

# Transformation $\int$ intégrale $\int$

VI – Fourier et filtres

---

G. Chênevert

23 octobre 2023

**JUNIA** ISEN

# Au menu aujourd'hui

Reconstruction

Transformée discrète

Filtres

## Problème de reconstruction

Nous avons expliqué la dernière fois ce qui se passe spectralement lorsque l'on échantillonne un signal  $x(t)$  :

$$x_{\text{éch}}(t) = \bigsqcup_{T_e}(t) \cdot x(t) = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \right) \cdot x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(nT_e)}_{x_n} \delta(t - nT_e)$$

$$\Rightarrow \widehat{x_{\text{éch}}}(f) = \widehat{\bigsqcup_{T_e}}(f) * \widehat{x}(f) = \frac{1}{T_e} \bigsqcup_{f_e}(f) * \widehat{x}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f - nf_e)$$

la  $f_e$ -périodisation du spectre de  $x$  (divisée par  $T_e$ )

## Crénelage

$$\widehat{x_{\text{éch}}}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f - nf_e)$$

Il y a superposition spectrale entre les fréquences présentes dans le signal initial différant de multiples de  $f_e$

$\Rightarrow$  phénomène de **crénelage** (*aliasing*)

Phénomène qui ne se produira pas si  $f_e$  est supérieure à la largeur de bande de  $x$   
*i.e.* si  $\hat{x}(f)$  est nul hors de  $[-f_{\max}, f_{\max}]$  et

$$f_e > 2f_{\max}.$$

## Exemple

dans lequel on peut observer le repliement du spectre

\*\*\*\*\*

## Problème de reconstruction

Nous avons vu en TP qu'il n'était pas judicieux de reconstruire le signal  $x$  à partir de

$$x_{\text{éch}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta(t - nT_e)$$

en utilisant des portes :

$$x_{\text{rec}}(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \Pi_{T_e}(t - nT_e)$$

et nous pouvons maintenant expliquer pourquoi :

$$x_{\text{rec}}(t) = \Pi_{T_e}(t) * x_{\text{éch}}(t) \quad \implies \quad \widehat{x_{\text{rec}}}(f) = T_e \text{sinc}(\pi T_e f) \cdot \widehat{x_{\text{éch}}}(f)$$

introduction de hautes fréquences qui n'étaient pas présentes dans le signal initial

## Formule de reconstruction de Whittaker

Nous avons eu de meilleurs résultats en prenant

$$x_{\text{Whit}}(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \operatorname{sinc}(\pi f_e(t - nT_e))$$

et c'est normal :

$$x_{\text{Whit}}(t) = \operatorname{sinc}(\pi f_e t) * x_{\text{éch}}(t)$$

$$\implies \widehat{x_{\text{Whit}}}(f) = T_e \Pi_{f_e}(f) \cdot \widehat{x_{\text{éch}}}(f)$$

on coupe les hautes fréquences présentes dans le signal échantillonné

## Reconstruction parfaite

$$\widehat{x_{\text{éch}}}(f) = \frac{1}{T_e} \bigsqcup_{f_e}(f) * \widehat{x}(f), \quad \widehat{x_{\text{Whit}}}(f) = T_e \Pi_{f_e}(f) \cdot \widehat{x_{\text{éch}}}(f)$$

Nous avons essentiellement démontré le résultat suivant :

### **Théorème (Shannon)**

*Un signal  $x(t)$  à bande limitée ( $\widehat{x}(f)$  supporté sur  $[-f_{\max}, f_{\max}]$ ) peut être reconstruit sans perte à partir d'échantillons espacés de  $T_e$  à condition que*

$$f_e > 2f_{\max} \quad (\text{fréquence de Nyquist}).$$



# Au menu aujourd'hui

Reconstruction

Transformée discrète

Filtres

# Symétrie entre les domaines

On se rappelle :

signal à décroissance rapide  $\iff$  spectre à décroissance rapide

signal périodique  $\implies$  spectre discret

signal discret  $\implies$  spectre périodique

donc :

signal périodique et discret  $\iff$  spectre discret et périodique

## En équations

Signal discret :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta(t - nT_e)$$

Périodique : supposons  $x(t) = x(t + T)$  avec  $T = NT_e$ , i.e.

$$x_n = x_{n+kN}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le signal  $x(t)$  est donc déterminé par les  $N$  valeurs

$$x_0, x_1, \dots, x_{N-1}.$$

## Du côté spectral

$$x(t) = \left( x_0 \delta(t) + \cdots + x_{N-1} \delta(t - (N-1)T_e) \right) * \bigsqcup_T(t)$$

$$\Rightarrow \hat{x}(f) = \left( x_0 + \cdots + x_{N-1} e^{-2\pi i(N-1)T_e f} \right) \cdot \frac{1}{T} \bigsqcup_{f_s}(f)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \delta(f - n f_s)$$

avec

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}.$$

## Transformée de Fourier discrète

$$x(t) \text{ discret périodique} \quad \longleftrightarrow \quad (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$$

$$\hat{x}(f) \quad \longleftrightarrow \quad (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \quad \text{avec} \quad y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}.$$

Par calcul direct, on obtiendrait  $y_0, \dots, y_{N-1}$  en  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations, mais :

### **Théorème (Gauss 1805, Cooley-Tukey 1965)**

*Il existe un algorithme de calcul de la transformée de Fourier discrète en  $\mathcal{O}(N \log N)$  opérations : la transformée de Fourier rapide (**FFT**).*

# Au menu aujourd'hui

Reconstruction

Transformée discrète

Filtres

# Filtres

Un **filtre** est un opérateur  $\mathcal{S} : x \mapsto \mathcal{S}(x)$  sur l'espace des signaux.

Ceux qui nous intéressent le plus en pratique sont

- linéaires :  $\mathcal{S}(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \mathcal{S}(x) + b \cdot \mathcal{S}(y)$
- continus :  $\mathcal{S}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(x_n)$
- invariants :  $\mathcal{S}(x(t - t_0)) = \mathcal{S}(x)(t - t_0)$

On parle aussi de *système linéaire continu invariant*.

## Exemple

Considérons l'opérateur  $\mathcal{P}$  qui associe à un signal  $x$  sa primitive s'annulant en  $-\infty$ .

$$\mathcal{P}(x)(t) = \text{prim}(x)(t) = \int_{-\infty}^t x(s) ds.$$

On peut vérifier que c'est bien un filtre.

Remarque :  $\mathcal{P}(x) = x * u$  ; il s'agit d'un opérateur de convolution



## Exemple

Considérons l'opérateur  $\mathcal{M}_T$  qui associe à un signal  $x$  sa moyenne glissante sur un intervalle de largeur  $T$ .

$$\mathcal{M}_T(x)(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(s) ds.$$

On peut vérifier que c'est bien un filtre.

Remarque :  $\mathcal{M}_T(x) = x * \frac{1}{T} \Pi_T(t - \frac{T}{2})$ ; il s'agit d'un opérateur de convolution

## Exemple

Considérons l'opérateur  $\mathcal{R}_{t_0}$  qui associe à un signal  $x$  sa version retardée de  $t_0$ .

$$\mathcal{R}_{t_0}(x)(t) = x(t - t_0).$$

On peut vérifier que c'est bien un filtre.

Remarque : il s'agit encore d'un opérateur de convolution !  $\mathcal{R}_{t_0}(x) = x * \delta(t - t_0)$

## Exemple

Considérons l'opérateur  $\mathcal{SF}_N$  qui associe à un signal  $x$  sur  $[0, T]$  la  $N^{\text{e}}$  somme partielle de sa série de Fourier.

$$\mathcal{SF}_N(x)(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$$

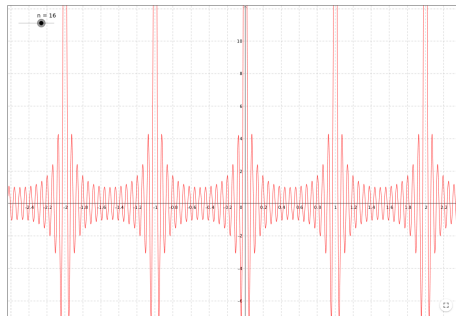
On peut vérifier qu'il s'agit également d'un filtre.

Remarque : encore une fois il s'agit d'un opérateur de convolution

$$\mathcal{SF}_N(x) = x * D_N \quad \text{où } D_N \text{ est le } \mathbf{noyau \text{ de Dirichlet}}$$

# Noyau de Dirichlet

$$D_N(t) := \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{2\pi i n f_1 t} = \frac{\sin(2N+1)\pi f_1 t}{T \sin \pi f_1 t} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sqcup_T(t)$$



# L'ubiquité de la convolution

Ça commence à faire beaucoup de filtres qui sont des opérateurs de convolution ...

## Exemple (général)

Pour  $r$  un signal donné, on peut vérifier que l'opérateur

$$\mathcal{S}_r(x) := x * r$$

est un filtre.

## Résultat fondamental

### Théorème

*Tout opérateur linéaire continu invariant  $\mathcal{S}$  est de la forme  $\mathcal{S}_r : \mathcal{S}(x) = x * r$ .*

### Démonstration.

1. Par linéarité, continuité et invariance, on a pour tous signaux  $x$  et  $y$  :

$$\mathcal{S}(x * y) = \mathcal{S}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(s) y(t-s) ds\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) \mathcal{S}(y)(t-s) ds = x * \mathcal{S}(y)$$

2. En posant  $r := \mathcal{S}(\delta)$  la **réponse impulsionnelle** de  $\mathcal{S}$ , on a donc

$$\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(x * \delta) = x * \mathcal{S}(\delta) = x * r.$$

# All is convolution !

## Théorème

*Tout opérateur linéaire continu invariant  $\mathcal{S}$  est de la forme  $\mathcal{S}(x) = x * r$ .*

La sortie  $y = \mathcal{S}(x)$  du filtre est obtenue par convolution avec la réponse impulsionnelle :

$$y = x * r.$$

D'où l'importance des transformées transformant  $*$  en  $\cdot$  (comme  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{F}$ ) !

Côté fréquentiel, on observe une multiplication par la **fonction de transfert** du filtre :

$$\hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{r}.$$

## À ce propos

Supposons que  $\mathcal{T}$  est une transformation sur les signaux avec la propriété que

$$\mathcal{T}(x * y) = \mathcal{T}(x) \cdot \mathcal{T}(y).$$

Les exponentielles jouent un rôle particulier pour la convolution :

$$(x * e^{\lambda t})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{\lambda(t-u)} du = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-\lambda u} du \right) e^{\lambda t}$$

$$\implies \mathcal{T}(x * e^{\lambda t}) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-\lambda u} du \right) \mathcal{T}(e^{\lambda t})$$

Ce qui ne laisse pas beaucoup d'autres choix que de prendre

$$\mathcal{T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-\lambda u} du \quad \text{pour certaines valeurs de } \lambda !$$



## Transformée de Fourier-Laplace

$$\mathcal{T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-\lambda u} du$$

- pour  $x$  causal,  $\lambda = p$  on a la transformée de Laplace classique
- $x$  d'énergie finie,  $\lambda = 2\pi if$  on a la transformée de Fourier classique
- $x$  limite de signaux d'énergie finie,  $\lambda = 2\pi if$ , la TF des signaux
- $x = \bigsqcup_T \cdot m$  périodique,  $\lambda = \frac{2\pi in}{T}$  on retrouve les coefficients de Fourier

*Fin.*

...mais est-ce bien la fin ?...