III – Séries de Fourier

Exercice 1

Considérons l'espace vectoriel des signaux T-périodiques $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ muni du produit hermitien

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

Rappel : on pose $\mathbf{e}_n(t) = e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$, $\mathbf{c}_n(t) = \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$, $\mathbf{s}_n(t) = \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$.

a) Calculer explicitement les produits scalaires $\langle \mathbf{e}_m \mid \mathbf{e}_n \rangle$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ et en déduire

$$\langle \mathbf{c}_m \mid \mathbf{c}_n \rangle, \qquad \langle \mathbf{c}_m \mid \mathbf{s}_n \rangle, \qquad \langle \mathbf{s}_m \mid \mathbf{s}_n \rangle \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

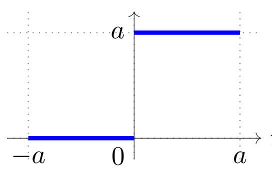
b) Exprimer les coefficients de Fourier c_n en termes des a_n, b_n, et vice-versa.

c) Comment se reflète dans les coefficients de Fourier d'une fonction x le fait qu'elle soit :

i) paire ? ii) impaire ? iii) réelle ? iv) imaginaire ?

Exercice 2

a) Par calcul direct, déterminez les coefficients de Fourier du signal périodique $x(t)$ ayant comme motif :



b) Que peut-on dire sur la convergence ponctuelle de la série obtenue en a) ? Précisez notamment les valeurs aux multiples entiers de a.

c) Exprimer l'énergie totale de x de deux manières différentes (identité de Parseval). Qu'est-ce que cela nous apprend sur la somme des séries

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \ ?$$

Exercice 3

a) En intégrant par parties, établir la relation

$$c_n(x') = \frac{2\pi i n}{T} \cdot c_n(x)$$

reliant les coefficients de Fourier d'un signal T-périodique x et de sa dérivée.

b) Plus généralement, exprimer les coefficients de Fourier de $x^{(k)}$ en fonction de ceux de x.

c) Déduire de ce qui précède que si x est de classe $\mathcal{C}^k$, alors il existe une constante M telle que

$$|c_n(x)| \leqslant \frac{M}{n^k}.$$

Autrement dit : plus x est régulier, plus ses coefficients de Fourier décroissent vite lorsque $n \to \infty$.

d) Vérifier cette décroissance des coefficients de Fourier sur les fonctions créneau et triangle.