2 Introduction to Quantum Mechanics

2.1 Linear algebra

Exercise 2.1:(Linear dependence: example) Show that (1, -1), (1, 2) and (2, 1) are linearly dependent.

proof:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, (a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}) \tag{1}$$

とする。
この解の組 (a_1, a_2, a_3) は $t \in \mathbb{C}$ を任意の複素数として、

$$(a_1, a_2, a_3) = (t, t, -t) \tag{2}$$

と表すことが出来る。問題の三つのベクトルが一次独立であれば、$(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$ のみが解となるため不適。よって一次従属である。

Exercise 2.2: (Matrix represetations: example) Suppose V is a vector space with basis vectors $|0\rangle$ and $|1\rangle$, and A is a linear operator from V to V such that $A|0\rangle = |1\rangle$ *and* $A|1\rangle = |0\rangle$. Give a matrix representation for A, with respect to the input basis $|0\rangle, |1\rangle$, and the output basis $|0\rangle, |1\rangle$. Find input and output bases which give rise to a different matrix representation of A.

proof: V の基底 $\{|v_1\rangle = |0\rangle, |v_2\rangle = |1\rangle\ \}$ に対して演算子 $A : V \to V$ は、

$$\begin{aligned} A|v_1\rangle &= 0|v_1\rangle + 1|v_2\rangle, \\ A|v_2\rangle &= 1|v_1\rangle + 0|v_2\rangle \end{aligned}$$

という作用をする。
定義より、演算子 $A : V \to W$ において、V の基底を $\{|v_1\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$,
W の基底を $\{|w_1\rangle, \cdots, |w_m\rangle\}$
とすれば、A の行列表現における (i, j) 成分 A_{ij} は

$$A|v_j\rangle = \sum_i A_{ij}|w_i\rangle \tag{1}$$

と定義されている。故に

$$A_{11} = 0, A_{12} = 1, A_{21} = 1, A_{22} = 0.$$

すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

復習:(表現行列の定義) 線形写像 $f : V \to W$ において、V の基底を $\{v_1, \cdots, v_n\}$, W の基底を $\{w_1, \cdots, w_m\}$ とする。
ここで, 任意の $j(1 \leq j \leq n)$ について、$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ とする。
($f : V \to W$ より、任意の j$(1 \leq j \leq n)$ について $f(v_j)$ は W の基底 $\{w_1, \cdots, w_m\}$ の線型結合で表される。)
このとき行列 A の (i, j) 成分を a_{ij} とすれば、

$$[f(v_1), \cdots, f(v_n)] = [w_1, \cdots, w_m]A \tag{1}$$

というような便宜的表記をすることができる。この行列 A を f の表現行列という。
この表現行列の便利な点
V の基底を $\{|v_1\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$ とすると、V の任意の元 v は $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j, (\forall j, x_j \in \mathbb{C})$ として表すことが出来る。

$$f(v) = f(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) w_i \tag{2}$$

ここで、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とすると、$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ は (m, 1) ベクトル Ax の i 成分となる。
ここで特に (2) において、

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) w_i \tag{3}$$

が成立していることに注意すると、(1) の表記を用いて

$$[f(v)] = [f(v_1), \cdots, f(v_n)]x = [w_1, \cdots, w_m]Ax \tag{4}$$

と表すことが出来る。すなわち、V の基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に対する v の係数ベクトル x で W の基底 $\{w_1, \cdots, w_m\}$ の係数を Ax と表すことが出来る。これが表現行列の便利な点である。