3. 无穷小量与无穷大量

§0 导引

例 设 $f(x)\to A\ (x\to a)$,

若 $y=f(x)=A$(常数), 则极限值 = 某函数值.

若 $y=f(x)=\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}\neq 0\ (x\to+\infty)$, 但 $y\to 0\ (x\to+\infty)$ $\leadsto$ 极限值 ≠ 函数值

$\leadsto$ 极限是无限接近但不一定能达到的值.

① 无穷小并不是一个非常小的数

e.g. $G=6.67\times10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2$ $\leadsto$ $\varepsilon=G\times10^{-1}>0$ 更小.

② 大小比较不讨论正负 (either 等于 or 无限接近 0).

§1 无穷小量

定义1 设 $\alpha(x)$ 为 x 的函数. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ $\quad(x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$

则称 $\alpha(x)$ 在 $x\to x_0$ 时无穷小.

注: ① 无穷小的本质是什么?

(是一个函数, 而且以 0 作为某处的极限值).

② 0 是否为无穷小?

检验: (i) 0 是常函数

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} 0=0\quad(x_0=0)$

事实上, 0 是最高阶无穷小, $\lim\limits_{x\to\square}\frac{0}{\text{其它函数}}=0$.

③ 若 $\alpha(x)\neq 0$, 则 $\alpha(x)$ 是否为无穷小与自变量的趋向过程有关.

E.g. $\alpha(x)=x-1$: $\quad x\to 1$, $\alpha(x)\to 0$, $\alpha(x)$ 是无穷小

$x\to 2$, $\alpha(x)\to 1$, $\alpha(x)$ 不是无穷小

定义2 (无穷小的 $\varepsilon-\delta$ 定义) 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ s.t. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|\alpha(x)|<\varepsilon$,

则称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小.

§2 无穷小的性质

Ⓐ 两个无穷小的和或差仍是无穷小.

即 $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ $(x\to x_0)$ (记 $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(x)$), 则 $\alpha\pm\beta\to 0$ $(x\to x_0)$.

证明 $\forall \varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$, 有

$\exists \delta_1>0$ s.t. 在 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有 $|\alpha|<\varepsilon$ ①

而 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0 \Rightarrow \exists \delta_2>0$ s.t. 在 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时, $|\beta|<\varepsilon$ ②

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, ①② 同时成立

$\Rightarrow$ $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|\alpha\pm\beta|\le|\alpha|+|\beta|<2\varepsilon$

也可任意小.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(\alpha\pm\beta)=0$

推广 有限个无穷小之和/差仍是无穷小.

Ⓑ 有界函数 × 无穷小 = 无穷小.

证明 设 u 在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有界, 即 $\exists M>0$ 使

$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$, $|u(x)|\le M$ ①

设 $\alpha\to 0$ $(x\to x_0)$, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_2>0$ s.t. 在 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时

有 $|\alpha|\le\dfrac{\varepsilon}{M}$ ②

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, ①② 同时成立.

$\Rightarrow |u\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$ (可任意小). □

例1 (1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}=0$,

无穷小 有界

(2) 若 $\alpha \to 0\ (x \to x_0)$，则 $k\alpha \to 0\ (x \to x_0)$

(3) $\boxed{\text{无穷小} \times \text{无穷小} = \text{无穷小}}$

证明 若 $\alpha \to 0,\ \beta \to 0\ (x \to x_0)$，则 $\alpha\beta \to 0\ (x \to x_0)$.

易证 取 $\varepsilon_0 = 1 > 0$，由 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$，$\exists \delta_1 > 0$ s.t. 在 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，

有 $|\alpha| < 1$.　①

而 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0$ s.t. $\left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\beta| < \varepsilon\right)$ ②

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，①②同时成立.

$\Rightarrow |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \alpha\beta = 0.$ □

定理 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \iff f(x) = A + \alpha$，其中 $\alpha \to 0\ (x \to x_0)$.

证明 $(\Rightarrow)$ $f(x) = A + (f(x) - A) := A + \alpha$，$\alpha = f(x) - A$.

而 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $\left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)$.

$\Rightarrow |\alpha| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

$(\Leftarrow)$ 设 $f(x) = A + \alpha$，其中 $\alpha \to 0\ (x \to x_0)$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ 在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|\alpha| < \varepsilon$.

$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \to A\ (x \to x_0)$. □

例2 若 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x + f(x)}{x^4}$ 存在，求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{f(x)}$ 的值.

解答 设 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x + f(x)}{x^4} = A$

$\iff \dfrac{x - \sin x + f(x)}{x^4} = A + \alpha$，其中 $\alpha \to 0\ (x \to 0)$.

$\iff x - \sin x + f(x) = Ax^4 + \alpha x^4$　($x \to 0 \leadsto x \neq 0$)

$\iff f(x) = Ax^4 + \alpha x^4 - (x - \sin x)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x^3} = \underbrace{Ax + \alpha x}_{\to 0} - \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ (泰勒在0处展开)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x-\sin x}{x^3}\right) = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\Big(\underbrace{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}_{\sim \frac{x^3}{6}}\Big) = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{f(x)} = -6. \qquad \square$$

§3 无穷大量

定义 若 $\forall M>0, \exists \delta>0$ s.t. $(0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)| \geq M)$

则称 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

$>$ 也可.

类似地，$\forall M>0, \exists X>0$ s.t. $(x>X \Rightarrow |f(x)|\geq M)$

则称 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$.

"要多大有多大"
M = 控制"多大"的手段.

例3 求证 $\lim_{x\to\infty}(2x^2+1) = \infty$

双侧无穷大 （对应定义 $|x|>X$）.

证明 $\forall M>0$, $|2x^2+1|>M \Leftrightarrow |x|>\sqrt{\frac{M-1}{2}}>0$

$\rightsquigarrow$ 取 $X=\sqrt{\frac{M-1}{2}}>0$.

目标：取 $X=X(M)$
（类似于取 $\delta=\delta(\varepsilon)$）

则当 $|x|>X$ 时，有 $|2x^2+1|>M$

$\Rightarrow (2x^2+1)\to\infty \ (x\to\infty)$. $\square$

例4 证明 $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x\to 0^+$ 时为无穷大.

证明 $x\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x}\to +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. $\square$

§4 无穷小量与无穷大量的关系

定理 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

证明 $(\Rightarrow)$ $\forall M>0$, 取 $\varepsilon=\frac{1}{M}>0$.

由 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ 得 $\exists\delta>0$ s.t. $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right|>M.$$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

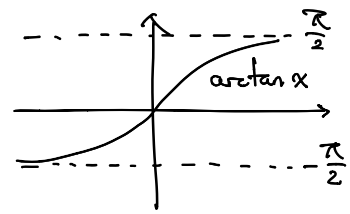
$(\Leftarrow)$ $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\frac{1}{\varepsilon}>0$.

$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty \Rightarrow \exists\delta>0$ s.t. $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M=\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |f(x)|<\varepsilon.$$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=0$. $\square$

例5 $\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{无穷小}}\cdot\underbrace{\arctan x}_{\text{有界}\left(\le\frac{\pi}{2}\right)}=0$



类似地, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.