

Algebraic cycles over number fields and L-functions: conjectures and results

Wei Zhang

Massachusetts Institute of Technology

Peking University, Aug 4th, 2023

怀新一题 | 三次同余方程

BICMR 北京国际数学研究中心BICMR

2023-03-30 16:00 Posted on 北京



新一期“怀新一题”如约而至。

本栏目由包括历年国际数学奥林匹克

竞赛（IMO）金牌得主在内的
海内外数学家定期执笔出题，

题目定位于中学生、数学爱好者。

本期主题为“三次同余方程”，

欢迎大家踊跃参与！



本期题目

设 $p > 3$ 是素数。记 N_p 为同余方程

$$x^3 + y^3 \equiv 1 \pmod{p}$$

的解的个数，也就是集合

$\{(x, y) : x, y \in \{0, 1, \dots, p-1\}, p|(x^3 + y^3 - 1)\}$
的元素的个数。证明以下结果：

- (1) 若 $p \equiv 2 \pmod{3}$ ，则 $N_p = p$ 。
- (2) 若 $p \equiv 1 \pmod{3}$ ，则存在唯一的正整数对 (A, B) 使得

$$4p = A^2 + 27B^2.$$

- (3) 若 $p \equiv 1 \pmod{3}$ ，对(2)中的 A 调整符号如下：当 $A \equiv 1 \pmod{3}$ 时，令 $A' = A$ ；当 $A \equiv 2 \pmod{3}$ 时，令 $A' = -A$ 。证明 $N_p = p + A' - 2$ 。

（注：记号 $a|b$ 表示 a 整除 b 。记号 $a \equiv b \pmod{c}$ 表示 c 整除 $a - b$ 。）



$$a_p := p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p)$$

Example (Fermat curve $x^3 + y^3 = 1$)

p	2	3	5	7	11	13	17	19
a_p	0	0	0	-1	0	5	0	-7

Conductor $N = 27$

Example (Congruent number curve $110y^2 = x^3 - x$)

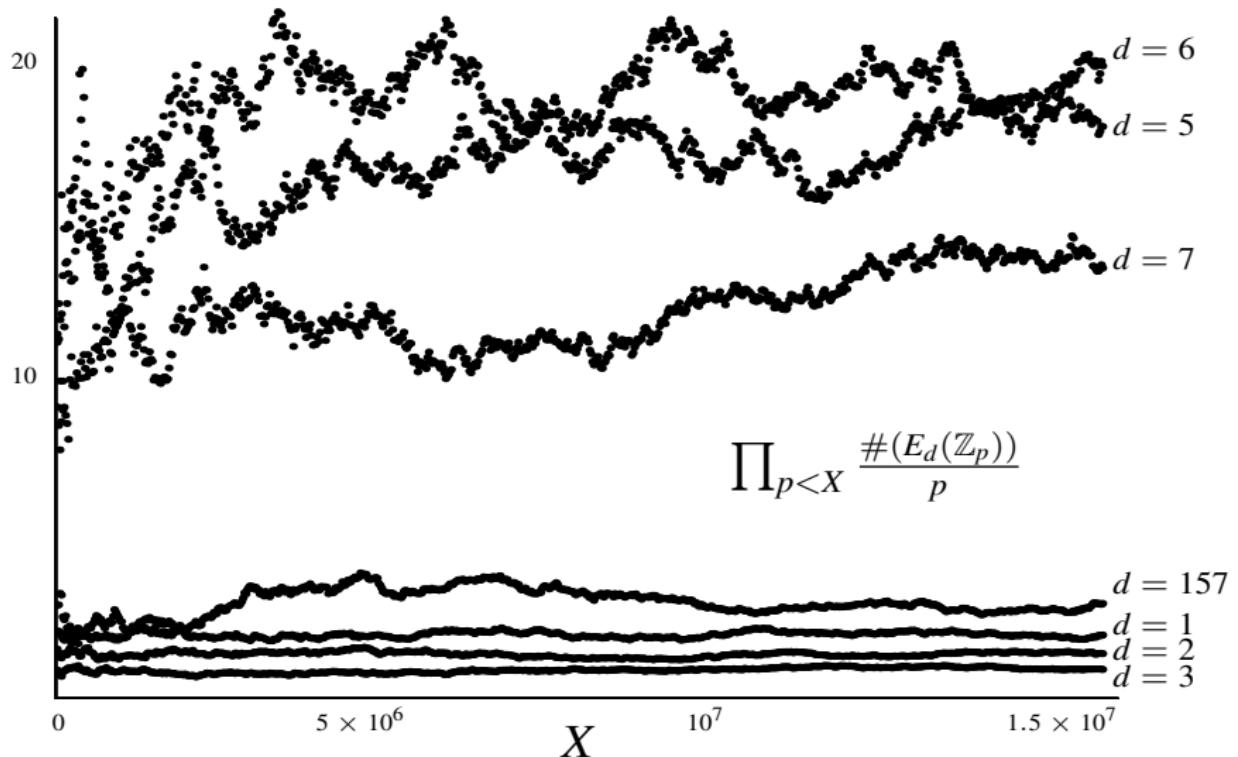
p	2	3	5	7	11	13	17	19
a_p	0	0	0	0	0	-6	2	0

Conductor $N = 193600 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 11^2 = 16 \cdot 110^2$

Conjecture (Birch–Swinnerton-Dyer)

$$\prod_p \frac{\#E(\mathbb{F}_p)}{p} < \infty \iff \#E(\mathbb{Q}) < \infty.$$

Data for $y^2 = x^3 - d^2x$



Formulation with L-function

Define

$$L(E, s) := \prod_p \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}}$$

where

$$a_p := p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p)$$

Conjecture (Birch–Swinnerton-Dyer)

$$\text{rank } E(\mathbb{Q}) = \text{ord}_{s=1} L(E, s)$$

Modular forms attached to elliptic curves

Example (Fermat curve $x^3 + y^3 = 1$)

p	2	3	5	7	11	13	17	19
a_p	0	0	0	-1	0	5	0	-7

Conductor $N = 27$

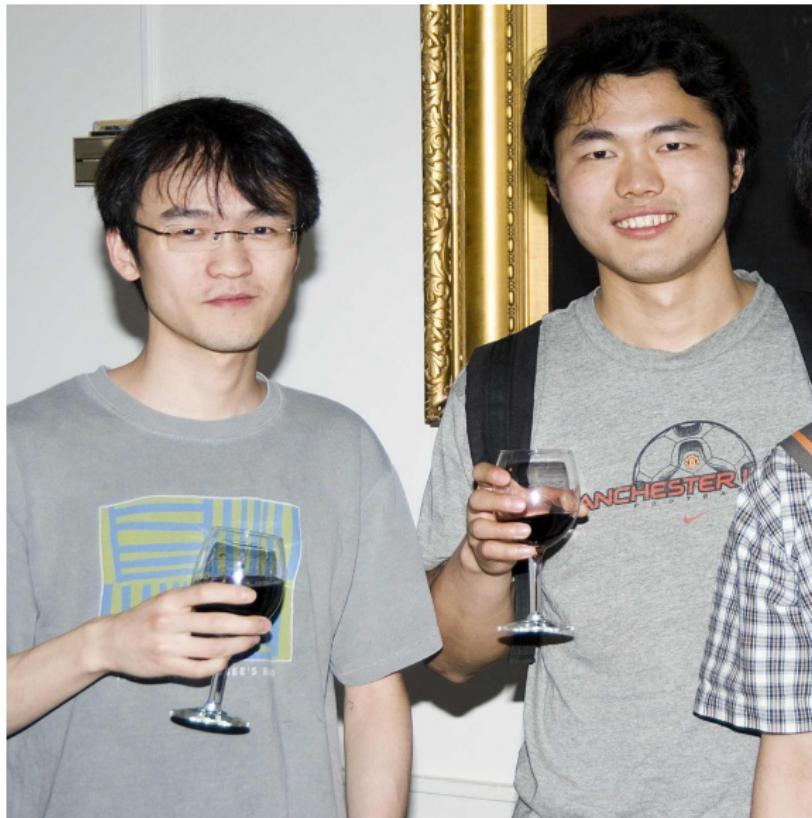
$$\varphi = q - 2q^4 - q^7 + 5q^{13} + 4q^{16} - 7q^{19} + \dots$$

Example (Congruent number curve $110y^2 = x^3 - x$)

p	2	3	5	7	11	13	17	19
a_p	0	0	0	0	0	-6	2	0

Conductor $N = 193600 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 11^2 = 16 \cdot 110^2$

$$\varphi = q - 3q^9 - 6q^{13} + 2q^{17} + \dots$$



L-T-X-Z-Z (2017)



Thank you!

Algebraic cycles over number fields and L-functions: conjectures and results

Wei Zhang

Massachusetts Institute of Technology

Peking University, Aug 4th, 2023