数学模型 Lecture Notes

Zhennan Zhou

2021 年 5 月 8 日

PRELIMINARY DRAFT. NOT FOR WIDE CIRCULATION.
参考：教材二第6章。

7 微扰法和渐进分析简介

I think that it is a relatively good approximation to truth — which is much too complicated to allow anything but approximations — that mathematical ideas originate in empirics.

—John von Neumann, *The Mathematician.*

在上一章中，我们学习了无量纲化，即把有量纲的物理问题转化成无量纲的数学模型。我们知道，无量纲的参数反映了各种物理效果的相对重要性。在不知道这些无量纲参数的大小时，我们可以通过解析的或者数值的方法求出问题的解。但是，如果我们已知一些无量纲参数是相对的大，或者相对的小，所谓的**渐进方法**可以帮我们求解问题的近似解。

渐进方法提供了一套系统的手段来构造形如下面问题的近似解：

$$F(\boldsymbol{x},\varepsilon)=0,\quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=H(\boldsymbol{x},\varepsilon),\quad \text{when}\quad \varepsilon\ll 1. \tag{7.1}$$

这里，ε 叫做渐进参数，我们感兴趣的是 $\varepsilon\ll 1$ 的情形。构造近似解是通过引入**渐进展开**来实现的，即原问题可以分解为一序列的子问题。子问题往往更容易求解，而且我们可以把子问题的解组合成原问题的近似解。

注意，虽然以上的步骤听起来很像线性叠加原理，但事实上，渐进方法的强大之处在于它可以处理很多的非线性问题。

7.1 渐近展开

首先我们回顾一些微积分中一些有关极限的定义和理解。注意，一些定义的名称也许会和数学分析中的有所不同。

- $f(\varepsilon)$ 和 $g(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon\to 0$ 时被称为是渐进等价的，如果

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}=1.$$

  我们记作 $f\sim g$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时。注意，渐进等价关系方便我们表示一类等价的函数，例如在 $\varepsilon\to 0$ 时，$\cos(\sqrt{\varepsilon})\sim(1-\varepsilon/2)\sim(1+\varepsilon)\sim e^{\varepsilon}$.

- 在 $\varepsilon\to 0$时，$f=O(g)$，如果存在有限的 A，使得对于足够小的 ε 有

$$|f|\le A|g|.$$

这使得我们方便更精确地刻画极限值有限、极限值为无穷时的函数的渐进行为，例如$f=O(1)$，$f=O(\varepsilon^{-1})$, $f=O(\varepsilon^2)$。

- 在 $\varepsilon\to 0$时，$f=o(g)$，如果
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}=0.$$
我们常用 $o(\cdot)$ 表示高阶小项。

下面我们引入**渐近展开**。考虑函数 $x(t,\varepsilon)$，它有如下“分离变量”类型的级数展开

$$x(t,\varepsilon)=\delta_0(\varepsilon)x_0(t)+\delta_1(\varepsilon)x_1(t)+\delta_2(\varepsilon)x_2(t)+\cdots \tag{7.2}$$

这里，我们假设所有的系数 $x_n=O(1)$（至少当 t 在一定范围内），而度规函数 $\{\delta_n(\varepsilon)\}$ 满足下面的序列关系

$$\delta_0(\varepsilon)\gg\delta_1(\varepsilon)\gg\delta_2(\varepsilon)\gg\cdots \tag{7.3}$$

我们称 (7.2) 和 (7.3) 为渐进展开 (Asymptotic expansion, AE) 的基本形式。在 AE 中的第一项被称为首项（或首阶项），而我们显然有，$x\sim\delta_0x_0$。

关于，对于 AE 的理解，我们需要注意下面几个方面

1. 对于简单的渐进展开，我们通过求 Taylor 级数得到。
2. 对于一般的情况，度规函数不一定是由 ε^n 组成。此时，我们需要同时求解度规函数和系数。
3. （可能是最反直觉的一点）渐近展开中的级数有可能是发散的。但是在 $\varepsilon\ll 1$ 时，其部分和仍然可能提供了很精确的近似。

为了理解渐近展开的第三条性质，我们考虑下面的例子。如下的积分

$$I(\varepsilon)=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{1+\varepsilon t}dt, \tag{7.4}$$

在很多积分变换和特殊函数中非常常见。(如有兴趣了解更多，请参考教材二。)

如果我们对 (7.4) 中的被积函数进行 Taylor 展开，然后通过积分，我们就会得到如下渐进展开

$$I(\varepsilon)\sim 1-\varepsilon+2\varepsilon^2-6\varepsilon^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!\varepsilon^n. \tag{7.5}$$

我们不难验证，这个级数的收敛半径为 0，换句话说，这个级数对于所有的 $|\varepsilon|>0$ 都是发散的。但是在图 [1] 中，我们又观察到，在 ε 较小时，部分和对真实值的逼近效果是非常好的。从图 [1] 中，我们也观察到，对于 $\varepsilon=0.1$ 时，前 10 项左右的部分和的逼近效果是最好的。

总结来看的话，渐进展开在 $\varepsilon\to 0$ 时总是精确的，但是对于有限大小的 ε, 存在能够减少误差的最优截断。而事实上，在多数情况下，渐进展开的前几项和已经能够给出很好的逼近了。渐近展开的逼近理论很多时候跟 $\varepsilon\to 0$ 和 $n\to\infty$ 这两个极限的关系有关。本门课中，我们不细究逼近理论，而是着重于学习如何用这套方法近似地解方程。

7.2 渐进展开的计算

我们希望构造形如 (7.1) 中问题的渐近展开解。我们先考虑形如 $F(x,\varepsilon)=0$ 的代数方程。这时候，渐近展开 (7.2) 中的系数 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 只是常数，即

$$x(\varepsilon)=\delta_0(\varepsilon)x_0+\delta_1(\varepsilon)x_1+\delta_2(\varepsilon)x_2+\cdots$$

在 $\varepsilon\to 0$ 的极限下，问题的解，按照其渐近展开的形式，一般可以分成如下几类

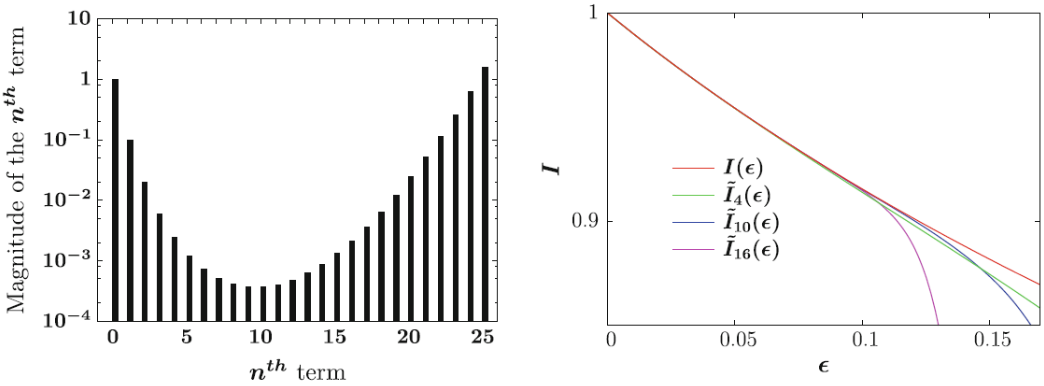

图 1: 左图: $\varepsilon = 0.1$ 时，各阶项的大小。右图：部分和和真实值的比较。

- Regular（非奇异） solutions. $\lim_{\varepsilon\to 0} x = x_0$，即解有限的极限。如果 $x_0 \neq 0$，则首项的度规函数 $\delta_0 = 1$。
- Vanishing solutions. $\lim_{\varepsilon\to 0} x = 0$，即解的极限为 0。此时，首相的度规函数 $\delta_0 \ll 1$。
- Singular（奇异） solutions. $\lim_{\varepsilon\to 0} |x| = \infty$。我们一般认为这种情况对应了有限大小的 x_0 而 $\delta_0(\varepsilon) \gg 1$。

下面，我们介绍构造渐进展开解的两种方法：展开法和迭代法。

考虑如下的二次方程

$$x^2 - x + \frac{1}{4}\varepsilon = 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{7.6}$$

它的精确解是

$$X_A = \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{2}, \quad X_B = \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{2}.$$

我们通过 Taylor 展开得到

$$X_A = 1 - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \cdots = O(1), \tag{7.7}$$

$$X_B = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \cdots = O(\varepsilon). \tag{7.8}$$

我们注意到当 $\varepsilon \ll 1$ 时，方程 (7.6) 可以近似看成是 $x^2 - x \approx 0$，于是有 $x \approx 0, 1$。也就是说，方程 (7.6) 的前两项的平衡决定了解的大体位置，而第三项只是稍微修改了解的值。

这是一个典型的 regular（非奇异）微扰（或称摄动，perturbation）问题，在 $\varepsilon \to 0$ 时，只有良定义的非奇异解。对这个问题，我们已经知道了解的所有信息，现在我们以这个问题为例，介绍这两种方法。

展开法

在不知道精确解的情况下，我们假设，解是非奇异的，并且 $\delta_n = \varepsilon^n, n = 0, 1, \cdots$，于是我们相当于假设解具有下面的形式

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \tag{7.9}$$

将 (7.9) 代入 (7.6)，得

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots)^2 - (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots) + \frac{1}{4}\varepsilon = 0.$$

按照 ε 的幂函数的阶数分类，我们得到

$$\left(x_0^2-x_0\right)+\varepsilon\left(2x_0x_1-x_1+\frac{1}{4}\right)+\varepsilon^2\left(x_1^2+2x_0x_2-x_2\right)+\cdots=0.$$

我们假设所有的系数都是 $O(1)$ 的，那么，为了使每一阶 ε^n 的系数平衡，我们依次得到下面的方程组

$$O(\varepsilon^0):\quad x_0^2-x_0=0, \tag{7.10}$$

$$O(\varepsilon^1):\quad 2x_0x_1-x_1+\frac{1}{4}=0, \tag{7.11}$$

$$O(\varepsilon^2):\quad x_1^2+2x_0x_2-x_2=0\cdots \tag{7.12}$$

(7.13)

通过依次求解，我们得到

$$x_0=1,\,x_1=-\frac{1}{4},\,x_2=-\frac{1}{16}\cdots\quad\text{or}\quad x_0=0,\,x_1=\frac{1}{4},\,x_2=\frac{1}{16}\cdots$$

对照精确解可以验证，我们得到了原问题两个解的渐进展开。

展开法非常简单，但是非常依赖于对解的假设。例如下面的问题

$$(x-1)^2-9\varepsilon=0, \tag{7.14}$$

就不能通过展开法求解。显然，此问题的精确解是 $x=1\pm3\sqrt{\varepsilon}$，并不满足我们对度规函数的假设。

迭代法

不同于展开法，迭代法不再假设渐近展开的形式，而系数和度规函数都是（依次）待定的。这里我们先做两个基本假设

- 每个非平凡的解（平凡解是 $x\equiv0$，即所有的 $x_n=0$）的首项是非平凡的：$x_0\neq0$ 且 $\delta_0\neq0$。
- 首项的系数是有限的，即在 $\varepsilon\to0$ 时 $x_0=O(1)$。

我们还是以 (7.6) 为例，先设 $x\sim x_0\delta_0(\varepsilon)$，代入方程得

$$x_0^2\delta_0^2-x_0\delta_0+\frac{1}{4}\varepsilon=0. \tag{7.15}$$

我们认为此方程中不是所有的项都是同样重要的，否则这也不是一个微扰问题了。为了近似求解此方程，我们使用如下的**主项平衡原理（principle of dominant balance）**：方程中的一些项为主项，它们的平衡给出领阶方程；剩下的项是次要项，它们在 $\varepsilon\to0$ 时是主项的高阶小量。如果这种平衡存在，我们也把它称为 distinguished limit。

显然，在(7.15)中，如果主项只有一项的话，只有无解或者平凡解的情况，如果主项是全部三项的话，方程也是无解的。（想想为什么，请大家自己完成练习。）

对于主项有两项的情况，我们考虑下面三种可能性（注意，由于系数都是 $O(1)$ 的，我们要先保证阶数的匹配）

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \text{Term (1,2)}: & \delta_0^2=\delta_0 \quad\Rightarrow\quad \delta_0=1\\
\text{(b)} & \text{Term (1,3)}: & \delta_0^2=\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \delta_0=\sqrt{\varepsilon}\\
\text{(c)} & \text{Term (2,3)}: & \delta_0=\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \delta_0=\varepsilon
\end{array}$$

下面，我们要继续验证，是不是余下的项是不是真的是次要项。容易发现，(b) 违反了主项平衡原理，而 (a) 和 (c) 是两个合理的主项平衡（我们也说，(a) 和(c) 是 distinguished limits）。

而对于 (a) 和 (c)，我们可以进一步的通过领阶方程得到首项系数 x_0，即

$$(a): \quad x \sim 1, \qquad (c): \quad x \sim \frac{1}{4}\varepsilon.$$

我们发现， (a) 和 (c) 分别对应了精确解 x_A 和 x_B，即 $x_A \sim 1$，$x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon$。

更高阶的项可以通过重复上述的步骤得到，得到寻找主项平衡（或称distinguished limits）找到度规函数 $\delta_i(\varepsilon)$ 并找到对应的系数 x_i。但是要注意，依次找到的度规函数需要满足渐进的序列关系。例如，对于 x_B, 在求得了 $x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon$ 之后，可以依次地假设并求解

$$x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon + \delta_{1B} x_{1B}, \quad x_B \sim \frac{1}{4}\varepsilon + \delta_{1B} x_{1B} + \delta_{2B} x_{2B} \cdots$$

在逐项求解中，除了要注意逐项平衡原理，还应该注意 $\varepsilon \gg \delta_{1B} \gg \delta_{2B}$。

回到问题 (7.14)，虽然展开法不再好用，但是使用迭代法，我们可以依次得到 $x \sim x_0\delta_0(\varepsilon) + x_1\delta_1(\varepsilon)$。这里度规函数为 $\delta_0 = 1$，$\delta_1 = \sqrt{\varepsilon}$，而系数为 $x_0 = 1, 1$，$x_1 = \pm 3$。而更高阶项的系数只有 $x_i = 0,\ i = 2, 3, \cdots$。（练习）

7.3 ODE 问题的非奇异展开

我们可以讲展开法和迭代法推广到 ODE 和 PDE 问题中。需要注意的是，跟上一节的代数方程不同，对微分方程问题解求渐进展开的时候，在每一阶中，我们需要确定一个方程，而不只是一个常数，即

$$x(t,\varepsilon) = \delta_0(\varepsilon)x_0(t) + \delta_1(\varepsilon)x_1(t) + \delta_2(\varepsilon)x_2(t) + \cdots$$

我们回顾上一章节学习的抛射问题，在无量纲化之后，我们可以得到如下的含参数的 ODE 初值问题

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = \alpha.$$

注意，这里的初值条件跟上一章中略有不同，但是所有的参数都是无量纲的。我们考虑 $\varepsilon \to 0$ 的情形，利用展开法，假设有如下的渐进展开形式

$$x(t) \sim x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots.$$

下一步要将这个展开形式代入方程和初值条件中。

ODE 的左端部分如下

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x_0''(t) + \varepsilon x_1''(t) + \varepsilon^2 x_2''(t) + \cdots.$$

对于 ODE 的右端，我们先按照 ε 对其展开

$$-\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2} = -1 + 2\varepsilon x - 3\varepsilon^2 x^2 + \cdots$$

然后我们利用这个展开形式将右端进一步展开

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -1 + 2\varepsilon\left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots\right) - 3\varepsilon^2\left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots\right)^2 + \cdots \\ &= -1 + \varepsilon(2x_0) + \varepsilon^2\left(2x_1 - 3x_0^2\right) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

我们也对初值进行渐进展开，从而推导出 x_n 满足的初值条件：

$$\begin{aligned}x(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \varepsilon^2 x_2(0) + \cdots = 1 + \varepsilon 0 + \varepsilon^2 0 + \cdots \\ x'(0) = \alpha \quad &\Rightarrow \quad x_0'(0) + \varepsilon x_1'(0) + \varepsilon^2 x_2'(0) + \cdots = \alpha + \varepsilon 0 + \varepsilon^2 0 + \cdots.\end{aligned}$$

这样，我们就可以把原 ODE 问题按照 ε 的阶数，分解成了若干的子问题

$$\begin{aligned}
&O\left(\varepsilon^0\right): \quad x_0'' = -1, \quad x_0(0) = 1, \quad x_0'(0) = \alpha; \\
&O\left(\varepsilon^1\right): \quad x_1'' = 2x_0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0; \\
&O\left(\varepsilon^2\right): \quad x_2'' = 2x_1 - 3x_0^2, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0; \quad \cdots
\end{aligned}$$

我们注意到，高阶问题依赖于低阶问题的解，所以我们可以由低到高地依次求解子问题。

我们先求解 $O\left(\varepsilon^0\right)$ 的问题，就会得到领阶问题的解

$$x_0(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \alpha t + 1.$$

将 x_0 代入$O\left(\varepsilon^1\right)$ 的问题，就会得到

$$x_1'' = -t^2 + 2\alpha t + 2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0.$$

求解此子问题，我们得到

$$x_1(t) = -\frac{1}{12}t^4 + \frac{\alpha}{3}t^3 + t^2.$$

类似地，我们可以求解更高阶的子问题。

于是，我们可以将渐近展开的解整合成如下的形式

$$x(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2 + \alpha t + 1\right) + \varepsilon\left(-\frac{1}{12}t^4 + \frac{\alpha}{3}t^3 + t^2\right) + O(\varepsilon^2).$$

作为本节的结束，我们考虑如下的问题：当我们对 ODE 求渐进展开解的时候，是否这个渐进展开对于所有的 t 都成立呢？这个答案显然是否定的。例如，在这个例子中，当 $t = O(1/\sqrt{\varepsilon})$ 时，

$$O(x_0) = O(\varepsilon x_1) = O(1/\varepsilon).$$

这时候，我们渐进展开的假设已经被违反了。这种渐进展开的破缺，往往伴随了问题中一个新的尺度的出现。我们在下一节的奇异微扰问题中，会进一步讨论这个问题。

7.4 奇异微扰问题

如果问题的一个或者多个解在 $\varepsilon \to 0$ 时表现出奇异（发散）的行为，那么这样的问题是奇异微扰问题。

如果我们用非奇异的问题的渐进展开来求解奇异的问题时，奇异解是无法得到的，于是只能得到原问题的部分解，甚至什么解都得不到。

这种行为在所有类别的奇异微扰问题中是普遍存在的：

- 对于代数方程来说，如果一个 N 阶多项式在 $\varepsilon \to 0$ 时，它的领阶方程退化为了一个 M $(M < N)$ 阶的多项式，那么这是一个奇异微扰问题，而方程只有 M 个非奇异解。
- 对于微分方程来说，如果在 $\varepsilon \to 0$ 时出现了高阶导数的消失，那么领阶方程的解一般不能满足所有的初值或者边值条件。
- 在其他一些情况中，$\varepsilon = 0$ 时的领阶问题会和原问题 ($\varepsilon > 0$时) 有更本质的不同，比如，一个奇异的 PDE 问题退化成 ODE 问题，一个奇异的 ODE 问题退化问代数方程问题，甚至一个方程组退化成一个方程。

事实上，奇异的解并没有真的丢失掉，而是可以通过适当的尺度调节 (rescaling) 将它们复原出来。换句话说，尺度的选择，和渐近展开的形式决定了你能得到什么样的解。

我们还是先以一个可以直接求解的例子来来演绎尺度条件的方法。考虑在 $\varepsilon\to 0$ 时，如下的代数方程

$$\varepsilon x^2-2x+1=0. \tag{7.16}$$

如果我们直接将 $\varepsilon=0$ 代入的话，就得到了

$$-2x+1=0 \quad \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

可见，领阶方程只有一个根，而原问题有两个根。利用求根公式，我们知道，

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

于是，我们直接得到两个根的渐进展开

$$x_A\sim\frac{2}{\varepsilon}-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{8},\quad x_B\sim\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon^2}{16}.$$

我们观察，领阶方程只能得到非奇异解 x_B 的首项，而 x_A 在 $\varepsilon\to 0$ 时是发散的，并不能被非奇异的渐近展开表示出来。

我们讲这两个根的首项代回原方程，得到

$$x_A:\quad \varepsilon\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2-2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+1=0,\quad x_B:\quad \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=0.$$

这使得我们可以进一步观察差别的原因。

我们注意到，这两个解对应了不同的主项平衡。对于 x_A 来说，前两项是主项，而对于 x_B 来说，后两项是主项。而如果解非奇异，我们也会得到后两项是主项，这对应了 x_B 的确是非奇异解。

下面我们介绍处理奇异解的系统步骤：

1. 令 $x=\delta_0(\varepsilon)X$，并代入原问题。
2. 根据主项平衡原理选取 $\delta_0(x)$（包括验证被忽略的项的确是次要项）。考虑所有 $\delta_0(x)$ 的可能性，这对应了原问题的所有非奇异解和奇异解。
3. 对于给定的 $\delta_0(x)$，得到关于 X 的非奇异扰动问题。利用非奇异扰动问题的方法求解。（展开法或者迭代法。）
4. 通过 δ_0 的调整，得到 x 解的最终形式。

下面我们通过上面的例子来演示这个方法。将 $x=\delta_0(\varepsilon)X$ 代入 (7.16)，我们得

$$\varepsilon\delta_0^2X^2-2\delta_0X+1=0. \tag{7.17}$$

对于主项有两项的情况，我们考虑下面三种可能性（注意，由于系数都是 $O(1)$ 的，我们要先保证阶数的匹配）

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \text{Term (1,2)}:\quad \varepsilon\delta_0^2=\delta_0 \quad\Rightarrow\quad \delta_0=1/\varepsilon\\
&\text{(b)}\quad \text{Term (1,3)}:\quad \varepsilon\delta_0^2=1 \quad\Rightarrow\quad \delta_0=1/\sqrt{\varepsilon}\\
&\text{(c)}\quad \text{Term (2,3)}:\quad \delta_0=1 \quad\Rightarrow\quad \delta_0=1.
\end{aligned}$$

容易验证，case (b) 并不满足主项平衡原理，应该舍去。而 case (a) 和 (c) 满足主项平衡原理，期中 case (c) 对应了非奇异解，case (a) 对应了奇异解。我们下面只看奇异解的情况。将 $x = X/\varepsilon$ 代入原问题，得到调整尺度后的非奇异问题

$$X^2 - 2X + \varepsilon = 0.$$

下面我们用展开法，设 $X(\varepsilon)$ 满足如下的渐进展开形式

$$X \sim X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2.$$

将这个展开代入方程，其首阶部分为

$$X_0^2 - 2X_0 = 0.$$

它的解为 $X_0 = 0$ 和 $X_0 = 2$。我们舍掉平凡的情况，$X_0 = 0$，而只考虑 $X_0 = 2$。这样我们就得到了奇异解的首项

$$x_A \sim 2/\varepsilon.$$

我们可以比较一下迭代法和这里介绍的尺度调节法的相同与不同。相同点是，他们都需要需要寻找首项的度规函数 δ_0，各阶的系数也是一样的。（原因可以由下面的展开容易看出。）

不同的地方是，迭代法是依次的求解度规函数和系数，最终解可以表示为

$$x \sim \delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \cdots$$

而尺度调节法是把整个问题转化成另外一个非奇异的微扰问题 $X(\varepsilon)$，下一步可以用迭代法或者展开法得到

$$X(\varepsilon) \sim X_0 + \tilde{\delta}_1 X_1 + \tilde{\delta}_2 X_2 + \cdots$$

而经过整合后，则有

$$x \sim \delta_0 \left(X_0 + \tilde{\delta}_1 X_1 + \tilde{\delta}_2 X_2 + \cdots \right).$$

其实对于代数方程来说，差别并不大……但是对于微分方程来说，尺度调节法往往更适用。

7.5 ODE 奇异扰动问题的例子

最后我们看一个 ODE 奇异扰动问题的例子。回顾一下第二章学习的一个简单的酶催化的化学反应过程

$$S + E \underset{k_1}{\overset{k_2}{\leftrightarrows}} C \xrightarrow{k_3} P + E. \tag{7.18}$$

这里的 S 是底物 ("substrate" reactant) 的浓度，P 是最终产物的浓度，E 来表示酶的浓度，C 是中间产物的浓度。

根据质量作用定律，我们得到反应速率方程组

$$\frac{dP}{dt} = k_3 C, \quad \frac{dC}{dt} = k_1 SE - k_2 C - k_3 C.$$

$$\frac{dC}{dt} = -k_1 SE + k_2 C, \quad \frac{dE}{dt} = -k_1 SE + k_2 C + k_3 C.$$

我们进一步假设，最初系统里只有底物和酶，因为，我们给出如下的初值

$$S(0) = S_0, \quad E(0) = E_0, \quad C(0) = 0, \quad P(0) = 0.$$

利用质量守恒律，我们容易推出 $E(t)=E_0-C(t)$。再对系统进行无量纲化，我们可以得到无量纲化的初值问题（练习）

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -s(1-c)+\lambda c, & s(0)&=1,\\ \varepsilon\frac{dc}{dt} &= +s(1-c)-\mu c, & c(0)&=0,\\ \frac{dp}{dt} &= (\mu-\lambda)c, & p(0)&=0. \end{aligned}$$

这里我们对无量纲参数有如下的假设

$$\varepsilon=\frac{E_0}{S_0}\ll 1,\quad \lambda=\frac{k_2}{k_1S_0}=O(1),\quad \mu=\frac{k_2+k_3}{k_1S_0}=O(1).$$

这个假设说明，初始时刻酶的量远小于底物的量。注意，s 和 c 的方程并不依赖于 p，所以我们不妨只考虑 s 和 c 的初值问题。

在 $\varepsilon\to 0$ 时，这是一个奇异微扰问题，因为 c 的方程会从一个一阶微分方程退化成一个代数方程。我们先假设方程的解满足非奇异的展开

$$s(t)=s_0(t)+O(\varepsilon),\quad c(t)=c_0(t)+O(\varepsilon).$$

将展开代入原问题，我们得到如下的领阶方程

$$\frac{ds_0}{dt}=-s_0(1-c_0)+\lambda c_0,\quad 0=s_0(1-c_0)+\mu c_0.$$

而且我们容易得到首项的初值条件

$$s_0(0)=1,\quad c_0(0)=0.$$

显然，这个初值条件和领阶方程中的代数方程是矛盾的。所以直接的非奇异的展开并不能帮我们求解此问题。

事实上，c 的方程由微分方程退化成代数方程对应了所谓的“拟稳态”（quasi-steady state）。我们可以认为，$c_0(t)$ 由 $s_0(t)$通过代数方程

$$c_0=\frac{s_0}{s_0+\mu}$$

决定，再将 c_0 的表达式带入微分方程，得

$$\frac{ds_0}{dt}=-\frac{(\mu-\lambda)s_0}{s_0+\mu}.$$

这样我们就得到了著名的米氏酶动力学方程。另外的，右端这种形如

$$f(x;v,k)=\frac{vx}{k+x}$$

的函数被称为米氏函数。

在这样的“拟稳态”动力学过程中，s_0 满足自己独立的动力学方程，而 $c_0(t)$ 的值完全由 $s_0(t)$ 的值决定。如上的分析似乎告诉我们应该把这个“拟稳态”的问题的初值条件修正成

$$s_0(0)=1,\quad c_0(0)=\frac{1}{1+\mu}.$$

事实上，“拟稳态”近似在 $t\approx 0$ 时是不对的，因为当 $t=0$ 时，$\frac{dc}{dt}=O(\varepsilon^{-1})$，所以如果不进行尺度调节，我们将无法捕捉**反应初期快尺度的动力学行为**。

为此，我们引入快变的时间变量 $\sigma=\frac{t}{\varepsilon}$，并引入快尺度下的状态变量函数

$$\sigma=\frac{t}{\varepsilon},\quad S(\sigma)=s(\sigma\varepsilon),\quad C(\sigma)=c(\sigma\varepsilon).$$

于是我们得到尺度调节后的系统

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{d\sigma} &= \varepsilon\left(-S(1-C)+\lambda C\right), && S(0)=1,\\
\frac{dC}{d\sigma} &= +S(1-C)-\mu C, && C(0)=0.
\end{aligned}
$$

我们对它做非奇异的渐进展开，得领阶部分 $S\sim S_0$，$C\sim C_0$ 满足

$$S_0(\sigma)\equiv 1,\quad C_0(\sigma)=\frac{1-e^{-(1+\mu)\sigma}}{1+\mu}.$$

注意到，

$$\lim_{\sigma\to\infty} S_0 = 1,\quad \lim_{\sigma\to\infty} C_0=\frac{1}{1+\mu}.$$

即有

$$\lim_{\sigma\to\infty} S_0(\sigma)=s_0(0),\quad \lim_{\sigma\to\infty} C_0(\sigma)=c_0(0).$$

我们称系统在时间尺度 t 下的解为该奇异扰动问题的外部解，在时间尺度 σ 下的解为内部解。我们注意到，这两个渐进解在 $\sigma=\infty$ 和 $t=0$ 时恰好匹配了。

更高级的尺度调节法超出了本课的内容范围。感兴趣的同学欢迎参阅教材二的第7，8，9，10章。另外，也可以参考这个教材

`https://www.amazon.com/Advanced-Mathematical-Methods-Scientists-Engineers/dp/0387989315/ref=la_B001IQUJ56_1_1?s=books&ie=UTF8&qid=1522077321&sr=1-1`