

## V – Fourier et signaux

### Exercice 1

- a) Calculer la transformée de Fourier des sinusoïdes  $\cos \omega t$  et  $\sin \omega t$  pour  $\omega \in \mathbb{R}$ .
- b) Résoudre, en passant par la transformée de Fourier, l'équation différentielle

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

et vérifier la cohérence de vos résultats.

### Exercice 2

Déterminer la transformée de Fourier d'une fonction triangle. . .

- a) par calcul direct ;
- b) en obtenant tout d'abord la transformée de sa dérivée ;
- c) en l'exprimant comme la convolution de deux portes.

En déduire avec un minimum de calculs la représentation en série de Fourier d'une onde triangulaire (comparer avec l'expression donnée en cours).

### Exercice 3

- a) Soit  $\text{sg}(t)$  la fonction « signe » définie par  $\text{sg}(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

En considérant sa dérivée  $\text{sg}'(t) = 2\delta(t)$ , montrer que sa transformée est de la forme

$$\widehat{\text{sg}}(f) = \frac{1}{\pi i f} + A \delta(f)$$

et déterminer la valeur appropriée de la constante  $A$ .

- b) En exprimant l'échelon d'Heaviside  $u(t)$  en fonction de  $\text{sg}(t)$ , en déduire  $\widehat{u}(f)$ .

### Exercice 4

- a) À partir de la définition de la transformée de Fourier, (ré)établir la formule pour la transformée d'une porte  $\Pi_a(t)$  de largeur  $a > 0$ .
- b) Expliquer comment on peut en déduire la transformée d'un sinus cardinal :  $\widehat{\text{sinc}}(f) = \pi \Pi_{\frac{1}{\pi}}(f)$ .
- c) On considère le signal temporel  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t - n\pi)$ . Vérifier qu'on a  $x(k\pi) = 1$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .
- d) Exprimer le signal  $x(t)$  de la question précédente comme la convolution d'un sinus cardinal avec un signal  $y(t)$  que vous préciserez ; en déduire  $\widehat{x}(f)$  puis une expression simple pour  $x(t)$ .

# Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}f$	$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}t$
$\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$	$\lambda \widehat{x_1}(f) + \mu \widehat{x_2}(f)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } \widehat{x}\left(\frac{f}{a}\right)$
$x(-t)$	$\widehat{x}(-f)$
$\overline{x(t)}$	$\overline{\widehat{x}(-f)}$
$x(t-a)$	$e^{-2\pi i a f} \widehat{x}(f)$
$e^{2\pi i a t} x(t)$	$\widehat{x}(f-a)$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$2\pi i f \widehat{x}(f)$
$-2\pi i t x(t)$	$\frac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}f}$
$(x_1 * x_2)(t)$	$\widehat{x_1}(f) \cdot \widehat{x_2}(f)$
$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$(\widehat{x_1} * \widehat{x_2})(f)$
$\Pi_a(t)$	$a \operatorname{sinc}(\pi a f)$
$u(t) e^{-\lambda t}, \operatorname{Re}(\lambda) > 0$	$\frac{1}{\lambda + 2\pi i f}$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\pi e^{-2\pi f }$
$e^{-t^2}$	$\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_T(t)$	$\frac{1}{T} \mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}_{\frac{1}{T}}(f)$

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) y(t-s) \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-s) y(s) \mathrm{d}s$$