

Transformation \int intégrale \int

V – Transformée de Fourier

G. Chênevert

9 octobre 2023

JUNIA ISEN

Au menu aujourd'hui

De Laplace à Fourier

De C. Fourier à T. Fourier

Transformée de Fourier

Rappel : transformée de Laplace

$$X(\textcolor{red}{p}) = \int_0^{+\infty} x(\textcolor{blue}{t}) e^{-\textcolor{red}{p} \textcolor{blue}{t}} d\textcolor{blue}{t} \quad \longleftrightarrow \quad x(\textcolor{blue}{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(\textcolor{red}{p}) e^{+\textcolor{red}{p} \textcolor{blue}{t}} d\textcolor{red}{p}$$

Outil parfaitement adapté à

- la résolution mécanique d'ÉDO linéaires à coefficients constants
- l'étude de la stabilité à long terme d'un système (position des pôles)

Le problème avec Laplace

$$X(\textcolor{red}{p}) = \int_0^{+\infty} x(\textcolor{blue}{t}) e^{-\textcolor{red}{p}t} dt \quad \longleftrightarrow \quad x(\textcolor{blue}{t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(\textcolor{red}{p}) e^{+\textcolor{red}{p}t} d\textcolor{red}{p}$$

On peut par contre déplorer

- le fait de privilégier des conditions initiales nulles (même si on se débrouille)
- l'asymétrie apparente entre les domaines : $\textcolor{blue}{t} \in \mathbb{R}$ vs $\textcolor{red}{p} \in \mathbb{C}$
- et *surtout* le fait qu'on ne peut travailler sans perte qu'avec des fonctions causales.

Remarque

On peut tenter de régler ce dernier problème en travaillant plutôt avec la

transformée de Laplace bilatère : $X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt$

qui coïncide avec la transformée usuelle lorsque le signal est de la forme $u(t) \cdot x(t)$.

(En fait : c'est techniquement ce qu'on a fait à chaque fois qu'il y avait ambiguïté en 0)

Mais ça ne règle pas fondamentalement le problème...

Exemple

Transformée bilatère de $t \mapsto 1$???

Exponentielles complexes

$$p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$$

$$e^{pt} = e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

amortissement et pulsation

$$\text{période } T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{fréquence } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Analyse fréquentielle

Pour étudier le contenu fréquentiel d'un signal, il faudrait n'utiliser que des valeurs de p de la forme

$$p = i\omega = 2\pi if.$$

Transformée de Laplace inverse (avec $\sigma = 0$) :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} X(p) e^{pt} dp = \int_{-2\pi i\infty}^{+2\pi i\infty} X(2\pi if) e^{2\pi ift} \frac{dp}{2\pi i} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(2\pi if) e^{2\pi ift} df \end{aligned}$$

Symétrie parfaite

On voit donc que si l'on pose

$$\hat{x}(f) := X(2\pi i f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

on aura

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{+2\pi i f t} df.$$

La variable du coté transformé s'interprète comme une fréquence $f \in \mathbb{R}$.

Au menu aujourd'hui

De Laplace à Fourier

De C. Fourier à T. Fourier

Transformée de Fourier

Autre point de vue

On se rappelle que si $x(t)$ est un signal T -périodique, on a une représentation

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i f_n t}$$

avec

$$c_n = \frac{\langle \mathbf{e}_n | x \rangle}{\|\mathbf{e}_n\|^2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-2\pi i f_n t} dt$$

Passage au cas non-périodique

Si $x(t)$ est un signal quelconque, on peut toujours le périodiser « de force » :

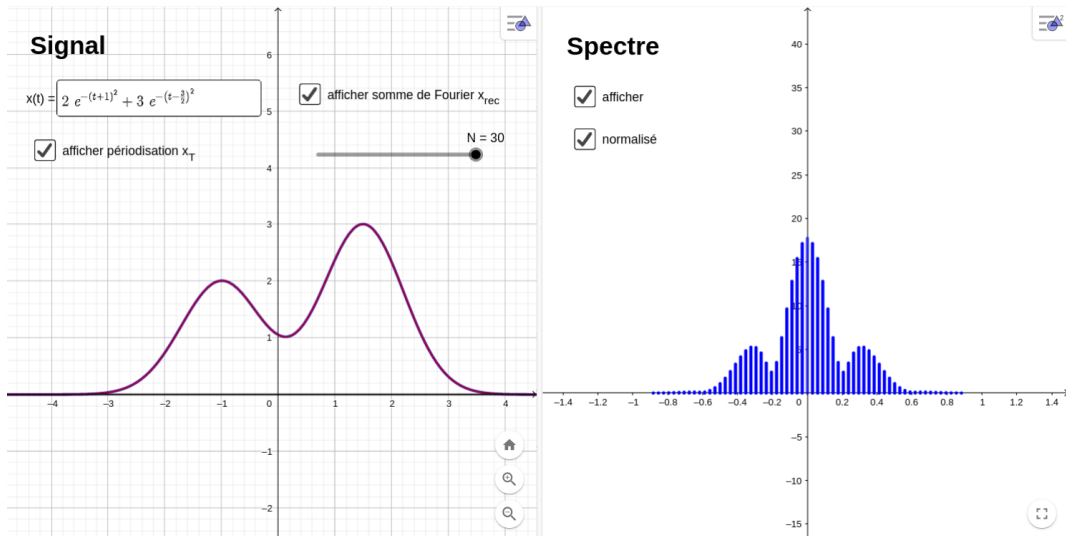
en considérant $x_T(t)$ le signal T -périodique coïncidant avec $x(t)$ sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,T} e^{2\pi i f_n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{T c_{n,T}}_{\Delta f} e^{2\pi i f_n t} \Delta f$$

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{2\pi i f t} df$$

$$\text{avec } \hat{x}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T c_{n,T} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt.$$

Expérimentation



Au menu aujourd'hui

De Laplace à Fourier

De C. Fourier à T. Fourier

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier

Définition

La **transformée de Fourier** d'un signal $x(t)$ est définie par

$$\hat{x}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt.$$

On y pense comme le « produit scalaire » (hermitien) entre

$$x(t) \quad \text{et} \quad e^{2\pi i f t}$$

représentant la proportion de l'onde pure $\tilde{e}_f(t) = e^{2\pi i f t}$ présente dans $x(t)$.

Remarques

- Si $x(t)$ est causal et stable quand $t \rightarrow +\infty$, on peut y penser comme

$$\hat{x}(f) = X(2\pi if) \quad X(p) = \hat{x}\left(\frac{p}{2\pi i}\right)$$

mais en général les deux transformées auront des champs d'application différents.

- On trouve dans la littérature plusieurs définitions de la transformée de Fourier :
 - en fréquence (f , ξ ou ν) ou en pulsation (ω),
 - avec facteur de normalisation : 1, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ou $\frac{1}{2\pi}$;

l'important est de comprendre la philosophie – et de savoir mettre les bonnes constantes au bon endroit pour une convention donnée.

Remarques

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

- $\hat{x}(0)$ représente l'aire totale $A(x)$ sous la courbe $t \mapsto x(t)$
 $\hat{x}(f) \ll$ l'aire \gg totale sous la courbe \ll tordue \gg par $e^{-2\pi i f t}$
Si cette aire diverge il est possible que $\hat{x}(f)$ ne soit pas une fonction !
- Le signal $\hat{x}(f)$ est en général à valeurs complexes : **spectre** de x .
Il est souvent plus aisé de se représenter $|\hat{x}(f)|$ (*spectre d'amplitude*)
mais on perd alors l'information sur la phase.

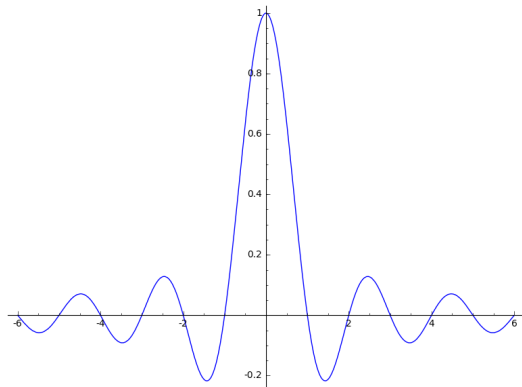
Exemple : transformée d'une porte

Prenons une porte de largeur 1 : $\Pi(t) = \Pi_1(t)$

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i f t} dt \\&= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2\pi i f t} dt \\&= \left. \frac{e^{-2\pi i f t}}{-2\pi i f} \right|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\pi i f} - e^{\pi i f}}{-2\pi i f} \\&= \frac{1}{\pi f} \cdot \frac{e^{\pi i f} - e^{-\pi i f}}{2i} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\end{aligned}$$

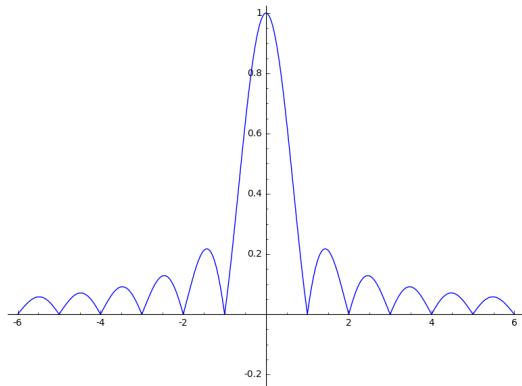
Exemple : transformée d'une porte

$$\hat{\Pi}(f) = \text{sinc}(\pi f) \quad \text{avec} \quad \text{sinc}(x) := \frac{\sin x}{x}$$



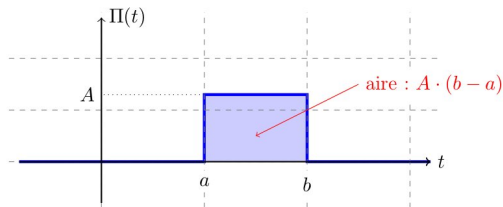
Exemple : transformée d'une porte

Spectre d'amplitude : $|\hat{\Pi}(f)| = |\text{sinc}(\pi f)|$



Transformée d'une porte : cas général

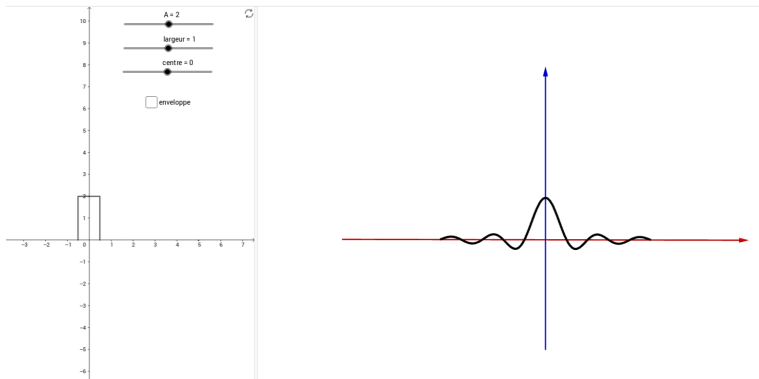
Si on prend pour Π une porte supportée sur $[a, b]$ de hauteur A



retardée de $\frac{a+b}{2}$ de $A \cdot \Pi_{b-a}(t)$, alors on trouve (exercice !)

$$\hat{\Pi}(f) = \underbrace{A(b-a)}_{\text{aire}} \underbrace{\text{sinc}(\pi f (b-a))}_{\text{largeur}} \underbrace{e^{-2\pi i f \frac{a+b}{2}}}_{\text{facteur de phase}}$$

Transformée d'une porte : cas général



Appliquette

Transformée des fonctions

Théorème

Si $x(t)$ est une fonction intégrable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

alors sa transformée de Fourier

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi ift} dt$$

est une fonction. Si de plus celle-ci est intégrable, alors on a presque partout :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{+2\pi ift} df.$$

$$\begin{cases} \hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt & \text{(TF directe)} \\ x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{+2\pi i f t} df & \text{(TF inverse)} \end{cases}$$

Nous allons toujours travailler avec des signaux qui peuvent être vus comme limites de fonctions intégrables : ces deux formules seront donc toujours vraies *si on les interprète de façon appropriée*.

Par exemple : aux discontinuités d'une fonction $\mathcal{C}_{\text{mcx}}^1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{+2\pi i f t} df = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} \quad \text{(formule de Dirichlet).}$$

Résumé

On a introduit la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

qui peut être vue comme

- une version continue des coefficients de Fourier obtenue en prenant $T \rightarrow +\infty$;
- un cas particulier de Laplace $\hat{x}(f) = X(2\pi i f)$ quand cela a du sens.

Formule de transformée inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{+2\pi i f t} df.$$

La prochaine fois

On refait la synthèse et le ménage dans tout ça !

