2022 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（决赛）

广东　深圳

第一天

2022 年 12 月 29 日 8:00–12:30

1. 设正实数序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足: 对任意正整数 n, 均有

$$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}},\quad b_{n+1}=b_n+\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}}.$$

(1) 若 $a_{100}b_{100}=a_{101}b_{101}$, 求 a_1-b_1 的值.

(2) 若 $a_{100}=b_{99}$, 比较 $a_{100}+b_{100}$ 与 $a_{101}+b_{101}$ 的大小.

2. 给定一个边长为 1 的正三角形 ABC. 称 $(\triangle DEF,\triangle XYZ)$ 是一个*好三角形对*, 如果点 D, E, F 分别在线段 BC, CA, AB 内部, 点 X, Y, Z 分别在直线 BC, CA, AB 上, 满足

$$\frac{DE}{20}=\frac{EF}{22}=\frac{FD}{38},\ 且\ DE\perp XY,\ EF\perp YZ,\ FD\perp ZX.$$

当 $(\triangle DEF,\triangle XYZ)$ 取遍所有好三角形对时, 求 $\dfrac{1}{S_{\triangle DEF}}+\dfrac{1}{S_{\triangle XYZ}}$ 的所有可能值.

3. 给定正整数 m 和 n. 将正 $2m+2n$ 边形的 $2m$ 个顶点染黑色, 其余 $2n$ 个顶点染白色. 定义两个黑点 B, C 的*染色距离* $d(B,C)$ 为直线 BC 两侧的白点数目的较小者; 定义两个白点 W, X 的*染色距离* $d(W,X)$ 为直线 WX 两侧的黑点数目的较小者.

一个黑点配对方案 $\mathscr{B}$ 是指将所有 $2m$ 个黑点标记为 $B_1,\cdots,B_m,C_1,\cdots,C_m$, 使得 m 条线段 B_iC_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ 两两不相交. 对任意黑点配对方案 $\mathscr{B}$, 记

$$P(\mathscr{B})=\sum_{i=1}^{m}d(B_i,C_i).$$

一个白点配对方案 $\mathscr{W}$ 是指将所有 $2n$ 个白点标记为 $W_1,\cdots,W_n,X_1,\cdots,X_n$, 使得 n 条线段 $W_iX_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 两两不相交. 对任意黑点配对方案 $\mathscr{W}$, 记

$$P(\mathscr{W})=\sum_{i=1}^{m}d(W_i,X_i).$$

证明: 无论顶点的染色方式如何, 均有

$$\max_{\mathscr{B}}P(\mathscr{B})=\max_{\mathscr{W}}P(\mathscr{W}),$$

其中等式两边的最大值分别在所有可能的黑点配对方案 $\mathscr{B}$ 和白点配对方案 $\mathscr{W}$ 中选取.