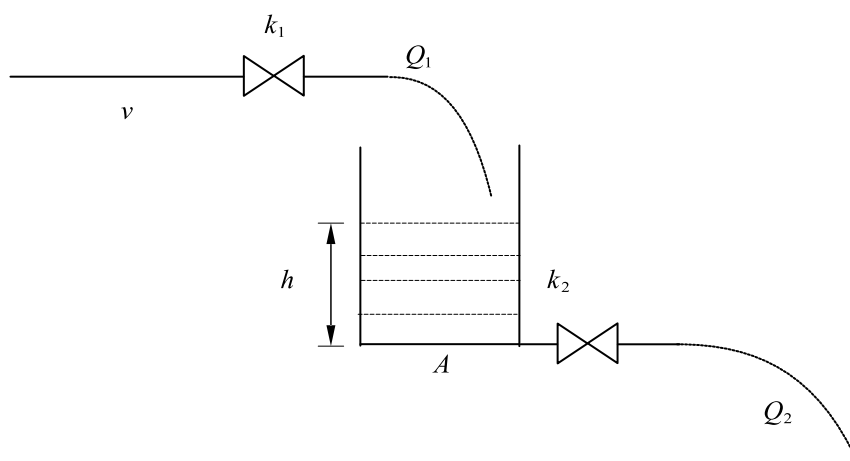


## 水箱建模问题

机理建模是通过常见的物理学定律来建立方程的一种建模方法，常见的有基于牛顿第二定律建立动力学方程（2022A）、基于质量守恒定律建立流量方程（2019A），力学平衡方程（2016A）等等，简单来说，就是需要自行建模，不同于热传导方程这样在现成的模型基础上进行建模。



水箱模型

微分方程的建模一般是：变化量=增加量-减少量

水箱液位高度的变化  $A \frac{dh}{dt} = Q_1 - Q_2$

其中  $A$  为水箱底面积， $Q_1$  为流入水箱的体积流量， $Q_2$  为流出水箱的体积流量。

小孔喷出液体流量计算公式为  $Q = k \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$

其中  $k$  为阻力系数， $\rho$  为液体密度， $\Delta P$  小孔两边的压力差

对于流入水箱的体积流量  $Q_1$ ，压力差主要由管道内液体的动能提供，即

$$\Delta P_1 = \frac{1}{2} \rho v^2$$

所以  $Q_1 = k_1 v$

对于流出水箱的体积流量  $Q_2$ ，压力差主要由水箱内液体的重力势能提供，即

$$\Delta P_2 = \rho g h$$

所以  $Q_2 = k_2 \sqrt{2gh}$

因此水箱液位高度变化的微分方程为

$$A \frac{dh}{dt} = k_1 v - k_2 \sqrt{2gh}$$

$$\text{令 } m = \frac{k_1 v}{A}, n = \frac{k_2 \sqrt{2g}}{A}$$

$$\frac{dh}{dt} + nh^{\frac{1}{2}} = m$$

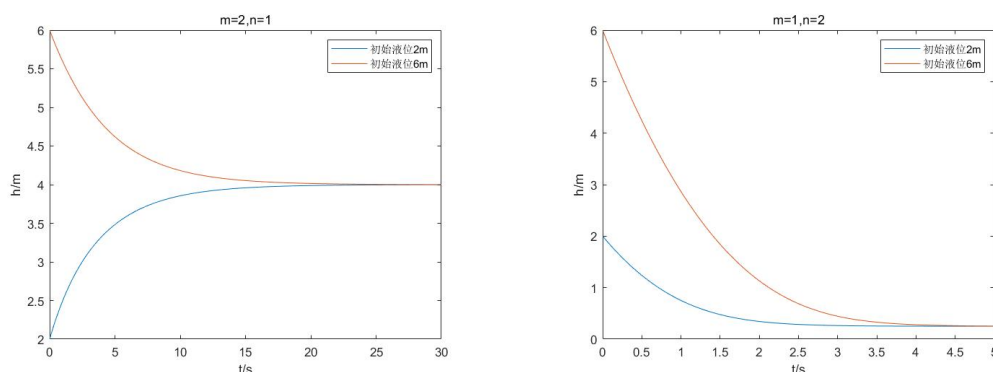
过程控制中，水箱模型一般会近似成一阶线性微分方程，即

$$\frac{dh}{dt} + nh = m$$

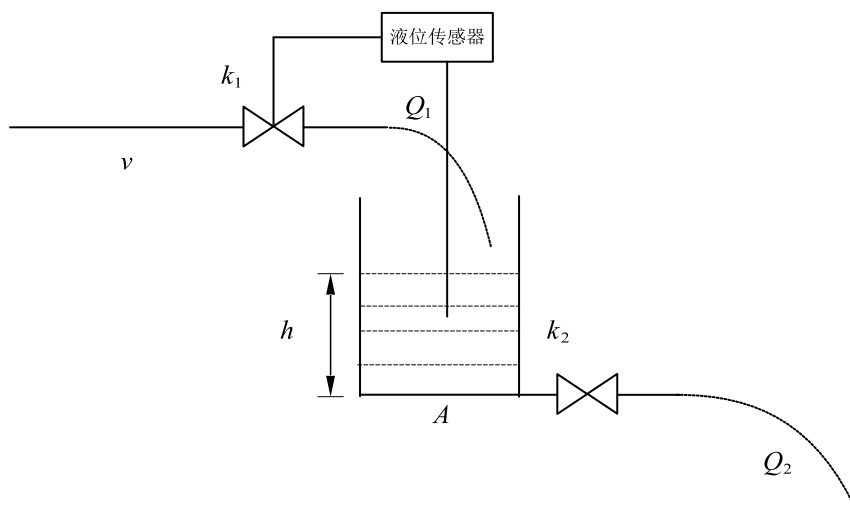
我们以第一个方程为例，当  $t \rightarrow +\infty$  时， $\frac{dh}{dt} = 0$ ，即

$$h_{\infty} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{k_1^2 v^2}{2gk_2^2}$$

也就是说，当水箱足够高（不考虑水溢出的情况），当模型参数给定时，无论初始水位在何处，最终都会稳定在同一个位置。



2019A 高压油管的压力控制就是根据这个模型进行改编的，在该题中高压油管内的压力（压强）相当于水箱的液位，其实两者是等价的，水箱液位是因为压力（压强）产生的，即  $P = \rho gh$ 。在 2019A 中，真正复杂的是油管的进出油阀门是周期性开启的，而不是一个确定是定值，包括其中压力和燃油密度之间也是存在转换关系的。



水箱模型

水箱模型是实际意义就是家中的水龙头， $k_2$  处的阀门就是水龙头， $k_1$  处的阀门则是供水管道。

现实中，大多数时候水龙头是关闭的，即  $k_2 = 0, n = 0$ ，这时方程变为

$$\frac{dh}{dt} = m$$

如果进水阀不关闭的话（ $k_1 \neq 0, m \neq 0$ ），会导致进水量直线增加，最终会溢出。

为了防止水箱里的水位溢出，会加装一个液位传感器，当液位高于某个阈值的时候，会强行关闭进水阀，即

$$\begin{cases} k_1 = 0, h > h_{\text{lim}}^+ \\ k_1 \neq 0, h \leq h_{\text{lim}}^- \end{cases}$$

已知  $A=1, v=15, h_{\text{lim}}^+ = 15, h_{\text{lim}}^- = 5, k_1, k_2 \in \{0, 1\}$

用水期分 4 个过程

开始段：进水阀管壁，打开出水阀，只出水不进水

$$\text{方程 } \frac{dh}{dt} + nh^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow h(t) = \frac{1}{4} (2\sqrt{h_0} - nt)^2$$

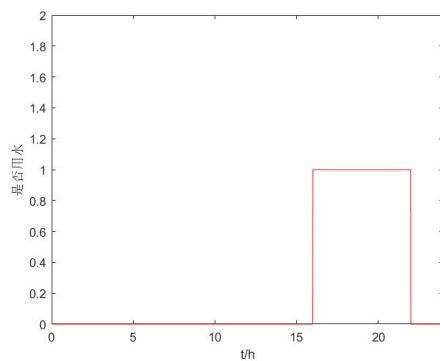
中间段：当输出超过水位下限时，进水阀打开，即出水又进水

$$\text{方程 } \frac{dh}{dt} + nh^{\frac{1}{2}} = m$$

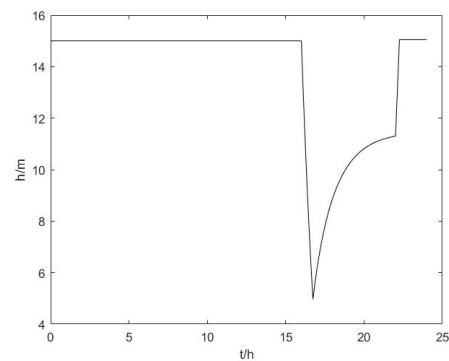
即将结束段：当进水阀管壁时，只进水不出水

$$\text{方程 } \frac{dh}{dt} = m \Rightarrow h(t) = mt + h_0$$

结束：当进水超过阈值的时候，结束进水，即  $\frac{dh}{dt} = 0$



居民用水情况



水箱液位变化情况