## 2022 年全国中学生数学奥林匹克竞赛(决赛)

广东 深圳 第一天 2022 年 12 月 29 日 8:00-12:30

1. 设正实数序列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  满足: 对任意正整数 n, 均有

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}, \quad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}}.$$

- (1) 若  $a_{100}b_{100} = a_{101}b_{101}$ , 求  $a_1 b_1$  的值.
- (2) 若  $a_{100} = b_{99}$ , 比较  $a_{100} + b_{100}$  与  $a_{101} + b_{101}$  的大小.
- 2. 给定一个边长为 1 的正三角形 ABC. 称 ( $\triangle DEF, \triangle XYZ$ ) 是一个好三角形对, 如果点 D, E, F 分别在线段 BC, CA, AB 内部, 点 X, Y, Z 分别在直线 BC, CA, AB 上, 满足

当  $(\triangle DEF, \triangle XYZ)$  取遍所有好三角形对时, 求  $\frac{1}{S_{\triangle DEF}} + \frac{1}{S_{\triangle XYZ}}$  的所有可能值.

- 3. 给定正整数 m 和 n. 将正 2m + 2n 边形的 2m 个顶点染黑色, 其余 2n 个顶点染白色. 定义两个黑点 B, C 的染色距离 d(B,C) 为直线 BC 两侧的白点数目的较小者; 定义两个白点 W, X 的染色距离 d(W,X) 为直线 WX 两侧的黑点数目的较小者.
- 一个黑点配对方案  $\mathscr{B}$  是指将所有 2m 个黑点标记为  $B_1, \dots, B_m, C_1, \dots, C_m$ , 使得 m 条线段  $B_iC_i$  ( $1 \le i \le m$ ) 两两不相交. 对任意黑点配对方案  $\mathscr{B}$ , 记

$$P(\mathscr{B}) = \sum_{i=1}^{m} d(B_i, C_i).$$

一个白点配对方案  $\mathcal{W}$  是指将所有 2n 个白点标记为  $W_1, \dots, W_n, X_1, \dots, X_n$ , 使得 n 条线段  $W_i X_i (1 \leq i \leq n)$  两两不相交. 对任意黑点配对方案  $\mathcal{W}$ , 记

$$P(\mathcal{W}) = \sum_{i=1}^{m} d(W_i, X_i).$$

证明: 无论顶点的染色方式如何, 均有

$$\max_{\mathscr{B}} P(\mathscr{B}) = \max_{\mathscr{W}} P(\mathscr{W}),$$

其中等式两边的最大值分别在所有可能的黑点配对方案 38 和白点配对方案 11 中选取.