布丰用投针实验估计了 π 值，那么用什么简单方法可以估计自然对数的底数 e 的值？

李恩志
物理系博士

这个题实际上是伯努利错装信封问题

一群人每人写一张卡片，卡片上是自己的名字。把卡片收上去，打乱次序，再随机地发给每一个人。每个人拿到的都不是自己卡片的概率趋近于 $\frac{1}{e}$. 多做几次这个实验，用频率代替概率，求倒数，就可以了。跟布丰投针实验估算 π 挺像的。放上推导过程。

设有 n 个人，每人拿到的都不是自己卡片的情况总共有 a_n 种可能性， a_n 满足这样的递推公式，

$$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2}),\quad n\geq 3, a_1=0, a_2=1 .$$

于是每个人拿到的都不是自己的卡片的概率是 $p_n=\frac{a_n}{n!}$ ， p_n 满足这样的递推公式，

$$p_n-p_{n-1}=-\frac{1}{n}(p_{n-1}-p_{n-2})$$

很容易得到

$$p_n-p_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!} .$$

作业：请你使用蒙特卡罗的方法对这个问题进行模拟，并估计出自然常数e的值

可以把 $p_n, n\geq 2$ 重新写成

$$p_n=\sum_{i=2}^{n}(p_i-p_{i-1})+p_1$$

于是就有

$$p_n=\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

取极限，得到

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{1}{e} .$$

证明完毕。