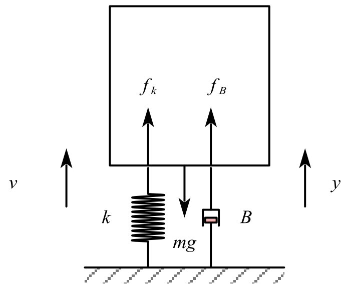
弹簧质量阻尼器建模问题

弹簧质量阻尼器是指一个物块连接弹簧和阻尼器后进行振动的数学模型，物块受到重力和弹簧和阻尼器给的阻力（弹力和阻尼力），根据牛顿第二定律建立力学微分方程方程。



弹簧质量阻尼器

弹簧给物块的弹力是与位移成正比 $f_k = ky$

阻尼器给物块的阻尼力是与速度成正比 $f_B = B\dfrac{dy}{dt}$

根据牛顿第二定律建立动力学方程 $mg - f_B - f_k = ma$，即

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + ky = mg$$

这是一个二阶线性常系数微分方程，特征方程为 $mx^2 + Bx + k = 0$

根据韦达定理 $x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{m} < 0, x_1 x_2 = \dfrac{k}{m} > 0$，所以两个根必在复平面的右半平面。

当 $\Delta = B^2 - 4mk \geq 0$ 时，特征方程有两个小于 0 的实数根，所以曲线 $y(t)$ 是单调收敛的。

当 $\Delta = B^2 - 4mk < 0$ 时，特征方程有两个实部小于 0 的共轭复根，所以曲线 $y(t)$ 是振荡收敛的。

当 $B = 0$ 时，特征方程有两个纯虚根，所以 曲线 $y(t)$ 是等幅振荡的。

对于二阶微分方程的数值求解，通常采用引入参数 $v = \dfrac{dy}{dt}$，降阶为两个一阶微分方程组来求解，引入参数 v 的物理意义是物块振动的速度。

因为 $\dfrac{dy}{dt} = v$，所以 $\dfrac{d^2 y}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) = \dfrac{dv}{dt}$，所以原方程变为

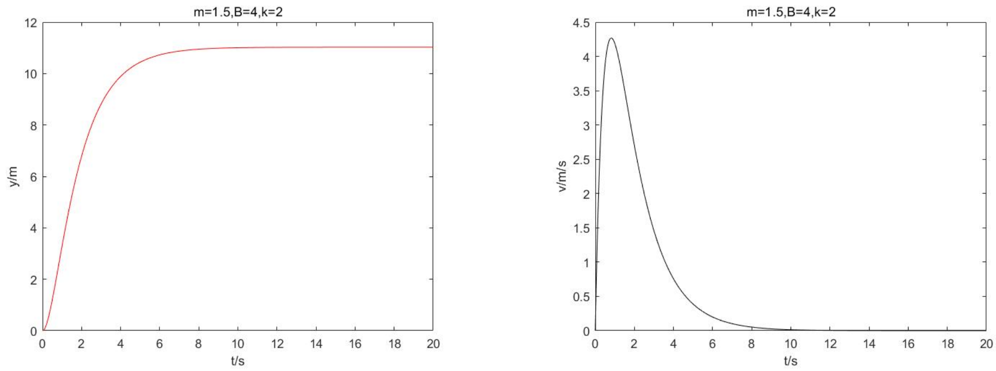
$$m\frac{dv}{dt} + Bv + ky = mg$$

即一阶微分方程组

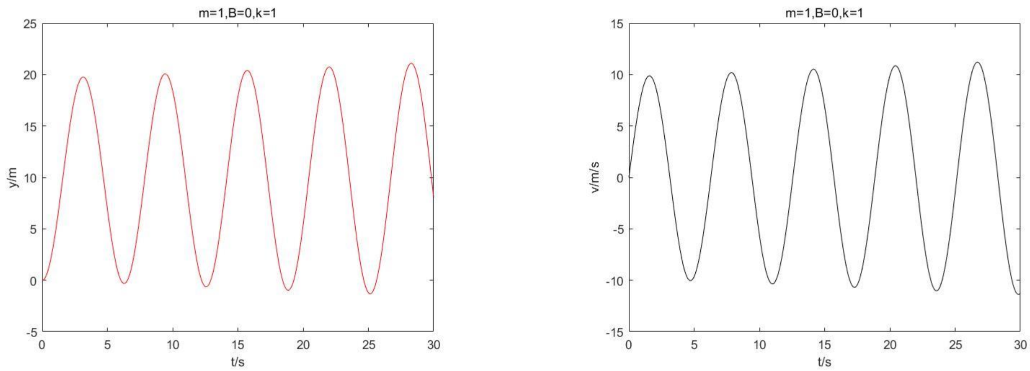
$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{B}{m}v - \dfrac{k}{m}y + mg \\ \dfrac{dy}{dt} = v \end{cases}$$

也可以写成矩阵的形式

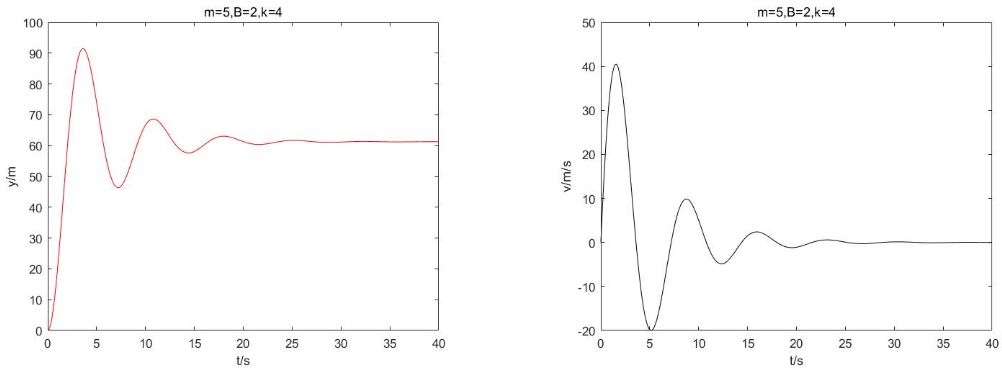
$$\begin{pmatrix} \dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{B}{m} & -\dfrac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mg \\ 0 \end{pmatrix}$$



两个负实根的情况



等幅振荡的情况



振动收敛的情况

去年的 A 题就是根据这个模型改编的，增加了一些实际应用背景，更多的力学分析以及存在非线性的弹簧和阻尼器