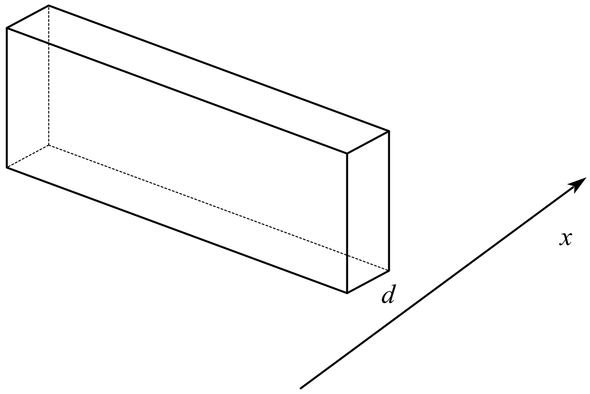
一维热传导方程

一维热传导方程 $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$，一般用于描述一根细棒或者一块厚度很薄的无限大平板的导热问题



无限大平板

偏微分方程除了需要初始条件 $T(x,0)=F(x)$，还需要边界条件，边界条件分 3 类。

第一类已知边界温度：$T(x_d,t)=G(t)$

第二类已知边界热流密度（即温度梯度函数）：$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_d}=H(t)$

第三类边界是对流换热：$-\lambda\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_d}=h(T(x_d,t)-T_f)$

其中 x_d 为边界，λ 为导热系数，h 为对流换热系数，T_f 为流体温度。第三类边界条件最常见，是物体边界处于流体中使用的，注意流体不一定就是液体，气体也属于流体。

偏微分方程的离散化

在时间和空间两个维度上分别取点 $0=t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和 $x_1<x_2<\cdots<x_m$

其中 $t_{i+1}=t_i+\Delta t, i=1,2,\cdots,n-1$，$x_{j+1}=x_j+\Delta x, j=1,2,\cdots,m-1$

记 t_i 时刻位置 x_j 处的温度 $T(x_j,t_i)=T_i^j$

温度对时间的一阶偏导

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right|_{(x,t)=(x_j,t_i)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(x_j,t_i+\Delta t)-T(x_j,t_i)}{\Delta t}$$

$$\approx\frac{T(x_j,t_i+\Delta t)-T(x_j,t_i)}{\Delta t}=\frac{T(x_j,t_{i+1})-T(x_j,t_i)}{\Delta t}=\frac{T_{i+1}^j-T_i^j}{\Delta t}$$

温度对空间的一阶偏导

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{(x,t)=(x_j,t_i)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{T(x_j,t_i)-T(x_j-\Delta x,t_i)}{\Delta x}$$

$$\approx\frac{T(x_j,t_i)-T(x_j-\Delta x,t_i)}{\Delta x}=\frac{T(x_j,t_i)-T(x_{j-1},t_i)}{\Delta x}=\frac{T_i^j-T_i^{j-1}}{\Delta x}$$

温度对空间的二阶偏导

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right|_{(x,t)=(x_j,t_i)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{(x,t)=(x_j+\Delta x,t_i)} - \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{(x,t)=(x_j,t_i)}}{\Delta x}$$

$$\approx \frac{\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{(x,t)=(x_j+\Delta x,t_i)} - \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{(x,t)=(x_j,t_i)}}{\Delta x} = \frac{\frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{\Delta x} - \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{T_i^{j+1} - 2T_i^j + T_i^{j-1}}{(\Delta x)^2}$$

所以一维热传导方程离散化 $\frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta t} = D\frac{T_i^{j+1} - 2T_i^j + T_i^{j-1}}{(\Delta x)^2}$

经过整理得到 $T_{i+1}^j = rT_i^{j+1} + (1-2r)T_i^j + rT_i^{j-1}$

其中 $r = D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

初始条件离散化

$$T(x,0) = T_1^j$$

边界条件离散化

第一类边界条件

$$T(x_d,t) = T_i^e$$

第三类边界条件

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_d} = -b(T(x_d,t) - T_f)$$

其中 $b = \frac{h}{\lambda}$

$$\frac{T_{i+1}^e - T_{i+1}^{e-1}}{\Delta x} = -b(T_{i+1}^e - T_f)$$

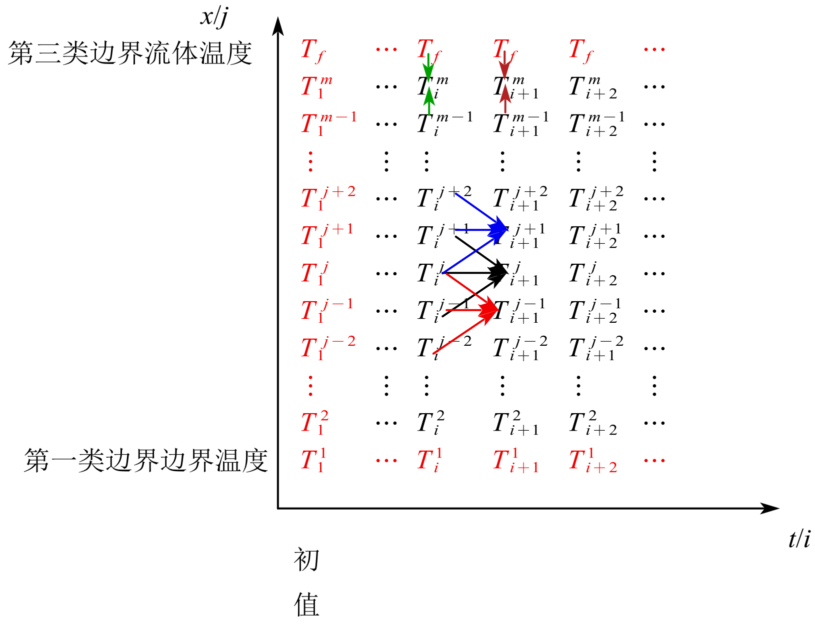
令 $q = b\Delta x$

$$T_{i+1}^e = \frac{1}{1+q}(T_{i+1}^{e-1} + qT_f)$$

最终离散化的方程为

$$\begin{cases} \text{微分方程}: T_{i+1}^j = rT_i^{j+1} + (1-2r)T_i^j + rT_i^{j-1} \\ \text{边界条件}: T_{i+1}^e = \frac{1}{1+q}(T_{i+1}^{e-1} + qT_f) \text{或} T_{i+1}^e = G(t_{i+1}) \\ \text{初始条件}: T_1^j = F(x_j) \end{cases}$$

注意：e 是指离散化后的边界，可以取 2 或者 m

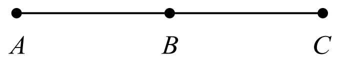


离散化方程图解（上边界为第三类边界条件，下边界为第一类边界条件）

$$\text{例一维热传导方程}\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2},0\le x\le 1 \\ T(x,0)=25 \\ T(0,t)=50-25e^{-t},\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=1}=-(T-50) \end{cases}$$

本例中，以三点法来简单解释热传导方程的计算原理。

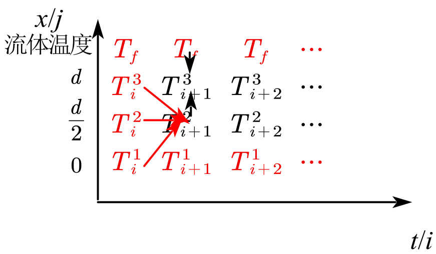
三点法即一维热传导方程在数值离散化的过程中，空间坐标x仅计算三点，即中点和两边界。

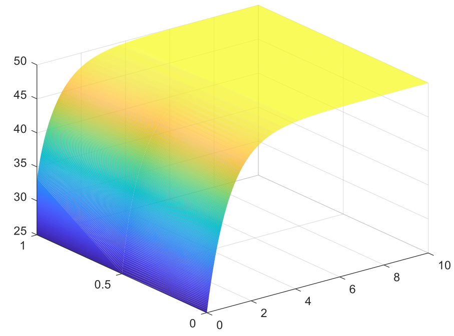


三点法：细棒导热取中点和两边界共三点

三点法离散化方程

$$\begin{cases} \text{微分方程}:T_{i+1}^2=rT_i^3+(1-2r)T_i^2+rT_i^1 \\ \text{上边界条件}:T_{i+1}^3=\dfrac{1}{1+q}(T_{i+1}^2+50q) \\ \text{下边界条件}:T_{i+1}^1=50-25e^{-t_{i+1}} \\ \text{初始条件}:T_1^j=25 \end{cases}$$





热传导方程数值解

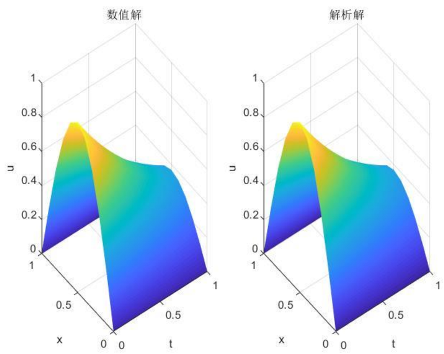
数值求解偏微分方程

$$\begin{cases} \pi^2 \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ \pi e^{-t} + \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

其中解析解为$u(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x)$

最终离散化的方程为

$$\begin{cases} u_{i+1}^{j} = r u_i^{j+1} + (1-2r) u_i^{j} + r u_i^{j-1} \\ u_1^{j+1} = \sin(\pi x_{j+1}) \\ u_{i+1}^{n} = u_{i+1}^{n-1} - \pi \Delta x e^{-t_{i+1}} \\ u_i^1 = 0 \\ r = \dfrac{\Delta t}{\pi^2 (\Delta x)^2} \end{cases}$$



热传导方程数值解与解析解比较