误差函数问题

误差函数问题是我在拟合问题中发现的一种函数表达式未知或者极其复杂难以正常求导和积分，但需要求解误差函数最小值、误差函数微分、误差函数积分和函数微分方程拟合等一系列问题

例：已知函数$y=e^{ax}$(a为待定参数)的一组数据点$(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$，现构造误差函数$e(a)=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-e^{ax_i})^2}$，因为数据点$(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$是已知的，所以误差函数$e(a)$是关于$a$的函数但具体表达式极其复杂。

对于此类不知明确表达式或表达式及其复杂的函数，可以采用数值解的方式求解极值、微分、积分等问题，且这类问题是国赛中最常见，当然国赛中的题不一定就是和误差相关，更常见的是一种系统的问题(例如 2020A 输入设定温度和速度，输出炉温曲线，求曲线面积；2022A 中给定阻尼系数，输出 PTO 振动曲线，求功率函数等)，这里采用误差函数来简单介绍，理解起来容易些。

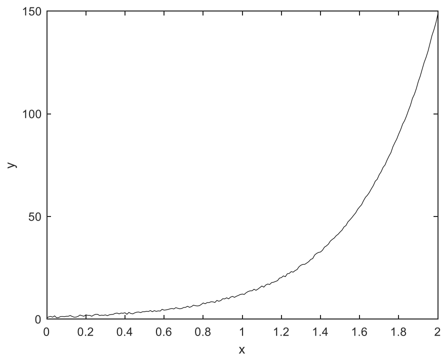


图 1 附件的数据

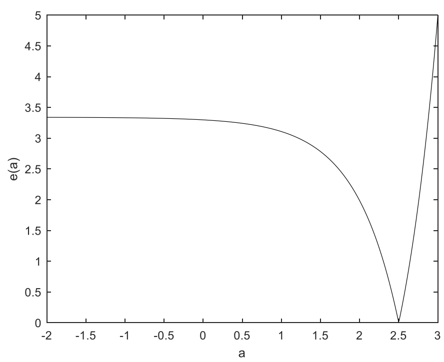
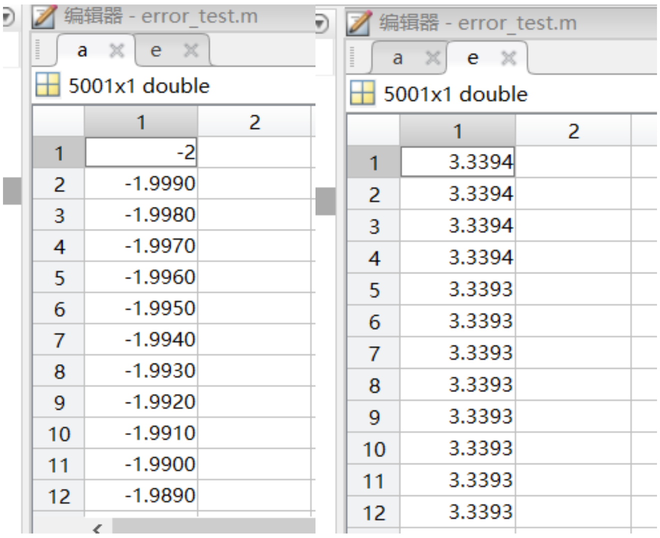


图 2 a 遍历-2 到 3 的误差函数图像

在该问题中，尽管函数表达式已知但及其复杂，求解微积分十分困难。

从图 3 中可看出，图 2 中画出的函数图像，实际上是 1 个个数据点连接而成的。



编辑器 - error_test.m

a e

5001x1 double

	1	2
1	-2	
2	-1.9990	
3	-1.9980	
4	-1.9970	
5	-1.9960	
6	-1.9950	
7	-1.9940	
8	-1.9930	
9	-1.9920	
10	-1.9910	
11	-1.9900	
12	-1.9890	

编辑器 - error_test.m

a e

5001x1 double

	1	2
1	3.3394	
2	3.3394	
3	3.3394	
4	3.3394	
5	3.3393	
6	3.3393	
7	3.3393	
8	3.3393	
9	3.3393	
10	3.3393	
11	3.3393	
12	3.3393	

图 3 matlab 变量打开结果

因为有这些离散的数据点，可以计算并画出误差函数的导函数，求解误差函数的积分等问题。

误差函数求导

根据导数定义 $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$

当 Δx 足够小时， $\frac{dy}{dx}\approx\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$

在本问题中 $a_{i+1}-a_i=\Delta a_i$，所以 $\left.\frac{de}{da}\right|_{a_i}=\frac{e_{i+1}-e_i}{a_{i+1}-a_i}$

就是用相邻两点的斜率近似代替导数，在编程中，向量做差可用 diff 函数实现。

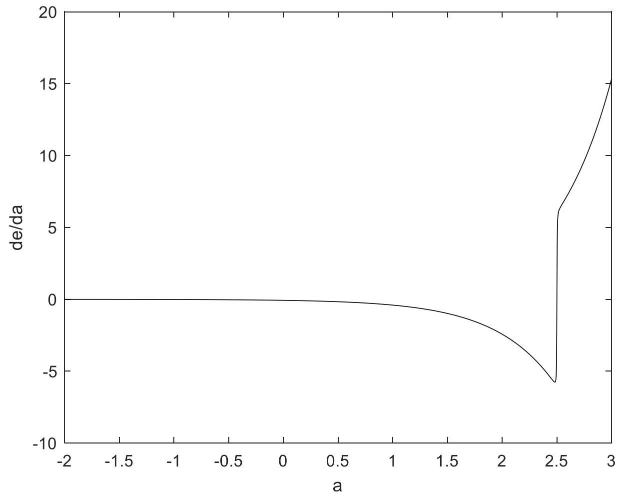


图 4 误差函数的导函数

误差函数的积分

$$\int_{-2}^{3} e(a)\,da$$

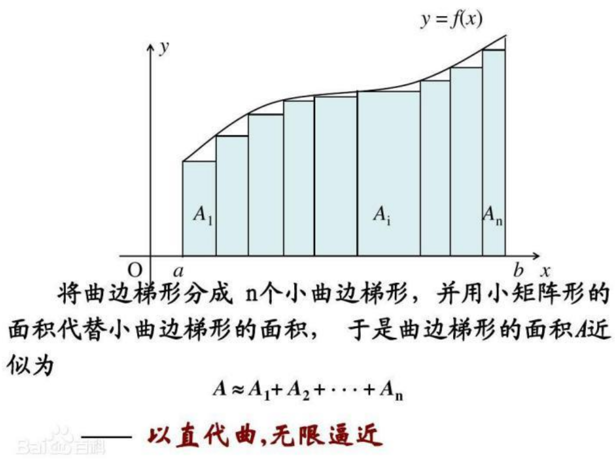


图 5 数值积分矩形法

对于每一个小矩形面积 $A_i = e(a_i)\varDelta a_i$

其中 $\varDelta a_i = a_{i+1} - a_i, i = 1, 2, \cdots, n-1$ 且 $-2 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 3$

所以 $\int_{-2}^{3} e(a)\,da \approx \sum_{i=1}^{n-1} e(a_i)\varDelta a_i$