

2 Introduction to Quantum Mechanics

2.1 Linear algebra

Exercise 2.1:(Linear dependence: example) Show that $(1, -1)$, $(1, 2)$ and $(2, 1)$ are linearly dependent.

proof:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, (a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

とする。

この解の組 (a_1, a_2, a_3) は $t \in \mathbb{C}$ を任意の複素数として、

$$(a_1, a_2, a_3) = (t, t, -t) \quad (2)$$

と表すことが出来る。問題の三つのベクトルが一次独立であれば、 $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$ のみが解となるため不適。よって一次従属である。

Exercise 2.2: (Matrix representations: example) Suppose V is a vector space with basis vectors $|0\rangle$ and $|1\rangle$, and A is a linear operator from V to V such that $A|0\rangle = |1\rangle$ and $A|1\rangle = |0\rangle$. Give a matrix representation for A , with respect to the input basis $|0\rangle, |1\rangle$, and the output basis $|0\rangle, |1\rangle$. Find input and output bases which give rise to a different matrix representation of A .

proof: V の基底 $\{|v_1\rangle = |0\rangle, |v_2\rangle = |1\rangle\}$ に対して演算子 $A: V \rightarrow V$ は、

$$\begin{aligned} A|v_1\rangle &= 0|v_1\rangle + 1|v_2\rangle, \\ A|v_2\rangle &= 1|v_1\rangle + 0|v_2\rangle \end{aligned}$$

という作用をする。

定義より、演算子 $A: V \rightarrow W$ において、 V の基底を $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$,

W の基底を $\{|w_1\rangle, \dots, |w_m\rangle\}$

とすれば、 A の行列表現における (i, j) 成分 A_{ij} は

$$A|v_j\rangle = \sum_i A_{ij} |w_i\rangle \quad (1)$$

と定義されている。故に

$$A_{11} = 0, A_{12} = 1, A_{21} = 1, A_{22} = 0.$$

すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

復習:(表現行列の定義)

線形写像 $f: V \rightarrow W$ において、 V の基底を $\{v_1, \dots, v_n\}$, W の基底を $\{w_1, \dots, w_m\}$ とする。

ここで任意の $j(1 \leq j \leq n)$ について、 $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ とする。

($f: V \rightarrow W$ より、任意の $j(1 \leq j \leq n)$ について $f(v_j)$ は W の基底 $\{w_1, \dots, w_m\}$ の線型結合で表される。)

このとき行列 A の (i, j) 成分を a_{ij} とすれば、

$$[f(v_1), \dots, f(v_n)] = [w_1, \dots, w_m] A$$

というような便宜的表記をすることができる。この行列 A を f の表現行列という。

この表現行列の便利な点

V の基底を $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ とすると、 V の任意の元 v は $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j, (\forall j, x_j \in \mathbb{C})$ として表すことが出来る。

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_j a_{ij} w_i$$

このとき、