TC 5 - Parte 3

Entrega dia 21/11/19 com as demais partes

1 Calcule y(0. 4) usando o Método de Euler com h=0.01 para o PVI: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

2 Calcule y(1) para $y'=4x^3$; y(0)=0 aplicando o Método de Euler com h=0.2.

3 Seja o PVI: $\begin{cases} xy' = x - y \\ y(2) = 2 \end{cases}$.

Estime y(2.1) pelo Método de Euler com h=0.1, h=0.01 e h=0.025.

4 Dado o PVI: $\begin{cases} y' = 0.04y \\ y(0) = 1000 \end{cases}$, estime o valor de y(1), com h=0.5, h=0.25 e h=0.1

usando

a) o Método de Euler.

b) o Método de Euler Melhorado (Runge-Kutta de 2ª ordem).

c) o Método de Runge-Kutta de ordem 4.

5

O método das diferenças finitas descrito neste exemplo é outra maneira de aproximarmos soluções de problemas de valor inicial. Substitua $y'(x)$ no PVI $y' = (1/x)(2y + x + 1)$, $y(1) = 0.5$ por $(y(x+h) - y(x))/h$ e obtenha uma equação de diferenças para aproximar a solução da equação diferencial. Faça $h = 0.2$ e $h = 0.1$ e encontre, em cada caso, uma aproximação para $y(1.6)$. Analise os resultados comparando com a solução exata: $y(x) = 2x^2 - x - 0.5$.

6. [Aplicação em farmacologia]

Um dos problemas clássicos em Farmacologia consiste em saber como decai a concentração de uma droga administrada em um paciente. A informação sobre esse fato admite que a dosagem seja aplicada na medida correta no paciente e o intervalo de tempo adequado entre cada aplicação. O modelo em questão assume que seja C(t) a concentração de um remédio na circulação sanguínea de um determinado paciente. À medida que o corpo elimina o remédio C(t) diminui a uma taxa proporcional à quantidade de medicamento que está presente naquele momento. Então a equação diferencial que modela o problema pode ser escrita como

$$\frac{dC(t)}{dt} = -kC(t),$$

onde *k* é um número positivo chamado constante de eliminação do remédio.
a) Obtenha o valor de k analiticamente.
b) Use dois métodos numéricos estudados para determinar quanto tempo o paciente leva para eliminar 90% do medicamento aplicado, sabendo-se que o corpo elimina metade do remédio em 4 horas. Compare com o resultado real.

7.

Um corpo com massa inicial de $200Kg$ está em movimento sob a ação de uma força constante de $2000N$. Sabendo-se que esse corpo está perdendo $1Kg$ de sua massa por segundo e considerando que a resistência do ar é o dobro de sua velocidade e que o corpo está em repouso no instante $t = 0$, então a EDO que descreve a variação de sua velocidade é dada por

$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{2000 - 2v(t)}{200 - t} & \forall t > 0 \\ v(0) = 0 & \end{cases}$$

Determine a velocidade do corpo $v(t)$ no instante $t = 5$ segundos com intervalos de 0.5 segundos, usando:

(a) Método de Euler Aperfeiçoado

(b) Método de Runge-Kutta de 4° ordem.

Sabendo-se que a solução exata da equação é $v(t) = 10\,t - \frac{1}{40}t^2$, compare com a solução aproximada obtida nos items anteriores.

Obs. Método de Euler aperfeiçoado - método de Runge-Kutta de 2a ordem

8

Na teoria da propagação de doenças contagiosas, podemos utilizar uma equação diferencial para predizer o número de indivíduos da população infectado em um dado tempo, supondo algumas simplificações adequadas. Em particular, suponha que todos os indivíduos de uma população fixa tenham a mesma probabilidade de se infectar e que, uma vez infectado, permaneçam neste estado. Vamos denotar por $x(t)$ o número de indivíduos vulneráveis no tempo t e com $y(t)$ o número de infectados. Podemos supor, que a taxa na qual o número de infectados muda seja proporcional ao produto de $x(t)$ e $y(t)$, já que a taxa depende do número de indivíduos infectados e do número de indivíduos vulneráveis que existem nesse tempo. Se a população é suficientemente numerosa para supormos que $x(t)$ e $y(t)$ sejam variáveis contínuas, podemos expressar o problema como:

$$y'(t) = k\, x(t)\, y(t)$$

onde k é uma constante e $x(t) + y(t) = m$ é a população total. Podemos reescrever essa equação, para que contenha apenas $y(t)$, na forma,

$$y'(t) = k\, (m - y(t))\, y(t) \qquad \text{"Equação de Bernoulli"}$$

Supondo que $m = 100.000$, $y(0) = 1000$, $k = 2 \times 10^{-6}$ e que o tempo seja medido em dias, encontre uma aproximação para o número de infectados ao final de 30 dias.

(a) Método de Runge-Kutta de 4° ordem.

9. Resolva os exercícios anteriores usando uma função adequada do python. Compare com os resultados que você obteve.