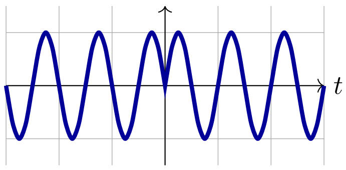
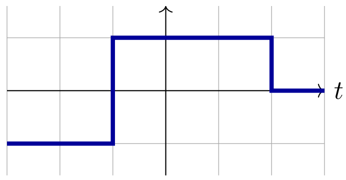
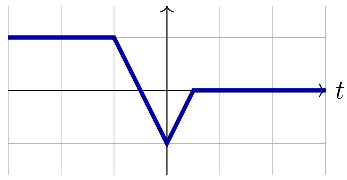
I – Signaux et convolution

Exercice 1

Donner une expression synthétique pour chacun des signaux suivants (carreaux-unités) :

a) 

b) 

c) 

Plusieurs réponses possibles, je propose de favoriser les expressions qui se lisent en ordre chronologique de gauche à droite :

a) $\mathrm{sg}(t)\sin(2\pi t)$

b) $-1+2u(t+1)-u(t-2)$

c) $1-2r(t+1)+4\,r(t)-2r(t-\frac{1}{2})$ où $r(t)=tu(t)$ est la rampe infinie

Exercice 2

Évaluer et représenter graphiquement les produits de convolution suivants :

En évaluant directement les intégrales dans la définition de la convolution, on trouve :

a) $u(t)*u(t)$, où u est l'échelon unité,

Une rampe infinie $tu(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leqslant 0\\ t & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}$

b) $u(t)*\Pi_a(t)$, où $\Pi_a(t)$ désigne une porte unité de largeur $a\geqslant 0$,

une rampe finie $\begin{cases}0 & \text{si } t\leqslant -\frac{a}{2}\\ t+\frac{a}{2} & \text{si } -\frac{a}{2}\leqslant t\leqslant \frac{a}{2}\\ a & \text{si } t\geqslant \frac{a}{2}\end{cases}$

c) $\Pi_a(t)*\Pi_b(t)$ pour $a\geqslant b\geqslant 0$,

un trapèze $\begin{cases}0 & \text{si } t\leqslant -\frac{a+b}{2}\\ t+\frac{a+b}{2} & \text{si } -\frac{a+b}{2}\leqslant t\leqslant -\frac{a-b}{2}\\ b & \text{si } -\frac{a-b}{2}\leqslant t\leqslant \frac{a-b}{2}\\ -t+\frac{a+b}{2} & \text{si } \frac{a-b}{2}\leqslant t\leqslant \frac{a+b}{2}\\ 0 & \text{si } t\geqslant \frac{a+b}{2}\end{cases}$

d) $\sin(t)*\Pi_a(t)$ (que dire lorsque $a\underset{2\pi}{\equiv}0$?),

$\cos(t-\frac{a}{2})-\cos(t+\frac{a}{2})=2\sin t\cdot\sin\frac{a}{2}$, identiquement nulle lorsque $a\underset{2\pi}{\equiv}0$

e) $e^{-at}u(t) * e^{-bt}u(t)$.

$u(t)\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a}$ si $b \neq a$, $u(t)\, t\, e^{-at}$ si $a = b$

Exercice 3

Calculer, au sens des signaux, la dérivées des produits de convolution de la question précédente :

a) directement en dérivant le résultat ;
b) en dérivant (si possible) l'un des facteurs puis convoluant.

Exercice 4

En supposant que les fonctions impliquées satisfont toutes les hypothèses techniques nécessaires (qu'il faudrait préciser si l'on voulait être rigoureux), établir les propriétés suivantes du produit de convolution.

a) Retard :
$$x(t - t_0) * y(t) = (x * y)(t - t_0) = x(t) * y(t - t_0).$$

Pour les signaux $z(t) := x(t - t_0)$ et $y(t)$, on a
$$(z * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u - t_0)\, y(t - u)\, \mathrm{d}t = \int_{\infty}^{+\infty} x(v)\, y(t - t_0 - v)\, \mathrm{d}t = (x * y)(t - t_0)$$
en faisant dans l'intégrale le changement de variables $v := u - t_0$, ce qui montre la première égalité. La deuxième s'établit de la même façon (ou en utilisant la commutativité du produit de convolution).

b) Dérivée :
$$x' * y = (x * y)' = x * y'.$$

$$(x * y)'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t - u)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y'(t - u)\, \mathrm{d}t = (x * y')(t)$$
en dérivant à travers l'intégrale, ce qui établit la deuxième égalité.

c) Intégrale totale :
$$\int_{-\infty}^{\infty} (x * y)(t)\, \mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \mathrm{d}t \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, \mathrm{d}t \right).$$

En posant $v = t - u$ (changement de variables de déterminant 1 dans l'intégrale double) + Fubini :
$$A(x * y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t - u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = A(x) \cdot A(y)$$

Exercice 5

a) Rappeler, si nécessaire, comment on peut établir la remarquable formule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

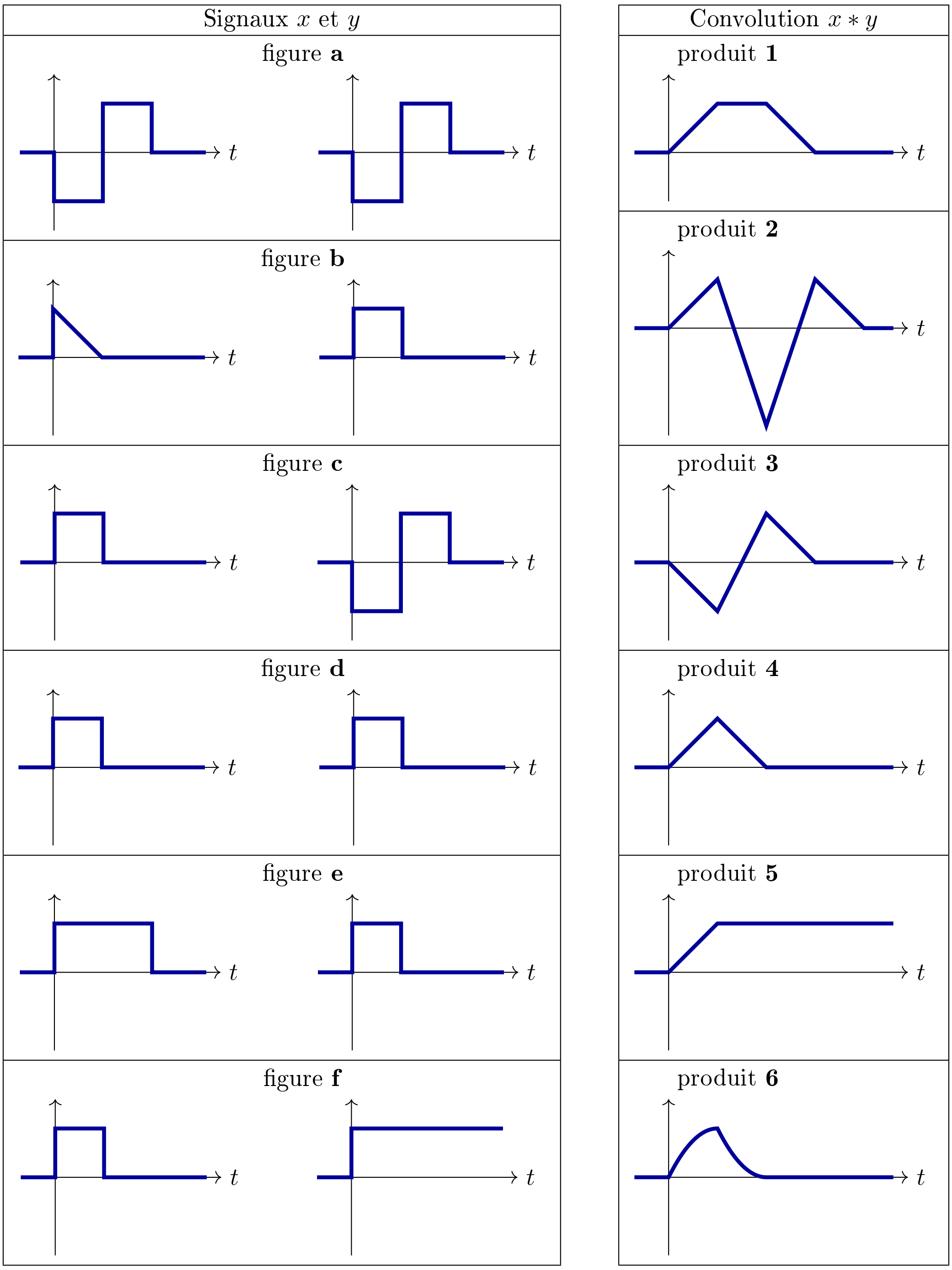
On évalue le carré de l'intégrale, $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, en passant en coordonées polaires.

b) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le produit de convolution $e^{-\frac{1}{2}t^2} * e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

C'est
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} e^{-\frac{1}{2}(t-u)^2}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 + tu - \frac{1}{2}t^2}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u - \frac{t}{2})^2 - \frac{1}{4}t^2}\, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}t^2}$$
De façon générale : la convolution de deux gaussiennes est encore une gaussienne.

Exercice 6

Dans la colonne de gauche, vous avez des paires de signaux : $x(t)$ et $y(t)$ numérotés de **a** à **f**. À droite, vous trouvez leur produit de convolution : $(x * y)(t)$, dans le désordre, numérotés de **1** à **6**.



Repérer le maximum d'indices afin d'associer chacune des paires de signaux (x, y) à son produit de convolution $x * y$. Justifiez vos choix et expliquer pourquoi l'on observe tel ou tel phénomène.

On remarque (vérifie) que tous ces signaux causaux donnent des convolutions causales.

Les figures a, c, 2 et 3 sont les seules à faire apparaître des valeurs négatives.

On associe…		car
a	2	seule figure où il y a 6 cas à étudier ; la figure 2 est celle qui a le plus large support
b	6	seul signal qui ne soit pas de degré 1 par morceaux
c	3	seule figure prenant des valeurs négatives ayant 5 cas à étudier ; y étant la différence de 2 portes, $x * y$ est donc la différence de 2 triangles.
d	4	cas particulier de l'exercice 2 avec deux portes de même largeur ; résultat qui a le plus petit support
e	1	cas particulier de l'exercice 2, résultat toujours positif, avec 5 cas à étudier ; présente un plateau quand le support de y est $\subset$ support de x
f	5	seul support non borné ; convoluer avec Heaviside revient à primitiver (Cf cours) ; seule figure où il n'y a que 3 cas à étudier