2022 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（决赛）

广东　深圳

第二天

2022 年 12 月 30 日 8:00–12:30

4. 求最小的整数 $n \geqslant 3$, 满足: 平面上存在 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 其中任意三点不共线, 且对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$, 存在 $1 \leqslant j \leqslant n$ $(j \neq i)$, 使得线段 A_jA_{j+1} 经过线段 A_iA_{i+1} 的中点. 这里 $A_{n+1} = A_1$.

5. 证明存在正数 C, 使得如下结论成立:

对任意一个无穷多项的正整数等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 若 a_1 和 a_2 的最大公约数无平方因子, 则存在正整数 $m \leqslant C \cdot a_2^2$, 使得 a_m 无平方因子.

注: 称正整数 N 无平方因子, 若它不被任何大于 1 的平方数整除.

6. 有 n $(n \geqslant 8)$ 座机场, 某些机场之间有单向直达航线. 对任意两座机场 a, b, 从 a 飞往 b 的单向直达航线至多一条 (可能同时有从 a 飞往 b 的和从 b 飞往 a 的单向直达航线). 已知对任意由若干座机场构成的集合 A $(1 \leqslant |A| \leqslant n-1)$, 都有至少 $4 \cdot \min\{|A|, n-|A|\}$ 条单向直达航线从 A 中的机场飞往 A 之外的机场.

证明: 对任意一座机场 x, 都可以从 x 出发, 经过不超过 $\sqrt{2n}$ 条单向直达航线回到机场 x.