x,x'), \quad \text{then} \quad \mathscr{L}v = \delta(x-x'),$$

于是我们得到

$$\int_a^b [u(x)\delta(x-x') - G(x,x')\mathscr{L}u(x)]\,dx = 0.$$

如果 $u(x)$ 是BVP的解，那么 $\mathscr{L}u(x) = f(x)$, 于是，我们推出了

$$u(x') = \int_a^b G(x,x')f(x)\,dx.$$

事实上，我们还可以证明格林函数是对称的，$G(x,x') = G(x',x)$。（思考提示：可以通过(5.2)来证明。）于是，最终我们证明了

$$u(x') = \int_a^b G(x',x)f(x)\,dx.$$

我们通过一个例子来实践通过 (5.2) 直接求解一个 BVP 的格林函数。

**Example.** 考虑如下的 BVP

$$u'' = f(x), \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0.$$

利用 (5.2) 的定义方式直接求解 Green's function $G(x,x')$。

$G(x,x')$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}G(x,x') = \delta(x-x'), & 0 < x < L, \\ G(0,x') = 0, \quad G(L,x') = 0. \end{cases}$$

当 $x \neq x'$ 时，我们有 $G'' = 0$，于是

$$G(x,x') = \begin{cases} a + bx, & 0 < x < x', \\ c + dx, & x' < x < L. \end{cases}$$

由边界条件，我们得

$$G(x,x') = \begin{cases} bx, & 0 < x < x', \\ d(x-L), & x' < x < L. \end{cases}$$

易知 $\frac{d}{dx}G(x,x')$ 在 $x = x'$ 处有一个高度为 1 的跳跃，而 $G(x,x')$ 在 $x = x'$ 处是连续的，于是我们有

$$d = \frac{x'}{L}, \quad b = \frac{x'-L}{L}.$$

最终我们得到了

$$G(x,x') = \begin{cases} -\dfrac{x(L-x')}{L}, & 0 < x < x', \\ -\dfrac{x'(L-x)}{L}, & x' < x < L. \end{cases}$$

在求解完成之后，我们可以直接验证$G(x,x')$的确是关于 $x$ 和 $x'$ 是对称的。

我们似乎已经推导出了一套完整的理论方法。但事实上，这套方法中尚有一个明显的“不足”。为了认清这个不足，我们考虑下面两个例子：

Example (a). $u'' = e^x$, $u'(0) = 0$, $u'(L) = 0$. 我们会发现，这个BVP无解。

Example (b). $u'' = \cos(x)$, $u'(0) = 0$, $u'(\pi) = 0$. 我们会发现，这个BVP至少有一个解 $u = -\cos(x)$。

那么这两个例子有什么本质不同呢？

我们回顾一下特征函数展开法（the method of eigenfunction expansions）。

我们考虑一个由微分方程 $\mathscr{L}u=f$ 和某些齐次边值条件给出的边值问题（BVP）。我们求解满足相同边界条件的特征值问题

$$\mathscr{L}\phi_n+\lambda_n\sigma\phi_n=0,$$

并利用特征函数将方程的解展开成级数的形式

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n(x).$$

于是我们得到

$$-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n\sigma\phi_n=f.$$

之前我们利用$\phi_n$正交性算出了所有的系数$a_n$。但是如果对于某个$n'$，$\lambda_{n'}=0$呢？

利用正交性，我们可以得到

$$-a_{n'}\lambda_{n'}=\frac{\int_a^b f\phi_{n'}\,dx}{\int_a^b\phi_{n'}^2\sigma\,dx}.$$

这里我们注意到两个事实。

- 因为$\lambda_{n'}=0$，那么：如果$\int_a^b f\phi_{n'}\,dx\neq0$，则$a_{n'}$ 无解，进而BVP无解；如果$\int_a^b f\phi_{n'}\,dx=0$，则任意$a_{n'}$都是解，进而BVP有无穷多解。
- 存在$\lambda_{n'}=0$，可以等价表述为$\mathscr{L}\phi=0$ （加上相应的边界条件）有了非平凡的解。

我们总结一下一维BVP的 Fredholm Alternative (F.A., 弗雷德霍姆二择一) 。

我们考虑一个在区间 $[a,b]$ 上，由微分方程 $\mathscr{L}u=f$ 和某些齐次边值条件给出的边值问题（BVP）。令 $\phi_0$ 为齐次问题的解，即 $\mathscr{L}\phi_0=0$，且 $\phi_0$ 满足同样的边界条件。

那么

1. 如果齐次问题不存在非平凡解 $\phi_0$，则这个 BVP 有唯一的解。
2. 如果齐次问题存在非平凡解 $\phi_0$，那么
   (a) 如果 $\int_a^b f\phi_0\,dx\neq0$，此 BVP 没有解。
   (b) 如果 $\int_a^b f\phi_0\,dx=0$，则此 BVP 有无穷多个解。

最后我们看一个例子。

**Example.** 求使得下面的 BVP 有解的 $\beta$ 的值

$$u''(x)+(\pi/L)^2u(x)=\beta+x,\quad u(0)=0,\quad u(L)=0.$$

考虑齐次问题

$$\phi''(x)+(\pi/L)^2\phi(x)=0,\quad \phi(0)=0,\quad \phi(L)=0.$$

通过求解，我们得到如下的通解

$$\phi(x)=c\sin(\pi x/L).$$

如果原来的BVP有解，那么根据 F.A. (弗雷德霍姆二择一)，我们有

$$\int_0^L(\beta+x)\sin(\pi x/L)\,dx=0.$$

最终，我们推出 $\beta=-L/2$。

其实遇到无穷多解的情况，我们也能稍作修改的求出更一般的格林函数，不过这门课中我们就不再深究了。有兴趣的同学可以参看下面这本教材：

`https://www.amazon.com/Differential-Equations-Boundary-Problems-Featured/dp/0321797051/ref=asap_bc?ie=UTF8`