【 原文由 PallasAthena 所發表 】

二十世紀的數學

Michael Atiyah

謝謝邀請我來這裡參加這個活動。當然，如果有人想談論一個世紀的終結以及下一個世紀的開始，那麼他有兩個具有相當難度的選擇：一個是回顧過去百年的數學；另一個是對未來百年數學發展的預測，我選擇了前面這個比較困難的任務，任何人都可以預測未來而且我們並不能判定是對還是錯。然而對過去的任何評述，每個人都可以提出異議。

我在這裡所講的是我個人的觀點。這個報告不可能包含所有內容，特別是，有一些重要的內容我不準備涉及，一部分是因為我不是那些方面的專家，一部分也是出於它們已經在其他地方被評述過了。例如，我不會去談論那些發生在邏輯與計算領域內的著名事件，這些事件往往是與像 *Hilbert*，*Godel*，*Turing* 這些偉大的名字相關的，除了數學在基礎物理中的應用之外，我也不會談論太多數學的其他應用，這是因為數學的應用太廣泛了，而且這需要專門的論述。每一個方面都需要一個專門的報告。也許大家在這次會議的其他報告中會聽到很多關於這些內容的演講。另外，試著羅列一些定理，甚至是列出在過去一百年的著名數學家的名字也是毫無意義的，那簡直是在做枯燥的練習。所以，代替它們的是，我試著選擇一些我認為在很多方面都是很重要的主題來討論並且強調圍繞這些主題所發生的事情。

首先我有一個一般性的說明。世紀是一個大約的數字概念。我們不會真地認為在過整整一百年的時候，有些事情會突然停下來，再重新開始，所以當我描述二十世紀的數學時，有些內容實際上可能是跨世紀的，如果某件事件發生在十九世紀九十年代，並持續到二十世紀初，我將不去計較這種時間方面的細節。我所做的就像一個天文學家，工作在一個近似的數字環境中。實際上，許多東西始於十九世紀，只不過在二十世紀才碩果累累。

這個報告的難點之一是很難把我們自己放回到 1900 年時作為一位數學家的位置上，這是因為上個世紀的數學有非常多的內容已經被我們的文化和我們自己吸收掉了。難以想像人們不用我們的術語來思考的那個時代是什麼樣子的。實際上，如果現在有人在數學上有一個真正重要的發現，其後他也一定會與之一起被忽略掉了！他會完全地被融入到背景之中，於是為了能夠回顧過去，我們必須努力去想像在不同時代，人們用不同方式思考問題時的情景。

從局部到整體

作為開始，我準備列一些主題並且圍繞它們來討論。我談論的第一個主題概括地講，就是被大家稱為從局部到整體的轉變。在古典時期，人們大體上已經研究了在小範圍內，使用局部坐標等等來研究事物。在這個世紀，重點已經轉移到試圖了解事物整體和大範圍的性質。由於整體性質更加難以研究，所以大多只能有定性的結果，這時拓撲的思想就變得非常重要了。正是 *Poincare*，他不僅為拓撲學發展作出先驅性的貢獻，而且也預言拓撲學將成為二十世紀數學的一個重要的組成部分，順便讓我提一下，給出一系列著名問題的 *Hilbert* 並沒有意識到這一點。拓撲學很難在他的那些問題中找到具體體現．但是對 *Poincare* 而言，他相當清楚地看出拓撲學將成為一個重要的內容。

讓我試著列舉一些領域，然後大家就能知道我在想什麼了。例如，考慮一下復分析（也被稱為“函數論”），這在十九世紀是數學的中心，也是像 *Weierstrass* 這樣偉大人物工作的中心。對於他們而言，一個函數就是一個多變量的函數；對於 *Weierstrass* 而言，一個函數就是一個冪級數。它們是一些可以用於寫下來，並且可以明確描繪的東西或者是一些公式。函數是一些公式:它們是明確可以用顯式寫下來的．然而接下來 *Abel*，*Riemann* 和其後許多人的工作使我們遠離了這些，以至於函數變得可以不用明確的公式來定義，而更多地是通過它們的整體性質來定義：通過它們的奇異點的分布，通過它們的定義域位置，通過它們取值範圍。這些整體性質正是一個特定函數與眾不同的特性。局部展開只是看待它們的一種方式。

一個類似的事情發生在微分方程中，最初，解一個微分方程，人們需要尋找一個明確的局部解！是一些可以寫下來的東西。隨著事物的發展，解不必是一個顯函數，人們不一定必須用好的公式來描述它們。解的奇異性是真正決定其整體性質的東西。與發生在多變量分析中的一切相比，這種精神是多麼的類似，只不過在細節上有些不同罷了。

在微分幾何中，*Gauss* 和其他人的經典工作描述了小片的空間，小塊的曲率以及用來描述局部幾何的局部方程．只要人們想要了解曲面的整體圖像以及伴隨它們的拓撲時，從這些經典結果到大範圍的轉變就是很自然的了。當人們從小範圍到大範圍時，最有意義的性質就是拓撲的性質。

數論也有一個類似的發展，盡管它並不是很明顯地適用於這一框架．數論學家們是這樣來區分他們稱之為“局部理論”和“整體理論”的：前者是當他們討論一個單個的素數，一次一個素數，以及有限個素數時；後者是當他們同時討論全部素數時。這種素數和點之間，局部和整體之間的類似性在數論發展過程中起

了很重要的作用，並且那些在拓撲學發展中產生的思想深深地影響了數論。

當然這種情況也發生在物理學中，經典物理涉及局部理論，這時我們寫下可以完全描述小範圍性質的微分方程，接下來我們就必須研究一個物理系統的大範圍性質。物理學涉及的全部內容就是當我們從小範圍出發時，我們可以知道在大範圍內正在發生什麼，可以預計將要發生什麼，並且沿著這些結論前進。

維數的增加

我的第二個主題有些不同，我稱之為維數的增加．我們再次從經典的多變量函數理論開始：經典多變量函數論主要是詳細討論一個多變量理論並加以精煉。推廣到兩個或者更多個變量基本上發生在本世紀，並且是發生在有新現象出現的領域內。不是所有的現象都與一個變量的情形相同，這裡有完全新的特性出現，並且 n 個變量的理論的研究越來越佔有統治地位，這也是本世紀主要成就之一。

另一方面，過去的微分幾何學家主要研究曲線和曲面，我們現在研究 n 維流形的幾何，大家仔細想一想，就能意識到這是一個重要的轉變。在早期，曲線和曲面是那些人們能真正在空間裡看到的東西。而高維度則有一點點虛構的成分，在其中人們可以通過數學思維來想像，但當時人們也許沒有認真對待它們。認真對待它們並且用同樣重視程度來研究它們的這種思想實際上是二十世紀的產物。同樣地，也沒有明顯的證據表明我們十九世紀的先驅者們思考過函數個數的增加，研究不單單一個而是幾個函數，或者是向量值函數(*vector-valued function*)。所以我們看到這裡有一個獨立和非獨立變量個數增加的問題。

線性代數總是涉及多個變量，但它的維數的增加更具有戲劇性，它的增加是從有限維到無窮維，從線性空間到有無窮個變量的 *Hilbert* 空間。當然這就涉及到了分析，在多個變量的函數之後，我們就有函數的函數，即泛函．它們是函數空間上的函數。它們本質上有無窮多個變量，這就是我們稱為變分學的理論。一個類似的事情發生在一般（非線性）函數理論的發展中。這是一個古老的課題，但真正取得卓越的成果是在二十世紀。這就是我談的第二個主題。

從交換到非交換

第三個主題是從交換到非交換的轉變。這可能是二十世紀數學，特別是代數學的最主要的特徵之一。代數的非交換方面已經極其重要，當然，它源自於十九

世紀。它有幾個不同的起源。*Hamilton* 在四元數方面的工作可能是最令人驚嘆的，並且有巨大的影響，實際上這是受處理物理問題時所採用的思想所啟發。還有 *Grassmann* 在外代數方面的工作，這是另一個代數體系，現在已經被融入我們的微分形式理論中。當然，還有 *Cayley* 以線性代數為基礎的矩陣方面的工作和 *Galois* 在群論方面的工作等。

所有這些都是以不同的方式形成了把非交換乘法引入代數理論的基石，我形象地把它們說成是二十世紀代數機器賴以生存的“面包和黃油”。我們現在可以不去思考這些，但在十九世紀，以上所有例子都以各自不同的方式取得了重大的突破，當然，這些思想在不同的領域內得到了驚人的發展．矩陣和非交換乘法在物理中的應用產生了量子理論。*Heisenberg* 對易關係是非交換代數在物理中的一個最重要的應用例子，以至後來被 *von Neumann* 推廣到他的算子代數理論中。

群論也是在二十世紀佔有重要位置的理論，我稍後再回來談它。

從線性到非線性

我的下一個主題是從線性到非線性的轉變。古典數學的大部分或者基本上是線性的，或者即使不是很精確的線性，也是那種可以通過某些擾動展開來研究的近似線性，真正的非線性現象的處理是非常困難的，並且只是在本世紀，才在很大的範圍內對其進行了真正的研究。

我們從幾何開始談起：*Euclid* 幾何，平面的幾何，空間的幾何，直線的幾何，所有這一切都是線性的。而從非歐幾何的各個不同階段到 *Riemann* 的更一般的幾何，所討論的基本上是非線性的。在微分方程中，真正關於非線性現象的研究已經處理了眾多我們通過經典方法所看不到的新現象。在這裡我只舉兩個例子，孤立子和混沌，這是微分方程理論兩個非常不同的方面，在本世紀已經成為極度重要和非常著名的研究課題了。它們代表不同的極端。孤立子代表非線性微分方程的無法預料的有組織的行為，而混沌代表的是無法預料的無組織的行為(*disorganized behavior*)。這兩者出現在不同領域，都是非常有趣和重要的，但它們基本上都是非線性現象。我們同樣可以將關於孤立子的某些工作的早期歷史追溯到十九世紀下葉，但那只是很少的一部分。

當然，在物理學，*Maxwell* 方程（電磁學的基本方程）是線性偏微分方程。與之對應的是著名的 *Yang-Mills* 方程，它們是非線性方程並被假定用來調控與物質結構有關的力。這些方程之所以是非線性的，是因為 *Yang-Mills* 方程本質上是 *Maxwell* 方程的矩陣體現，並且由矩陣不可交換這一事實導致方程中出現非線性

項。於是在這裡我們看到了一個非線性與非交換性之間的有趣的聯系。非交換性產生一類特殊的非線性，這的確是很有意
思和很重要的。

幾何與代數

至此我談的是一些一般性的主題，現在我想談論一下數學中的一個二分叉現象，它來回搖擺卻始終伴隨著我們，這就給了我一個機會來做一些哲學上的思索和說明。我指的是幾何和代數之間的二分法，幾何和代數是數學的兩個形式支柱，並且都有悠久的歷史。幾何學可以追溯到古希臘甚至更早的時期；代數學則源於古阿拉伯人和古印度人。所以，它們都已經成為數學的基礎，但它們之間有一種令人感到不太自然的關系。

讓我首先由這個問題的歷史開始。*Euc1id* 幾何是數學理論中最早的一個例子，直到 *Descartes* 在我們現在稱為的笛卡兒平面中引入代數坐標之前，它一直是純幾何的。*Descartes* 的做法是一種將幾何思考化為代數運算的嘗試。從代數學家們的角度來講，這當然是對幾何學的一個重大突破或者說一次重大的沖擊，如果我們來比較 *Newton* 和 *Leibniz* 在分析方面的工作，我們會發現他們屬於不同的傳統，*Newton* 基本上是一個幾何學家而 *Leibniz* 基本土是一個代數學家，這其中有著很深刻的道理。對於 *Newton* 而言，幾何學，或者是由他發展起來的微積分學，都是用來描述自然規律的數學嘗試。他關心的是在很廣泛意義下的物理，以及幾何世界中的物理。在他看來，如果有人想了解事物，他就得用物理世界的觀點來思考它，用幾何圖像的觀點來看待它。當他發展微積分的時候，他想要發展的是微積分的一種能盡可能貼近隱藏在其後的物理內蘊的表現形式。所以他用的是幾何論證，因為這樣可以與實際意義保持密切關系。另一方面，*Leibniz* 有一個目標，一個雄心勃勃的目標，那就是形式化整個數學，將之變成一個龐大的代數機器。這與 *Newton* 的途徑截然不同，並且二者有很多不同的記號。正如我們所知道的，在 *Newton* 和 *Leibniz* 之間的這場大爭論中，*Leibniz* 的記號最後得勝。我們現在還沿用他的記號來寫偏導數。*Newton* 的精神尚在，但被人們埋葬了很長時間。

龐加萊

在十九世紀末期，也就是一百年前，*Poincare* 和 *Hilbert* 是兩個主要人物。我在前面已經提到過他們了，並且可以粗略地講，他們分別是 *Newton* 和 *Leibniz* 的傳人。*Poincare* 的思想更多的是幾何和拓樸的精神，他用這些思想作為他的基本洞察工具。*Hilbert* 更多的是一個形式主義者，他要的是公理化，形式化，並且要給出嚴格的，形式的描述。雖然任何一個偉大的數學家都不能輕易地被歸到哪一類中去，但是，很清楚地，他們屬於不同的傳統。

當準備這個報告的時候，我想我應該寫下我們目前這一代中能夠繼承這些傳統的具有代表性的人的名字。談論還健在的人是十分困難的——誰該放在這張名單上呢？接著我又暗自思忖：有誰會介意被放在這麼一張著名的名單的哪一邊呢？於是我選擇了兩個名字 *Arnold* *Bourbaki* 尼古拉·布尔巴基，前者是 *Poincare-Newton* 傳統的繼承人，而後者，我認為是 *Hilbert* 最著名的接班人。*Arnold* 毫不含糊地認為：他的力學和物理的觀點基本上是幾何的，是源自於 *Newton* 的；以為存在處於二者之間的東西，除了像 *Riemann*（他確實跟兩者都有偏離）等少數人之外，都是一種誤解。*Bourbaki* 努力繼續 *Hilbert* 的形式化的研究，將數學公理化和形式化推向了一個令人矚目的範圍並取得了一些成功。每一種觀點都有它的優點，但是它們之間很難調和。

讓我來解釋一下我自己是如何看待幾何和代數之間的不同。幾何學當然講的是空間，這是毫無疑問的。如果我面對這間房間裡的聽眾，我可以在一秒中內或者是一微秒內看到很多，接收到大量的信息，當然這不是一件偶然的事件。我們大腦的構造與視覺有著極其重要的關係。我從一些從事神經生理學的朋友那裡了解到，視覺佔用了大腦皮層的百分之八十或九十。在大腦中大約有十七個中樞，每一個中樞專門用來負責視覺活動的不同部分：有些部分涉及的是垂直方向的，有些部分與水平方向有關，有些部分是關於色彩和透視的，最後有些部分涉及的是所見事物的具體含義和解說。理解並感知我們所看到的這個世界是我們人類發展進化的一個非常重要的部分。因此空間直覺(*spatial intuition*)或者空間知覺(*spatial perception*)是一種非常強有力的工具，也是幾何學在數學上佔有如此重要位置的原因，它不僅僅對那些明顯具有幾何性質的事物可以使用，甚至對那些沒有明顯幾何性質的事物也可以使用。我們努力將它們歸結為幾何形式，因為這樣可以讓我們使用我們的直覺。我們的直覺是我們最有力的武器。特別是在向學生或是同事講解一種數學時可以看得很清楚．當你講解一個很長而且很有難度的論證，最後使學生明白了。學生這時會說些什麼呢？他會說“我看到了（我懂了）！”在這裡看見與理解是同義詞，而且我們還可以用“知覺”這個詞來同時形容它們，至少這在英語裡是對的，把這個現象與其他語言作對比同樣有趣。我認為有一點是很基本的：人類通過這種巨大的能力和視覺的瞬間活動獲取大量的信息，從而得以發展，而教學參與其中並使之完善。

在另一方面（也許有些人不這樣認為），代數本質上涉及的是時間。無論現在做的是哪一類代數，都是一連串的運算被一個接著一個羅列出來，這裡“一個接著一個”的意思是我們必須有時間的概念。在一個靜態的宇宙中，我們無法想像代數，但幾何的本質是靜態的：我可以坐在這裡觀察，沒有什麼變化，但我仍可以繼續觀察。然而，代數與時間有關，這是因為我們有一連串的運算，這裡當我談到“代數”時，我並不單單指現代代數。任何算法，任何計算過程，都是一

個接著一個地給出一連串步驟，現代計算機的發展使這一切看得很清楚。現代計算機用一系列 0 和 1 來反映其信息並由此給出問題的答案。

代數涉及的是時間的操作，而幾何涉及的是空間。它們是世界互相垂直的兩個方面，並且它們代表數學中兩種不同的觀念。因此在過去數學家們之間關於代數和幾何相對重要性的爭論或者對話代表了某些非常非常基本的事情。

當然只是為了論證是哪一邊輸了，哪一邊勝利了，這並不值得。當我考慮這個問題時，有一個形象的類比："你願意成為一個代數學家還是一個幾何學家？"這個問題就像在問："你願意是聾子還是瞎子？"一樣．如果人的眼睛瞎了，就看不見空間；如果人的耳朵聾了，就無法聽見，聽覺是發生在時間之中的，總的來說，我們還是寧願二者都要。

在物理學，也有一個類似的、大致平行的關於物理概念和物理實驗之間的劃分。物理學有兩個部分：理論——概念，想法，單詞，定律——和實驗儀器。我認為概念在某種廣義的意義下是幾何的，這是因為它們涉及的是發生在真實世界的事物。另一方面，實驗更像一個代數計算。人們做事情總要花時間，測定一些數，將它們代入到公式中去。但是在實驗背後的基本概念卻是幾何傳統的一部分。

將上述二分叉現象用更哲學或者更文學的語言來說，那就是對幾何學家而言，代數就是所謂的"浮士德的奉獻"．正如大家所知道的，在歌德的故事裡，浮士德通過魔鬼可以得到他所想要的（就是一個漂亮女人的愛），其代價是出賣他的靈魂，代數就是由魔鬼提供給數學家的供品。魔鬼會說："我將給你這個有力的機器，它可以回答你的任何問題。你需要做的就是把你的靈魂給我：放棄幾何，你就會擁有這個威力無窮的機器（現在可以把它想像成為一台計算機！）。當然我們希望同時擁有它們，我們也許可以欺騙魔鬼，假裝我們出賣靈魂，但不真地給它。不過對我們靈魂的威脅依然存在，這是因為當我們轉入代數計算時，本質上我們會停止思考，停止用幾何的觀念來考慮問題，不再思考其含義。

在這裡我談論代數學家的話重了一些，但是基本上，代數的目標總是想建立一個公式，把它放到一個機器中去，轉動一下把手就可以得到答案。也就是拿來一個有意義的東西，把它化成一個公式，然後得到答案。在這樣的一個過程中，人們不再需要思考代數的這些不同階段對應的幾何是什麼。就這樣，洞察力丟掉了，而這在那些不同的階段都是非常重要的。我們絕不能放棄這些洞察力！最終我們還是要回到這上面來的，這就是我所談到的浮士德的奉獻。我肯定這種講法尖銳了一點。

@应试：记住理论推导出来的结论

幾何和代數的這種選擇導致能融合二者的一些交叉課題的產生，並且代數和

幾何之間的區別也不像我講的那樣直截了當和樸實無華。例如，代數學家們經常使用圖式(*diagram*)。而除了幾何直覺，圖式又能是什麼呢？

通用的技術

現在我不想再談論太多就內容來劃分的主題，而想談談那些依照已經使用的技術和常見方法所確定的主題，也就是我想描述一些已經廣泛應用於眾多領域的常見方法。第一個就是：

同調論

歷史上同調論是作為拓撲學的一個分支而發展起來的。它涉及到以下情形。現有一個復雜的拓撲空間，我們想從中得到它的一些簡單信息如計算它的洞或者類似事物的個數，得到某些與之聯系的可加的線性不變量等。這是一種在非線性條件下關幹線性不變量的構造。從幾何的角度來看，閉鏈可加可減，這樣就得到了所謂的一個空間的同調群。同調論，作為一種從拓撲空間獲取某些信息的基本代數工具，是在本世紀上半葉發現的。這是一種從幾何中獲益匪淺的代數。

同調概念也出現在其他一些方面・其另一個源頭可以追溯到 *Hilbert* 及其關於多項式的研究中，多項式是非線性的函數，它們相乘可以得到更高次數的多項式。正是 *Hilbert* 那偉大的洞察力促使他來討論“理想”，具有公共零點的多項式的線性組合。他要尋找這些理想的生成元。生成元可能有很多。他審視它們之間的關系以及關系之間的關係。於是他得到這些關系的一個分層譜系，這就是所謂的“*Hilbert* 合系”。*Hilbert* 的這個理論是一種非常複雜的方法，他試圖將一個非線性的情形（多項式的研究）化為線性情形。本質上來講，Hilbert 構造了一個線性關係的複雜體系。能夠把像多項式這樣的非線性事物的某些信息納入其中。

這個代數理論實際上是與上述拓撲理論平行的，而且現在它們已融合在一起構成了所謂的“同調代數”。在代數幾何學中，本世紀五十年代最偉大的成就之一是層的上同調理論的發展及在解析幾何學中的擴展，這是由 *Leray*，*Cartan*，*Serre* 和 *Grothendieck* 等人組成的法國學派取得的。從中我們可以感受到一種既有 *Riemann-Poincare* 的拓撲思想，又有 *Hilbert* 的代數思想，再加上某些分析手段的融合，這表明同調論在代數的其它分支也有著廣泛的應用。我們可以引入同調群的概念，它通常是與非線性事物相關的線性事物。我們可以將之應用於群論，例如，有限群，以及李代數：它們都有相應的同調群。在數論方面，同調群

通過 *Galois* 群產生了非常重要的應用。因此在相當廣泛的情形下同調論都是強有力的工具之一，它也是二十世紀數學的一個典型的特徵。

K-理論

我要談的另外一個技術就是所謂的“*K*-理論”。它在很多方面都與同調論相似，它的歷史並不很長（直到二十世紀中葉才出現，盡管其起源的某些方面也許可以追溯到更早一些），但它卻有著很廣泛的應用，已經滲透進了數學的許多部分。*K*-理論實際上與表示理論緊密相聯，有限群的表示理論，可以講，起源於十九世紀。但是其現代形式——*K*-理論卻只有一個相對較短的歷史。*K*-理論可以用下面的方式來理解：它可以被想成是應用矩陣論的一種嘗試。我們知道矩陣的乘法是不可交換的，于是我們想構造矩陣可換的或是線性的不變量。跡，維數和行列式都是矩陣論中可換的不變量，而 *K*-理論即是試圖處理它們的一種系統的方法，它有時也被稱為“穩定線性代數”。其思想就是，如果我們有很多矩陣，那麼把兩個不可換的矩陣 A 和矩陣 B 放在不同塊的正交位置上，它們就可換了，因為在一個大的空間裡，我們可以隨意移動物體。於是在某些近似情況下，這樣做是很有好處的，足以讓我們得到一些信息，這就是作為一個技術的 *K*-理論的基石。這完全類似於同調論，二者都是從複雜的非線性情形獲取線性的信息。

在代數幾何中，*K*-理論是由 *Grothendieck* 首先引入的，並且取得了巨大的成功，這些與我們剛剛談到的層理論密切相關，而且也和他在 *Riemann-Roche* 定理方面的工作有緊密聯系。

在拓撲學方面，*Hirzebruch* 和我照搬了這些思想並且將它們應用到一個純粹的拓撲範疇內。從某種意義下來說，如果 *Grothendieck* 的工作與 *Hilbert* 在合系方面的工作有關，那麼我們的工作更接近於 *Riemann-Poincare* 在同調方面的工作，我們用的是連續函數，而他用的是多項式。*K*-理論也在橢圓算子的指標理論和線性分析的研究中起了重要作用。

從另外一個不同的角度，*Milnor*，*Quillen* 和其他人發展了 *K*-理論的代數方面，這在數論的研究中有著潛力巨大的應用。沿著這個方向的發展導致了許多有趣問題的產生。

在泛函分析方面，包括像 *Kasparov* 在內的許多人的工作將連續的 *K*-理論推廣到非交換的 C^*-代數情形。一個空間上的連續函數在函數乘積意義下形成一個交換代數。但是在其他情形下，自然地產生了類似的關於非交換情形的討論，這時，泛函分析也就自然而然地成為了這些問題的溫床。

因此，*K*-理論是另外一個能夠將相當廣泛的數學的許多不同方面都能用這種比較簡單的公式來處理的領域，盡管在每一個情形下，都有很多特定於該方面且能夠連接其他部分的非常困難的，技巧性很強的問題。*K*-理論不是一個統一的工具，它更像是一個統一的框架，在不同部分之間具有類比和相似。

這個工作的許多內容已經被 *Alain Connes* 推廣到"非交換微分幾何"。

非常有趣的是，也就是在最近，*Witten* 通過他在弦理論方面（基礎物理學的最新思想）的工作發現許多很有趣的方法都與 *K*-理論有關，並且 *K*-理論看起來為那些所謂的"守恆量"提供了一個很自然的"家"。雖然在過去同調論被認為是這些理論的自然框架，但是現在看起來 *K*-理論能提供更好的答案。

李群

另一個不單單是一項技術、而且是具有統一性的概念是李群。現在說起李群，我們基本上就是指正交群，酉群，辛群以及一些例外群，它們在二十世紀數學歷史中起了非常重要的作用。它們同樣起源於十九世紀．*SophusLie* 是一位十九世紀的挪威數學家。正如很多人所講的那樣，他和 *Fleix Klein*，還有其他人一起推動了"連續群理論"的發展。對 *Klein* 而言，一開始，這是一種試圖統一處理 *Euclid* 幾何和非歐幾何這兩種不同類型幾何的方法．雖然這個課題源於十九世紀，但真正起步卻是在二十世紀，作為一種能夠將許多不同問題歸併於其中來研究的統一性框架，李群理論深深地影響了二十世紀。

我現在來談談 *Klein* 思想在幾何方面的重要性．對於 *Klein* 而言，幾何就是齊性空間，在那裡，物體可以隨意移動而保持形狀不變，因此，它們是由一個相關的對稱群來控制的。*Euclid* 群給出 *Euclid* 幾何而雙曲幾何源於另一個李群．於是每一個齊性幾何對應一個不同的李群。但是到了後來，隨著對 *Riemann* 的幾何學工作的進一步發展，人們更關心那些不是齊性的幾何，此時曲率隨著位置的變化而變化，並且空間不再有整體對稱性，然而，李群仍然起著重要的作用，這是因為在切空間中我們有 *Euclid* 坐標，以至於李群可以出現在一種無窮小的層面上。於是在切空間中，從無窮小的角度來看，李群又出現了，只不過由於要區分不同位置的不同點，我們需要用某種可以處理不同李群的方式來移動物體。這個理論是被 *Eile Cartan* 真正發展起來的，成為現代微分幾何的基石，該理論框架對於 *Einstein* 的相對論也起著基本的作用。當然 *Einstein* 的理論極大地推動了微分幾何的全面發展。

進入二十世紀，我前面提到的整體性質涉及到了在整體層面上的李群和微分

幾何。一個主要的發展是給出所謂的“示性類”的信息，這方面標誌性的工作是由 *Borel* 和 *Hirzebruch* 給出的，示性類是拓撲不變量並且融合三個關鍵部分：李群，微分幾何和拓撲，當然也包含與群本身有關的代數。

在更帶分析味的方向上，我們得到了現在被稱為非交換調和分析的理論。這是 *Fourier* 理論的推廣，對於後者，*Fourier* 級數或者是 *Fourier* 積分本質上對應於圓周和直線的交換李群，當我們用更為復雜的李群代替它們時，我們就可以得到一個非常漂亮、非常精巧並且將李群表示理論和分析融為一體的理論。這本質上是 *Harish-Chandra* 一生的工作。

在數論方面，整個“*Langlands* 綱領”,現在許多人都這樣稱呼它，緊密聯系於 *Harish-Chandra* 理論，產生於李群理論之中。對於每一個李群，我們都可以給出相對應的數論和在某種程度實施 *Langlands* 綱領。在本世紀後半葉，代數數論的一大批工作深受其影響。模形式的研究就是其中一個很好的例證，這還包括 *Andrew Wiles* 在 *Fermat* 大定理方面的工作。

也許有人認為李群只不過在幾何範疇內特別重要而已，因為這是出於連續變量的需要。然而事實並非如此，有限域上的李群的類似討論可以給出有限群，並且大多數有限群都是通過這種方式產生的。因此李群理論的一些技巧甚至可以被應用到有限域或者是局部域等一些離散情形中。這方面有許多純代數的工作，例如與 *George Lusztig* 名字聯系在一起的工作。在這些工作中，有限群的表示理論被加以討論，並且我已經提到的許多技術在這裡也可以找到它們的用武之地。

有限群

上述討論已把我們帶到有限群的話題，這也提醒了我：有限單群的分類是我必須承認的一項工作。許多年以前，也就是在有限單群分類恰要完成之時，我接受了一次採訪，並且我還被問道我對有限單群分類的看法，我當時很輕率地說我並不認為它有那麼重要。我的理由是有限單群分類的結果告訴我們，大多數單群都是我們已知的，還有就是一張有關若幹例外情形的表。在某種意義下，這只不過是結束了一個領域。而並沒有開創什麼新東西，當事物用結束代替開始時，我不會感到很興奮。但是我的許多在這一領域工作的朋友聽到我這麼講，理所當然地會感到非常非常不高興，我從那時起就不得不穿起“防彈衣”了。

在這項研究中，有一個可以彌補缺點的優點。我在這裡實際上指的是在所有的所謂“散在群”(*sporadic groups*)中，最大的被賦予了“魔群”名字的那一個。我認為魔群的發現這件事本身就是有限單群分類中最叫人興奮的結果了。可以看出魔群是一個極其有意思的動物而且現在還處於被了解之中。它與數學的許

多分支的很大一部分有著意想不到的聯系，如與橢圓模函數的聯系，甚至與理論物理和量子場論都有聯系。這是分類工作的一個有趣的副產品。正如我所說的，有限單群分類本身關上了大門，但是魔群又開啟了一扇大門。

物理的影響

現在讓我把話題轉到一個不同的主題，即談談物理的影響。在整個歷史中，物理與數學有著非常悠久的聯系，並且大部分數學，例如微積分，就是為了解決物理中出現的問題而發展起來的。在二十世紀中葉，隨著大多數純數學在獨立於物理學時仍取得了很好的發展，這種影響或聯系也許變得不太明顯。但是在本世紀最後四分之一的時間裡，事情發生了戲劇性的變化，讓我試著簡單地評述一下物理學和數學，尤其是和幾何的相互影響。

在十九世紀，*Hamilton* 發展了經典力學，引入了現在稱為 *Hamilton* 量的形式化。經典力學導出現在所謂的“辛幾何”。這是幾何的一個分支，雖然很早已經有人研究了，但是實際上直到最近二十年，這個課題才得到真正的研究。這已經是幾何學非常豐富的一部分。幾何學，我在這裡使用這個詞的意思是指，它有三個分支：*Riemann* 幾何，複幾何和辛幾何，並且分別對應三個不同類型的李群。辛幾何是它們之中最新發展起來的，並且在某種意義下也許是最有趣的，當然也是與物理有極其緊密聯系的一個，這主要因為它的歷史起源與 *Hamilton* 力學有關以及近些年來它與量子力學的聯系．現在，我前面提到過的、作為電磁學基本線性方程的 *Maxwell* 方程，是 *Hodge* 在調和形式方面工作和在代數幾何中應用方面工作的源動力。這是一個非常富有成果的理論，並且自從本世紀三十年代以來已經成為幾何學中的許多工作的基礎。

我已經提到過廣義相對論和 *Einstein* 的工作。量子力學當然更是提供了一個重要的實例。這不僅僅體現在對易關系上，而且更顯著地體現在對 *Hilbert* 空間和譜理論的強調上。

以一種更具體和明顯的方式，結晶學的古典形式是與晶體結構的對稱性有關的。第一個被研究的實例是發生在點周圍的有限對稱群，這是鑒於它們在結晶學中的應用。在本世紀中，群論更深刻的應用已經轉向與物理的關系，被假設用來構成物質的基本粒子看起來在最小的層面上有隱藏的對稱性，在這個層面上，有某些李群在此出沒，對此我們看不見，但是當我們研究粒子的實際行為時，它們的對稱性就顯現無遺了。所以我們假定了一個模型，在這個模型當中，對稱性是一個本質性的要素，而且目前那些很普遍的不同理論都有一些像 $SU(2)$和 $SU(3)$

那樣的基本李群融入其中並構成基礎的對稱群，因此這些李群看起來像是建設物質大廈的磚石。

並不是只有緊李群才出現在物理中，一些非緊李群也出現在物理中，例如 *Lorentz* 群。正是由物理學家第一個開始研究非緊李群的表示理論的。它們是那些能夠發生在 *Hilbert* 空間的表示，這是因為，對於緊群而言，所有不可約表示都是有限維的，而非緊群需要的是無窮維表示，這也是首先由物理學家意識到的。

在二十世紀的最後 25 年裡，正如我剛剛完成闡述的，有一種巨大的從物理學的新思想到數學的滲透，這也許是整個世紀最引人注目的事件之一，就這個問題本身，也許就需要一個完整的報告，但是，基本上來講，量子場論和弦理論已經以引人注目的方式影響了數學的許多分支，得到了眾多的新結果、新思想和新技術。這裡，我的意思是指物理學家通過對物理理論的理解已經能夠預言某些在數學上是對的事情了。當然，這不是一個精確的證明，但是確有非常強有力的直覺、一些特例和類比所支持。數學家們經常來檢驗這些由物理學家預言的結果，並且發現它們基本上是正確的，盡管給出証明是很困難的而且它們中的許多還沒有被完全証明。

所以說沿著這個方向，在過去的 25 年裡取得了巨大的成果。這些結果是極其細致的。這並不像物理學家所講的“這是一種應該是對的東西”。他們說：“這裡有明確的公式，還有頭十個實例（涉及超過 12 位的數字）”。他們會給出關於複雜問題的準確答案，這些決不是那種靠猜測就能得到的，而是需要用機器計算的東西，量子場論提供了一個重要的工具，雖然從數學上來理解很困難，但是站在應用的角度，它有意想不到的回報。這是最近 25 年中真正令人興奮的事件。

在這裡我列一些重要的成果：*SimonDona1dson* 在四維流形方面的工作；*Vaughan-Jones* 在扭結不變量方面的工作；鏡面對稱，量子群；再加上我剛才提到的“魔群”

這個主題到底講的是什麼呢？正如我在前面提到過的一樣，二十世紀見證了維數的一種轉換並且以轉換為無窮維而告終，物理學家超越了這些，在量子場論方面，他們真正試圖對廣泛的無窮維空間進行細致的研究，他們處理的無窮維空間是各類典型的函數空間，它們非常複雜，不僅是因為它們是無窮維的，而且它們有復雜的代數、幾何以及拓撲，還有圍繞其中的很大的李群，即無窮維的李群，因此正如二十世紀數學的大部分涉及的是幾何、拓撲、代數以及有限維李群和流形上分析的發展，這部分物理涉及了在無窮維情形下的類似處理。當然，這是一件非常不同的事情，但確有巨大的成功。

讓我更詳盡地解釋一下，量子場論存在於空間和時間中·空間的真正的意義是三維的，但是有簡化的模型使我們將空間取成一維。在一維空間和一維時間裡，物理學家遇到的典型事物，用數學語言來講，就是由圓周的微分同胚構成的群或者是由從圓周到一個緊李群的微分映射構成的群。它們是出現在這些維數裡的量子場論中的兩個非常基本的無窮維李群的例子，它們也是理所當然的數學事物並且已經被數學家們研究了一段時間。

在這樣一個 1＋1 維理論中，我們將時空取成一個 *Riemann* 曲面並且由此可以得到很多新的結果。例如，研究一個給定虧格數的 *Riemann* 曲面的模空間是個可以追溯到上個世紀的古典課題。而由量子場論已經得到了很多關於這些模空間的上同調的新結果。另一個非常類似的模空間是一個具有虧格數 g 的 *Riemann* 曲面上的平坦 G-叢的模空間。這些空間都是非常有趣的並且量子場論給出關於它們的一些精確結果。特別地，可以得到一些關於體積的很漂亮的公式，這其中涉及到 *Zeta* 函數的取值。

另一個應用與計數曲線(*counting curve*)有關。如果我們來看給定次數和類型的平面代數曲線，我們想要知道的是，例如，經過那麼多點究竟有多少曲線，這樣我們就要面臨代數幾何的計數問題，這些問題在上個世紀一直是很經典的。而且也是非常困難的。現在它們已經通過被稱為“量子上同調”的現代技術解決了，這完全是從量子場論中得到的。或者我們也可以接觸那些關於不在平面上而在彎曲族上的曲線的更加困難的問題，這樣我們得到了另一個具有明確結果的被稱為鏡面對稱的美妙理論，所有這些都產生於 1＋1 維量子場論。

如果我們升高一個維數，也就是 2-維空間和 1-維時間，就可以得到 *Vaughan-Jones* 的扭結不變量理論。這個理論已經用量子場論的術語給予了很美妙的解釋和分析。

量子場論另一個結果是所謂的“量子群”·現在關於量子群的最好的東西是它們的名字。明確地講它們不是群！如果有人要問我一個量子群的定義，我也許需要用半個小時來解釋，它們是復雜的事物，但毫無疑問它們與量子理論有著很深的聯系它們源於物理，而且現在的應用者是那些腳踏實地的代數學家們，他們實際上用它們進行確定的計算。

如果我們將維數升得更高一些，到一個全四維理論（三加一維），這就是 *Donaldson* 的四維流形理論，在這裡量子場論產生了重大影響。特別地，這還導致 *Seiberg* 和 *Witten* 建立了他們相應的理論，該理論建立在物理直覺之上並且也給出許多非同尋常的數學結果。所有這些都是些突出的例子。其實還有更多的例子。

接下來是弦理論並且這已經是過時的了！我們現在所談論的是 *M*-理論，這是一個內容豐富的理論，其中同樣有大量的數學，從關於它的研究中得到的結果仍有待于進一步消化並且足可以讓數學家們忙上相當長的時間。

歷史的總結

我現在作一個簡短的總結，讓我概括地談談歷史：數學究竟發生了什麼？我相當隨意地把十八世紀和十九世紀放在了一起，把它們當做我們稱為古典數學的時代，這個時代是與 *Euler* 和 *Gauss* 這樣的人聯系在一起的，所有偉大的古典數學結果也都是在這個時代被發現和發展的。有人也許認為那幾乎就是數學的終結了，但是相反地，二十世紀實際上非常富有成果，這也是我一直在談論的。

二十世紀大致可以一分為二地分成兩部分。我認為二十世紀前半葉是被我稱為“專門化的時代”，這是一個 *Hilbert* 的處理辦法大行其道的時代，即努力進行形式化，仔細地定義各種事物，並在每一個領域中貫徹始終。正如我說到過的，*Bourbaki* 的名字是與這種趨勢聯系在一起的。在這種趨勢下，人們把注意力都集中於在特定的時期從特定的代數系統或者其它系統能獲得什麼。二十世紀後半葉更多地被我稱為“統一的時代”，在這個時代，各個領域的界限被打破了，各種技術可以從一個領域應用到另外一個領域，並且事物在很大程度上變得越來越有交叉性。我想這是一種過於簡單的說法，但是我認為這簡單總結了我們所看到的二十世紀數學的一些方面。

二十一世紀會是什麼呢？我已經說過，二十一世紀是量子數學的時代，或者，如果大家喜歡，可稱為是無窮維數學的時代。這意味著什麼呢？量子數學的含義是指我們能夠恰當地理解分析、幾何、拓撲和各式各樣的非線性函數空間的代數，在這裡，“恰當地理解”，我是指能夠以某種方式對那些物理學家們已經推斷出來的美妙事物給出較精確的證明。

有人要說，如果用天真幼稚的方式(*naive way*)來研究無窮維並問一些天真幼稚的問題，通常來講，只能得到錯誤的答案或者答案是無意義的，物理的應用、洞察力和動機使得物理學家能夠問一些關於無窮維的明智的問題，並且可以在有合乎情理的答案時作一些非常細致的工作，因此用這種方式分析無窮維決不是一件輕而易舉的事情。我們必須沿著這條正確的道路走下去。我們已經得到了許多線索，地圖已經攤開了：我們的目標已經有了，只不過還有很長的路要走。

還有什麼會發生在二十一世紀？我想強調一下 *Connes* 的非交換微分幾何。*Alain Connes* 擁有這個相當宏偉的統一理論。同樣，它融合了一切。它融合了分析、代數、幾何、拓撲、物理、數論，所有這一切都是它的一部分。這是一個框架性理論，它能夠讓我們在非交換分析的範疇裡從事微分幾何學家通常所做的工作，這當中包括與拓撲的關係。要求這樣做是有很好的理由的，因為它在數論、幾何、離散群等等以及在物理中都有（潛力巨大的或者特別的）應用。一個與物理有趣的聯繫也剛剛被發現。這個理論能夠走多遠，能夠得到什麼結果，還有待進一步觀察。它理所當然地是我所期望的至少在下個世紀頭十年能夠得到顯著發展的課題，而且找到它與尚不成熟的（精確）量子場論之間的聯系是完全有可能的。

我們轉到另一個方面，也就是所謂的“算術幾何”或者是 *Arakelov* 幾何，其試圖盡可能多地將代數幾何和數論的部分內容統一起來。這是一個非常成功的理論。它已經有了一個美好的開端，但仍有很長的路要走。這又有誰知道呢？

當然，所有這些都有一些共同點。我期待物理學能夠將它的影響遍及所有地方，甚至是數論：*Andrew Wiles* 不同意我這樣說，只有時間會說明一切。

這些是我所能看到的在下個十年裡出現的幾個方面，但也有一些難以捉摸的東西：返回至低維幾何．與所有無窮維的富有想像的事物在一起，低維幾何的處境有些尷尬。從很多方面來看，我們開始時討論的維數，或我們祖先開始時的維數，仍留下某些未解之謎。維數為 2，3 和 4 的對象被我們稱為“低”維的．例如 *Thurston* 在三維幾何的工作，目標就是能夠給出一個三維流形上的幾何分類，這比二維理論要深刻得多。*Thurston* 綱領還遠遠沒有完成，完成這個綱領當然將是一個重要的挑戰。

在三維中另外一個引人注目的事件是 *Vaughan-Jones* 那些思想本質上來源於物理的工作。這給了我們更多關於三維的信息，並且它們幾乎完全不在 *Thurston* 綱領包含的信息之內。如何將這兩個方面聯系起來仍然是一個巨大的挑戰，但是最近得到的結果暗示兩者之間可能有一座橋，因此，整個低維的領域都與物理有關，但是其中實在有太多讓人琢磨不透的東西。

最後，我要提一下的是在物理學中出現的非常重要的“對偶”。這些對偶，泛泛地來講，產生於一個量子理論被看成一個經典理論時有兩種不同的實現。一個簡單的例子是經典力學中的位置和動量的對偶。這樣由對偶空間代替了原空間，並且在線性理論中，對偶就是 *Fourier* 變換。但是在非線性理論中，如何來代替 *Fourier* 變換是巨大的挑戰之一。數學的大部分都與如何在非線性情形下推廣對偶有關．物理學家看起來能夠在他們的弦理論和 *M*-理論中以一種非同尋常

的方式做到了這一點。他們構造了一個又一個令人嘆為觀止的對偶實例，在某種廣義的意義下，它們是 *Fourier* 變換的無窮維非線性體現，並且看起來它們能解決問題，然而理解這些非線性對偶性看起來也是下個世紀的巨大挑戰之一。

我想我就談到這裡。這裡還有大量的工作，並且我覺得像我這樣的一個老人可以和你們這麼多的年輕人談談是一件非常好的事情；而且我也可以對你們說：在下個世紀，有大量的工作在等著你們去完成·

（原載《數學譯林》2002/2，白承銘譯，周性偉、馮惠濤校）