V – Transformée de Fourier

Exercice 1

a) Pour $\lambda > 0$, calculer la transformée de Fourier des signaux $x(t) = u(t)\, e^{-\lambda t}$ et $y(t) = e^{-\lambda|t|}$

b) puis en déduire celles de $z(t) = \dfrac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 t^2}$ et $w(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Exercice 2

Établir les principales propriétés de la transformée de Fourier par manipulation d'intégrales en exprimant les transformées des signaux suivants en terme de la transformée $\widehat{x}(f)$ de $x(t)$:

a) $x(-t)$
b) $x(at)$, $a > 0$
c) $x(t-a)$
d) $e^{2\pi i a t}\, x(t)$
e) $x'(t)$
f) $t \cdot x(t)$

Exercice 3

Quelles sont les propriétés de la transformée $\widehat{x}(f)$ lorsque l'originale $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est :

(a) à valeurs réelles ? (b) paire ? (c) impaire ?

Montrer de plus que la transformée d'une fonction paire peut s'écrire

$$\widehat{x}(f) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t)\,\mathrm{d}t$$

et donner une expression similaire dans le cas d'une fonction impaire.

Exercice 4

a) Vérifier que $g(t) := e^{-\alpha t^2}$ (où $\alpha > 0$) est solution de $g' + 2\alpha t\, g = 0$.

En déduire une équation différentielle vérifiée par $\widehat{g}$ puis que $\widehat{g}(f) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}$.

b) Que remarquez-vous lorsque $\alpha = \pi$?

c) Définissons, pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, la gaussienne normalisée de paramètres μ et σ par

$$g_{\mu,\sigma}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Calculer la transformée de Fourier de $g_{\mu,\sigma}$ puis remarquer que : le produit de deux transformées de gaussiennes est encore une transformée de gaussienne (dont vous préciserez les paramètres).

d) Déterminer $\lim\limits_{\sigma\to\infty} g_{\mu,\sigma}$ et $\lim\limits_{\sigma\to 0} g_{\mu,\sigma}$.

Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi i f t}\, \mathrm{d}f$	$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t$
$\lambda\, x_1(t) + \mu\, x_2(t)$	$\lambda\, \widehat{x_1}(f) + \mu\, \widehat{x_2}(f)$
$x(at)$	$\dfrac{1}{\lvert a \rvert} \widehat{x}\left(\dfrac{f}{a}\right)$
$x(-t)$ $\overline{x(t)}$	$\widehat{x}(-f)$ $\overline{\widehat{x}(-f)}$
$x(t-a)$ $e^{2\pi i a t} x(t)$	$e^{-2\pi i a f} \widehat{x}(f)$ $\widehat{x}(f-a)$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $-2\pi i\, t x(t)$	$2\pi i f \widehat{x}(f)$ $\dfrac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}f}$
$(x_1 * x_2)(t)$ $x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\widehat{x_1}(f) \cdot \widehat{x_2}(f)$ $(\widehat{x_1} * \widehat{x_2})(f)$
$\Pi_a(t)$ $u(t)\, e^{-\lambda t},\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0$ $\dfrac{1}{1+t^2}$ e^{-t^2}	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a f)$ $\dfrac{1}{\lambda + 2\pi i f}$ $\pi e^{-2\pi \lvert f \rvert}$ $\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$
$\delta(t)$ 1 $Ш_T(t)$	1 $\delta(f)$ $\dfrac{1}{T} Ш_{\frac{1}{T}}(f)$

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)\, y(t-s)\, \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s)\, y(s)\, \mathrm{d}s$$