数值微分和数值积分

数值微积分是根据导数和积分的定义，将无穷小量dx近似为一个较小（0.001甚至更小）的定值Δx，从而近似计算函数的导数与积分，即

数值微分

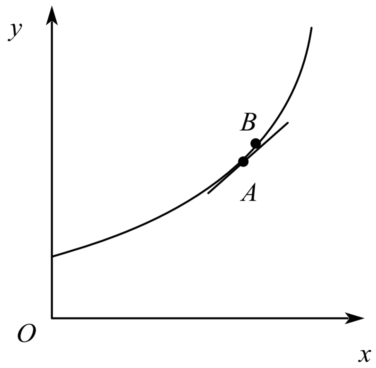


图1 数值微分割线法

点A处的切线通过绕A点旋转一个非常小的角度，与函数曲线相较于B点，则直线AB的斜率可以近似为函数在A点处的切线的斜率，即可计算出A点处的近似导数，即

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x_B) - y(x_A)}{x_B - x_A}$$

令$x_B - x_A = \Delta x$，即

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_A} \approx \frac{y(x_A + \Delta x) - y(x_A)}{\Delta x}$$

最终函数的数值微分公式

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

数值积分

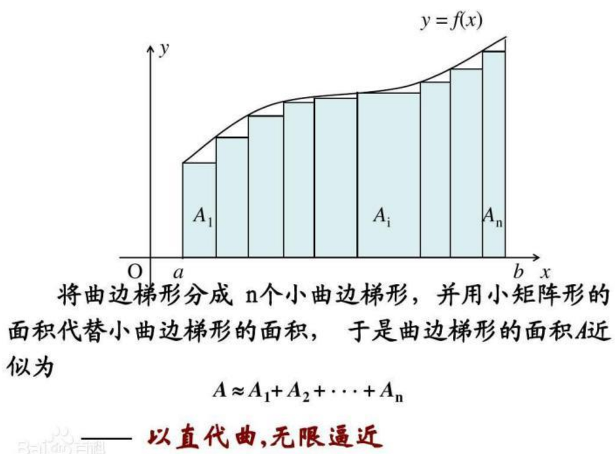


图2 数值积分矩形法

如图 2 所示，定积分的几何意义是积分区间 $[a,b]$ 范围内函数 $f(x)$ 与 x 轴包围而成的图形，所以将函数曲线下的面积部分划分为一个个较小的矩形，然后相加即可近似计算出定积分 $\int_a^b f(x)dx$

在积分区间 $[a,b]$ 上取 n 个点，$a=x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

则第 i 小矩形的边长为 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i, i=1,2,\cdots,n-1$，第 i 小矩形的高为 $f(x_i)$，那么，第 i 小矩形的面积为 $A_i=f(x_i)\Delta x_i$

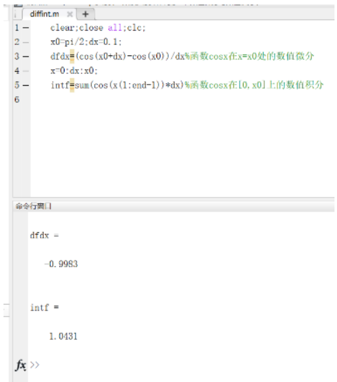
将 $n-1$ 个小矩形叠加（注意 n 个点只能构成 $n-1$ 个小矩形）得到定积分的近似公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

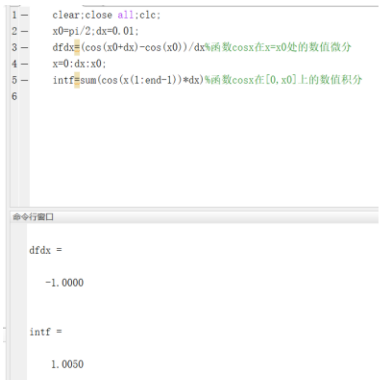
例：已知函数 $f(x)=\cos x$，用数值法计算 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

易知解析解为 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=1$

Δx 取 0.1



Δx 取 0.01



Δx 取 0.001

```
clear;close all;clc;
x0=pi/2;dx=0.001;
dfdx=(cos(x0+dx)-cos(x0))/dx%函数cosx在x=x0处的数值微分
x=0:dx:x0;
intf=sum(cos(x(1:end-1))*dx)%函数cosx在[0,x0]上的数值积分
```

```
命令行窗口

dfdx =

   -1.0000


intf =

    1.0005
```

Δx 取值越小，近似计算约接近真实值