目录

有理三角函数积分	万能代换
定积分	(一) 几个经典问题
	(二) 对称性在积分计算中的应用
反常积分的敛散性	(一) 比较判别法
	(二) 参数分情况讨论
平面图形面积计算	(一) $f(x)$, $g(x)$ 所围面积
	(二) 参数方程形式下的面积
	(三) 极坐标下的面积
旋转体的体积	(一) 一般体积公式
	(二) 旋转体的体积
二重积分	(一) 一般区域上的二重积分
	(二) 二重积分的变量替换
多元函数极限	(一) 二重极限(若存在)的计算
	(二) 累次极限
	(三) 证明重极限不存在的方法
多元函数连续性	
偏导数	(一) 偏导数的定义
	(二) 偏导数连续
全微分	(一) 定义与基本性质
	(二) 连续、偏导数存在与可微
链式法则	
隐函数存在定理与求导	(一) 隐函数存在定理
	(二) 隐函数求导
	(三) 求已知函数组所确定隐函数组之导数

中值定理

对式子的处理

① 升阶数 $F'(x)-F'(y)=F'(z)$

$$\frac{F(x)}{F'(x)}=\frac{F'(x)}{F''(x)}$$

全部展开，大力出奇迹（构造积分函数）

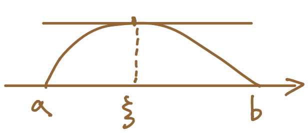
e.g. $$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\Rightarrow \left(f(a)g'(\xi)-f(b)g'(\xi)\right)-\left(f'(\xi)g(a)-f'(\xi)g(b)\right)=0$$

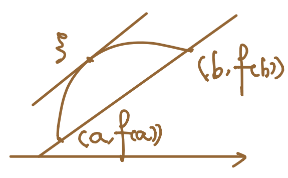
$$\Rightarrow F(x)=f(a)g(x)-f(b)g(x)-g(a)f(x)+g(b)f(x)$$

则 $F(a)=F(b) \Rightarrow F'(\xi)=0$

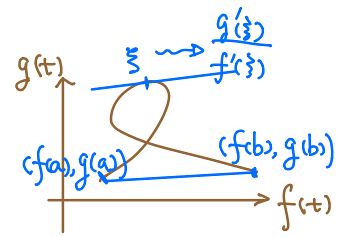
P.S.



罗尔中值



拉格朗日中值.



柯西中值

将 f, g 关于 t 参数化.

$$\Rightarrow \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$$

e.g. 设 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

$\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

$\Rightarrow f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

构造 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$

$F(a)=F(b) \Rightarrow F'(\xi)=0$

e.g. 证明 $\exists\, \xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$$\Rightarrow f(a)g'(\xi)-f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)g(\xi)+g(b)f'(\xi)=0$$

构造 $F(x)=\left(f(a)-f(x)\right)\left(g(b)-g(x)\right) \Rightarrow F(a)=F(b)=0$

$\Rightarrow F'(\xi)=0.$

② 不齐阶数，但两项齐次。 差一阶

$\square f''(x)+\square f'(x)=0$ （右边若非零，应可以移项化为如上形式）。

凑积分因子 $e^{g(x)}$.

考查 $\left(e^{g(x)}\cdot f(x)\right)'=g'(x)\cdot e^{g(x)}\cdot f(x)+e^{g(x)}\cdot f'(x)=e^{g(x)}\cdot\left(f'(x)+g'(x)f(x)\right)$

$a(x)f''(x)+b(x)f'(x)=0$

令 $p(x)=f'(x)\Rightarrow a\cdot p'+b\cdot p=0\Rightarrow p'+\frac{b}{a}\cdot p=0$

e.g. $f(a)=f(b)=0$, $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)+g'(\xi)\cdot f(\xi)=0$

构造 $F(x)=e^{g(x)}\cdot f(x)$

e.g. $f'(0)=0$, $\exists\,\xi\in(0,1)$, s.t. $f'(\xi)-(\xi-1)^2f''(\xi)=0$

构造 $F(x)=e^{\int-\frac{dt}{(t-1)^2}}\cdot f(x)=e^{\frac{1}{t-1}}f(x)$

e.g. $f(1)=0$, $\exists\,\xi\in(0,1)$, s.t. $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})\cdot f(\xi)$

e.g. $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$

③ 不齐阶，差一阶以上。只能用 Taylor.

④ 有多个点：一个点对一个区间

习题

1. $f(0)=f(1)=0$, $\exists\,\xi\in(0,1)$, s.t. $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

构造 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$. $\exists\,\eta\in(0,1)$. s.t. $f'(\eta)=0\Rightarrow F(\eta)=0$

易知 $F(1)=0$. $\Rightarrow\exists\,\xi\in(\eta,1)$ s.t. $F'(\xi)=0$.

2. $f(0)=0$, $f(x)>0\ (0<x<1)$, $\exists\,\xi\in(0,1)$ s.t. $\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

$\Rightarrow 2f'(\xi)\cdot f(1-\xi)-f(\xi)\cdot f'(1-\xi)=0$

$F(x) = f(x)^2 \cdot f(1-x)$. $F(1) = 0 = F(0) \Rightarrow \exists \xi$ s.t. $F'(\xi) = 0$.

3. $f'(a) = f'(b) = 0$, $f(x) > 0$. $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f(\xi) \cdot f''(\xi) = 2(f'(\xi))^2$

升阶数. $f \cdot f'' - 2f'^2 = 0$.

构造 $F(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$

4. 构两中值.

① $f(a) = f(b)$, $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f(a) - f(\xi) = \dfrac{\xi f'(\xi)}{2}$

$F(x) = x^2 f(x)$, $G(x) = \dfrac{x^2}{2}$ $F'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x)$

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle 2f(a)}{\underset{\shortparallel}{\frac{a^2 f(a) - b^2 f(b)}{\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}}}} = \frac{2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi)}{\xi}$$

② $f(0) = 0$, $\forall x > 0$, $\exists 0 < \xi < x$ s.t. $f'(x) - \dfrac{f(x)}{x} = \xi f''(\xi)$

$F(x) = x f'(x) - f(x)$, $G(x) = 2x$.

5. $f(0) = g(0) = 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) > 0$.

若 $f'(x)/g'(x)$ 在 $[0,a]$ $\uparrow$ $\Rightarrow f(x)/g(x) \uparrow$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{g'}{g}\left(\frac{f'g/g' - f}{g}\right) = \frac{g'}{g}\left(\frac{f'}{g'} - \frac{f}{g}\right)$$

$$= \frac{g'}{g}\Big(\frac{f'}{g'} - \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}}_{\substack{\shortparallel \\ f'(\xi)/g'(\xi) \quad 0<\xi<x}}\Big) = \frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right) \geq 0$$

无穷级数

(一) 关于 n^p 和 $\ln^p n$ 的感觉

① p-级数，关于 $\ln n$ 和 n 的级别问题

$\sum \frac{1}{n}$ d.（发散）　　$\sum \frac{1}{n^p}$ $(p>1)$ c.　　$\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ c.

$\sum \frac{1}{n^p}$ $(p<1)$ d.

$\ln x = o(x^{\varepsilon})$ $(\forall \varepsilon>0)$ $(x \to +\infty)$

$\rightsquigarrow$ $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ c.　　$\sum \frac{\ln n}{n^{1+\varepsilon}}$ c.

$\sum \frac{\ln^k n}{n^2}$ $(k=1000, 10000)$. c.

$\rightsquigarrow$ $\sum \frac{1}{n\ln n}$ d.　　$\sum \frac{1}{n\ln^{1+\varepsilon} n}$ c.

e.g. $\ln\ln x = o((\ln x)^{\varepsilon})$,

$\rightsquigarrow$ $\sum \frac{1}{n\ln n \cdot \ln(\ln n)}$ d.

正常的例子:

$\sum \frac{n}{n^2+1}$ d.　　$\sum \frac{n\ln n}{n^2+1}$ d.　　$\sum \frac{n+1}{n^2\ln n} \sim \sum \frac{1}{n\ln n}$ d.

② 等价量判别法

若 $b_n \geq 0$, $a_n>0$, $\forall n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = c$（正常数）.

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同 c./d.

e.g. $\sum \frac{n}{n^2+1}$, $a_n = \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}$

$\sum \frac{1}{2n}$ d. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ d.

e.g. $\sum \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ c.

$\underbrace{\ln n = o(n^{\varepsilon})\ (n\to+\infty),\ \forall \varepsilon>0 \text{ 成立}.}$

取 $\varepsilon = \frac{3}{14}$. $a_n \leq \frac{n^{\frac{3}{14}}}{n^{\frac{3}{2}}}$

判别法对非正项级数不成立！

反例 $\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)} = \sum a_n$

$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \to 1 \ (n\to+\infty)$

$\Rightarrow a_n \sim b_n$. $\sum a_n \sim \sum b_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ c.

但: $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum \frac{1}{n} = \sum b_n + \sum \frac{1}{n}$ d.

不对.

e.g. (1) $\sum \frac{1}{n^p} \begin{cases} p>1, c \\ p\le 1, d \end{cases}$. (2) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} p>1, C. \\ p\le 1, d \end{cases}$

(3) $\sum \frac{1}{n\cdot\ln n(\ln\ln n)^p} \begin{cases} p>1. c \\ p\le 1. d. \end{cases}$

e.g. (1) $\sum \frac{1}{n^{\ln r}} \begin{cases} r>e \\ r\le e \end{cases}$

$n^{\ln r} = r^{\ln n}$ (换底公式)

(2) $\sum \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \sum \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}$

$\ln\ln\ln n \le 1$ (有限项)

$\ln\ln\ln n > 1$. c

$\Rightarrow$ c.

(3) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ d. $\frac{1}{(\ln n)^{\infty}} \sim \frac{1}{n}$ (d.)

总结: ① 换底

② 次数带n, 看成有限/无限两部分

例 16.9 下列级数中发散的是(D).

(A) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$ c.

(B) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ c.

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ $n-\ln n \ge \frac{n}{1000}$ c.

(D) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$ d.

【解】应选(D). 高阶无穷小只能乘除, 不能加减

初值 x_0 的选取无关.

例 16.3 判别下列级数的敛散性: 指数函数 > n^p.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$; c.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n}$; d.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-9\cos n}{n\sqrt{5n+3}}$. 有限 $\sim \frac{2n-9 \text{ or } 2n+9}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ d.

1.14.2 判别级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 的敛散性.

1.14.3 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，试证： → 和 $\frac{1}{n^p}$ 比

(1)若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛； $u_n\sim\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$

(2)若 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛，且 u_n 单调减少，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(3)若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛； → $\frac{1}{n^{2+2\varepsilon}}$

(4)若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 收敛. → $\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}$

e.g. (1) $\sum\frac{1}{\ln(n!)}$ $\qquad \ln(n!)=\ln 1+\cdots+\ln n\le n\ln n$

$\Rightarrow \sum\frac{1}{\ln(n!)}\ge\sum\frac{1}{n\ln n}$ d.

(2) $\sum\frac{\ln(n!)}{n^p}\le\sum\frac{n\ln n}{n^p}=\sum\frac{\ln n}{n^{p-1}}\Rightarrow p>2$ c.

$\ln n!>\frac{n}{1000}\Rightarrow\sum\frac{\ln n!}{n^p}>\sum\frac{\frac{n}{1000}}{n^p}\sim\frac{1}{n^{p-1}}$ $\quad p\le 2$, d.

(3) $\sum\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^p}\le\sum\frac{n\ln^2 n}{n^p}\sim\frac{\ln^2 n}{n^{p-1}}\sim\frac{1}{n^{p-1}}$ $\quad p>2$. c.

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n>N,\ \ln^2 n>\frac{n}{1000}\Rightarrow p\le 2$, d.

(4) $\sum\frac{1}{n^2-\ln n}$ c. $\qquad$ 放缩 $\longleftrightarrow$ $\ln e^n\sim n$

(5) $\sum\frac{\ln(e^n+n^2)}{\underbrace{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}}_{\sim n^2}\cdot\underbrace{\ln^2(n+1)}_{\sim\ln^2 n}}\sim\sum\frac{n}{n^2\ln^2 n}\sim\sum\frac{1}{n\ln^2 n}$ c.

额外的变形：对抽象的 a_n 进行操作. 前提 $a_n>0$!

已知 $\sum a_n$ 发散 → 假设 $a_n=\frac{1}{n}$

(1) $\sum\frac{a_n}{1+a_n}$ d.

过程 若 a_n 无界：$\frac{a_n}{1+a_n}\to 1\ (n\to\infty)\Rightarrow$ d.

若 a_n 有界：$a_n\le M$，$\frac{a_n}{1+a_n}\ge\frac{a_n}{M+1}\Rightarrow$ d.

(2) $\sum\frac{a_n}{1+na_n}=\sum\frac{1}{\frac{1}{a_n}+n}$ d.

e.g. $a_n=\begin{cases}1, & n=m^2\\ \frac{1}{n^2}, & 其它\end{cases}\Rightarrow\sum a_n$ d.

$$但\ \sum \frac{a_n}{1+na_n} < \sum_{n=m^2} \frac{1}{1+n} + \sum_{其它} \frac{\frac{1}{n^2}}{1+n\cdot\frac{1}{n^2}} \sim \sum \frac{2}{n^2}\quad c.$$

$$\sum_{n=m^2} \frac{1}{1+n} = \sum \frac{1}{1+m^2} \qquad \sum_{其它} \frac{\frac{1}{n^2}}{1+n\cdot\frac{1}{n^2}} = \sum \frac{1}{n^2+n}$$

(3) $\sum \frac{a_n}{1+n^2a_n} \le \sum \frac{a_n}{n^2a_n} = \sum \frac{1}{n^2}$, c.

(4) $\sum \frac{a_n}{1+a_n^2}$ d.

换底

$$\boxed{\oslash^{\ln \bullet} = \bullet^{\ln \oslash}}$$

习题：(1) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \sum \frac{1}{n^{\ln\ln n}}$ c.

(2) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ d.

(3) $\sum \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ $\begin{cases} \frac{n^3\cdot(\sqrt{2}-1)^n}{3^n} \sim \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{3^n} \\ \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n} \sim \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{3^n} \end{cases}$ c.

(4) $\sum \frac{(\ln\ln n)^{100}}{\underbrace{\ln n\cdot \ln n!}_{\le n\ln^2 n}} \sim \sum \frac{1}{\ln n\cdot\ln n!}$ c.

③ 柯西判别法 和 达朗贝尔判别法 (服务于某些 n! 或 $(\cdot)^n$)

正项 $\sum a_n$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$. $\rho<1 \Rightarrow c.$ $\rho>1 \Rightarrow d.$
  $\rho = 1 \Rightarrow$ 不一定.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. $l<1 \Rightarrow c.$ $l>1 \Rightarrow d.$
  $l=1 \Rightarrow$ 不一定.

柯西强于达朗贝尔.

e.g. $\sum \frac{1}{n!}$ c. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} < 1\right)$

$\sum \frac{x^n}{(1+\frac{1}{n})^n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{1+\frac{1}{n}} < 1\ (0<x<1)$

$\Rightarrow 0<x<1$: c. $x>1$: d.

$x=1$: $\sum \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \sim \sum \frac{1}{e}$ $\quad (1+\frac{1}{n})^n \to e\ (n\to\infty)$. d.

$$\sum \frac{1+(-1)^n}{n}\ln^n x \qquad \sqrt[n]{a_n} = |\ln x|\frac{\sqrt[n]{1+(-1)^n}}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow |\ln x| \ (n\to\infty)$$

(奇数项为0，不能用达朗贝尔了).

e.g. $\sum \frac{6^n}{5^n+7^n} \rightsquigarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{6}{\sqrt[n]{7^n+5^n}}$

引理：$a>b>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

$\Leftarrow e^{\ln\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}} \sim e^{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n} \to e^0 = 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \frac{6}{7} < 1 \quad$ C.

5月23日 回顾

1. $\sum \dfrac{\ln\left(1+\boxed{\dfrac{(3+(-1)^n)\arctan n}{n}}\right)}{\ln^2 n - \ln\ln n}$

$\sim \frac{(3+(-1)^n)\arctan n}{n}$ (有界) $\sim \frac{1}{n}$，$\to 0$

分母 $\sim \ln^2 n$

整体 $\sim \frac{1}{n\ln^2 n}$. C.

2. $\sum \dfrac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[3]{n^3-2}\cdot \ln^3(n+2)}$

$\ln n < n$，$\ln(1+\ln n) \rightsquigarrow < \ln(1+n) \sim \ln n$

$\sqrt[3]{n^3-2} \sim n$，$\ln^3(n+2) \sim \ln^3 n$

$\sim \frac{1}{n\ln^2 n}$. C.

3. $\sum \dfrac{\sqrt{n^{100}+1}}{2^n}$，$\sqrt{n^{100}+1} \sim n^{50}$，C.

2^n → 指数函数

4. $\sum \dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$

换底. $= \dfrac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}$ 有限项后成为 $\frac{1}{n^{1+?}}$，C.

补充：① 关于 n, $\ln n$ (n^k, $\ln^k n$) 的感觉

② 关于指数函数的感觉：$a^n \gg n^b$.

③ 关于 $n!$ 和 a^n：$n! \gg a^n$

④ 关于 n^n 和 $n!$：$n^n > n!$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$：令 $a_n = \frac{n!}{n^n}$，证 $\sum a_n$ 收敛 ($\Rightarrow a_n \to 0$).

柯西：$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < 1$ $(n\to\infty)$.

$\Rightarrow n^n \gg n!$

但是 $(n!)^2 \gg n^n$ (同理可证)

总结：$(n!)^2 \gg n^n \gg n! \gg a^n \gg n^p \gg \ln^p n$.

(二) 交错级数

· Leibniz 型级数. $\sum u_n$

3个条件: (1) $u_n=(-1)^n b_n$ 或 $(-1)^{n+1} b_n$, $b_n>0$.

(2) b_n 单调递减 $\Big\}$ $b_n \searrow 0$.

(3) $b_n \to 0$ $(n\to\infty)$

e.g. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ c. $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ c. $\quad \sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ c.

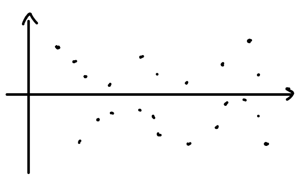
· 绝对收敛

· $\sum |u_n|$ c. $\Rightarrow \sum u_n$ c.

· $\sum |u_n|$ c. 称 $\sum u_n$ 绝对收敛 (a.c.)

$\sum u_n$ c. 但 $\sum |u_n|$ d. 称 $\sum u_n$ 条件收敛 (d.c.)

· 级数的正负分解 (不重要)



$\Big\{ a_n^+ = \max\{a_n, 0\} \geq 0$

$\Big\{ a_n^- = -\min\{a_n, 0\} = \begin{cases} -a_n, & a_n<0 \\ 0, & a_n \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow a_n^- \geq 0$.

$$\Rightarrow \sum a_n = \underbrace{\sum a_n^+}_{\geq 0} - \underbrace{\sum a_n^-}_{\geq 0} \quad \begin{cases} \sum a_n \text{ a.c.} \Rightarrow \sum a_n^+, \sum a_n^- \text{ c.} \\ \sum a_n \text{ d.c.} \Rightarrow \sum a_n^+ \text{ d}, \sum a_n^- \text{ d.} \end{cases}$$

e.g. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{d.c.}} + \sum \frac{1}{n}$. d.

(三) Abel-Dirichlet 判别法

Abel 判别法: $\underset{\underset{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}{\uparrow}}{\sum a_n}$ 收敛, $\underset{\underset{M}{\uparrow}}{\{b_n\}}$ 单调有界 $\Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛.

Dirichlet 判别法: $\sum a_n$: S_n 有界 ← e.g. ± 1, $\sin n$, $\cos n$.

$\left.\begin{array}{l} \sum a_n:\ S_n \text{ 有界} \\ \{b_n\}\text{ 单调收敛于0}\ (b_n \searrow 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛.

(Dirichlet 比 Abel 强).

例3: (1) $\sum a_n$ c. $\Rightarrow \sum \frac{n a_n}{n+1}$ c.

Abel, $\frac{n}{n+1}$ 单调有界.

(2) $\sum a_n$ c. $\Rightarrow \sum \frac{a_n}{n^\sigma}$ $(\forall \sigma > 0)$ c.

习题: (1) $\sum (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\underbrace{\sqrt{n}+2}_{\searrow 0}}$ c.

(2) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}$ c.

$= \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{2n}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1-\frac{(-1)^n}{2n}}{\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)\left(1-\frac{(-1)^n}{2n}\right)}$

$= \sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{d.c.}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}} - \sum \underbrace{\frac{1}{2n^{3/2}}}_{\text{c.}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}}$

单调有界

(3) $\sum \frac{\cos n}{n}$ c.

$\sum \cos n$ 有界. Dirichlet

(4) $\sum (-1)^n \cdot \frac{\sin^2 n}{n}$ c.

① 若 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1} |u_n|$ 不定(反例: $\sum\limits_{n=1} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ 发散).

找反例 = 找 $(-1)^n$.

① 升次数:

e.g. $u_n \to u_n^2$.

$u_n \to u_n \cdot u_{n+1}$

$u_n \to u_{n-1} \cdot u_n \cdot u_{n+1}$

② 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\begin{cases} u_n \geq 0 \text{ 时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2 \text{ 收敛} (\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0, \text{从某项起}, u_n < 1, u_n^2 < u_n), \\ u_n \text{ 任意时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2 \text{ 不定(反例}: \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 收敛,但} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散)}. \end{cases}$

③ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\begin{cases} u_n \geq 0 \text{ 时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1} \text{ 收敛} \left(u_n \cdot u_{n+1} \leq \frac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{2}\right), \\ u_n \text{ 任意时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1} \text{ 不定(反例}: u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ \quad u_n u_{n+1} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \\ \quad \text{级数发散)}. \end{cases}$

$a_n \geq 0 \Rightarrow$ c.

否则找反例

④ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 不定(反例: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散).

⑤ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ 不定(反例: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散).

$\Downarrow$

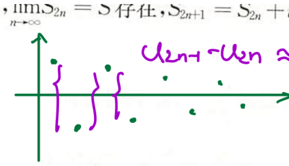
$\sum \frac{u_n}{n}$ c.

$u_n \geq 0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 均收敛,

$\cdots + (u_{2n-1} + u_{2n})$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ 存在, $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} =$

$S + \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = S$,即可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.)

⑧ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 不定.



$u_{2n-1} - u_{2n} \approx 2$ 倍绝对值.

(四) 收敛域、收敛半径.

函数项：$\sum a_n(x-x_0)^n$，$x=x_0$ 时为 0.（无论 a_n 为何）.

① a_n 收敛得好，$|x-x_0|$ 可以较大，也能保证 $\sum a_n(x-x_0)^n$ c.

② 反之，$|x-x_0|$ 只能较小.

收敛半径 $\rho = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$

例 16.14 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^{2n+1}$ 的收敛域.

缺项：不要直接计算 a_n 的比值.

【解】 此级数缺少偶次幂的项. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{2n+3}}{3^n x^{2n+1}}\right| = 3x^2,$$

利用整体法、比值判别法.

所以当 $3x^2<1$ 即 $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，级数绝对收敛；当 $3x^2>1$ 即 $|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，级数发散. 故级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，级数成为 $\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}$，显然发散.

因此，幂级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

一阶常微分方程

(一) 恰当方程

形如 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \iff \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $Q \neq 0$.

且 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\rightsquigarrow$ 恰当方程 (exact equation)

问题: 一般的 $Pdx + Qdy = 0$ 不能直接积分.

因为 $\int P\,dx$ 中 y 与 x 有关.

但是, 恰当方程可以直接积.

例: 1. $(3x^2-1)dx + (2x+1)dy = 0$

$P = 3x^2 - 1$, $Q = 2x+1$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2$ $\Rightarrow$ 不恰当.

2. $(x+2y)dx + (2x+y)dy = 0$

$\dfrac{\partial(x+2y)}{\partial y} = 2 = \dfrac{\partial(2x+y)}{\partial x}$ $\Rightarrow$ 恰当

直接积: $\int (x+2y)dx + \int (2x+y)dy = C$

$$= \underbrace{\int x\,dx}_{\frac{x^2}{2}} + \underbrace{\int \boxed{2y\,dx}}_{2xy} + \underbrace{\int \boxed{2x\,dy}}_{2yx} + \underbrace{\int y\,dy}_{\frac{y^2}{2}}$$

全微分

$\Phi(x,y)$ 的全微分 $= \boxed{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}dy}$

原理 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

$\Rightarrow \int P(x,y)dx+\int Q(x,y)dy=C$

比较：希望寻找 $\Phi(x,y)$，使得 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial \Phi}{\partial y}dy=Pdx+Qdy$

$\rightsquigarrow$ 希望 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}=P$，$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=Q$

$\Rightarrow$ 必要条件 $\underline{\frac{\partial P}{\partial y}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\frac{\partial Q}{\partial x}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$

例：3. $(t^2+1)\cos u\cdot du+2t\sin u\cdot dt=0$

$P=(t^2+1)\cos u$，$Q=2t\sin u$

$\frac{\partial P}{\partial t}=2t\cos u$，$\frac{\partial Q}{\partial u}=2t\cos u$ $\Rightarrow$ 恰当

$\Rightarrow \underbrace{\int t^2\cos u\, du}+\underbrace{\int \cos u\, du}_{\sin u}+\underbrace{\int 2t\sin u\cdot dt}=C$

全微分

$t^2\sin u$

$\Rightarrow t^2\sin u+\sin u=C$. 通解.

4. $(ye^x+2e^x+y^2)dx+(e^x+2xy)dy=0$

$P=ye^x+2e^x+y^2$，$Q=e^x+2xy$

$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+2y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x+2y$. $\Rightarrow$ 恰当.

$\underbrace{\int 2e^x dx}_{2e^x}+\int \underbrace{(ye^x+y^2)}dx+\int \underbrace{(e^x+2xy)}dy=0$

$ye^x+y^2x+\cancel{\varphi(y)}=e^xy+xy^2+\cancel{\psi(x)}$

$\Rightarrow 2e^x+xy^2+ye^x=C$. 通解.

5. $xf(x^2+y^2)dx + yf(x^2+y^2)dy = 0$ 　f 连续可微

$$\left.\begin{aligned} P = xf(x^2+y^2) &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2xyf' \\ Q = yf(x^2+y^2) &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xyf' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{恰当.}$$

$$\int \underbrace{xf(x^2+y^2)}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}dx + \int \underbrace{yf(x^2+y^2)}_{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}dy = C$$

$\Rightarrow \Phi = (\int f)(x^2+y^2) = F(x^2+y^2)$

$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(t+y^2)dt$ 　　　　$F' = f.$

(二) 可分离 x 和 y

如果 dx 侧：只有 x，dy 侧：只有 y $\Rightarrow$ 可直接积.

例：1. $y' = \frac{x^2}{y}$ 　$(y \neq 0)$

$\Rightarrow ydy = x^2dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$

2. $\frac{dy}{dx} + y^2\sin x = 0$

① $y \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} + \sin x \cdot dx = 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{y} - \cos x + C = 0$ 　通解

② $y = 0$ 也是解. 　　特解

3. $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2 = (1+x) + y^2(1+x) = (1+y^2)(1+x)$

$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = (1+x)dx$

$\Rightarrow \arctan y = x + \frac{x^2}{2} + C$

初值问题：

1. $x\,dx + y e^{-x} dy = 0$ ，$y(0)=1$

$xe^{x} dx + y\,dy = 0$

$\Rightarrow (x-1)e^{x} + \frac{y^2}{2} = C$ 通解.

$\int xe^{x}dx = \int x\,de^{x} = xe^{x} - \int e^{x}dx$

$= xe^{x} - e^{x}$

代入 $y(0)=1$

$\Rightarrow -1 + \frac{1}{2} = C = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (x-1)e^{x} + \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}$ 特解

2. $\frac{dy}{dx} = 1-y^2$

① $\frac{dy}{1-y^2} = dx$ ，$y \neq \pm 1$

$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{dy}{(1-y)(1+y)} = \int -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy$

$= -\frac{1}{2}\left(\ln|y-1| - \ln|y+1|\right) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \int dx = x + C$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + 2x = C.$

② $y = \pm 1$ 也是解

有理函数积分：$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ ，P，Q多项式.

第一步：将Q因式分解成
- 一些一次式之积. $\xrightarrow{\text{分开}}$ $\ln|\cdots|$
- 一些无实根的二次式.

(三) "线性" 方程

形如 $y' + p(x)y = q(x)$ ⟵ 系数是x的函数.

只有一种标准解法：凑积分因子：$e^{\int p(x)dx}$

$\Rightarrow e^{\int p}y' + e^{\int p}py = qe^{\int p}$

$\Rightarrow (e^{\int p}y)' = qe^{\int p}$ 可直接积分（关于 x）.

关于 x 的导数

$\Rightarrow e^{\int p(x)dx}y = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$

$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\cdot e^{-\int p(x)dx}$.

例：1. $y' + 2y = xe^{-x}$，凑 $e^{\int 2\cdot dx} = e^{2x}$

$\Rightarrow e^{2x}(y'+2y) = xe^{-x}\cdot e^{2x}$

$\Rightarrow (e^{2x}\cdot y)' = xe^{x}$

$\Rightarrow e^{2x}\cdot y = \int xe^{x}dx + C$

$\Rightarrow y = Ce^{-2x} + (x-1)e^{-x}$

2. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sin x$，$y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

$\Rightarrow y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\sin x}{x}$

$\Rightarrow (e^{\int\frac{2}{x}}y)' = \dfrac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx} = x\sin x$

$\Rightarrow x^2y = \int x\sin x\,dx + C = -x\cos x + \sin x + C$

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{x}\cos x + \dfrac{\sin x}{x^2} + \dfrac{C}{x^2}\ (x\neq 0)$

（四）"拟线性"方程

可通过某种代换化为线性.

例：1. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2y}$ 关于y的二次降一次：代 $z=y^2$.

令 $y^2=z$. $\frac{dz}{dx}=\frac{dy^2}{dx}=2yy'=2y\cdot\frac{x^2+y^2}{2y}=x^2+z$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=z+x^2$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^2}$ ← −1次．需要1次．取倒数

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{x+y^2}{y}=\frac{1}{y}x+y$ 关于x线性.

3. $3xy^2\frac{dy}{dx}+y^3+x^3=0$. 令 $z=y^3$.

$\frac{dz}{dx}=3y^2\cdot y'=-\frac{y^3}{x}-x^2=-\frac{z}{x}-x^2$. 关于z线性.

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}+x\tan y$ 将z代为y的三角函数

令 $z=\sin y$,

$\frac{dz}{dx}=\frac{d\sin y}{dx}=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=1+x\sin y=1+xz$ 关于z线性.

或 $z=\cos y$,

$\frac{dz}{dx}=\frac{d\cos y}{dx}=-\sin y\cdot\frac{dy}{dx}=-\tan y-x\cdot\frac{\sin^2 y}{\cos y}$ (x).

(三) $y'=f(ax+by+c)$

例：1. $y'=\frac{2y-x}{2x-y}$ 上下齐次

令 $y=ux=u(x)\cdot x$ (u不是常数，u是关于x的函数！)

$$\Rightarrow y' = u'x + u = \frac{du}{dx}\cdot x + u = \frac{2ux - x}{2x - ux} = \frac{2u-1}{2-u}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{2u-1-2u+u^2}{2-u} = \frac{u^2-1}{2-u}$$

$$\Rightarrow \frac{2-u}{u^2-1}\,du = \frac{dx}{x}$$ ← 可分离变量.

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| - \frac{1}{2}\ln|u^2-1| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2-x^2}{x^2}\right| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \Big/ \frac{y^2-x^2}{x^2}\right| = \ln x^2 + C$$

2. $y' = \dfrac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$ 直接令 $y=ux$ 会无效.

(会丢掉常数项)

方法: $\begin{cases} 2y - x + 5 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

令 $u = x - 1$, $v = y + 2$.

$$\Rightarrow y' = \frac{2v - u}{2u - v} = \frac{dv}{du}$$

练习: 将方程先处理成标准的形式.

1. $y' = \cos(x-y)$

$u = x - y$. $\dfrac{du}{dx} = 1 - y' = 1 - \cos u$

$$\Rightarrow \frac{du}{1-\cos u} = dx \quad (\cos u \neq 1)$$ ← 验证: $\cos u = 1$ 确实是解

$$\Rightarrow \frac{d\left(\frac{u}{2}\right)}{\sin^2\frac{u}{2}} = dx \quad \left(\cos u = 1 - 2\sin^2\frac{u}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -\cot\frac{u}{2} = x + C$$

$$\Rightarrow \cot\frac{x-y}{2} + x + C = 0$$ 通解

2. $(3uv+v^2)\,du + (u^2+uv)\,dv = 0$

$$\underbrace{(3uv+v^2)}_{\downarrow \frac{\partial}{\partial v}\ :\ 3u+2v}\,du + \underbrace{(u^2+uv)}_{\downarrow \frac{\partial}{\partial u}\ :\ 2u+v}\,dv = 0$$

同乘 u $\Rightarrow (3u^2v+uv^2)\,du + (u^3+u^2v)\,dv = 0$

$$\left.\begin{aligned} P = 3u^2v+uv^2 &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial v} = 3u^2+2uv \\ Q = u^3+u^2v &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial u} = 3u^2+2uv. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{恰当}$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{(3u^2v+uv^2)}\,du + \int \underbrace{(u^3+u^2v)}\,dv = C$$

$$u^3v + \frac{1}{2}u^2v^2 + \cancel{\varphi(v)} = u^3v + \frac{1}{2}u^2v^2 + \cancel{\varphi(u)}$$

$\Rightarrow u^3v + \frac{1}{2}u^2v^2 = C$. 通解.

3. $\dfrac{y\,dy}{x\,dx} = \dfrac{4y^2-2x^2}{x^2+y^2+3}$

LHS $= \dfrac{dy^2}{dx^2}$. 令 $u=y^2$, $v=x^2$.

$\Rightarrow \dfrac{du}{dv} = \dfrac{4u-2v}{u+v+3}$

令 $\begin{cases} 4u-2v=0 \\ u+v+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=-2 \end{cases}$. 令 $\begin{cases} m=u+1 \\ n=v+2 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{dm}{dn} = \dfrac{4m-2n}{m+n}$, 令 $m=zn$, z 与 n 有关

$\Rightarrow m' = z'\cdot n + z = \dfrac{4zn-2n}{zn+n} = \dfrac{4z-2}{z+1}$

$\Rightarrow n\cdot\dfrac{dz}{dn} = \dfrac{4z-2-z^2-z}{z+1} = \dfrac{-z^2+3z-2}{z+1}$

$d(z^2-3z+2) = (2z-3)\,dz$

$\Rightarrow \dfrac{z+1}{-(z^2-3z+2)}\,dz = \dfrac{1}{n}\,dn \rightsquigarrow \ln|n| + C = -\displaystyle\int \dfrac{z+1}{z^2-3z+2}\,dz$

$\quad\ \ \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{(2z-3)+5}{z^2-3z+2}\,dz$

$\dfrac{z+1}{-(z-2)(z-1)}\,dz$

$\quad\ \rightsquigarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{d(z^2-3z+2)}{z^2-3z+2} - \dfrac{5}{2}\displaystyle\int \dfrac{dz}{(z-1)(z-2)}$

$$-\int\left(\frac{3}{z-2}-\frac{2}{z-1}\right)dz$$

$$=\ln\frac{(z-1)^2}{|2-z|^3}=\ln|n|+C$$

$$\begin{cases} n=v+2=x^2+2 \\ z=\dfrac{m}{n}=\dfrac{u+1}{v+2}=\dfrac{y^2+1}{x^2+2} \end{cases}$$

$$\ln(x^2+2)+C=\ln(\cdots).$$

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{y\,dy}{x\,dx}=\dfrac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$. 令 $u=y^2,\ v=x^2$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dv}=\dfrac{2v+3u-7}{3v+2u-8}$. 设 $\begin{cases}2v+3u-7=0\\3v+2u-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=1\\v=2\end{cases}$

令 $m=u-1,\ n=v-2$. 则

$\dfrac{dm}{dn}=\dfrac{2n+3m}{2m+3n}$. 令 $m=zn$.

$\Rightarrow$ 分离变量为 $\left(\dfrac{3+2z}{2-2z^2}\right)dz=\dfrac{dn}{n}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4}\ln\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|-\dfrac{1}{2}\ln|1-z^2|=\ln n+C$

$\Rightarrow (x^2-y^2-1)^5=C(x^2+y^2-3).$

一阶微分方程的求解

- 能写成 $y'=f(x)\cdot g(y)$ ← 分离变量
- 能写成 $y'=f(ax+by+c)$
- 能写成 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$
- 能写成 $\frac{1}{y'}=f\left(\frac{x}{y}\right)$

拟线性.

- 能写成 $y'+p(x)y=q(x)$ ← 线性. 凑 $e^{\int p(x)dx}$
- 能写成 $y'+p(x)y=q(x)y^n$ $(n\neq0,1)$(仅数学一) ← 拟线性

特别说明：伯努利方程

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \quad (m \neq 0, 1)$$

① $y \neq 0$ 时，$\frac{y'}{y^m} + p(x)y^{1-m} = q(x)$.

令 $z = y^{1-m} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-m)y^{-m} \cdot \frac{dy}{dx}$

$= (1-n)q(x) - (1-n)p(x)z$ 关于z线性.

② $y=0$ 也是方程的特解

高阶常微分方程

第一类：求齐次通解

例：$y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$ ← 齐次

⟶ 找特征方程

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 10 = 0$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda^2 - 8\lambda + 5\lambda + 10$$

$$= \lambda^2(\lambda+2) - 4\lambda(\lambda+2) + 5(\lambda+2)$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 5)(\lambda+2)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2+i,\ \lambda_3 = 2-i$

$\Rightarrow$ 所求通解

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + C_3e^{\lambda_3 x}$$

$$= C_1e^{-2x} + C_2e^{(2+i)x} + C_3e^{(2-i)x}$$

写成含 $\cos x$, $\sin x$ 的式子

利用 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉方程)

$\cos x + i\sin x$ $\quad$ $\cos x - i\sin x$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + e^{2x}(C_2 e^{ix} + C_3 e^{-ix})$$

$$= C_1 e^{-2x} + e^{2x}(\tilde{C}_2 \cos x + \tilde{C}_3 \sin x) \quad 通解.$$

总结：① 写出特征方程，解特征值 λ_1 (k_1重)，…，λ_n (k_n重) ($\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 互异)

② 通解 $y = \underbrace{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x \cdot e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{k_1} \cdot x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}}_{\lambda_1 部分} + \underbrace{\cdots}_{\lambda_2, \cdots, \lambda_n 部分}$.

e.g. $\lambda_1 = \lambda_2 \rightsquigarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightsquigarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

第二类：非齐次通解

非齐次通解 = 齐次通解 + 特解 $\quad$ (找特解是主要任务)

例：$2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

① 先解齐次 $2y'' - 4y' - 6y = 0$

特征方程 $2\lambda^2 - 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

② $e^{\alpha x}(a\sin x + b\cos x)$ 或 $e^{\alpha x} \cdot P(x)$ (P 多项式)

判断其中 α 是 n 重左式的特征根.

$\rightsquigarrow$ 若为 n 重，则特解形如 $A \cdot x^n \cdot e^{\alpha x}$ (A 常数)

e^{2x} 中，2 在左侧为 0 重 $\rightsquigarrow$ 特解 $y = Ae^{2x}$.

③ 解出特解中的待定系数.

$2y'' = 2 \cdot (2Ae^{2x})' = 8A \cdot e^{2x}$

$-4y' = -4 \cdot 2Ae^{2x} = -8Ae^{2x}$

$\Rightarrow -6y = -6Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

④ 通解 = 齐次通解 + 特解

$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{2x}$.

总结：特解的形式

(1) 右式 $= e^{\alpha x}\cdot P(x)$，P为多项式

特解 $= Ax^n\cdot e^{\alpha x}\cdot Q(x)$ ，$n=\alpha$在左侧式子中的重数.

$Q(x)$：首一多项式（最高次项系数为1），次数与P相同.

e.g. $P=2x^3+5x^2+3$ ， $Q=x^3+mx^2+nx+r$

或 特解 $= x^n\cdot e^{\alpha x}\cdot Q(x)$. $Q(x)$次数与$P(x)$相同.

(2) 右式 $= e^{\alpha x}(m\sin\beta x+n\cos\beta x)$

特解 $= x^n\cdot e^{\alpha x}(a\sin\beta x+b\cos\beta x)$ ， $n=\alpha\pm\beta i$在左侧式子中的重数

右式分多项，

习题：1. $y''+2y'=3+4\sin 2x$ ← 每一项分别找特解，再相加.

齐次方程 $y''+2y'=0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda=(\lambda+2)\lambda=0$ ，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-2$.

$\Rightarrow \tilde{y}=C_1+C_2e^{-2x}$ 为通解.

① 3对应特解

$3=3\cdot e^{0x}$，0为1重根.

⇝ 特解 $Ax^1\cdot e^{0x}=Ax$ （$P(x)=3$，$Q(x)=A$）

② $4\sin 2x$对应特解

$4\sin 2x=e^{0x}(4\sin 2x)$. $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ 不是解 $\Rightarrow n=0$

⇝ 特解 $x^0\cdot e^{0x}\cdot(m\sin 2x+n\cos 2x)=m\sin 2x+n\cos 2x$

①② ⇒ 特解 $y=Ax+m\sin 2x+n\cos 2x$

待定系数法 $A=3/2$，$m=n=-1/2$.

通解 $y=C_1+C_2e^{-2x}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

2. $y^{(4)}+2y''+y=\sin x$

特征方程 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=i$ ，$\lambda_3=\lambda_4=-i$.

齐次通解 $\tilde{y} = C_1e^{ix} + C_2xe^{ix} + C_3e^{-ix} + C_4xe^{-ix}$

右式 $= \sin x = e^{0x} \cdot \sin x$，$\alpha \pm \beta i = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$

i和$-i$均为二重特征根

$\Rightarrow$ 特解 $= x^2 \cdot e^{ix}(A\sin x + B\cos x) + x^2 \cdot e^{-ix}(C\sin x + D\cos x)$

……

3. (yyh) $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{3x}\cos x$.

特征方程 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$\rightsquigarrow$ 齐次通解 $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$

① 关于 xe^{3x} 的特解

$\alpha = 3$ 为二重根 $\Rightarrow$ 特解 $= x^2 \cdot e^{3x} \cdot (mx+n) = (mx^3 + nx^2)e^{3x}$

$\Rightarrow y' = 3e^{3x}(mx^3 + nx^2) + (3mx^2 + 2nx) \cdot e^{3x} = e^{3x}(3mx^3 + (3n+3m)x^2 + 2nx)$

$y'' = 3e^{3x}(3mx^3 + (3n+3m)x^2 + 2nx) + e^{3x}(9mx^2 + (6m+6n)x + 2n)$

$\rightsquigarrow y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(9mx^3 + (18m+9n)x^2 + (6m+12n)x + 2n)$

$-6e^{3x}(3mx^3 + (3n+3m)x^2 + 2nx) + 9e^{3x}(mx^3 + nx^2)$

$= 6mxe^{3x}$ = 右式第一部分 $= xe^{3x}$

$\Rightarrow n = 0,\ m = 1/6$.

$\rightsquigarrow$ 特解 $= \frac{1}{6}x^3e^{3x}$.

② 关于 $e^{3x}\cos x$ 的特解

$\alpha \pm \beta i = 3 \pm i$ 不是根

$\Rightarrow$ 特解 $= x^0 \cdot e^{3x} \cdot (A\sin x + B\cos x) = Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x$

$\Rightarrow y'' - 6y' + 9y = 9(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x) + 6(-Ae^{3x}\sin x + Be^{3x}\cos x)$

$-(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x) - 6[3(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x) + (-Ae^{3x}\sin x$

$+ Be^{3x}\cos x)] + 9(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x)$

$= (9A + 6B - A - 18A - 6B + 9A)e^{3x}\cos x$

$$+(9B-6A-B-18B+6A+9B)e^{3x}\sin x$$

$$=-Ae^{3x}\cos x-Be^{3x}\sin x$$

$$=\text{右式第二项}=e^{3x}\cos x \Rightarrow A=-1,\ B=0.$$

最终通解 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{1}{6}x^3e^{3x}-e^{3x}\cos x.$

变形：欧拉方程 (不是 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$)

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x\cdot y'+a_n\cdot y=0$$

只须换一次元，转化为常规形式

换法：

3. 能写成 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$(仅数学一)

① 当 $x>0$ 时，令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2},$$

方程化为
$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t),$$

即可求解(别忘了用 $t=\ln x$ 回代成 x 的函数).

② 当 $x<0$ 时，令 $x=-e^t$，同理可得.

例：$x^2y''+5xy'+13y=0\quad(x>0)$

令 $x=e^t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y'\cdot e^t=xy'$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d(xy')}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot y'+\left(\frac{dy'}{dt}\right)\cdot x=xy'+x^2y''$$

$$\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y''\cdot x$$

⇝ 原式左侧 $=\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+13y=0$

特征方程 $\lambda^2+4\lambda+13=0 \Rightarrow \lambda_1=-2+3i,\ \lambda_2=-2-3i$

$\Rightarrow$ 通解 $y=C_1e^{(-2+3i)t}+C_2e^{(-2-3i)t}=C_1x^{-2+3i}+C_2x^{-2-3i}$

$$=e^{-2t}(C_1(\cos3t+i\sin3t)+C_2(\cos3t-i\sin3t))$$

$$=e^{-2t}(\tilde{C}_1\cos3t+\tilde{C}_2\sin3t)$$

$$=\frac{1}{x^2}(\tilde{C}_1\cos(\ln x^3)+\tilde{C}_2\sin(\ln x^3))$$

二 二阶可降阶微分方程的求解(仅数学一、数学二)

若是“y''”,则

1. 能写成 $y''=f(x,y')$ 缺y

① 缺 y,令 $y'=p$,$y''=p'\Rightarrow$ 原方程变为一阶方程 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$;

② 若求得其解为 $p=\varphi(x,C_1)$,即 $y'=\varphi(x,C_1)$,则原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

见例 15.9.

2. 能写成 $y''=f(y,y')$ 缺x

① 缺 x,令 $y'=p$,$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p$,则原方程变为一阶方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$;

② 若求得其解为 $p=\varphi(y,C_1)$,则由 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$,分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=\mathrm{d}x$;

③ 两边积分得 $\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$,即可求得原方程的通解.

差分方程

差分定义：离散版微分

若 $f(x)=y$ 只在 $x_0, x_1, \cdots$ 上定义.

x_k 变到 x_{k+1} 时，$y=f(x)$ 的变化量 $\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$

$\Rightarrow \Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ ，$y_k = f(x_k)$ 一阶差分.

完整版本 $\Delta y = \min\limits_{\Delta k>0} \dfrac{y_{k+\Delta k} - y_k}{\Delta k} = y_{k+1} - y_k \quad (\Delta k = 1)$，

微分：$y' = \boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0}} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

本质是让 Δx 无穷小（以直代曲误差无穷小）.

二阶差分：$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$.

n阶差分：$\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$.

差分运算法则.

(1) $\Delta C = 0$ （C 常数）

(2) $\Delta(C y_k) = C \Delta y_k$

(3) $\Delta(C_1 y_k \pm C_2 z_k) = C_1 \Delta y_k \pm C_2 \Delta z_k$

(4) $\Delta(y_k \cdot z_k) = y_{k+1} \cdot \Delta z_k + z_k \cdot \Delta y_k = y_k \cdot \Delta z_k + z_{k+1} \cdot \Delta y_k$!

(5) $\Delta\left(\dfrac{y_k}{z_k}\right) = \dfrac{z_k \Delta y_k - y_k \Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}} = \dfrac{z_{k+1} \Delta y_k - y_{k+1} \Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}}$.

例：$\Delta^4 y_x - 6 y_{x+2} + 4 y_{x+1} - y_x + 1 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta^4 y_x &= \Delta^3 y_{x+1} - \Delta^3 y_x \\ &= \Delta^2 y_{x+2} - \Delta^2 y_{x+1} - \Delta^2 y_{x+1} + \Delta^2 y_x \\ &= \Delta y_{x+3} - \Delta y_{x+2} - \Delta y_{x+2} + \Delta y_{x+1} - \Delta y_{x+2} + \Delta y_{x+1} + \Delta y_{x+1} - \Delta y_x\end{aligned}$$

$$= \Delta y_{x+3} - 3\Delta y_{x+2} + 3\Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$

$$= y_{x+4} - y_{x+3} - 3(y_{x+3} - y_{x+2}) + 3(y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x)$$

$$= y_{x+4} - 4y_{x+3} + 6y_{x+2} - 4y_{x+1} + y_x$$

$$\Rightarrow \quad \Delta^4 y_x - 6y_{x+2} + 4y_{x+1} - y_x + 1$$

$$= y_{x+4} - 4y_{x+3} + 1 = 0$$

作变换 $u = x+3 \rightsquigarrow y_{u+1} - 4y_u + 1 = 0.$

结论：高阶一定可以化为低阶.

差分方程通解结构.

如果 $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \cdots, y_x^{(n)}$ 是n阶齐次常系数差分方程

$$a_n \Delta^n y_x + a_{n-1} \Delta^{n-1} y_x + \cdots + a_0 y_x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n y_{x+n} + b_{n-1} y_{x+(n-1)} + \cdots + b_1 y_{x+1} + b_0 y_x = 0$$

那么通解为

$$Y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \cdots + C_n y_x^{(n)}.$$

齐次差分方程通解.

① $y_{x+1} + m y_x = 0$

通解 $y_c(x) = C \cdot (-m)^x.$

验证：$y_c(x+1) = (-m) \cdot C \cdot (-m)^x = -m y_c(x).$

② $y_{x+1} + m y_x = f(x)$

找特解，通解 = 特解 + 齐次通解

(i) $f(x)$ 是 n次多项式 $P_n(x)$

$m \neq -1$: $y_x^* = Q_n(x)$ （系数不是 P_n 的系数）

（n次项不会被消掉）

$m=-1$：n次项会被消掉

$$y_x^* = x\cdot Q_n(x) \quad (\text{提一次})$$

原因：设 $Q_n(x) = B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_0$

$$Q_n(x+1) = B_n(x+1)^n + B_{n-1}(x+1)^{n-1} + \cdots + B_0$$

$$= B_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_0 \quad (C_{n-1} \neq B_{n-1})$$

$$\Rightarrow Q_n(x+1) - Q_n(x) = (C_{n-1} - B_{n-1})x^{n-1} + \cdots + C_0 - B_0$$

是一个n-1次多项式

若 $m=-1$，$y_{x+1} + m y_x = y_{x+1} - y_x = n-1$次多项式 $\neq P_n(x)$.

(所以左式必须补一次).

(ii) $f(x) = d^x \cdot P_n(x)$，$d \neq 0$为常数

$m+d\neq 0$，$y_x^* = d^x \cdot Q_n(x)$.

检验：$y_{x+1} = d^{x+1} Q_n(x+1)$

$$\Rightarrow y_{x+1} + m y_x = d\cdot d^x \cdot Q_n(x+1) + m d^x \cdot Q_n(x) = d^x \cdot P_n(x)$$

$$\Rightarrow d\cdot Q_n(x+1) + m\cdot Q_n(x) = P_n(x).$$

(若 $d+m=0$，n次项被消).

$m+d=0$，$y_x^* = x\cdot d^x \cdot Q_n(x)$ (补一次)

(iii) $f(x) = b_1\cos\omega x + b_2 \sin\omega x$ ($\omega\neq 0$，b_1, b_2不同时$=0$)

$$D = \begin{vmatrix} m+\cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & m+\cos\omega \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$y_x^* = \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x, \quad \alpha,\beta\text{待定}.$$

$D=0$，$y_x^* = x(\alpha\cdot\cos\omega x + \beta\sin\omega x)$.

差分方程的例子

Hansen - Samuelson 国民收入分析模型

Y_t - 国民收入，C_t - 消费，I_t - 投资，G_t - 政府支出总额

作为最终差分方程的未知量

$$Y_t = C_t + I_t + G_0$$ 方便起见，$G_t = G_0$ 为常数

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}), \quad \beta > 0.$$

$$Y(0) = Y_0, \quad Y_1 = Y_1$$

$$C_t = \alpha Y_{t-1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\Rightarrow Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta(C_t - C_{t-1}) + G_0$$

$$= \alpha Y_{t-1} + \beta(\alpha Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}) + G_0$$

$$\Rightarrow Y_t - (1+\beta)\alpha Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-2} - G_0 = 0.$$

二阶常系数非齐次差分方程.

换元法和分部积分法

换元法Ⅰ：凑微分法

目的：$\int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x))+C$

其中 F 是 f 的原函数.　（原因：链式法则）

$u'(x)dx = d(u(x)) \Rightarrow \int f(u(x))\,du(x)$

例：幂代换

设 $F'(u)=f(u)$，$\alpha \neq 0$

$$\int f(x^\alpha)x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}\int f(x^\alpha)(\alpha x^{\alpha-1})dx = \frac{1}{\alpha}F(x^\alpha)+C$$

$\alpha=-1$ 时：

$$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}dx = -F\left(\frac{1}{x}\right)+C$$

另：$\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln x)\,d(\ln x) = F(\ln x)+C.$

习题：1. 求 $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \cos\frac{1}{x}+C$

2. 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$　$\frac{1}{x^2}$在哪？

$$= \int \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}d\left(\frac{1}{x}\right) = \int \frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C$$

3. 求 $\int \frac{dx}{x(1+x^n)} = \int \frac{x^{n-1}}{x^n(1+x^n)}dx = \frac{1}{n}\int \frac{dx^n}{x^n(1+x^n)}$

$$= \frac{1}{n}\int \frac{du}{u(1+u)} = \frac{1}{n}\left(\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du\right) = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|+C$$

4. 求 $\int \frac{dx}{x\ln x}$

$u=\ln x$，原式 $=\ln|\ln x|+C.$

与三角代换的关系.

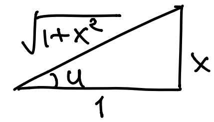
例: $\int (x^2+1)^{-3/2}\,dx$

· 利用 $(\arctan x)' = (1+x^2)^{-1}$

取 $u=\arctan x$ $(x=\tan u)$ $\Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{du}{\sqrt{\tan^2 u+1}} = \int \cos u\, du = \sin u + C$$

$$= \sin(\arctan x)+C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$



· 凑微分法

$$I = \int \frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} \underset{令u=\frac{1}{x}}{=} \int \frac{u^3\cdot \overset{=dx}{\frac{du}{-u^2}}}{(1+u^2)^{3/2}} = -\int \frac{u\,du}{(1+u^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+1)}{(1+u^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^{3/2}} \qquad du^2 = 2u\,du = d(u^2+1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v}}+C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

三角凑微分

(1) $\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(\sin x)\,d\sin x$

(2) $\int f(\cos x)\sin x\,dx = -\int f(\cos x)\,d\cos x$

(3) $\int f(\tan x)\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\tan x)\sec^2 x\,dx = \int f(\tan x)\,d\tan x.$

(4) $\int f(\cot x)\dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int f(\cot x)\csc^2 x\,dx = -\int f(\cot x)\,d\cot x.$

进阶 $\int f(\tan x)\,dx = \int f(\tan x)\cdot\cos^2 x\cdot \overset{d\tan x}{\boxed{\frac{1}{\cos^2 x}dx}}$

$$= \int \frac{f(\tan x)}{1+\tan^2 x}\,d\tan x.$$

$f(u) \rightsquigarrow \dfrac{f(u)}{1+u^2}$

e.g. $I = \int \tan x\,dx$

解一: $I = -\int \dfrac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x|+C$

解二：$I=\int \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} d\tan x = \int \frac{u}{1+u^2} du$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \frac{1}{2}\ln|1+u^2| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\cos^2 x| + C = -\ln|\cos x| + C$$

应用：$\sin^n x$ 和 $\cos^n x$ 的积分.

例1：$I=\int \sin^3 x\, dx$

两种主要方法：

① 分部积分 $I=\int \sin x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx = \int(\cos^2 x-1)\,d\cos x$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$$

② 倍角公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

$$(\sin^3 x = \frac{1}{2}2\sin^2 x\cdot\sin x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}\cdot\underbrace{2\cos 2x\cdot\sin x}_{\text{积化和差}}$$

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x)$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

例2：$I=\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x}$ ← 此类问题一定可以化为有理分式，求不定积分.

• 凑微分，化为有理分式

$$I=\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}$$

$$= \int \frac{du}{u^3(1-u^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{2u\,du}{u^4(1-u^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2(1-v)} \quad (v=u^2)$$

待定系数法：$\frac{1}{v^2(1-v)} = \frac{Av+B}{v^2} + \frac{C}{1-v} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{1-v}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-v} = Av + B + C\cdot\frac{v^2}{1-v}$$

$\cdot$ 令 $v \to 0 \Rightarrow B=1$ $\quad\quad$ $\cdot$ 令 $v \to +\infty \Rightarrow A=C=1$

$\cdot$ 令 $v \to 1 \Rightarrow C=1$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{1-v}\right) dv$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v}{1-v}\right| - \frac{1}{2v} + C = \cdots$$

$\cdot$ 另解：$I = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}dx = \int \frac{dx}{\sin x\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

$$= \int \frac{dx}{\tan x\cdot\cos^2 x} + \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x}$$

$$= \int \frac{d\tan x}{\tan x} + \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x} = \ln|\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

注：还可以

$$I = \int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^3 x\cos x}dx = \int \frac{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{\sin^3 x\cos x}dx$$

$$= \int \tan x\, dx + \int \frac{2}{\tan x}dx + \int \frac{1}{\tan x}\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

$$= \int \tan x\, dx + \int \frac{1}{\tan x}dx + \int \cot x\cdot \boxed{\frac{dx}{\sin^2 x}} \quad = -d\cot x$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\cot^2 x + C.$$

总结：若分子上只有 dx，则可以乘某些东西化为 $du = (\cdots)dx$.

特别部分：$\sin x$、$\cos x$ 二次式积分.

$$I = \int \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\cos x\sin x + C\sin^2 x} \quad (A\neq 0)$$

首先转化为有理分式

$$I = \int \frac{\frac{1}{\sin^2 x}dx}{A\cot^2 x+2B\cot x+C} = -\int \frac{d\cot x}{A\cot^2 x+2B\cot x+C}$$

$$= -\int \frac{dt}{At^2+2Bt+C} = -\frac{1}{A}\int \frac{dt}{(t+\frac{B}{A})^2+\frac{1}{A^2}(AC-B^2)}$$

令 $t_0 = \frac{B}{A}$，$\beta = \frac{1}{A^2}(AC-B^2)$.

① $AC-B^2>0$: $I=-\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\frac{\cot x+t_0}{\sqrt{\beta}}+C$

② $AC-B^2=0$: $I=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\cot x+t_0}+C$

③ $AC-B^2<0$: $I=-\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-\beta}}\ln\left|\frac{\cot x+t_0-\sqrt{-\beta}}{\cot x+t_0+\sqrt{-\beta}}\right|+C$

换元法2：代入法 （换元法1的反向用法）

目的： $\int f(x)dx=\int f(x(t))\,x'(t)dt$

$(dx=d(x(t))=x'(t)dt)$

例： $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 　令 $x=a\tan t$

$\Rightarrow I=\int\frac{dx}{a\sqrt{\tan^2t+1}}=\frac{1}{a}\cdot\int\frac{\frac{a\,dt}{\cos^2t}}{\frac{1}{\cos t}}=\int\frac{dt}{\cos t}$

$dx=\frac{a}{\cos^2t}dt$, $1+\tan^2t=\frac{1}{\cos^2t}$

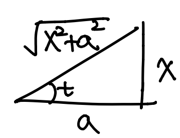
查积分表 ?

$\Rightarrow I=\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. 恢复为含x的式子.

$\tan\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}$ （恢复常用式子）

$\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1+\sin t}{\cos t}$

$\leadsto I=\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C$ 　$\left(\tan t=\frac{x}{a}\right)$



$=\ln\left|\frac{1+x/\sqrt{x^2+a^2}}{a/\sqrt{x^2+a^2}}\right|+C$

$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C$

补充： $\int\frac{dt}{\cos t}=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2t}=\int\frac{d\sin t}{1-\sin^2t}$

$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right|+C$ 　$=\frac{1-\sin^2t}{(1+\sin t)^2}=\frac{\cos^2t}{(1+\sin t)^2}$

$=\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C$

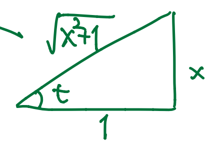
例: $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ （之前：同乘 x）

令 $x=\tan t$ （去根号）

$$\Rightarrow I=\int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}\cdot dt}{\tan t\cdot \frac{1}{\cos t}}=\int \frac{dt}{\sin t}$$ ← 比较上方"补充"

$$=\int \frac{\sin t\, dt}{1-\cos^2 t}=-\int \frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right|+C$$



$$=\ln\left|\frac{x/\sqrt{x^2+1}}{1+1/\sqrt{x^2+1}}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C.$$

例: $I=\int \frac{dx}{x(1+x^n)}$ （之前：上下同乘 x^{n-1}）

令 $x^n=t$ （即 $x=t^{1/n}$）. 这样有 $dt=nx^{n-1}dx$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\frac{1}{n}t^{1/n-1}dt}{t^{1/n}(1+t)}=\frac{1}{n}\int\frac{dt}{t(1+t)}$$

$$=\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$$

例: $I=\int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

令 $x=\tan t$, 则 $I=\int \cos t\, dt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

例: $I=\int \sin^3 x\, dx$,

令 $t=\sin x \Rightarrow I=\int t^3\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}d(t^2)$. 令 $v=t^2$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{v\,dv}{\sqrt{1-v}}=\frac{1}{2}\int\frac{1-(1-v)}{\sqrt{1-v}}dv=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-v}}-\sqrt{1-v}\right)d(1-v)$$

$(1-v)^{-1/2}$

$$=-(1-v)^{1/2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-v)^{3/2}+C$$

其中 $1-u = 1-t^2 = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$

$\Rightarrow I = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

分部积分法.

公式 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.（没有C）.

例：有些积分不分部无法处理

$$I = \int x \cdot e^x dx$$

尝试：换元法．令 $e^x = t$. $dx = d(\ln t) = \frac{1}{t}dt$

$$\Rightarrow I = \int t \cdot \ln t \cdot \frac{1}{t} dt = \int \ln t\, dt$$

（$\ln t$ 的原函数：$(t\ln t)' = \ln t + 1 \Rightarrow (t\ln t - t)' = \ln t$）

无法避开分部.

另法：$x\,dx = d(\frac{x^2}{2})$

无法处理

$$I = \int e^x d(\tfrac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2}e^x - \underbrace{\int \frac{x^2}{2} d(e^x)}$$

$\rightsquigarrow \int x^2 e^x dx$，次数反而升高.

正解：$I = \int x\, d(e^x) = xe^x - \int e^x dx$

$$= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Upshot 分部积分可以提高或降低某项次数来求积分.

用分部积分积 $\ln t$：

$$I = \int \ln t \cdot dt = t\ln t - \int t\, d(\ln t)$$

$$= t\ln t - \int 1 \cdot dt = t\ln t - t.$$

例：$I = \int x \sin x\, dx$

$$= \int x\, d(-\cos x) = -x\cos x - \int (-\cos x) dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

例：$I=\int x\ln^2 x\,dx$ ← 核心：用 upshot 将 $\ln x$ 次数 $2\to1\to0$.

招到 d 后面的项 → 次数在升.

另一项 → 次数在降.

$$I=\frac{1}{2}\int \ln^2 x\,d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln^2 x-\int\frac{x^2}{2}d(\ln^2 x)$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln x\,dx \quad \text{1次}$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\left(\int \ln x\,d\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}d(\ln x)\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

有时看似无法直接下手（只给一个函数）

例：$I=\int \arctan x\,dx$

$$=x\arctan x-\int x\,d(\arctan x)$$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=x\arctan x-\int\frac{1}{1+x^2}d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

最麻烦的一种：循环现象.

例：$I=\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$ 不断计算，回到自己. 解方程.

$$=\frac{1}{a}\int \sin bx\cdot d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{1}{a}\int e^{ax}d\sin bx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\boxed{\int e^{ax}\cos bx\,dx}$$

同理，$J=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\boxed{\int e^{ax}\sin bx\,dx}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx$$

$$\Rightarrow I = \frac{a^2}{a^2+b^2}e^{ax}\left(\frac{1}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}\cos bx\right) + C$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

同理 $J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos x + b\sin x) + C$.

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

习题: 1. $I = \int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$= -\cot x\ln\cos x + \int \cot x\, d(\ln\cos x)$$

$$= -\cot x\ln\cos x + \int(-1)\cdot dx$$

$$= -\cot x\ln\cos x - x + C.$$

2. $I = \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\,d\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

原则：使分子也出现 a^2-x^2

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \underbrace{\boxed{\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx}}_{I}$$

$$\int\frac{a^2\,d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = a^2\arcsin\frac{x}{a}. \quad a\,dx = a^2\,d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

例: $I_n = \int\sin^n x\,dx$ 降次

$$= \int\sin^{n-1}x\,d(-\cos x) = -\cos x\sin^{n-1}x + \int\cos x\,d(\sin^{n-1}x)$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x + \int\cos x\,(n-1)\cdot\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x + (n-1)\int\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\sin^{n-2}x\,dx$$

$$\Rightarrow I_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \left(1-\frac{1}{n}\right)I_{n-2}.$$

例：$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$　　原则：要使dx前有东西.

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x}dx = I_{n-2} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx$$

$$= I_{n-2} + \int \cos x \, d\left(\frac{\sin^{1-n}x}{1-n}\right)$$

$$= I_{n-2} + \cos x \cdot \frac{\sin^{1-n}x}{1-n} - \int \frac{\sin^{1-n}x}{1-n}d(\cos x)$$

$$= I_{n-2} + \cos x\frac{\sin^{1-n}x}{1-n} + \frac{1}{1-n}\underbrace{\boxed{\int \sin^{2-n}x\,dx}}_{I_{n-2}}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{1-n}\sin^{1-n}x\cos x + \frac{2-n}{1-n}I_{n-2}.$$

脑筋急转弯

用凑微分法

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2\sin x\,d\sin x = \sin^2 x + C \leftarrow C_1$$

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2\cos x\,d\cos x = -\cos^2 x + C \leftarrow C_2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \underset{\substack{\uparrow\\ C_1}}{C} = -\cos^2 x + \underset{\substack{\uparrow\\ C_2}}{C} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 0. \quad (\times)$$

有理函数的积分

主要结论

① 多项式在实数域可分解为不高于2次因式的乘积.

⇓ （即：任何高于2次的式子一定能被继续分解）.

② 真分式（分母次数比分子高）

一定可以分解为两种简单分式之线性组合

$$\frac{C}{(x-a)^k}\ (k\geq 1),\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (n\geq 1)$$

（分解为二者的方式是唯一）

③ 非真分式可以化为真分式

e.g. $$\frac{x^2}{1-x}=\frac{x^2-1+1}{1-x}=\underset{\substack{\text{多项式}\\(\text{可直接积})}}{-(1+x)}+\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{真分式}}$$

例: $$I=\int\frac{x^2}{1+x}dx=\int\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$
$$=\int(x-1)dx+\int\frac{1}{1+x}dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|+C.$$

分母全为一次

例: $$I=\int\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)^2}dx$$

想 $\frac{C}{(x-a)^k}$，对于 $x+1$: $k=1$

对于 $2x+1$: $k=1,2$.

$$=\int\left(\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{2x+1}+\frac{C_3}{(2x+1)^2}\right)dx$$

待定系数法：①展开，比较各幂次系数

②利用极限.

同乘最高次

(i) 同乘 $x+1$，令 $x\to -1$

⇝ 右式 $=C_1$，左式 = 将 $x=-1$ 代入 $\frac{2x^2+3x+2}{(2x+1)^2}=1\Rightarrow C_1=1$

(ii) 同乘 $(2x+1)^2$，令 $x\to -1/2$.

$$\left.\begin{aligned}&⇝\ \text{左式}=\left.\frac{2x^2+3x+2}{x+1}\right|_{x=-1/2}=\frac{\frac12-\frac32+2}{\frac12}=2\\&\text{右式}=C_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow C_3=2.$$

(iii) 最后处理非最高次项（随缘）

令 $x=$ 特殊值 或 令 $x\to\pm\infty$.

$\rightsquigarrow$ 令 $x=0$，左式 $=2$，右式 $=C_1+C_2+C_3 \Rightarrow C_2=-1$

或 同乘 x，令 $x\to+\infty$，$\frac{1}{2}=C_1+\frac{1}{2}C_2 \Rightarrow C_2=-1$.

总之，$I=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{2x+1}+\frac{2}{(2x+1)^2}\right)dx$

$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{2x+1}+C.$

分母有二次不可约式

例：$I=\int\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}dx$

分解：$\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{C_1}{x-1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}$

待定系数法：(i) 同乘 $x-1$，令 $x\to1 \Rightarrow C_1=-1$.

(ii) 问题：二次式无根。

先相减，再代入复根
会便于计算。

移项相减：$\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}+\frac{1}{x-1}$

$=\frac{-5x^2-4+(x^2+2)^2}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{x^4-x^2}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}$

$\Rightarrow \frac{M_1x+N_1}{x^2+2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}=\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}$

同乘 $(x^2+2)^2$，令 $x\to i\sqrt{2}$

$\Rightarrow M_2\cdot i\sqrt{2}+N_2=-2\cdot(i\sqrt{2}+1)=-2\sqrt{2}i-2$

$\Rightarrow M_2=N_2=-2$ （一次求两个）

(iii) 再减一次

$\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}+\frac{2x+2}{(x^2+2)^2}=\frac{x^3+x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}=\frac{x(x^2+2)+(x^2+2)}{(x^2+2)^2}=\frac{x+1}{x^2+2}$

$\Rightarrow M_1=N_1=1.$

总之，$I=\int\left(\frac{-1}{x-1}-\frac{2x-2}{x^2+2}+\frac{x+1}{(x^2+2)^2}\right)dx$

$$= -\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \int \frac{x+1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

其中 $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$

$$= \frac{-1}{2(x^2+2)} + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

先求 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2}$，再用分部积分升次数

$$\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x}{x^2+2} + \int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{x^2+2} + 2\int \frac{dx}{x^2+2} - 4\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

最终，$\displaystyle I = -\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2(x^2+2)}$

$$+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

下一步目标：$\displaystyle I_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

x^2+px+q 不可约，$\Delta = p^2-4q<0$.

⇝ 配方：$(x-x_0)^2+a^2 = x^2+px+q$，$dx = d(x-x_0)$

原式转化为 $\displaystyle I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(a>0)$.

计算 I_n 的两种方法.

(一) 递推法，分部降次

乘1后作分部积分.

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int x\,(1-n)\cdot(x^2+a^2)^{-n}\cdot 2x\cdot dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

分子要出现分母的形式

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)\cdot a^2 I_n.$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

不加C.

回顾 先猜形式，再待定系数

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax}{x^2+2} + \lambda \int \frac{dx}{x^2+2}$$

两边求导得到 $\frac{1}{(x^2+2)^2} = \frac{A(x^2+2)-2x\cdot Ax}{(x^2+2)^2} + \lambda\cdot\frac{1}{x^2+2}$

$$= \frac{A}{x^2+2} - \frac{2Ax^2}{(x^2+2)^2} + \frac{\lambda}{x^2+2}$$

$$= \frac{(A+\lambda)(x^2+2)-2Ax^2}{(x^2+2)^2}$$

$\Rightarrow \lambda - A = 0,\ 2(A+\lambda)=1 \Rightarrow \lambda = A = \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2}$.

$$= \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt2}\arctan\frac{x}{\sqrt2} + C$$

(二) 三角代换法.

在 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 中，令 $x = a\tan t$

则 $dx = a\sec^2 t\,dt$.

递推公式求解

$\Rightarrow I_n = \int \frac{a\cdot\sec^2 t\,dt}{a^{2n}\cdot\sec^{2n} t} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2} t\,dt$

应用: $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt2}\int \cos^2 t\,dt$

一个难算的不定积分

例: $I = \int \frac{dx}{1+x^4}$

解法一：分母因式分解（高于2次不可分）

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1)-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt2 x)^2$$

$$= (x^2+\sqrt2 x+1)(x^2-\sqrt2 x+1).$$

$\Rightarrow$ 部分因式分解

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+\sqrt2x+1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2-\sqrt2x+1}.$$

待定系数找 M_1, N_1, M_2, N_2：直接代入 x 值

zsy 是憨包

令 $x=0$，左式 $=1$，右式 $=N_1+N_2$

同乘 x，令 $x\to+\infty$，左式 $=0$，右式 $=M_1+M_2$

令 $x=i$，左式 $=\frac{1}{2}$，右式 $=\frac{M_1 i+N_1}{\sqrt{2}i}+\frac{M_2 i+N_2}{-\sqrt{2}i}=\frac{(M_1-M_2)i+(N_1-N_2)}{\sqrt{2}i}$

$\Rightarrow M_1-M_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\ N_1-N_2=0.$

$\Rightarrow N_1=N_2=\frac{1}{2},\ M_1=\frac{\sqrt{2}}{4},\ M_2=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$

$$\rightsquigarrow I=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C.$$

解法二：配凑法

$$I=\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$$

记忆：$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

有理三角函数积分

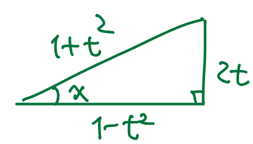
形如 $I=\int R(\cos x,\sin x)\,dx$，R分子分母均为二元多项式

核心：万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$.

目的：将其转化为有理积分 (三角是假的).

万能代换有效的原因：

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$



$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx=d(2\arctan t)=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$\Rightarrow\ I=\int R(\cos x,\sin x)\,dx$$
$$=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

例：$I=\int\frac{dx}{\sin x}$ （用万能公式）

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$I=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

另法：同乘 $\sin x$

或利用半角公式：

$$I=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

例：(泊松积分) $I=\int\frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ $(0\le r<1)$

万能代换 $t=\tan\frac{\theta}{2}$.

$$I=\int \frac{1}{1-2r\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=\int \frac{2dt}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(1-t^2)}$$

$$=\int \frac{2dt}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}=\frac{2}{(1+r)^2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{(1+r)^2}\cdot\frac{1+r}{1-r}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C$$

$$=\frac{2}{1-r^2}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\theta}{2}\right)+C$$

万能代换缺点：分母 $1+t^2$ 次数较高，计算复杂.

以下情况不用万能代换：

① $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\cos x$

（将 $\sin x\,dx$ 化为 $d(-\cos x)=-d(\cos x)$） 特例：$R(\cos x)\cdot\sin x$

② $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\sin x$ 特例：$R(\sin x)\cdot\cos x$

③ $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\tan x$. 特例：$R(\tan x)$

例：$I=\int\frac{dx}{a+b\tan x}$ $(b\neq0)$ $dt=\frac{dx}{\cos^2x}=(1+\tan^2x)dx=(1+t^2)dx$

令 $t=\tan x \Rightarrow I=\int\frac{dt}{(1+t^2)(a+bt)}$

$\Rightarrow I=\int\left(\frac{Mt+N}{1+t^2}+\frac{c}{a+bt}\right)dt$

待定系数：(i) 同乘 $a+bt$，令 $t\to-\frac{a}{b}$，

右式 $=c$，左式 $=\frac{b^2}{b^2+a^2}$

(ii) 移项计算

$$\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}-\frac{b^2}{b^2+a^2}\cdot\frac{1}{a+bt}=\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}\left(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}(1+t^2)\right)$$

$$=\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}\cdot\frac{1}{a^2+b^2}(a^2-b^2t^2)=\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{a-bt}{a^2+b^2}=\frac{Mt+N}{1+t^2}$$

$$I = \frac{b}{a^2+b^2}\ln|a+bt| - \frac{b}{2(a^2+b^2)}\ln(1+t^2) + \frac{a}{a^2+b^2}\arctan t + C$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|\frac{a+bt}{\sqrt{1+t^2}}\right| + \frac{ax}{a^2+b^2} + C$$

$$= \frac{ax}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x| + C.$$

另解：配对法

$$I = \int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx \quad , 設\ J = \int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$$

$$\Rightarrow I = A\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx + B\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$$

$$= A\ln|a\cos x+b\sin x| + Bx + C$$

其中 $Ab+Ba=1$，$-Aa+Bb=0$

$$\Rightarrow A = \frac{b}{a^2+b^2}\ ,\ B = \frac{a}{a^2+b^2}$$

定积分

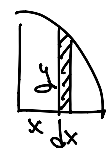
12个经典问题

例1：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, d(\sin x) = \int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

例2：求圆 $x^2+y^2\le R^2$ 的面积

$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx,\quad 令\ x=R\sin t$$



$ydx = dS$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos t\cdot R\cos t\,dt$$

$$= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 4R^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \pi R^2.$$

例3：$f(x)$ 周期函数，定义在 $\mathbb{R}$ 上. 证明：$\forall a\in\mathbb{R}$，

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

证明：$\int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f$

对于 $\int_T^{a+T} f(x)dx$ 作代换 $x=t+T$

$x: T\to a+T,\quad t: 0\to a$

$$\Rightarrow \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt = -\int_a^0 f(t)dt.$$ □

注：若 f 为连续函数，可对积分限求导

令 $F(a)=\int_a^{a+T} f(x)dx$，去证 $F(a)=F(0)$（或 $F(a)=$ 常数）

$\Leftarrow F'(a) = f(a+T)-f(a) = 0$（$f$ 周期）.

例4：$I=\int_0^a \sqrt{a^2+x^2}\,dx\quad (a>0)$

$$\Rightarrow I = \sqrt{a^2+x^2}\cdot x\Big|_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}a^2 - \int_0^a \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

分子要有分母的形式 again!

$$= \sqrt{2}a^2 - I + \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\Big|_0^a = \frac{a^2}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})).$$

1245 (Wallis公式/点火公式)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

$\sin^n x = \cos^n(\frac{\pi}{2}-x)$

$dx = -d(\frac{\pi}{2}-x)$, $0\le x\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\frac{\pi}{2}-x\le\frac{\pi}{2}$

分部积分降次

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\,d(-\cos x)$$

$$= -\cos x\cdot\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,d(\sin^{n-1}x)$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}, \quad I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1.$$

$$\Rightarrow I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n奇 \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n偶. \end{cases}$$

应用：(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x - \cos^4 x\,dx = I_2 - I_4$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}.$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{35}.$

1246：$\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

$$\int_0^{\pi} \cos^n x\,dx = \begin{cases} 0, & n奇. \\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx, & n偶 \end{cases}$$

例9: f在$[0,1]$上有连续导函数, $f(0)=f(1)=0$.

证明: $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|dx$

从左侧入手分部积分:

$$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx$$
$$= -\int_0^1 xf'(x)dx \quad (不够)$$

带有 $dx = d(x-\frac{1}{2})$ 的分部积分

$$\int_0^1 f(x)d(x-\tfrac{1}{2}) = (x-\tfrac{1}{2})f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)dx$$
$$= -\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 xf'(x)dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 (x-\tfrac{1}{2})f'(x)dx\right|$$
$$\leq \int_0^1 |x-\tfrac{1}{2}|\cdot|f'(x)|dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|dx.$$

对称性在积分计算中的应用.

在$[a,b]$区间上, $x \longmapsto a+b-x$

令 $g(x)=f(a+b-x)$, $g(x)$与$f(x)$关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 轴对称

$$\Rightarrow g(x) = f(a+b-x) = f\left(\frac{a+b}{2}+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right)$$

若f可积, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

特别地, 在$[0,a]$上:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx.$$

⇝ 奇偶性的推论：

f在$[0,a]$上，关于$(\frac{a}{2},0)$为奇函数，

即$\forall x\in[0,a]$，$f(x)=-f(a-x)$.

则$\int_0^a f(x)dx=0$.

f在$[0,a]$上，关于$x=\frac{a}{2}$为偶函数，

即$\forall x\in[0,a]$，$f(x)=f(a-x)$，

则$\int_0^a f(x)dx=2\int_0^{a/2}f(x)dx$.

不怎么用

一个重要恒等式，$\forall f$（不一定是偶函数）

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^{a/2}f(x)dx+\int_0^{a/2}f(a-x)dx$$ ← 比较有用.

更一般版本：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(f(x)+f(a+b-x))\,dx$.

例：$I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

希望是$[0,\pi]$上偶函数/奇函数

优先验证偶：

$$f(\pi-x)=\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}=\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\overset{?}{=}f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)+f(\pi-x)=\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

例：f在$[-\pi,\pi]$上偶，在$[0,\pi]$关于$\pi/2$奇，

证明：$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$I=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos 2nx\,dx=0$

被积$f(x)\cdot\cos 2nx$在$[-\pi,\pi]$偶

$$\Rightarrow I=2\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,dx$$

其中
$$\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(f(x)\cos 2nx+\underbrace{f(\pi-x)}_{=-f(x)}\underbrace{\cos 2n(\pi-x)}_{=\cos(-2nx)=\cos 2nx}\Big)dx$$
$$=0$$

其它答案写法：作代换$t=\pi-x$

$$\Rightarrow\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,dx=\int_\pi^0 f(\pi-t)\cos 2n(\pi-t)\,d(\pi-t)$$

$$= \int_0^{\pi} (-f(t)) \cos 2nt \, dt$$

$\Rightarrow I = -I \Rightarrow I = 0.$

例: $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

直接代入 $1-x$, 分母不友好. 先换元: $x = \tan t$

$\Rightarrow dx = \sec^2 t \, dt$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt$ $\quad = \frac{1-\tan t}{1+\tan t}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan t) + \ln(1+\boxed{\tan(\frac{\pi}{4}-t)}) \, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan t + 1 - \tan t) \, dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.$

因为 $\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$

例: 证明: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^\alpha x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^\alpha x} = \frac{\pi}{4}.$

只证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^\alpha x} = \frac{\pi}{4}.$

左式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^\alpha x} + \frac{1}{1+\cot^\alpha x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^\alpha x} + \frac{\tan^\alpha x}{1+\tan^\alpha x}\right) dx = \frac{\pi}{4}.$

反常积分的敛散性

比较判别法

f, g 定义在 $[a,b)$ 上，以 b 为唯一奇点（可以取 $b=\infty$）

且 $|f(x)| \le |g(x)|$，$\forall x \in [a,b)$

则 g 绝对收敛 $\Rightarrow$ f 绝对收敛.

$\int_a^b |f|$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b |g|$ 发散　　⚠ f 发散 $\not\Rightarrow$ g 发散.

例：证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 绝对收敛

唯一奇点为 $+\infty$. 则 $\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \left|\frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{1}{1+x^2}$，$\forall x$ 成立

易知反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

例：证明 $\int_0^1 \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$ 绝对收敛.　有可能让函数值 $\to \infty$ 的点.

0 是唯一奇点，关键在处理 $\ln \sin x$.

~~利用 $0<\sin x<x$，$\forall 0<x<1$，有~~

~~$|\ln \sin x| < |\ln x| \Rightarrow |原式| \le \int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 发散~~　} 错解.

实际上，$|\ln \sin x| > |\ln x|$

启示：在 0 到 1 上，很多不等式会反向，一定要小心！

① 判别时要求每个积分有且仅有一个奇点.

② 尺度 $\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} 0<p<1 \text{ 时，收敛，} \\ p \geqslant 1 \text{ 时，　　发散，} \end{cases} \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} p>1 \text{ 时，收敛，} \\ p \leqslant 1 \text{ 时，发散.} \end{cases} \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = 1$（计算可得）

正解：先估计 $\ln \sin x$

$x \to 0^+$ 时，$\ln \sin x \sim \ln x$　（因为 $\sin x \sim x$）（利用洛必达法则）

存在 $C>1$，使得 $|\ln\sin x|\le C|\ln x|$，$\forall x\in(0,1]$.

用 $\ln x$ 与幂函数 $1/x^{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ 相比，是无穷小量.

即 $\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(x\to 0^{+})$，$\varepsilon>0$

也即 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\varepsilon}}}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{\varepsilon}\ln x=0$，$\varepsilon>0$.

细节：一般情况取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 最稳.

取 $\varepsilon=1/4$，$\exists x_0\in(0,1)$，$\forall x\in(0,x_0)$

成立：$|\ln x|<\frac{1}{x^{1/4}}$，$\forall x\in(0,x_0)$

$\Rightarrow\left|\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{C|\ln x|}{\sqrt{x}}<\frac{C}{x^{1/2}}\cdot\frac{1}{x^{1/4}}=\frac{C}{x^{3/4}}$.

由 $\int_0^1\frac{1}{x^{3/4}}dx$ 收敛，原式绝对收敛.

若取 ε 较大，此式会发散.

2. 含参数分情况讨论

例 8.15 若反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$ 收敛，求 a,b 的取值范围.

【解】① 当 $a=b=0$ 时，反常积分为 $\int_0^{+\infty}1dx$，发散；

② 当 $a=0,b\neq0$ 时，反常积分为 $\int_0^{+\infty}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\sin bx\Big|_0^{+\infty}$，发散.

③ 当 $a\neq0,b=0$ 时，反常积分为 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$.

e^{-ax}

a. 若 $a>0$，则上述反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a}$，收敛；

(x)

$\checkmark$ $a>0$

b. 若 $a<0$，则上述反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 发散.

④ 当 $a\neq0,b\neq0$ 时，用两次分部积分法，实现积分再现，得

能再算一次

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx-\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx-\int\frac{a^2}{b^2}e^{-ax}\cos bx\,dx,$$

于是
$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx-a\cos bx)+C,$$

且
$$\int_0^A e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}(b\sin bA-a\cos bA)+\frac{a}{a^2+b^2}.$$

a. 若 $a>0$，则 $\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}(b\sin bA-a\cos bA)+\frac{a}{a^2+b^2}\right]=\frac{a}{a^2+b^2}$，收敛；

b. 若 $a<0$，则 $\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}(b\sin bA-a\cos bA)+\frac{a}{a^2+b^2}\right]$ 不存在，发散.

综上所述，只有 ③ 的 a 与 ④ 的 a 成立时，反常积分收敛，故当 $a>0$，b 任意时，反常积分收敛.

例：讨论积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{|y-1|^{a+b}} dy$ 的敛散性.

不能积，因为1是奇点、. 共有3个奇点：0，1，$+\infty$.

所有能让函数值 $\to \infty$ 的点、

目标：化为 $\int \frac{1}{x^p}$.

记被积函数 $= f(y)$

$|f(y)|$ 在不同奇点有不同表现.

① $y=0$ 处：$y \to 0^+$

$|f(y)| \sim y^{a-1}$ $\quad \int y^{a-1}$ 在 $1-a<1$ 时收敛 $\Rightarrow a>0$.

② $y=1$ 处：$y \to 1$

$|f(y)| \sim \frac{1}{|y-1|^{a+b}}$，$a+b<1$ 时收敛

③ $y \to +\infty$：

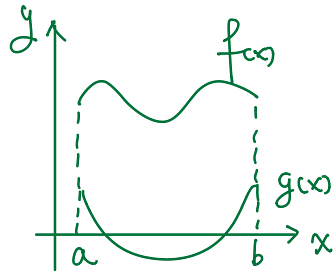
$|f(y)| \sim \frac{1}{y^{b+1}}$ $(y \to +\infty)$，$b>0$ 时收敛.

综上所述，$a>0$ 且 $b>0$ 且 $a+b<1$ 时，收敛且绝对收敛

否则发散.

平面图形面积计算

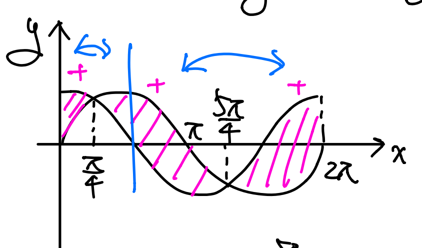
(一) 由 $f(x)$, $g(x)$ 所围面积



$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

难点：分段算绝对值积分.

例：求 $[0,2\pi]$ 上 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 围成的面积



$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx\\&\quad+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)\,dx\\&=4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

注意到 $S=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx$

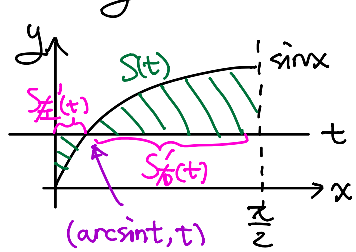
一般方法：利用 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 辅助角公式

其中 $\varphi=\arctan\frac{b}{a}$.

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|\,dx=\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx\\&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{2\pi-\frac{\pi}{4}}|\sin t|\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt=4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

不用画图也可以做.

例：$S(t)$ 是由 $y=\sin x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=t$ 围出面积

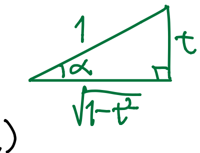


求 $S(t)$ 的最大/最小值

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|t-\sin x|\,dx\\&=\int_0^{\arcsin t}(t-\sin x)\,dx+\int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-t)\,dx\end{aligned}$$

$\Rightarrow S(t) = t\arcsin t + \cos(\arcsin t) - 1$

$\quad + \cos(\arcsin t) - t\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin t\right)$



$= 2t\arcsin t - 1 - \frac{\pi}{2}t + 2\underline{\cos(\arcsin t)}$

令 $\alpha = \arcsin t$, $\cos\alpha = \sqrt{1-t^2}$

$= 2t\arcsin t - 1 - \frac{\pi}{2}t + 2\sqrt{1-t^2}$.

$\Rightarrow S'(t) = 2\arcsin t + \cancel{\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}} - \frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}}$

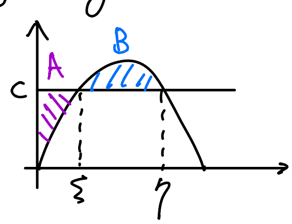
$= 2\arcsin t - \frac{\pi}{2}$.

$S'(t) = 0$ 的根是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $S'(t)$ 左负右正. 极小值 $S(\frac{\sqrt{2}}{2})$

极大值 $\max\{S(1), S(0)\}$.

几何解释: $\left.\begin{aligned} S'_{左}(t) &= \arcsin t \\ S'_{右}(t) &= -\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin t\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow S'(t) = 2\arcsin t - \frac{\pi}{2}$.

例: $y = c$ 与 $y = 2x - 3x^3$ 交于第一象限. 何种 c 可使 $A = B$?



$\int_\xi^\eta (2x - 3x^3 - c)\,dx = \int_0^\xi (c - 2x - 3x^3)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^\eta (2x - 3x^3 - c)\,dx = 0$

故 $2\eta - 3\eta^3 = c$.

(二) 参数方程形式下的面积

情况一: $y = y(x)$, $a \le x \le b$ 由 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 给定 $(\alpha \le t \le \beta)$.

没有 $y(x)$ 的显式表达式. $\rightsquigarrow$ 找 $y = y(t(x))$

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dr] & \\ x \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & y \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 需要找 $t(x)$ 作为 $x(t)$ 反函数 (只有单调的函数有反函数)

本质: 对 $\int_a^b y(x)\,dx$ 用换元法.

(i) 若 $x(t)$ 严格增. $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$

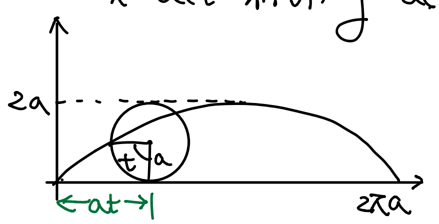
$$S=\int_a^b y(x)\,dx=\int_\alpha^\beta y(x(t))\cdot x'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t)).$$

(ii) 若 $x(t)$ 严格减, $x(\alpha)=b$, $x(\beta)=a$.

$$S=\int_a^b y(x)\,dx=-\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t)).$$

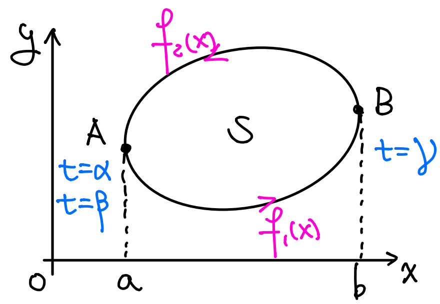
例: 求旋轮线一拱与x轴所围图的面积.

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$



$$S=\int_0^{2a\pi} y(x)\,dx=\int_0^{2\pi} y(t)\,d(x(t))$$
$$=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t-2\cos t)\,dt=\cdots.$$

情况二: 求由参数方程表示的封闭图形的面积.



$\alpha\le t\le\beta$

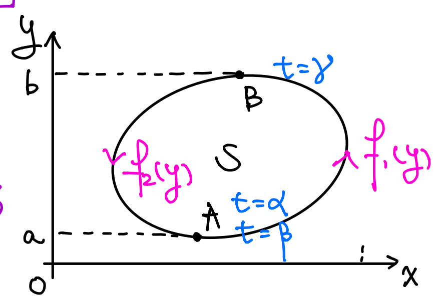
$t=\gamma$ (一般不是 $\frac{\alpha+\beta}{2}$)

$$S=\int_a^b \big(\underset{\substack{x(t)\downarrow\\ -\int_\gamma^\beta}}{f_2(x)}-\underset{\substack{x(t)\uparrow\\ +\int_\alpha^\gamma}}{f_1(x)}\big)\,dx=-\int_\gamma^\beta y(t)\,d(x(t))-\int_\alpha^\gamma y(t)\,d(x(t))$$
$$=\boxed{-\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t))}$$

类似地, y轴版本:

$$S=\int_a^b \big(f_1(y)-f_2(y)\big)\,dy$$
$$=\int_\alpha^\gamma x(t)\,d(y(t))+\int_\gamma^\beta x(t)\,d(y(t))$$

差负号



$$= \boxed{\int_\alpha^\beta x(t)\,d(y(t))}$$

结论：上两式相加，除2，得

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(x(t)\,dy(t)-y(t)\,dx(t)\right)$$

有对称性
一般来说是最好的.

例：求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围面积

参数方程 $x=a\cos t,\ y=b\sin t\quad (0\le t\le 2\pi)$

① 用 $S=\int_\alpha^\beta x(t)\,d(y(t))=\int_\alpha^\beta x\,dy$

$\Rightarrow S=\int_0^{2\pi} a\cos t\cdot b\cdot\cos t\,dt$

$= ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = ab\pi$

② 用 $S=-\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t))=-\int_\alpha^\beta y\,dx$

$\Rightarrow S=-\int_0^{2\pi} b\sin t\cdot a(-\sin t)\,dt = ab\pi$

③ 用 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta x\,dy-y\,dx$

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}(2\cdot ab\pi)=ab\pi.$

例：求Descartes叶形线 $x^3+y^3=xy$ 在第一象限的面积

重要：多项式形线如何参数化？

$y=tx,\quad t=$到原点连线斜率

$\Rightarrow x^3+t^3x^3=tx^2 \longleftarrow$ 左右相差一次，所有 x^2.

$\Rightarrow x(1+t^3)=t \Rightarrow x=\frac{t}{1+t^3},\ y=\frac{t^2}{1+t^3}.\ (0\le t\le +\infty)$

若左右次数相差较大，试 $y=tx^n\ (n\ge 2)$.

$\Rightarrow x'(t)=\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2},\ y'(t)=\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}.$

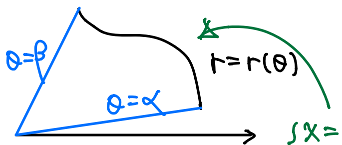
$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\,dy-y\,dx=\cdots$

虚假的广义积分（后面有理分式，可算不定积分）.

(三) 极坐标下的面积

设定 设曲线极坐标方程 $r=r(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$,

求该曲线与 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围面积

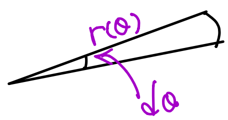


$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

① 换直角坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

只能得到一个边界.

② 更好的方法: 分割成小圆弧

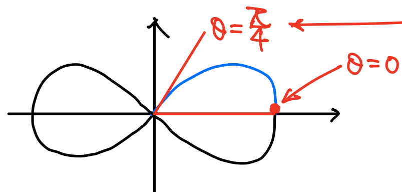


$S=\frac{1}{2}r(\theta)^2\cdot d\theta$

弧长: $r(\theta)\cdot d\theta$ ⟶ 近似成三角形 $S=\frac{1}{2}r(\theta)\cdot r(\theta)\cdot d\theta$

结论: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$.

例: 双纽线 $r^2=a^2\cos2\theta$ 所围的面积



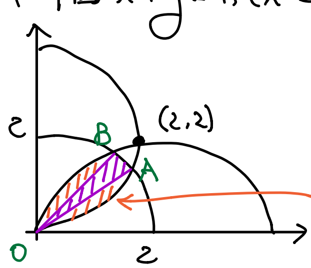
从式子中可看出来:

$r^2=a^2\cos2\theta\ge0 \Rightarrow \cos2\theta\ge0$

第一象限内: $\left.\begin{matrix}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ \cos2\theta\ge0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta\,d\theta$$
$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\,d(2\theta)=a^2.$$

例: 求三个圆 $x^2+y^2\le4$, $(x-2)^2+y^2\le4$, $x^2+(y-2)^2\le4$ 所围面积



$S_{扇形AOB}=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\alpha=2\alpha=\frac{\pi}{3}$.

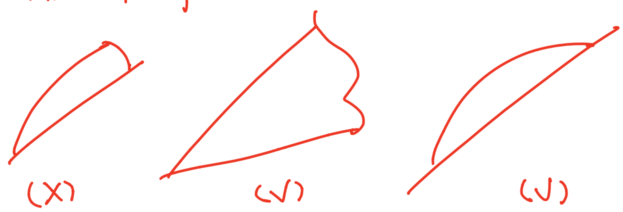
$S_{一个弓形}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cdot16\sin^2\theta\,d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\,d\theta$

$x^2+y^2=4y \Leftrightarrow r=4\sin\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow S_{两个弓形} = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow S = \frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

⚠ 必须有一侧边界是直线

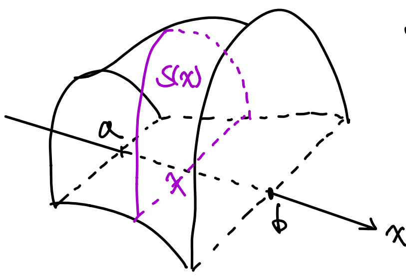


(×) (√) (√)

旋转体的体积

(一) 一般体积公式

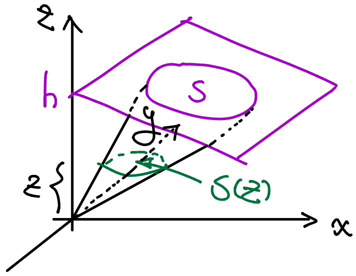
设立 一个几何体夹在空间垂直于两张平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间 $(a<b)$.



对于每个 $x\in[a,b]$，用平面 $X=x$ 去截，截面积 $S(x)$.

$$\Rightarrow V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

例: 求底面积为 S，高为 h 的圆锥体体积.



相似三角形 $\Rightarrow S(z)=\dfrac{z^2}{h^2}S$

$$\Rightarrow V=\int_0^h \frac{z^2}{h^2}S\,dz=\frac{1}{3}Sh.$$

例: 求 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $(a,b,c>0)$.

用平行于 XOY 的截面 $Z=z$，$-c\le z\le c$ 去截椭球.

截面为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2}$.

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}\le 1.$$

$$\Rightarrow S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

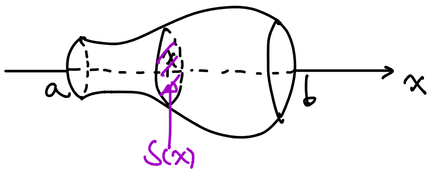
$$\Rightarrow V=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$=2\pi ab\left(c-\frac{c^3}{3c^2}\right)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

(二) 旋转体的体积

设定 由曲边梯形 $\{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le y(x)\}$

围绕 x 轴旋转一周所得立体旋转体.

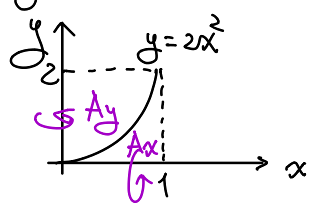


$$V = \int_a^b \pi (y(x))^2 \, dx$$ ← 中心实心 $(y(x))^2 - 0^2 = (y(x))^2$.

注: 若中心是空心的, 当 $S(x)$ 为圆环算

$$\Rightarrow S(x) = \pi(y_2^2 - y_1^2). \quad (y_1(x) \le y \le y_2(x)).$$

例: $y = 2x^2$ $(0 \le x \le 1)$ 决定两个曲边梯形



$A_x = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x^2\}$

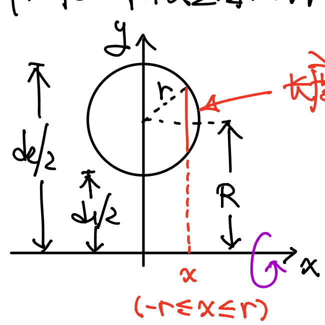
$A_y = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 2\}$ ← 对y旋转用 需要换成y范围 (关于dy积分)

$= \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \sqrt{\frac{y}{2}}\}$.

$$\Rightarrow V_x = \int_0^1 \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^1 4x^4 \, dx = \frac{4}{5}\pi.$$

$$V_y = \int_0^2 \pi x^2 \, dy = \pi \int_0^2 \frac{y}{2} \, dy = \pi.$$

例: 求一个救生圈的体积, 内直径 d_1, 外直径 d_2.



对于 $-r \le x \le r$,

$X = x$ 生成的截面为圆环

外半径 $R + \sqrt{r^2 - x^2}$

内半径 $R - \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$\Rightarrow S(x) = \pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - \pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})^2$$

$$= 4\pi R\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow\ V=\int_{-r}^{r}4\pi R\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 8\pi R\underbrace{\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx}_{\frac{\pi}{4}r^2\text{. }\frac{1}{4}\text{圆的面积}}$$

$$=2\pi^2Rr^2.$$

其中 $R=\frac{1}{4}d_1+\frac{1}{4}d_2$，$r=\frac{d_2}{4}-\frac{d_1}{4}$.

注：Guldin 定理：$V=$ 小面积 $\times$ 周长 $=\pi r^2\cdot 2\pi R$.

（不能自己用）.

平面图形围绕不穿过其内部的轴

旋转得到的体积 $=$ 面积 $\times$ 形心旋转得到的周长

图形的重心

二重积分

(一) 一般区域上的二重积分

f 在 D 上可积，D 可以表示成 x 型区域

$$D=\{(x,y)\mid \underbrace{y_1(x)}_{\text{关于}x}\le y\le \underbrace{y_2(x)}_{\text{关于}x},\ a\le x\le b\}$$

且对每个固定 x，$\varphi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ 存在，

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

同理，若 D 可表示为 y 型区域

$$D=\{(x,y)\mid \underbrace{x_1(y)}_{\text{关于}y}\le x\le \underbrace{x_2(y)}_{\text{关于}y},\ c\le y\le d\}$$

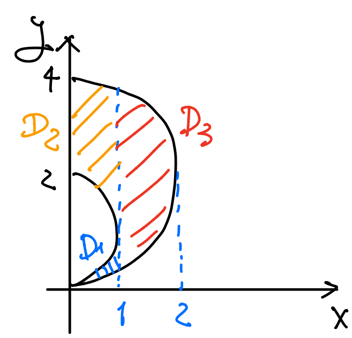
且对每个固定 y，$\psi(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$ 存在，

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

一般区域：分解为 x 与 y 型区域的并。

以方便计算为原则，决定积分顺序。

例：$D=\{(x,y)\mid 2y\le x^2+y^2\le 4y,\ x\ge 0\}$



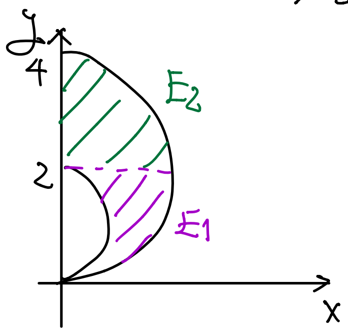
① 表示为 x 型：

$D_1=\{2-\sqrt{4-x^2}\le y\le 1-\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1\}$

$D_2=\{1+\sqrt{1-x^2}\le y\le 2+\sqrt{4-x^2},\ 0\le x\le 1\}$

$D_3=\{2-\sqrt{4-x^2}\le y\le 2+\sqrt{4-x^2},\ 1\le x\le 2\}$

$\Rightarrow D=D_1\cup D_2\cup D_3.$



② 表示为y型:

$E_1=\{\sqrt{2y-y^2}\le x\le\sqrt{4y-y^2},\ 0\le y\le 2\}$

$E_2=\{0\le x\le\sqrt{4y-y^2},\ 2\le y\le 4\}$

$\Rightarrow E_1\cup E_2=D.$

注:当 $f(x,y)$中含有x^2+y^2项

或 D的边界表达式中含有x^2+y^2项.

则 可利用 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$

先化为极坐标下二重积分,

然后关于r和θ的二次积分去求解.

例: 将上题的D分解成r型区域和θ型区域.

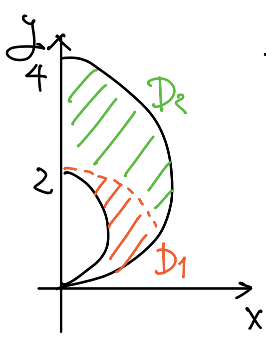
在极坐标系中, D的边界

$x^2+y^2=2y \longleftrightarrow r^2=2r\sin\theta \Longleftrightarrow \boxed{r=2\sin\theta}$

$x^2+y^2=4y \longleftrightarrow r^2=4r\sin\theta \Longleftrightarrow \boxed{r=4\sin\theta}$

$x=0 \longleftrightarrow r\cos\theta=0 \Longleftrightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}.$

表示为r型区域:



$\Rightarrow D_1=\begin{cases}0\le r\le 2\\ \arcsin\frac{r}{4}\le\theta\le\arcsin\frac{r}{2}\end{cases}$

$D_2=\begin{cases}2\le r\le 4\\ \arcsin\frac{r}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}.$

$D=D_1\cup D_2.$

表示为 θ 型区域： $D=\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 2\sin\theta\le r\le 4\sin\theta\end{cases}$

例：求 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\iint_{\substack{|x|\le R\\|y|\le R}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

Key 长得像极坐标积分

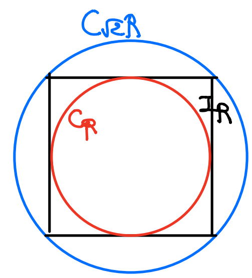
但区域不是圆：用夹逼

⚠不要试图将方形写成极坐标

会变得不幸.

记 $\displaystyle I_R=\iint_{\substack{|x|\le R\\|y|\le R}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

$\displaystyle C_R=\iint_{x^2+y^2\le R^2}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$



$$\rightsquigarrow\quad C_R=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2e^{-r^2}\cdot(r\,dr)$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3e^{-r^2}dr=\pi\int_0^{R^2}te^{-t}dt$$

$$=\pi(1-e^{-R^2}-R^2e^{-R^2})\to\pi\quad(R\to+\infty)$$

同理 $C_{\sqrt{2}R}=\pi(1-e^{-2R^2}-2R^2e^{-2R^2})\to\pi\quad(R\to+\infty)$

利用 $C_R\le I_R\le C_{\sqrt{2}R}$ 夹逼，得到 $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}I_R=\pi$.

例：作极坐标替换，将

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$$

化成定积分，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}.$$

令 $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$.

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy=\iint_{\Phi}f(r)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^1dr\int_0^{\pi/4}f(r)\,r\,dr+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r}\right)f(r)\,r\,dr$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}} f(r)\,r\,dr - \int_1^{\sqrt{2}} \arccos\frac{1}{r}\, f(r)\cdot r\,dr \qquad \square$$

(二) 二重积分的变量替换

直角—极坐标互化：

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow \boxed{dx\,dy = r\,dr\,d\varphi}$$

例：求曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 所围面积。

应用广义极坐标替换

$$x = a\rho\cos\theta,\ y = b\rho\sin\theta.$$

$$\Rightarrow J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = ab\rho,\quad 原式 \Leftrightarrow \rho^2 = \cos 2\theta \ (双纽线)$$

数学分析学过：

对于变量代换 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \end{cases} (u,v)\in D'$

应满足行列式 $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

在 D' 内无零点，即 $J \neq 0,\ \forall (u,v)$.

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\cdot J\cdot du\,dv$$

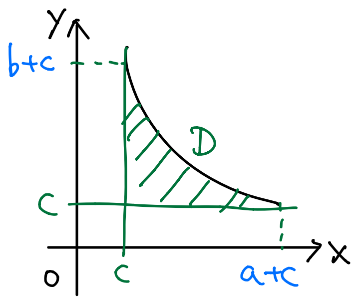
所以 $S = \iint_D dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} ab\rho\,d\rho = ab.$

例：求 $\iint_D \left(\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}}\right) dx\,dy$， ← 本例想说：

万物都可极坐标代

其中 D 由 $x=c,\ y=c$ 和

曲线 $\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}} = 1$ 所围成. $(a,b,c>0)$.



令 $x=c+a\rho\cos^4\theta$, $y=c+b\rho\sin^4\theta$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}=\sqrt{\rho}\cdot\cos^2\theta+\sqrt{\rho}\cdot\sin^2\theta=\sqrt{\rho}$$

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho}\\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a\cos^4\theta & b\sin^4\theta\\ -4a\rho\cos^3\theta\cdot\sin\theta & 4b\rho\sin^3\theta\cdot\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta.$$

积分区域化为 $\{0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le1\}$.

于是 $$\iint_D\left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta\sqrt{\rho}\,d\rho=\frac{2}{15}ab.$$

不重要的话：一般而言，广义极坐标变换

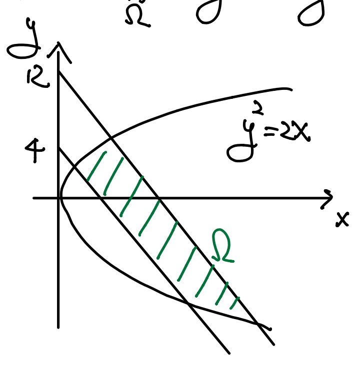
$$x=\frac{1}{a}(c+r^{\frac{1}{p}}\cdot\cos^{\frac{2}{p}}\theta),\quad y=\frac{1}{b}(d+r^{\frac{1}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\theta)$$

能将 $(ax-c)^p+(by-d)^p$ 变成 r.

但其中 r,θ 不再有通常的极径、极角之意义

（所以不要对着图想当然地写变换区域）.

例. 求 $I=\iint_\Omega(x+y)dxdy$, 其中 Ω 由 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 围成.



作变换 $u=x+y$, $v=y$

$\rightsquigarrow$ 区域: $\begin{cases}4\le u\le 12\\ -1-\sqrt{2u+1}\le v\le -1+\sqrt{2u+1}.\end{cases}$

且 $J=1$. 于是

$$I=\int_4^{12}u\,du\int_{-1-\sqrt{2u+1}}^{-1+\sqrt{2u+1}}dv$$

$$=\int_4^{12}2u\sqrt{2u+1}\,du\quad(\sqrt{2u+1}=t)$$

$$= \int_3^5 (t^2-1)t^2\,dt = \frac{8156}{15}.$$

Last Tips 奇偶性和积分区域对称性可用来简化计算.

① D关于x轴对称 + 关于y奇/偶

* $f(x,y) = -f(x,-y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$ 关于y奇.

* $f(x,y) = f(x,-y)$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D\cap\{y\geq 0\}} f(x,y)\,dx\,dy$$ 关于y偶

取半边D

② D关于y轴对称 + 关于x奇/偶

* $f(x,y) = -f(-x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$ 关于x奇

* $f(x,y) = f(-x,y)$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D\cap\{x\geq 0\}} f(x,y)\,dx\,dy$$ 关于x偶

③ D关于(0,0)中心对称

* $f(x,y) = -f(-x,-y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$ 两侧相反

* $f(x,y) = f(-x,-y)$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy$$ 两侧相同

D^+ 为D在第一象限的部分.

多元函数极限

求多元函数极限的常用方法：

1. 利用函数连续性 + 极限运算性质
2. 不等式放缩 或 夹逼定理 ← 一般是夹0和某个趋于0的式子.
3. 利用变量替换 ⇝ 化简为已知极限.

e.g. 令三角的：$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1$, ⚠ 此处t只能与x和y其一有关

令指数的：$\lim\limits_{t\to 0}(1+\frac{1}{t})^{t}=e$.

~~$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$~~

4. 初等变形：分母有理化、指对数形式取对数.

(一) 二重极限(若存在)的计算

例1：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ ← 次数：分子 > 分母 ⇒ 极限 = 0.

基本方法：预期极限为0时，

极坐标代换 ⇝ 化为 有界量 × 无穷小量.

令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0.$$

无论θ为何，r→0即可.

⇒ 二元化一元.

例2：求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

错解：$\sin(x^3+y^3)\sim x^3+y^3$, $(x,y)\to(0,0)$.

此处是对的，但不能对所有二元极限做此操作！

修正方法：Taylor展开 (一元，对 x^3+y^3)

$\sin(x^3+y^3)=x^3+y^3+o(|x|^3+|y|^3)$ $(|x|+|y|\to 0)$

$$\Rightarrow \text{原式}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3+o(|x|^3+|y|^3)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

另法：不等式放缩． 经典方法：sin(…)都可这样做．

$$|\sin(x^3+y^3)| \le |x|^3+|y|^3 \le (|x|+|y|)(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \text{原式} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{原式} = 0.$$

例3：求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$， 其中 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin xy}{x}, & x\neq 0 \\ y, & x=0, y\neq 0 \end{cases}$

须予放缩：

$$|f(x,y)| = \begin{cases} \left|\frac{\sin xy}{x}\right| \le |y|, & x\neq 0 \\ |y|, & x=0 \,\&\, y\neq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

若上下不一致，写较大的那个．

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

先求其对数的极限．

例4：求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{xy}$.

先求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$：

极限为0．

放缩 $|xy\ln(x^2+y^2)| \le \underset{\sim\sim\sim}{r^2\ln r^2}$ $(r\to 0^+)$， $r^2=x^2+y^2$.

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{原式} = e^0 = 1.$$

例5：证明 $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$ 取对数极限不总是存在！

check: $x^2\ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ 极限不存在．

使用夹逼方法：

注意到 $x>0, y>0$ 时：$0<\frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \ 0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}=0 \ \Rightarrow$ 原式 $=0$.

(二) 累次极限

核心命题 若重极限存在：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$

(1) $y\neq y_0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在，

$$\Rightarrow \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=A$$

(2) $x\neq x_0$ 时，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 存在，

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=A.$$

解释：① 二重极限存在 + 二次极限存在

$\Rightarrow$ 二次极限 = 二重极限

② 一般情况下，两者无必然联系

e.g. 二重极限存在 — 两个二次极限均不存在 / 有且仅有一个存在

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$

但 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 不存在.

e.g. 二重极限不存在 — 两个二次极限存在且相等 / 有且仅有一个存在

$$f(x,y)=\frac{y}{x},\quad x\neq 0$$

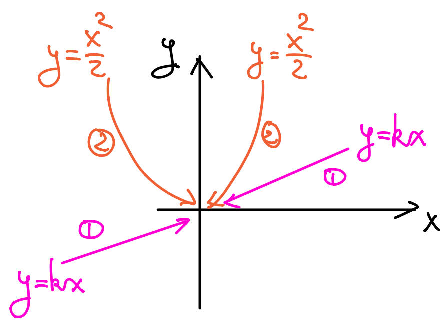
$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在

且 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0.$

(三) 证明重极限不存在的方法

方案一：找两种特殊的趋近方式（使得在两种方式下极限不同）.

例：$f(x,y)=\begin{cases}0, & x^2\le |y| \text{ 或 } y=0\\ 1, & \text{其它}.\end{cases}$



① 沿 $y=kx$：$(x,y)\to(0,0)$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y=kx)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

② 沿 $y=\frac{x^2}{2}$：$(x,y)\to(0,0)$

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ 或 } y=0 \quad (\text{否则不可能有 } x^2\le|y|=\frac{x^2}{2})\\ 1, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y=x^2/2)\to(0,0)} f(x,y)=1.$$

由①②，重极限不存在.

方案二：证明两个累次极限存在但不相等

（如果两个二次极限存在 + 二重极限存在，

由命题，三个极限应相等，矛盾）.

例：$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$ 可见重极限不存在.

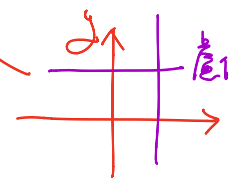
多元函数的连续性

连续性定义

如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

⚠ $f(x,y)$ 对 x 和 y 分别都连续 $\not\Rightarrow$ $f(x,y)$ 对 (x,y) 连续.

e.g. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$



虚假的连续.

在全平面分别对 x 和 y 均连续.

但作为二元函数，在原点不连续.

例：令 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0\\ y, & x=0.\end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在定义域上均连续.

证明：$f(x,y)$ 之定义域为 $xy>-1$

且 $f(x,y)$ 在 $x\neq 0$ 处连续.

只需证 $f(x,y)$ 作为二元函数在 y 轴上各点连续.

① 在 $(0,0)$：$f(0,0)=0$，而 $x\neq 0$ 时

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{x}=\begin{cases}0, & y=0\\ y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}, & y\neq 0.\end{cases}$$

又由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=1$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1>0,\ \forall\, 0<|x|<\delta_1,\ 0<|y|<\delta_1,$

$$\left|\frac{\ln(1+xy)}{x}\right| \le |y|\left|\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right| \le 2|y|.$$

只要 $|x|<\delta_1,\ |y|<\delta_1$，无论在 $x=0$ 或 $x\neq 0$ 均有

$$|f(x,y)|\le 2|y|.$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

② 在$(0,y_0)$，$y_0 \neq 0$：

当$x\neq 0$时，$|f(x,y)-f(0,y_0)| = |y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} - y_0|$

$$= |y(\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1) + (y-y_0)|$$

$$\leq |y||\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1| + |y-y_0|.$$

而当$x=0$时，$|f(x,y)-f(0,y_0)| = |y-y_0|$.

注意到当$y_0\neq 0$时

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} = 1,$$

结合上述各式得

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} (f(x,y)-f(0,y_0)) = 0.$$

$\Rightarrow$ $f(x,y)$在$(0,y_0)$处连续，从而在其定义域上连续.

顺便一提：

$f(x,y)$对x和y分别连续 + $f(x,y)$关于x或y单调

$\Rightarrow$ $f(x,y)$关于(x,y)作为二元函数连续.

偏导数

(一) 偏导数的定义

二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

类似可以定义 $f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

例：求 $f(x,y) = \begin{cases} y\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处偏导数.

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0, \quad \frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \ln(\Delta y)^2$$

$\Rightarrow f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0)$ 不存在.

多元函数偏导定义来自一元版本 ⇝ 所有一元运算法则均适用.

e.g. 四则运算 & 链式法则.

(二) 偏导数与连续

⚠ 一元函数：可导 $\Rightarrow$ 连续

二元函数：在某点 f_x, f_y 均存在 $\not\Rightarrow$ 连续

反例：$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$

甚至不存在极限

$\Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，但 f 在 $(0,0)$ 不连续.

连续性判别法

$f(x,y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 邻域内存在且有界

$\Rightarrow f$ 在 (x_0,y_0) 连续

证明: $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$

$= (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)) + (f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0))$

利用一元函数微分中值定理

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$(0<\theta_1, \theta_2<1)$

f_x, f_y 在 (x_0,y_0) 邻域内有界 $\Rightarrow \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f = 0$.

$\Rightarrow f$ 在 (x_0,y_0) 处二元连续.

具体操作方法

6. 偏导数的连续性

对于 $z=f(x,y)$，讨论其在某特殊点 (x_0,y_0)（比如二元分段函数的分段点）处偏导数是否连续，是考研的重点，其步骤为：

①用定义法求 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$；

②用公式法求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$；

③计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_x(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_y(x,y)$.

看 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0)$ 是否成立. 若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是连续的.

高阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{yx},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{xy}.$$

需要知道 f_{xy} 与 f_{yx} 不总是相等，具体条件不须知道.

全微分

(一) 全微分的定义与基本性质

5. 可微

先看一个引例. 如图 1-11-10 所示,设矩形的长和宽分别为 x 和 y,则此矩形的面积 $S=xy$. 若 x,y 分别增长 $\Delta x,\Delta y$,则该矩形面积的增量为

$$\Delta S=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y.$$

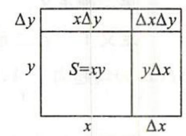


图 1-11-10

上式右端由两部分组成:一部分是 $y\Delta x+x\Delta y$,它是关于 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数;另一部分是 $\Delta x\Delta y$,因为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{2}=0,$$

所以当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时,$\Delta x\Delta y$ 是比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小量,即

$$\Delta S=y\Delta x+x\Delta y+o(\rho)\ (\rho\to 0).$$

$y\Delta x+x\Delta y$ 是 ΔS 的主要部分,$o(\rho)$ 是误差,

$$\Delta S\approx y\Delta x+x\Delta y.$$

称 $y\Delta x+x\Delta y$ 为函数 $S=xy$ 在点 (x,y) 处的全微分.

$S=x^2y$

$$\Delta S=(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)-x^2y$$
$$=\cancel{\Delta x^2}(y+\Delta y)+2x\cdot\Delta x(y+\Delta y)$$
$$=2xy\cdot\Delta x$$

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域上有定义. 如果

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=A\Delta x+B\Delta y+o(r)$$

例: $e^{\frac{1}{\Delta x}}$ 就不可微.

A, B: 仅与 (x_0,y_0) 有关而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数

$r^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$

则称 f 在 (x_0,y_0) 可微, 称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为全微分.

记作 $dz=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$

可微 = 在该点附近, $f(x,y)$ 可被 Δx 与 Δy 的线性函数近似代替.

f 在 (x_0,y_0) 可微 $\Rightarrow$ 在 (x_0,y_0) 附近邻域内有

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx\underbrace{f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y}_{\text{线性}}$$

其中 $A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)$, $B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$

最终版本：$dz = f_x dx + f_y dy$

或 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$.

例：求 $A=\sqrt{1-(1.004)^2+(1.994)^2}$ 的近似值

取 $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2+y^2}$，$x_0=1$，$y_0=2$

$\Delta x = 0.004$，$\Delta y = -0.006$.

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{1}{2}$，$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1$.

$\Rightarrow A = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(1,2) - \frac{1}{2}\cdot(0.004) + 1\cdot(-0.006) = 1.992$.

(二) 连续、偏导数存在与可微

导数：只变一个变量

微分：所有变量同时变一点

$$
\begin{tikzcd}
\text{偏导数存在} \arrow[rr, "+\text{某邻域内偏导数有界}"] \arrow[dr, shift right, "+\text{偏导数连续}"'] & & \text{连续} \\
& \text{可微} \arrow[ul, shift right] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

由此得：证明 f 不可微的常用方法：

(1) 证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处至少有一个偏导数不存在 ← 慎用

(2) 证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续

(3) 从定义出发，证 $\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y \neq o(r)$.

其中 $r^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$.

例：设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. 证明：(1) f 在 $(0,0)$ 连续

(2) $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ 都存在

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

(1) $(x_0,y_0)=(0,0)$, $|\Delta f| = |\Delta x|^{1/2}\cdot|\Delta y|^{1/2}$

定义：$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f(0,0)+\Delta f) = 0 = f(0,0)$$

(2) 按定义（而非按求导法则）计算：

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

用第(3)条，比较 $o(r)$.

(3) $\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y = |\Delta x|^{1/2}\cdot|\Delta y|^{1/2}$

取 $\Delta x=\Delta y\to 0$，则

$$\frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{r} = \frac{|\Delta x|^{1/2}\cdot|\Delta y|^{1/2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \to 1/\sqrt{2} \neq 0$$

所以上式 $\neq o(r)$，f 在 $(0,0)$ 不可微.

例：利用上述第(1)(3)条：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cdot\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

例 13.7 已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数不连续，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

【证】 易知 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}=0$，$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta y\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta y)^2}=0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在，从而

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \text{由求导法则}\\ 0, & x^2+y^2=0, \text{由定义}\end{cases}$$

$$f_y'(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \text{由求导法则}\\ 0, & x^2+y^2=0. \text{由定义}\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{\substack{y=x\\x\to 0}} f_x'(x,y)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x=y\\y\to 0}} f_y'(x,y)$ 都不存在，故 $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 $(0,0)$ 处均不连续.

又由 $\Delta f=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，故在点 $(0,0)$ 处，当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta f-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\rho\sin\dfrac{1}{\rho^2}\to 0$，

所以，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

分子 $=o(r)$. (3) 用在这里

例：再用第(3)条解题：

例 13.8 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(C).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$ ← 连续

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ ← 需偏导数连续（看三角图）

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ ← r ⇒ 分子 $=o(r)$

(D) $\lim\limits_{a\to 0}[f'_x(a,0)-f'_x(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$

$f'(x)$ ← 和 $x\to 0$ 的 x 不同.

之前的△：关于 x, y 分别连续
推不出 二元连续.

偏导数连续：$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(f'_x(\Delta x,\Delta y)-f'_x(0,0)\right)=0$

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(f'_y(\Delta x,\Delta y)-f'_y(0,0)\right)=0$

三个容易出现的误解

(1) $f(x,y)$ 在某点邻域内存在偏导数
但在该点不一定连续，从而不一定可微.

(2) $f(x,y)$ 在某点连续，
但偏导数不一定存在，从而不一定可微.

(3) $f(x,y)$ 在某点可微，
但在该点偏导数不一定连续.

链式法则

建议写箭头

1. 链式求导规则

(1)复合函数的中间变量均为一元函数的情形. 复合结构图如图 1-11-11 所示.

设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$, 则 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$, 且 $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dt}$.

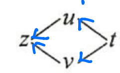


图 1-11-11

(2)复合函数的中间变量均为多元函数的情形. 复合结构图如图 1-11-12 所示.

设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, 则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

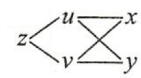


图 1-11-12

(3)复合函数的中间变量既有一元函数, 又有多元函数的情形. 复合结构图如图 1-11-13所示.

设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(y)$, 则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

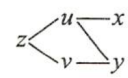
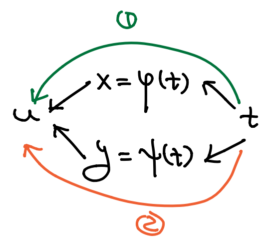


图 1-11-13

例1: $u=x^y$. 令 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. 求 $\dfrac{du}{dt}$.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t) \qquad ①+②\\ &=y\cdot x^{y-1}\varphi'(t)+x^y\ln x\,\psi'(t)\\ &=x^y\left(\frac{y}{x}\varphi'+\ln x\,\psi'\right)\\ &=(\varphi(t))^{\psi(t)}\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\varphi'(t)+[\ln\varphi(t)]\psi'(t)\right)\end{aligned}$$



不能折头

⚠ 在使用链式法则时，要求 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，否则法则可能失效.

E.g. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\Rightarrow f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

证不可微: $\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不是高阶小量 $o(r)$.

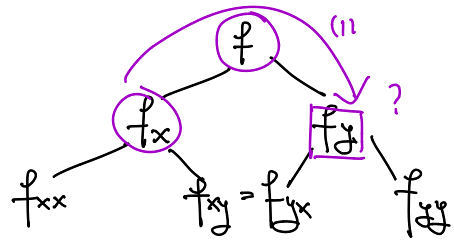
现在令 $x=y=t$, 则 $f(t,t)=\dfrac{t}{2}\Rightarrow\dfrac{df}{dt}=\dfrac{1}{2}$.

如果用链式法则,就有

$$\frac{df}{dt} = f_x x_t' + f_y y_t' = f_x + f_y$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时 $\frac{df}{dt}=0$, 问题出在 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

与 $1/2$ 矛盾.



例2: 设 $f(x,y)$ 有连续偏导数且 $f(x,x^2)=1$.

(1) 若 $f_x(x,x^2)=x$, 求 $f_y(x,x^2)$.

(2) 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$, 求 $f(x,y)$.

(1) 对 $f(x,x^2)=1$ 两边求导得

不是 $f_x(x,y)$ 而是 $f_x(x,x^2)$ ←

$$f_x (x)' + f_y (x^2)' = f_x + 2x f_y = 0$$

而 $f_x(x,x^2)=x$, 故 $x+2xf_y(x,x^2)=0$

$$\Rightarrow f_y(x,x^2) = -\frac{1}{2} \quad \boxed{(x\neq 0)}$$

由连续性知 $f_y(x,x^2) = -\frac{1}{2}$ $(x=0)$.

(2) 将 f_y 的原函数视作 f 的一部分去还原 f.

令 $F(x,y) = f(x,y) - \underbrace{(x^2y+y^2)}_{f_y\text{的积分}}$

$\Rightarrow F_y = f_y - (x^2+2y) = 0$ ← 构造F的目标是它成立.

$\Rightarrow$ F只与x有关, 设 $F=\varphi(x)$

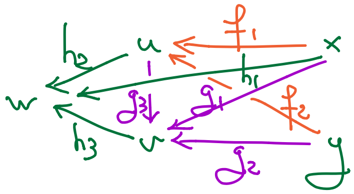
$\Rightarrow f(x,y) = x^2y+y^2+\varphi(x)$.

利用 $f(x,x^2)=1$, 得 $\varphi(x)=1-2x^4$

$\Rightarrow f(x,y) = x^2y+y^2+1-2x^4$.

例3: $u=f(x,y)$, $v=g(x,y,w)$, $w=h(x,u,v)$. 求 $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$

先画图



每个字母只出现一遍.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = h_1 + h_2 f_1 + h_3(g_1 + g_3 f_1)$$

$$= h_1 + h_2 \frac{\partial f}{\partial x} + h_3\left(g_1 + g_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

只有一层才能写成这种形式.

而 e.g. $h_1 \neq \frac{\partial h}{\partial x}$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = h_2 f_2 + h_3(g_2 + f_2 g_3)$$

$$= h_2 \frac{\partial f}{\partial y} + h_3\left(g_2 + g_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

例4: **例 1.11.3** 设 $z=f(e^x \sin y, x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

先关于x，后关于y

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y f_1' + 2x f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{11}'' e^{2x} \sin y \cos y + 2e^x(y \sin y + x \cos y) f_{12}'' + 4xy f_{22}'' + f_1' e^x \cos y.$$

例 1.11.4 设 $z = x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$，$f$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

先x后y

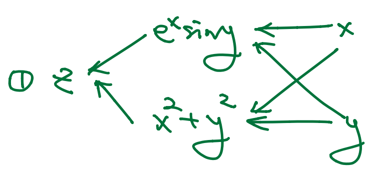
解 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 f_1' + x^2 f_2'$，

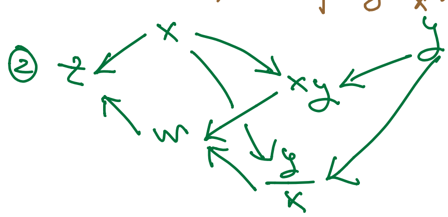
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4\left(x f_{11}'' + \frac{1}{x} f_{12}''\right) + x^2\left(x f_{21}'' + \frac{1}{x} f_{22}''\right) = x^5 f_{11}'' + 2x^3 f_{12}'' + x f_{22}''，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 4x^3 f_1' + x^4\left(y f_{11}'' - \frac{y}{x^2} f_{12}''\right) + 2x f_2' + x^2\left(y f_{21}'' - \frac{y}{x^2} f_{22}''\right)$$

$$= 4x^3 f_1' + 2x f_2' + x^4 y f_{11}'' - y f_{22}''.$$

$z = x^3 \cdot w$，$w = f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$





例5: 设 $a, b \neq 0$，f 有二阶连续偏导数，且

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad ①$$

$$f(ax, bx) = ax \quad ②$$

$$f_x(ax, bx) = bx^2 \quad ③$$

求 $f_{xx}(ax, bx)$，$f_{xy}(ax, bx)$，$f_{yy}(ax, bx)$.

对②两边求导得

$$a f_x(ax, bx) + b f_y(ax, bx) = a$$

对①③两边求导得

$$a f_{xx}(ax, bx) + b f_{xy}(ax, bx) = 2bx \qquad ④$$

$$a^2 f_{xx}(ax, bx) + 2ab f_{xy}(ax, bx) + b^2 f_{yy}(ax, bx)$$

结合①得 $f_{xy}(ax, bx) = 0$，将之代入④得

$$f_{xx}(ax, bx) = \frac{2b}{a} x,$$

再将之代入①得 $f_{yy}(ax, bx) = -\frac{2a}{b} x.$

隐函数存在定理与求导

(一)隐函数存在定理

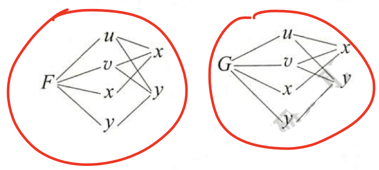
1. 一个方程的情形

设 $F(x,y,z)=0$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$，若满足①$F(P_0)=0$；②$F'_z(P_0)\neq 0$，则在 P_0 的某邻域内可确定 $z=z(x,y)$，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

2. 方程组的情形

设$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0.\end{cases}$若记$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$（以后同），当满足$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$时，可确定$\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y).\end{cases}$其复合结构图为



且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

记不住的话
就要能看图写式子.

思想：视 $F(x,y)=0$ 为方程，x 为已知量，可解出 y 作为未知量.

1中：①$F(P_0)=0$ ⇝ F 在 P_0 处满足方程.

②$F_x(P_0)\neq 0$ ⇝ 这一定是一个以 x 为已知量的方程

（若 $F_x=0$，则与 x 无关，意味着已知量 x 无处可用）.

2中：$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$ 可理解为：

F 与 u,v 间的关联方式不能与 G 与 u,v 间的关联方式一样

（否则会导致方程相消，已知量 u 不能充分发挥作用，

这样就不是以解未知量 v）.

(二) 隐函数求导

例1: 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x-y,y-z)=0$ 确定的隐函数.

求 z_x, z_y, z_{xy}.

① 先求 z_x. 在 $F(x-y,y-z)=0$ 两侧对 x 求导, 得

$$F_1 - z_x F_2 = 0 \Rightarrow z_x = \frac{F_1}{F_2}.$$

② 求 z_y. 可用公式 $z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-F_1+F_2}{-F_2} = \frac{F_2-F_1}{F_2}$.

③ 求 z_{xy}.

在 $F_1 - z_x F_2 = 0$ 两边对 y 求导, 得

$$-F_{11} + F_{12}(1-z_y) - \left((-F_{21}+F_{22}(1-z_y))z_x + F_2 z_{xy}\right)=0$$

将 z_y, z_x 表达式代入, 有

$$-F_{11} + F_{12}\cdot\frac{F_1}{F_2} - \left((-F_{21}+F_{22}\cdot\frac{F_1}{F_2})\cdot\frac{F_1}{F_2} + F_2 z_{xy}\right)=0.$$

$$\Rightarrow z_{xy} = \frac{1}{F_2^3}(2F_1F_2F_{12} - F_2^2F_{11} - F_1^2F_{22})$$

也可先在 $F_1-F_2+F_2 z_y=0$ 两边对 x 求导, 然后解出 z_{xy}.

(三) 求已知函数组所确定的隐函数组之导数

例1: 设 $u(x,y)$ 由方程组 $u=f(x,y,z,t)$. $g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ 确定.

且 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$. 求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解法1: 先认清函数关系

因为 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$,

$g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ $\rightsquigarrow$ z,t 为 y 的函数

$\Rightarrow$ $u=$ 以 z,t 为中间变量的 x,y 的函数.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2 + f_3 z'(y) + f_4 t'(y).$$

代入

对原方程关于 y 求导:

$$g_y + g_z z' + g_t t' = 0$$

$$h_z z' + h_t t' = 0$$

$$\Rightarrow \quad z' = -g_y h_t \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}, \quad t' = g_y h_z \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_y - g_y (f_z h_t - f_t h_z) \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}.$$

解法2: 直接考虑方程组

$$F(x,y,z,t;u) = 0, \quad g(y,z,t) = 0, \quad h(z,t) = 0,$$

其中 $F(x,y,z,t,u) = u - f(x,y,z,t)$. 由于

$$\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(u,z,t)} = \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0.$$

$\Rightarrow$ 可视 x, y 为自变量, u, z, t 为 x, y 之函数

对3个方程关于 y 求导: $u_y - f_y - f_z z_y - f_t t_y = 0$

$$g_y + g_z z_y + g_t t_y = 0$$

$$h_z z_y + h_t t_y = 0$$

解三个方程得到结果.

例2: 设 $x = \cos\varphi \cos\psi$, $y = \cos\varphi \sin\psi$, $z = \sin\varphi$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法1:

$$\begin{tikzcd} & & x \arrow[dl] \\ z & \varphi \arrow[l] & \\ & & y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

前两个方程 $\Rightarrow \varphi = \varphi(x,y), \ \psi = \psi(x,y)$

$$\Rightarrow z = \sin\varphi = \sin\varphi(x,y).$$

$$\Rightarrow z_x = \cos\varphi \cdot \varphi_x$$

前两个方程对 x 求导

$$\rightsquigarrow\ 1=-\sin\varphi\cdot\varphi_x\cos\psi+\cos\varphi(-\sin\psi)\psi_x$$

$$0=-\sin\varphi\cdot\varphi_x\sin\psi+\cos\varphi\cdot\cos\psi\cdot\psi_x.$$

$$\Rightarrow\ \varphi_x=-\cos\psi/\sin\varphi,\quad \psi_x=-\sin\psi/\cos\varphi.$$

代入 $z_x=\cos\varphi\cdot\varphi_x=-\cot\varphi\cdot\cos\psi$

对 x 求导 $\Rightarrow\ z_{xx}=\dfrac{\cos^2\varphi\sin^2\psi-1}{\sin^3\varphi}$.

解法2：找方程. 观察：$x^2+y^2+z^2=1$,

两边对 x 求两次导　　(y,x 是独立变量)

$$x+zz_x=0,\quad 1+z_x^2+zz_{xx}=0$$

$$\Rightarrow\ z_x=-\frac{x}{z},$$

$$z_{xx}=-\frac{z^2+x^2}{z^3}=\frac{y^2-1}{z^3}=\frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi-1}{\sin^3\varphi}.$$

例3：设 $u=f(x-ut,y-ut,z-ut)$, $g(x,y,z)=0$. 试求 u_x,u_y.

这时 t 是自变量 or 因变量？

两个方程确定两个隐函数.

第一个是 u. 第二个？

由第二个方程，为 z.

$\Rightarrow$ t 是自变量.

分别关于 x 求导得.

$$u_x=f_1(1-u_xt)+f_2(-u_xt)+f_3(z_x-u_xt)$$

$$g_1+g_3z_x=0.$$

解此方程组得

$$u_x=\frac{f_1+f_3\left(-\frac{g_1}{g_3}\right)}{1+(f_1+f_2+f_3)t},\quad u_y=\frac{f_2+f_3\left(-\frac{g_2}{g_3}\right)}{1+(f_1+f_2+f_3)t}.$$