Probabilités et statistiques

I – Variables aléatoires

G. Chênevert

13 novembre 2023

JUNIA ISEN

Au menu aujourd'hui

Introduction

Variables aléatoires

Moments

La nature du hasard ...

- Dieu joue-t-il aux dés ?
- Le vrai hasard existe-t-il ?
- Et le destin ?
- Et le libre arbitre ?

⋮

- Et après ?

Soyons pragmatiques

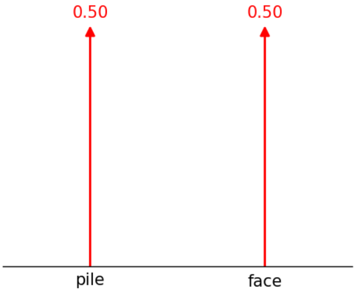
Probabilité : permet de décrire et **modéliser** simplement mais précisément certains phénomènes complexes

La théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul.

— Laplace

Statistique : application de cette théorie à la description et l'analyse de jeux de données numériques

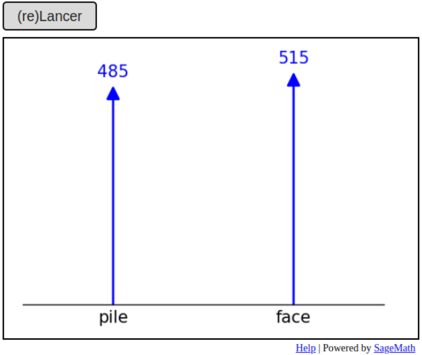
Archétype : la pièce



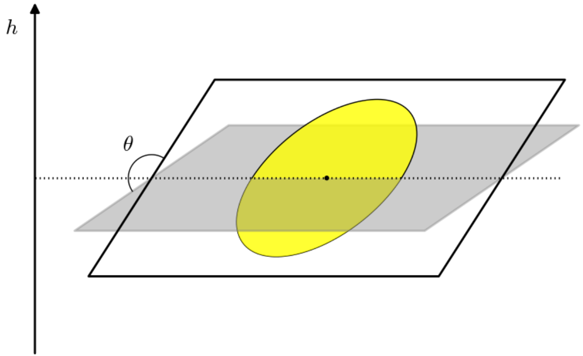
$$\mathbb{P}[\mathrm{P}] = \mathbb{P}[\mathrm{F}] = \frac{1}{2}$$

Interprétation fréquentiste

Sur 1000 lancers . . .



Et le déterminisme ?



Modèle de Keller

En mécanique classique

Équations simples :

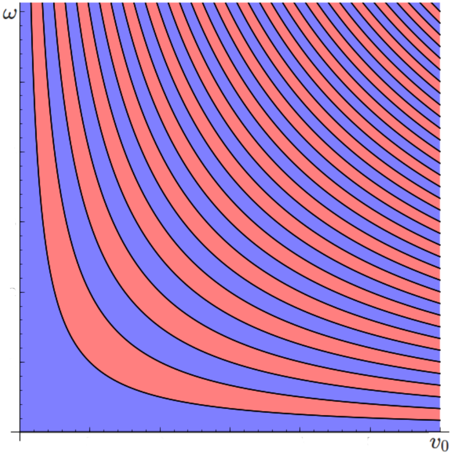
$$\begin{cases} h(t) = h_0 + v_0 t - \dfrac{g}{2} t^2 \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

Retour à h_0 en $t_f = \frac{2v_0}{g}$, et alors

$$\theta(t_f) = \frac{2v_0\,\omega}{g}.$$

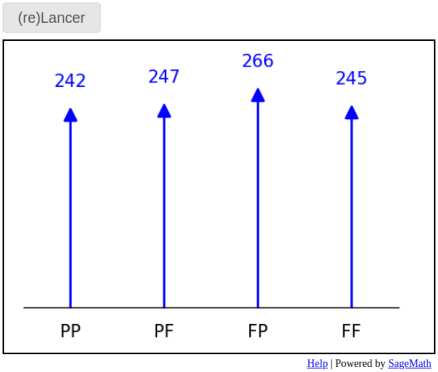
Diagramme de phase

P ou F selon (v_0, ω)



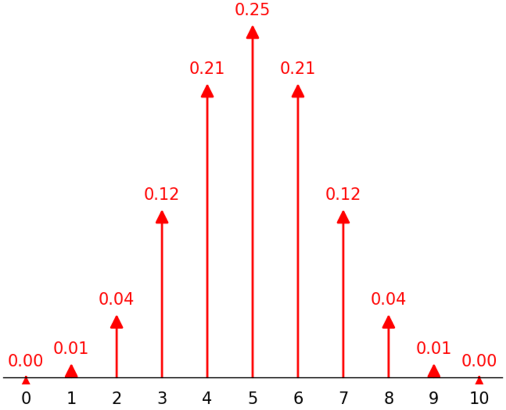
Deux lancers

1000 paires simulées . . .

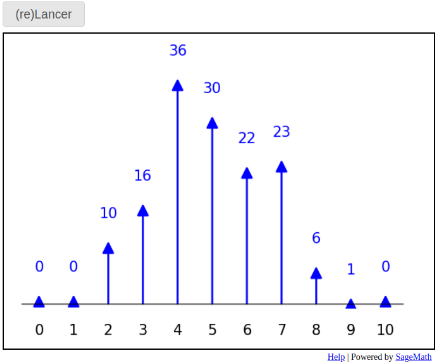


Agglomérons

Pour X le nombre de $\texttt{P}$ par suite de 10 lancers :



Simulation informatique



Validation du modèle

Ne faut pas oublier de confronter à l'expérience !

L'hypothèse d'équiprobabilité tient-elle la route ?

Apparemment pas tout à fait :

$$\mathbb{P}[\mathrm{P}] \approx 51\,\%, \quad \mathbb{P}[\mathrm{F}] \approx 49\,\%,$$

$$\mathbb{P}[\text{tranche}] \approx 0{,}017\,\% \quad !$$

Parenthèse

Comment obtenir l'équiprobabilité si on ne dispose que d'une pièce biaisée ?

Truc de von Neumann :

On lance des paires jusqu'à l'obtention de $\mathtt{PF}$ ou $\mathtt{FP}$.

$$\mathbb{P}[\mathrm{PF}] = \mathbb{P}[\mathrm{FP}] = p(1-p) \quad \text{où} \quad p := \mathbb{P}[\mathrm{P}]$$

Truc de von Neumann

À chaque paire on a probabilité :

- $q := 2p(1-p)$ de conclure,
- $1-q = p^2 + (1-p)^2$ de devoir relancer.

Soit N le nombre de paires de lancers nécessaires :

$$\mathbb{P}[N = n] = (1-q)^{n-1} q \qquad (n \in \mathbb{N},\, n \neq 0).$$

Notation : $N \sim \mathcal{G}(q)$ appelée **loi géométrique**

Loi géométrique

Bonne nouvelle :

$$\mathbb{P}[N < +\infty] = \sum_{n=1}^{\infty} (1-q)^{n-1} q = q \cdot \frac{1}{1-(1-q)} = 1$$

le procédé se termine **presque sûrement** (du moins si $p \notin \{0, 1\}$).

En d'autres termes : $\mathbb{P}[N = +\infty] = 0$. On pourrait très bien obtenir une suite comme

$$\text{PP FF FF PP FF PP} \ \ldots$$

mais c'est *presque impossible*.

Au menu aujourd'hui

Formalisons

Définition

Une **variable aléatoire** est une fonction

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

où Ω désigne l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

Techniquement : on doit pouvoir associer, à tout sous-ensemble $\mathcal{E} \subset \Omega$ raisonnable (**événement**) une probabilité

$$0 \ \leq \ \mathbb{P}[\mathcal{E}] \ \leq \ 1.$$

Pour toute partie raisonnable $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$, on peut alors considérer la probabilité

$$0 \ \leq \ \mathbb{P}[X \in \mathcal{A}] \ \leq \ 1.$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie (non nécessairement équilibrée) :

$$\Omega = \{\mathtt{P}, \mathtt{F}\}.$$

Posons

$$X(\mathtt{P}) = 1, \quad \mathbb{P}[X = 1] =: p,$$

$$X(\mathtt{F}) = 0, \quad \mathbb{P}[X = 0] = 1 - p.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$ **loi de Bernoulli** avec probabilité de succès p.

Exemple^n

On lance n fois une pièce de monnaie :

$$\Omega = \{\mathtt{P},\ \mathtt{F}\}^n$$

et soit X le nombre de $\mathtt{P}$ obtenus.

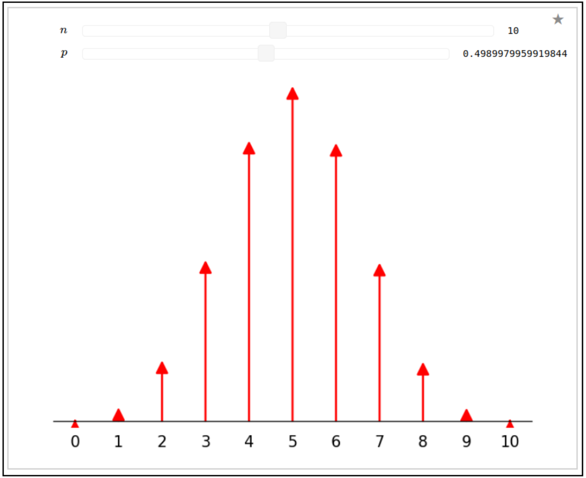
Pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k \,(1 - p)^{n-k}.$$

Notation : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ **loi binomiale**.

Loi binomiale

(Re)lancer



Help | Powered by SageMath

Exemple$^{\mathbb{N}^*}$

On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention du premier $\mathtt{P}$:

$$\Omega = \{\mathtt{P}, \mathtt{F}\}^{\mathbb{N}^*} = \{(\omega_n)_{n=1}^{\infty} \mid \omega_n \in \{\mathtt{P}, \mathtt{F}\}\}$$

et soit N le numéro du premier succès.

$$\mathbb{P}[N = n] = (1-p)^{n-1} p \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

et 0 sinon.

Notation : $N \sim \mathcal{G}(p)$ **loi géométrique** de paramètre p.

Fonction de répartition

Définition

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

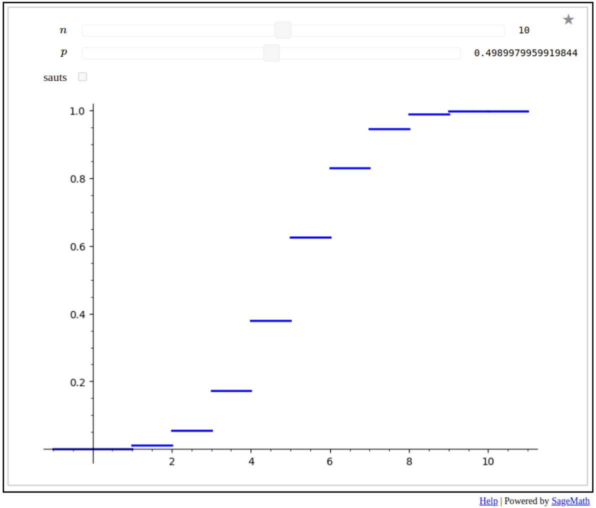
$$F_X(x) := \mathbb{P}[X \leq x].$$

(Note : certains auteurs utilisent l'inégalité stricte)

C'est une fonction croissante, avec

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

F_X pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$



Densité de probabilité

Définition

La **densité** f_X d'une variable aléatoire X est la dérivée de sa fonction de répartition

$$f_X := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X = F'_X$$

(au sens des signaux).

Contient toute l'information sur la loi de X :

$$\mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) \, \mathrm{d}x$$

Types de loi

La loi de X est dite :

- **discrète** lorsque F_X est constante par morceaux

  sa dérivée ne contient alors que des diracs

- **continue** lorsque F_X l'est

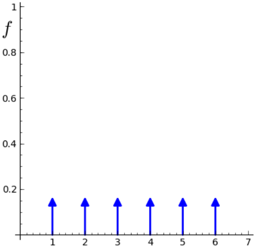
  sa dérivée est alors une fonction ordinaire

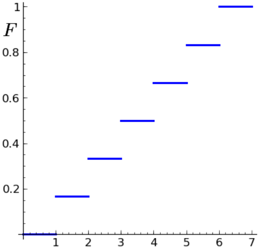
- **mixte** dans tous les autres cas

Exemple discret (fini)

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} \delta(x - k)$$

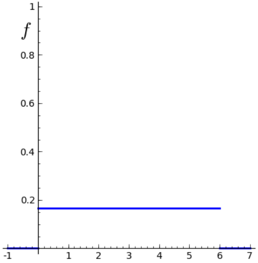


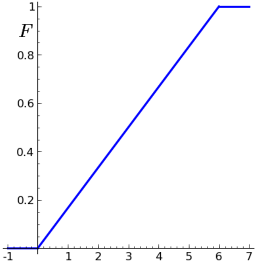


Exemple continu

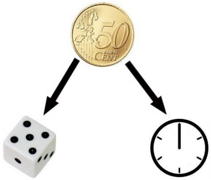
$$Y \sim \mathcal{U}([0,6])$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{6} \text{ sur } [0,6]$$

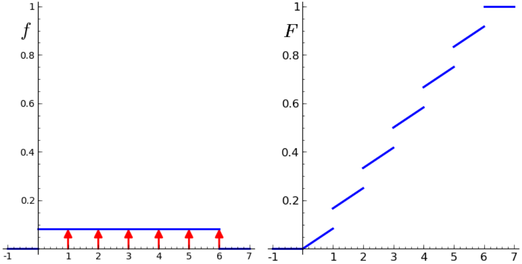




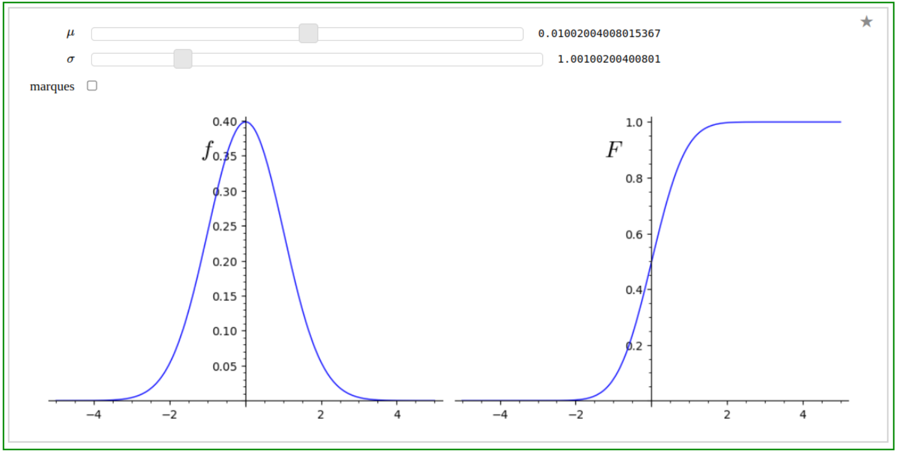
Exemple mixte



$$f_Z = \frac{f_X + f_Y}{2}$$



La reine des lois : $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$



Help | Powered by SageMath

Formules

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Cas particulier $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$: **loi normale centrée réduite**

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

parfois notée Φ (voir aussi erf)

En pratique

On peut toujours se ramener à une $\mathcal{N}(0,1)$.

Proposition

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies Z := \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve : $F_Z(z) = F_X(\mu + \sigma z)$ d'où

$$f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F_X(\mu + \sigma z) = \sigma\, f_X(\mu + \sigma z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Au menu aujourd'hui

Introduction

Variables aléatoires

Moments

Tendance centrale

Définition

L'**espérance mathématique** d'une variable aléatoire X est

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

Plus généralement on calcule l'espérance de $Y = g(X)$ par changement de variable :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(y)\, \mathrm{d}x$$

Attention : ne pas confondre avec *mode* et *médiane*

Exemples

- $X \sim \mathcal{B}(n, p) \implies \mathbb{E}[X] = np$
- $X \sim \mathcal{G}(p) \implies \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \implies \mathbb{E}[X] = \mu$
- $\vdots$

Propriétés

- $\mathbb{E}[aX + b] = a\,\mathbb{E}[X] + b$
- Si $\mathbb{P}[X = c] = 1$ alors $\mathbb{E}[X] = c$
- Si $\mathbb{P}[X \geq 0] = 1$ alors $\mathbb{E}[X] \geq 0$
- $\mathbb{E}[a\,g(X) + b\,h(X)] = a\,\mathbb{E}[g(X)] + b\,\mathbb{E}[h(X)]$

Attention : en général $\mathbb{E}[g(X)] \neq g(\mathbb{E}[X])$

Fonction génératice des moments

Définition

Pour X une v.a., on appelle **fonction génératrice des moments** de X la fonction

$$g_X(t) := \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pourquoi fonction génératrice des moments ? Si on appelle $\mu_n = \mathbb{E}[X^n]$ le ***n*^e^ moment** de X, on a

$$g_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbb{E}[X^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!} t^n$$

Une transformation intégrale

Proposition

Si X est un variable aléatoire dont tous les moments μ_n sont finis, alors la suite $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ caractérise complètement la loi de X.

En effet :

$$(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \qquad \longleftrightarrow \qquad g_X \qquad \longleftrightarrow \qquad f_X$$

car $\widehat{f_X}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, e^{-2\pi \mathrm{i}\xi x}\, \mathrm{d}x = \mathbb{E}\left[e^{-2\pi \mathrm{i}\xi X}\right] = g_X(-2\pi \mathrm{i}\xi)\,!$