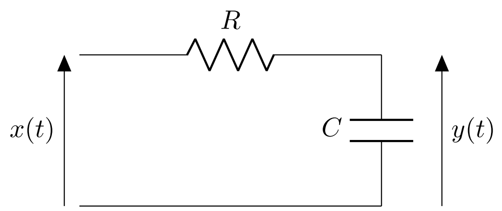
II – Laplace et Dirac

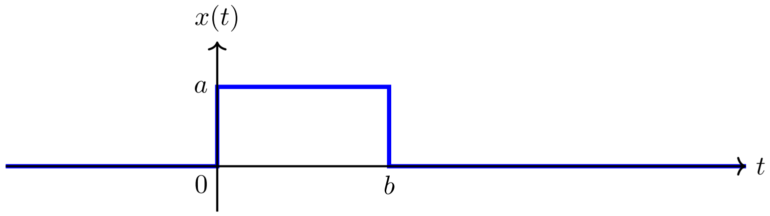


Dans un circuit RC simple, la tension $y(t)$ aux bornes du condensateur est reliée à la tension d'entrée $x(t)$ par l'équation différentielle

$$\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t) \qquad \text{où} \qquad \tau = RC.$$

Pour ne pas alourdir les calculs, nous allons ici supposer (quitte à ajuster l'unité de temps) que $\tau = 1$.

Nous allons charger le condensateur en appliquant une différence de potentiel a pendant un laps de temps b avant de le laisser se décharger.



Exercice 1

a) Résoudre « à la main » l'équation différentielle pour obtenir la tension de sortie $y(t)$ correspondant à cette entrée (porter une attention particulière aux conditions initiales sur chaque intervalle).

b) Résoudre cette fois-ci l'équation en utilisant la transformée de Laplace et discuter de la cohérence de votre réponse avec la précédente.

Exercice 2

Notons $y_\varepsilon(t)$ la sortie correspondant à l'entrée $x_\varepsilon(t)$ obtenue avec $a = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $b = \varepsilon$ (aire normalisée à 1).

a) Calculer la limite $y_0(t) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t)$. Déterminer l'entrée $x_0(t) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t)$ correspondante en dérivant $y_0(t)$.

b) Vérifier (par calcul direct ou transformée de Laplace) que $y_\varepsilon(t) = y_0(t) * x_\varepsilon(t)$.

c) De façon plus générale : se convaincre que la sortie $y(t)$ correspondant à une entrée causale $x(t)$ quelconque est donnée par le produit de convolution

$$y(t) = y_0(t) * x(t).$$

Exercice 3

Signaux discrets : étant donnée une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, considérons le signal $x(t) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n \, \delta(t-n)$ modélisant un signal (causal) échantillonné à la fréquence 1 Hz.

a) Que vaut l'aire totale sous la courbe $\mathcal{A}(x)$?

b) Calculer le produit de convolution de deux signaux échantillonnés du côté temporel et opérationnel (et vérifier qu'ils correspondent bien).

Transformée de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$x(t)$	$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$	
$x'(t)$	$pX(p) - x(0^+)$	
$\int_0^t x(u)\, \mathrm{d}u$	$\dfrac{X(p)}{p}$	
$tx(t)$	$-X'(p)$	
$(-1)^n t^n x(t)$	$X^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{x(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} X(s)\, \mathrm{d}s$	
$e^{at} x(t)$	$X(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$x(t-a)$	$e^{-pa} X(p)$	$(a \geqslant 0)$
$x(kt)$	$\dfrac{1}{k} X\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pX(p) = x(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pX(p) = x(+\infty)$$

Principales images

original causal $x(t)$	image $X(p)$	remarque
1 ou $u(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	