MECÁNICA Y MECANISMOS

Resumen de fórmulas

Valentin Franzoi

2022

Nomenclatura

Conceptos

Dinámica, parte de a mecánica que refiere al análisis de los cuerpos en movimiento. Se divide en :
Cinemática: corresponde al estudio de la geometría del movimiento. Se utiliza para relacionar el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo, sin hacer referencia a la causa del movimiento.
cinética: estudio de la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, su masa y el movimiento de este mismo. La cinética se utiliza para predecir el movimiento ocasionado por fuerzas dadas, o para determinar las fuerzas que se requieren para producir un movimiento específico.

UNIDAD 1
CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

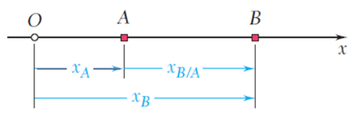
Trabajamos con tres casos

Caso 1	a=f(t)
	$dv = a.dt$
	$dv = f(t).dt$
	$\int dv = \int f(t).dt$
	$dx = v.dt$
Cond. iniciales	$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t).dt$
	$v - v_0 = \int_0^t f(t).dt$

Caso 2	$a = f(x)$
	$v.dv = a.dx$
	$v.dv = f(x).dx$
	$dt = dx/v$
Cond. iniciales	$\int_{v_0}^{v} v.dv = \int_{x_0}^{c} f(x).dx$
	$\frac{1}{2}.v^2 - \frac{1}{2}.v_0^2 = \int_{x_0}^{c} f(x).dx$

Caso 3	$a = f(v)$
Camino 1	$f(v) = \frac{dv}{dt}$
	$dt = \frac{dv}{f(v)}$
Camino 2	$f(v) = v.\frac{dv}{dx}$
	$dx = \frac{v.dv}{f(v)}$

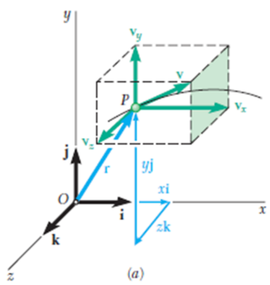
Movimiento rectilineo entre particulas



$$x_B = x_A + x_{B/A}$$
$$v_B = v_A + v_{B/A}$$
$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

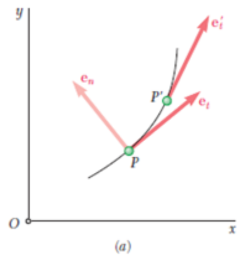
Sistemas Coordenados

Cartesianas:



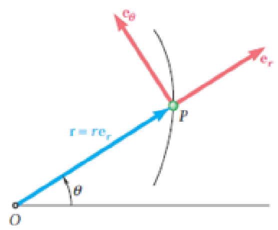
$$\mathbf{r} = x.\mathbf{i} + y.\mathbf{j} + z.\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}.\mathbf{i} + \dot{y}.\mathbf{j} + \dot{z}.\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}.\mathbf{i} + \ddot{y}.\mathbf{j} + \ddot{z}.\mathbf{k}$$

Normal y tangencial:



rapidez	$ds/dt = v$
velocidad	$\mathbf{v} = v.\mathbf{e}_t$
aceleracion	$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}.\mathbf{e}_t + v.\frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$
	$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}.\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}.\mathbf{e}_n$
$a_{tangencial}$	$\frac{dv}{dt}$
a_{normal}	$\frac{v^2}{\rho}$
Relación $\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_t$	$\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t}{dt}$

Normal y tangencial:



velocidad	$\mathbf{v} = \dot{r}.\mathbf{e}_r + r.\dot{\theta}.\mathbf{e}_\theta$
aceleracion	$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2).\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2.\dot{r}.\dot{\theta}).\mathbf{e}_\theta$

UNIDAD 2
CUERPO RÍGIDO

Entendemos por sólido rígido una idealizacion matemática de un sistema físico en la que la distancia entre dos puntos materiales cualesquiera de ellas permanece invariable en el transcurso del tiempo.
Para cualquier par de puntas A y B del cuerpo, en todo momento $|\vec{r}_{B/A}| = cte$

Tipos de movimiento de un cuerpo rígido:

Traslación
Un movimiento será de traslación si toda línea recta dentro del cuerpo mantiene la misma dirección durante el movimiento. También puede observarse que en la traslación todas las partículas que constituyen el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas.
En todo momento, todos los puntos del cuerpo tienen la misma **v** y la misma **a**.

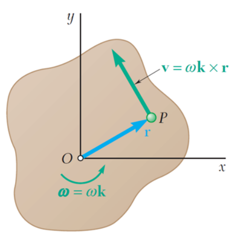
$\vec{r}_{B/A}$ | Módulo Constante
Dirección Constante
Es un vector Cte en el tiempo

Vectores | $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$
$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$
$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$

Rotación alrededor de un eje fijo
Las particulas que forman el cuerpo rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados sobre el mismo eje fijo. Si este eje (eje de rotación) interseca el cuerpo rígido, las partículas localizadas sobre el eje tienen **v**=0 y **a**=0.

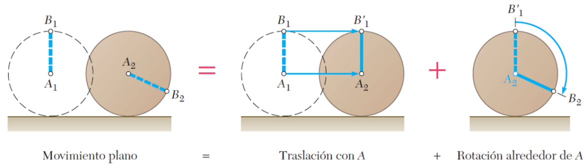
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Conviene en estos casos trabajar situando el eje Z, perpendicular al la hoja de trabajo para simplificar los calculos vectoriales

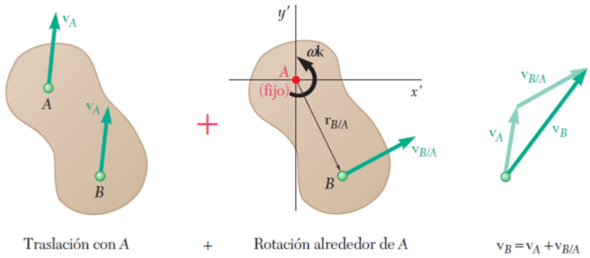


$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r}$$

Movimiento plano movimientos en los cuales todas las partículas del cuerpo se mueven en planos paralelos. Cualquier movimiento plano que no es ni una rotación ni una traslación se conoce como un movimiento plano general.



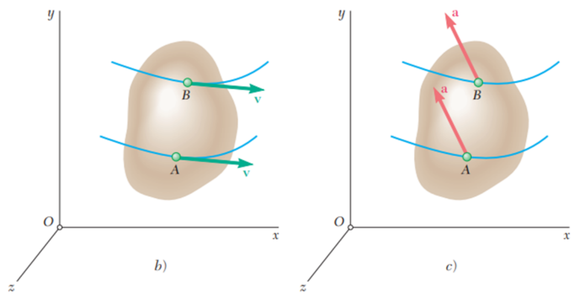
Los vectores $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son perpendiculares al plano de movimiento.
Los vectores **v** y **a** de cada punto del cuerpo están contenidos en el mismo plano



Las velocidades en el movimiento plano son:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

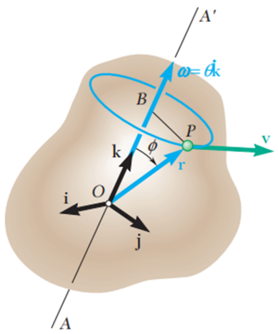
Traslación
Se afirma que un movimiento será de traslación si toda línea recta dentro del cuerpo mantiene la misma dirección durante el movimiento. Se observa que en la traslaci+on todas las particulas que constituyen el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas.



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Rotación alrededor de un eje fijo

En este movimiento las partículas que forman el cuerpo rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados sobre el mismo eje fijo.



$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Trabajando en el plano, haciendo coincidir el $\vec{\mathbf{k}}$, con el eje de nuestro sistema de referencia queda:

$$\mathbf{v} = \omega \vec{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a} = \alpha \vec{\mathbf{k}} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}$$

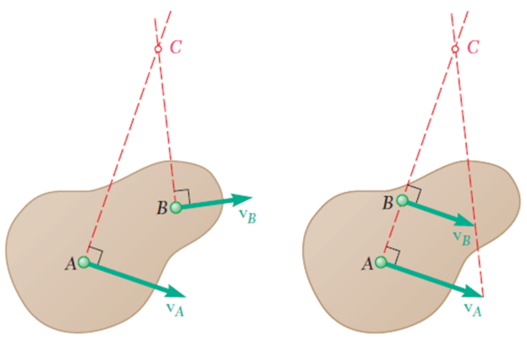
Movimiento plano

Nosotros tratamos los movimientos planos en los cuales todas las particulas del cuerpo se mueven en planos paralelos.
Velocidades en el mov. plano:

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_{b/a}$$
$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_a + \omega \vec{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{b/a}$$

Centro instantáneo de Rotación

Considere el movmimiento plano general de una placa, en cualquier instante dado de la velocidad de las diversas partículas de la placa es la misma como si la placa girara alrededor de cierto eje perpendicular a su plano.



a) b)

Movimiento respecto a un sistema de referencia en rotación

$$\mathbf{v}_{xy} = \mathbf{v}_{x'y'} + \Omega \times \mathbf{r}$$

$\mathbf{v}_{xy}$	Velocidad absoluta del punto
$\mathbf{v}_{x'y'}$	Velocidad del unto relativa al sistema de referencia en rotación
Ω	Velocidad angular del sistema móvil respecto del fijo
$\mathbf{r}$	Posición del punto en el sistema móvil

$$\mathbf{a}_{xy} = \mathbf{a}_{x'y'} + \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) + 2(\Omega \times (\mathbf{v}_{x'y'}))$$

$\mathbf{a}_{xy}$	Aceleración absoluta del punto
$\mathbf{a}_{x'y'}$	Aceleración relativa al sistema de referencia móvil
$\dot{\Omega}$	Aceleración angular del sistema móvil respecto del sistema fijo
Ω	Velocidad angular del sistema móvil respecto del sistema fijo
$\mathbf{r}$	posición de la partícula representada en el sistema de referencia móvil
$\mathbf{v}_{x'y'}$	Velocidad respecto del sistema móvil
$2(\Omega \times (\mathbf{v}_{x'y'}))$	Aceleración de Coriolis.

Rotación alrededor de un punto fijo

Teorema de Euler: *"Cuando un sólido rígido gira alrededor de un punto fijo, toda posición del sólido se puede obtener a partir de cualquier otra posición mediante una sola rotación en torno a un cierto eje que pasa por dicho punto fijo"*, es decir, dos rotaciones "componentes" alrededor de ejes diferentes que pasan por un punto equivalen a una sola rotación resultante alrededor de un eje que pasa por el punto.

UNIDAD 4
DINÁMICA DE LA PARTICULA

Leyes de Newton		Cantidad de movimiento	
1°	$\sum \mathbf{F}_r = 0$	Lineal	$\mathbf{L} = m\mathbf{V}$
2°	$\sum \mathbf{F}_r = m\mathbf{a}$	Angular	$\mathbf{H}_o = \mathbf{r} \times m.\mathbf{v}$
3°	$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$		

Energía cinetica de una particula, principio del trabajo y la energía

$$U_{1\to 2} = T_2 - T_1$$

$U_{1\to 2}$	Trabajo realizado
T	Energía cinética

”Energía cinética de una partícula representa también la capacidad para realizar trabajo asociado con la velocidad de la partícula´´

Potencia y eficiencia

Potencia	$\frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F.dr}}{dt} = \mathbf{F.v}$
Rendimiento	$\eta = \frac{potencia\ de\ salida}{potencia\ de\ entrada}$

Energía potencial y fuerzas conservativas
Cuando el trabajo realizado por una fuerza no depende de la trayectoria de la partícula hablamos de una fuerza conservativa.

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 = -\Delta V$$

$U_{1\to 2}$	Trabajo realizado
V	Energía potencial

Energía mecánica
Conociendo que:
$U_{1\to 2} = \quad V_1 - V_2$
$U_{1\to 2} = \quad T_2 - T_1$
Igualando nos queda $V_1 + T_1 = V_2 + T_2$, a la suma de $T + V$ le llamaremos E_m (Energía Mecánica).

Si todas las **F** que actúan sobre una partícula son conservativas E_m = CTE. $= T_n + V_n$
Si sobre la partícula actúan **F** no conservativas $U_{1\to 2\ F\ no\ cons} = \Delta E_m$.

Impulso y cantidad de movimiento

$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}.dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$

$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}.dt = m\mathbf{v}_2$

F son las fuerzas impulsivas

Esto te arma un sistema de tres ecuaciones:

$$(m\mathbf{v}_x)_1 + \int_{t1}^{t2} \mathbf{F}_x dt = (m\mathbf{v}_x)_2$$
$$(m\mathbf{v}_y)_1 + \int_{t1}^{t2} \mathbf{F}_y dt = (m\mathbf{v}_y)_2$$
$$(m\mathbf{v}_z)_1 + \int_{t1}^{t2} \mathbf{F}_z dt = (m\mathbf{v}_z)_2$$

UNIDAD 4
SISTEMA DE PARTÍCULAS

Aplicación de las leyes de Newton al movimiento de un sistema de partículas. Fuerzas efectivas.
Sobre cada particula actúan fuerzas internas y externas:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i$$
$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i$$

pero se demuestra que las internas se cancelan entre sí:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = 0$$
$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = 0$$

Nos queda:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^n m_i \mathbf{a}_i$$
$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i)$$

Si derivamos el vector cantidad de movimiento lineal y el vector cantidad de movimiento angular alrededor de O respecto del tiempo, obtenemos :

$$\sum \mathbf{F} = \quad \dot{\mathbf{L}} = \quad \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i$$
$$\sum \mathbf{M}_o = \quad \dot{\mathbf{H}}_o = \quad \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i)$$

Centro de masa

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$$
$$m\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad m\bar{y} = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad m\bar{z} = \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Diferenciando respecto a t obtenemos:

$$m\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad m\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}} \quad \dot{\mathbf{L}} = m\bar{\mathbf{a}}$$
$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$$

Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas alrededor de su centro de masa
se trabaja con dos sistemas de referencia, absoluto (O_{xyz}) y $(G_{x'y'z'})$.
El momento resultante alrededor de G de las fuerzas externas es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de

partículas.

$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}'_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$
$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

Energía cinética de un sistema de partículas
Haciendo uso de un sistema de referencia centroidal, sistemas de referencia (O_{xyz}) y $(G_{x'y'z'})$
La energía cinética T de un sistema de partículas puede obtenerse al sumar la energía cinética del centro de masa G (suponiendo que toda la masa está concentrada en G) y la energía cinética del sistema en su movimiento relativo al sistema de referencia $(G_{x'y'z'})$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2}' \sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2$$

El principio de energía y trabajo puede aplicarse, la cantidad $U_{1 \to 2}$ representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema, se debe considerar el trabajo de las fuerzas internas y externas.
Si todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema son conservativas, se puede aplicar principio de conservación de la energía.

$$T_1 + U_{1 \to 2} = T_2$$
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Impulso y cantidad de movimiento de un sistema de partículas
Se hacen presentes impulsos lineales y angulares

$$\mathbf{L}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{L}_2$$
$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

Sistemas variables de partículas.
Corriente estacionaria de partículas
El sistema formado por la cantidad de movimiento $()\Delta m)\mathbf{v}_A$ *de las partículas que entran a* S *en el tiempo* Δt *y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre* S *durante ese tiempo es equipolente a la cantidad de movimiento* $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ *de las partículas que salen de* S *en el mismo tiempo* Δt

$$(\Delta m)\mathbf{v}_A + \sum \mathbf{F}(\Delta t) = (\Delta m)\mathbf{v}_B$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

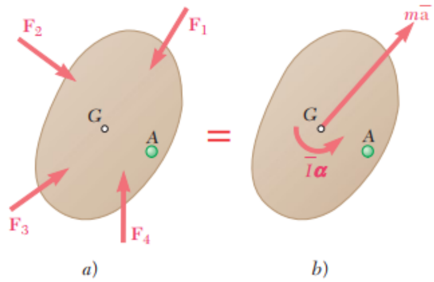
UNIDAD 5
DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

Cinetica de cuerpos rígidos

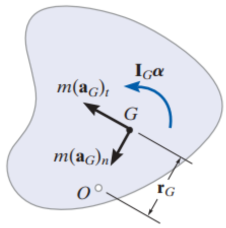
$$\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega} \to \dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \qquad \sum F_y = m\bar{a}_y \qquad \sum M_G = \bar{I}\alpha$$

Principio de d'Alembert: las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son realmente **equivalentes** a las fuerzas efectivas de las diversas partículas que forman el cuerpo



Si se presenta una **rotación no centroidal**, desarrollando queda:



$$\sum M_O = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} + (m.\bar{a})_t).\bar{r} \text{ siendo } \bar{r}\boldsymbol{\alpha} = \bar{a}$$
$$M_O = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} + (m.\bar{r}\boldsymbol{\alpha}).\bar{r}$$
$$M_O = (\bar{I} + m.\bar{r}^2).\boldsymbol{\alpha}$$

$$\sum M_O = I_O \boldsymbol{\alpha}$$

Energía y cantidad de movimiento de cuerpos rígidos
Particularmente útil para resolver problemas que implican miembros conectados por pasadores, bloques y poleas que se conectan mediante cuerdas inextensibles y engranajes dentados. En todos estos casos las fuerzas internas se presentan por pares de fuerzas iguales y opuestas, los puntos de aplicación de las fuerzas se mueven distancias iguales durante un pequeño desplazamiento del sistema. Como resultado, el trabajo de las fuerzas internas es cero, y $\boldsymbol{U}_{\mathbf{1} \to \mathbf{2}}$ se reduce al trabajo de las fuerzas externas al sistema.

Impulso y cantidad de movimiento p. movimiento plano de un cuerpo rígido