

# 第五册

大青花鱼



# 目录

<b>第一章 圆</b>	<b>5</b>
1.1 圆的基本性质 . . . . .	5
1.2 圆和旋转 . . . . .	7
1.3 圆心角和圆周角 . . . . .	8
1.4 点到圆的势 . . . . .	11
1.5 切线 . . . . .	13
<b>第二章 圆和多边形</b>	<b>15</b>
2.1 三角形的外接圆和内切圆 . . . . .	15
2.2 圆内接四边形 . . . . .	16
2.3 垂心组和外接圆 . . . . .	20
2.4 九点圆 . . . . .	23
2.5 圆内接多边形 . . . . .	25
<b>第三章 三角函数</b>	<b>29</b>

3.1	正弦函数	29
3.2	正弦定理	33
3.3	余弦函数	36
3.4	余弦定理	38
3.5	和差角公式	41
3.6	正切函数和余切函数	48
3.7	多边形的边角关系	51
<b>第四章</b>	<b>从或许到确定</b>	<b>53</b>
4.1	事件和见知	53
4.2	概率和分布	56
4.3	二项分布和均匀分布	57
4.4	排列和组合	59

# 第一章 圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

## 1.1 圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点  $O$  距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段  $XY$ ，到  $O$  的距离和  $AB$  等长的点构成一个圆。 $O$  叫做**圆心**， $XY$  叫做圆的**半径**，长度一般记为  $r$ 。不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为  $O$ 、半径为  $r$  的圆，一般记为圆  $(O, r)$  或  $\odot_{(O, r)}$ 。圆心  $O$  和另一点  $P$  确定的圆，一般记为圆  $(O, P)$  或  $\odot_{(O, P)}$ 。如果不在意半径，在不至于混淆的情况下，也可以简记为圆  $O$ 。

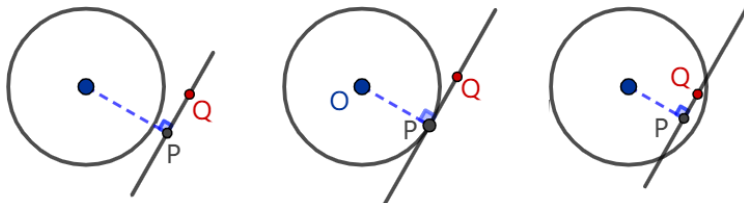
平面上的点到  $O$  的距离小于  $r$ ，就说它在圆内；如果等于  $r$ ，就说它在圆上；如果大于  $r$ ，就说它在圆外。

和引进直线等概念时一样，圆也有一条公理，规定它和直线的关系。

**公理 1. 直线交圆公理** 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

从这个公理出发，我们可以整理直线和圆的位置关系。

考虑直线  $l$  和圆  $\odot_{(O,r)}$ 。过  $O$  作直线  $m \perp l$ ，记垂足为  $P$ ， $|OP| = d$ 。



1. 如果  $d > r$ ，那么  $P$  在圆外。根据垂距定理， $l$  上任意点都在圆外。我们说直线  $l$  与圆  $O$  **相离**。反之，如果直线与圆相离，那么  $P$  在圆外，因此  $d > r$ 。
2. 如果  $d = r$ ，那么  $P$  在圆上。根据垂距定理， $l$  上的点除了  $P$  都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线  $l$  与圆  $O$  **相切**，称  $P$  为**切点**。反之，如果直线与圆相切于点  $Q$ ，那么  $|OQ| = r$ 。 $l$  上其他点都在圆外，所以根据垂距定理的逆定理， $OQ \perp l$ ， $d = r$ 。
3. 如果  $d < r$ ，那么  $P$  在圆内。根据直线交圆公理，直线和圆有两个交点  $A$ 、 $B$ 。我们说直线与圆**相交**，或直线**割圆**于  $A$ 、 $B$ 。反之，如果直线和圆有两个交点，那么根据直线交圆公理，直线有部分在圆内，这部分上的点到圆心距离小于  $r$ ，因此根据垂距定理， $d < r$ 。

设直线割圆于两点  $A$ 、 $B$ ，我们说直线是圆的**割线**。根据直线交圆公理，线段  $AB$ （除端点）在圆内。我们把线段  $AB$  称为圆的一条**弦**。如果  $AB$  过圆心  $O$ ，就说它是圆的直径， $A$ 、 $B$  互为**对径点**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

考虑圆  $O$  上的弦  $AB$  的垂直平分线  $m$ ，圆心  $O$  显然在  $m$  上。 $m \perp AB$ ，设垂足为  $P$ ，那么  $|AP| = |PB|$ 。设  $m$  和圆交于两点  $C$ 、 $D$ ，则弦  $CD$  就是直径。所以我们说：**恰有一条直径平分每条弦**。

#### 习题 1.1.1. 补充：

1. 设直线割圆于两点  $A$ 、 $B$ ，证明线段  $AB$ （除端点）在圆内。
2. 证明：同一个圆中，直径是最长的弦。

## 1.2 圆和旋转

怎么画一个圆？我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点，我们将圆规尖定在要画的圆心处，将笔头接触圆上的点，然后轻轻旋转，笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段，我们首先张开圆规，圆规尖和笔头分别对齐半径两端，然后保持圆规形状不变，将圆规尖定在要画的圆心处，让笔头接触纸面，轻轻旋转，笔头就画出一个圆。

可以看出，圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作，把平面中的点映射到另一点。给定角  $AOB$ ，可以这样定义**旋转**：

**定义 1.2.1.** 给定角  $AOB$ ，平面中一点  $P$  关于  $\angle AOB$  旋转的结果，是唯一使得  $\angle POQ = \angle AOB$  且  $|OP| = |OQ|$  的点  $Q$ 。

$O$  称为旋转的**中心**。任何点  $P$  绕中心旋转，结果都在圆  $(O, P)$  上。

可以看到，给定一个圆  $(O, P)$ ，从点  $P$  出发，旋转不同的角度，就得到圆上其它的点。用圆规画圆时，从零角出发，随着角度不断增大，直到周角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是  $0^\circ$  到  $360^\circ$ ）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上  $0$  和  $360$  之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为  $\gamma_{(O,P)}$ 。

通过  $\gamma_{(O,P)}$ ，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然  $[0, 360)$  对应整个圆，那么  $[0, 180]$  就对应半个圆， $[0, 60]$  就对应六分之一圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应  $[a_1, a_1 + x]$  和  $[a_2, a_2 + x]$ ，这两个圆弧有什么不同吗？观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全

等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如  $[0, 60]$  对应的圆弧，起点就是  $P$ ，终点是  $60$  度角  $POQ$  的终边和圆的交点  $Q$ 。如果圆弧对应的区间长度超过  $180$ ，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于  $180$ ，就说它是**劣弧**；如果等于  $180$ ，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。我们说它们互为**补弧**。

同一个圆上，明确了起点  $A$  和终点  $B$ ，就唯一确定了圆弧  $\widehat{AB}$ 。如果只说了两点  $A$ 、 $B$ ，那么  $\widehat{AB}$  一般指劣弧或起点为  $A$  终点为  $B$  的圆弧。

**习题 1.2.1.** 证明：

1. 任意线段经过旋转得到等长的线段。
2. 任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

### 1.3 圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为  $A$ ，终点为  $B$  的圆弧  $\widehat{AB}$  和圆上弧外一点  $P$ ，则角  $APB$  称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间，有什么关系呢？如右图，连接  $PO$ ，延长交圆于对径点  $Q$ 。由于  $\triangle AOP$  是等腰三角形， $\angle OAP + \angle OPA = 0$ ，



同理,  $\angle OBP + \angle OPB = 0$ 。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说, 圆心角是圆周角的两倍大小, 圆周角是圆心角的一半大小。

**定理 1.3.1. 圆周角定理** 给定圆  $O$  上的弧  $\widehat{AB}$  及圆上弧外的点  $P$ , 如果  $P \notin \widehat{AB}$ , 那么:

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果点  $P$  在弧上,  $\angle APB$  和  $\angle AOB$  是什么关系呢? 这时  $\angle APB$  对应  $\widehat{AB}$  的补弧, 于是它是  $\widehat{AB}$  对应的圆心角的一半大小。 $\widehat{AB}$  对应的圆心角是周角减去  $\angle AOB$ , 所以

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角, 因此, 根据圆周角定理, 对径点对应的圆周角是直角。或者说, 半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是, 讨论圆心角时, 我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时, 为了方便, 我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里, 圆上的点  $A$ 、 $B$  对应的圆心角  $\angle AOB$  和点  $C$ 、 $D$  对应的圆心角  $\angle COD$  相等, 那么根据“边角边”, 圆心  $O$  和它们构成的三角形满足:  $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。弦  $AB$  和  $CD$  也等长。不仅如此, 根据圆映射, 圆弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{CD}$  也等长。事实上,  $\widehat{CD}$  就是  $\widehat{AB}$  关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之, 如果两个圆弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{CD}$  等长, 那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等, 那么弦  $AB$  和  $CD$

也等长。更进一步, 设  $P$  是圆上不属于两弧的点, 那么圆周角  $\angle APB$  和  $\angle CPD$  一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来, 如果圆  $O$  上两条弦  $AB$  和  $CD$  等长, 那么根据“边边边”,  $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。于是圆心角相等, 所以劣弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{CD}$  等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说, 在同一个圆里, 两点对应的弦长相等当且仅当对应的(劣弧)弧长相等, 当且仅当对应的圆心角相等, 当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角, 都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点  $A$ 、 $B$ , 它们对应的垂直平分线  $l$  平分  $\angle AOB$ , 即把  $\angle AOB$  分成两个相同大小的圆心角。因此, 设  $l$  和圆交于  $P$ 、 $Q$ , 则它们也分别平分所在的圆弧(称为弧的中点)。我们把这一系列结论总称为垂径定理:

**定理 1.3.2. 垂径定理** 给定圆上两点, 则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦, 同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成: 过圆  $O$  的弦  $AB$  中点的直径与弦  $AB$  垂直, 同时平分  $\angle AOB$  和弧  $\widehat{AB}$ 。

给定圆  $(O, r)$ , 弦  $AB$  中点记为  $M$ ,  $|MO|$  称为弦  $AB$  的弦心距。由于  $MO \perp AB$ ,  $\triangle OAM$  是直角三角形, 根据勾股定理,

$$|OM|^2 + |AM|^2 = |OA|^2 = r^2.$$

设直线  $MO$  与圆  $O$  交于  $P$ 、 $Q$  两点, 则

$$|MP| \cdot |MQ| = (r - |OM|)(r + |OM|) = r^2 - |OM|^2.$$

比较以上两式, 可以得到:

$$|MA| \cdot |MB| = |MA|^2 = |MB|^2 = |MP| \cdot |MQ|.$$

这个推论也常常被称为垂径定理。

## 1.4 点到圆的势

圆是到定点距离相同的点的集合，所以点对圆来说是关键的概念。一点和圆的关系，可以用它到圆的距离来理解。点  $P$  在圆  $(O, r)$  上，当且仅当它到圆心的距离为  $r$ 。

如果不知道圆心的位置，有没有办法理解点和圆的位置关系呢？我们引进点到圆的势的概念。

**定义 1.4.1.** 点  $P$  到圆  $(O, r)$  的势，等于  $|OP|^2 - r^2$ 。

乍一看，点到圆的势，仍然和它到圆心的距离相关。点到圆心的距离  $d$  比  $r$  小的时候，点在圆内，这时它到圆的势小于 0。 $d > r$  的时候，点在圆外，势也大于 0。 $d = r$  的时候，点在圆上，势等于 0。

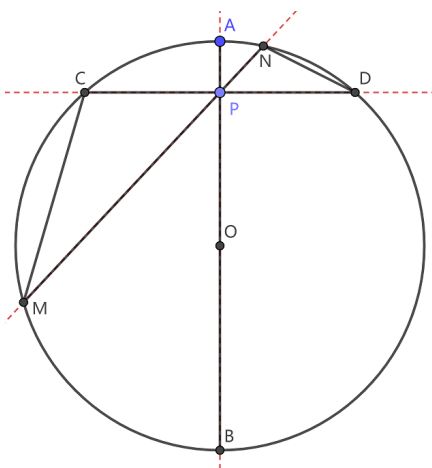
下面，我们从垂径定理出发，给出一种不依赖圆心的方法，计算点到圆的势。

首先设点  $P$  在圆  $(O, r)$  内。连接  $OP$ ，延长为直径，交圆于  $A, B$  两点（ $A, P$  在  $O$  同侧）。过  $P$  作该直径的垂线，交圆于  $C, D$  两点。弦  $CD$  的垂直平分线过  $O$ ，而  $OP \perp CD$ ，所以  $OP$  就是弦  $CD$  的垂直平分线。根据垂径定理， $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| = r^2 - |OP|^2$ 。这说明  $|PA| \cdot |PB|$ 、 $|PC| \cdot |PD|$  是  $P$  的势的绝对值。

过  $P$  任意作一条直线，和圆交于两点  $M, N$ ，是否也有这个结论呢？

如右图，可以发现， $\angle NDC$  和  $\angle NMC$  都对应同一段弧，且  $C, M$  都在弧外，所以  $\angle NDC = \angle NMC$ 。又对顶角  $\angle DPN = \angle CPM$ ，所以  $\triangle DPN \sim \triangle MPC$ 。也就是说，

$$\frac{|PD|}{|PN|} = \frac{|PM|}{|PC|}.$$



换句话说,  $|PC| \cdot |PD| = |PN| \cdot |PM|$ 。这个结论也叫**相交弦定理**。

对圆内一点  $P$  来说, 即便不知道圆心, 只要过  $P$  作直线与圆交于两点, 那么  $P$  到两点的距离乘积就是它到圆的势的绝对值。

如果点在圆外, 是否有类似的结论呢? 我们仍然连接  $OP$ , 直线  $OP$  割圆于两点:  $A, B$  ( $A$  位于  $O, P$  之间)。可以算出:

$$|PA| \cdot |PB| = (|PO| - |AO|) \cdot (|PO| + |PB|) = |OP|^2 - r^2.$$

过  $P$  作直线  $l$  和圆交于两点  $M, N$ ,  $|PM| \cdot |PN|$  是否也等于  $|OP|^2 - r^2$  呢?

如右图, 注意到  $\angle BNA$  和  $\angle BMA$  都对应半圆, 所以都是直角。三角形外角  $\angle PAN = \angle ABN + \angle BNA$ , 而  $\angle ABN$  和  $\angle AMN$  对应同一段弧且都不在弧上, 所以  $\angle ABN = \angle AMN$ 。于是,

$$\begin{aligned} \angle PAN &= \angle ABN + 90^\circ \\ &= \angle AMN + \angle BMA = \angle BMN. \end{aligned}$$

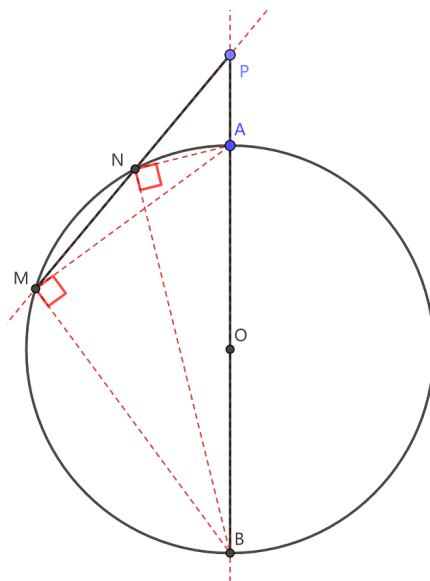
这说明  $\triangle PAN \sim \triangle PBM$ , 所以

$$\frac{|PA|}{|PN|} = \frac{|PM|}{|PB|},$$

换句话说,  $|PM| \cdot |PN| = |PA| \cdot |PB|$ 。这个性质也叫**割线定理**。

对圆外一点  $P$ , 即便不知道圆心, 只要过  $P$  作直线与圆交于两点, 那么  $P$  到两点的距离乘积就是它到圆的势。

因此, 无论在圆内还是圆外, 经过一点  $P$  的直线与圆交于两点, 则它到两点的距离乘积只与它和圆的远近关系有关。如果  $P$  在圆内, 这个乘积等于  $r^2 - |PO|^2$ ; 如果  $P$  在圆外, 这个乘积等于  $|PO|^2 - r^2$ 。或者说, 这个乘积就是势的绝对值。至于  $P$  在圆上的情形, 我们可以认为它与圆交于



两点，其中一点就是它自身，所以到自身距离为 0，从而乘积总是 0，等于它的势。

**定理 1.4.1. 圆势定理** 过点  $P$  作直线与圆  $(O, r)$  交于两点:  $A$ 、 $B$ ，那么

$$|PA| \cdot |PB| = ||PO|^2 - r^2|.$$

比起乘积  $|PA| \cdot |PB|$ ，点到圆的势多了正负号。如何理解这个正负号呢？如果过圆  $(O, r)$  的圆心作一条直线，在上面建立数轴。当我们把原点  $P$  选在圆内的时候， $A$  和  $B$  就对应符号相异的数；如果把原点  $P$  设在圆外， $A$  和  $B$  就代表同号的数了。所以，以  $P$  为原点， $PO$  为正方向的数轴和圆交于两点，这两点代表的数的乘积就是  $P$  到圆的势。或者说，圆势附带了  $P$  和  $A$ 、 $B$  的位置关系的信息。

## 1.5 切线

过一点作直线要与圆交于两点不难，与圆交于一点则不简单。根据直线交圆公理，过圆内的点，无法作和圆相切的直线。过圆外一点，可以与圆相切的直线直观上，我们可以把直尺从和圆相交的状态逐渐移动，直到尺子碰到圆的“边缘”，作出大致和圆相切的直线。

直线和圆相切是一种特殊的状况。过圆外或圆上一点的直线  $l$  如果和圆  $O$  相切，就说它是点到圆的**切线**。切线和圆的（唯一）交点，称为**切点**。根据相切的性质，过圆心  $O$  作关于  $l$  的垂线，切点就是垂足。过圆上一点，只有一条切线，过圆外一点，可以作两条切线。

过圆  $(O, r)$  外一点  $P$  作切线，记切点为  $Q$ ，则  $\triangle OQP$  为直角三角形。根据勾股定理，

$$|PQ|^2 + |OQ|^2 = |OP|^2.$$

因此， $|PQ|^2 = |OP|^2 - r^2$ 。也就是说，点  $P$  到切点的距离平方，是它关于

圆的势。若过  $P$  作圆  $O$  的割线，交圆于  $A$ 、 $B$  两点，那么

$$|PA| \cdot |PB| = |OP|^2 - r^2 = |PQ|^2.$$

也就是说，

$$\frac{|PA|}{|PQ|} = \frac{|PQ|}{|PB|}.$$

因此， $\triangle PAQ \sim \triangle PQB$ 。这两个三角形的相似关系称为**切割线定理**。切割线定理可以看作割线定理的特例。

从切割线定理可以推出： $\angle PQA = \angle PBQ$ 。从另一个角度，可以这样理解：过圆上一点  $Q$  只有一条切线  $PQ$ 。如果过  $Q$  再作一条直线，直线于圆必交于另一点  $A$ ，而  $\angle PQA$  等于圆弧  $\widehat{QA}$  对应的圆周角。

**思考 1.5.1.** 已知圆外一点  $P$ ，如何准确作出  $P$  到  $O$  的切线？

## 第二章 圆和多边形

我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。

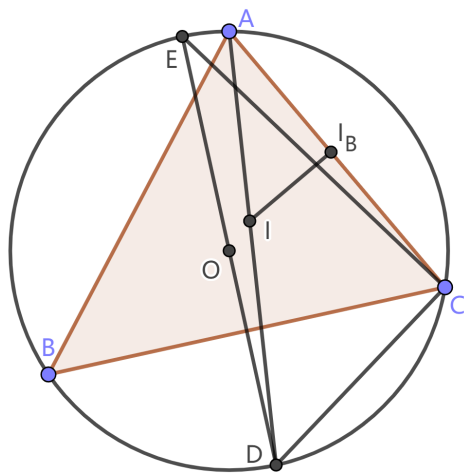
### 2.1 三角形的外接圆和内切圆

首先来看三个点的情形。

设  $A$ 、 $B$ 、 $C$  是圆  $(O, r)$  上（相异的）三点，则线段  $AB$ 、 $BC$ 、 $AC$  的垂直平分线都过圆心  $O$ 。因此， $O$  是  $\triangle ABC$  的外心（这里附带说明了圆上相异三点必然不共线）， $|OA| = |OB| = |OC| = r$ 。反之，设有（非退化的） $\triangle ABC$ ，以它的外心  $O$  为圆心，以  $|OA|$  为半径，就可以画出一个圆，过顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 。这说明，**不共线的三点恰好对应一个圆**。或者说，**不共线的三点确定一个圆**。我们把这个圆称为三角形的**外接圆**（“外心”即“外接圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**内接三角形**。

三角形不仅可以内接于圆，圆也可以内接于三角形。考虑三角形  $ABC$  的内心，它到三角形三边的距离相等。以内心为圆心，以它到三边的距离为半径作圆，这个圆和三角形三边都相切。我们把这个圆叫做三角形的**内切圆**（“内心”即“内切圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**外切三角形**。

除了内心，三角形还有旁心。旁心到三角形三边的距离也相等。因此，以每个旁心为圆心，以它到三遍的距离为圆心，各可以得到一个圆。每个圆都与三角形一边和另两边的延长线相切。这三个圆称为三角形的旁切圆（“旁心”即“旁切圆圆心”的简称），把三角形称为它们的旁切三角形。



### 习题 2.1.1.

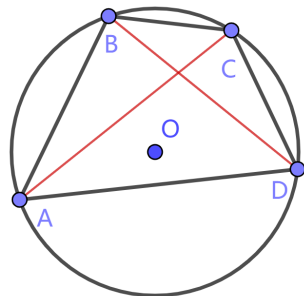
如右上图， $\triangle ABC$  的内心为  $I$ ，外心为  $O$ 。设  $I$  到  $AC$  的垂足为  $I_B$ ，射线  $AI$  与圆  $O$  交于  $D$ ， $D$  的对径点为  $E$ 。

1. 证明： $\triangle CDI$  是等腰三角形， $|CD| = |DI|$ 。
2. 证明： $\triangle CDE \sim \triangle I_BIA$ 。
3. 证明： $I$  关于圆  $O$  的势  $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$ 。其中  $R$  是外接圆半径， $r$  是内切圆半径。
4. 设  $J_A, J_B, J_C$  是  $\triangle ABC$  的旁心，证明：它们关于圆  $O$  的势分别等于外接圆半径与对应旁切圆半径乘积的两倍。

## 2.2 圆内接四边形

在三个点的基础上再加一个点  $D$ ，四个点  $A, B, C, D$  能否恰好对应一个圆呢？显然， $\triangle ABC$  和  $\triangle BCD$  的外接圆未必是同一个圆。所以，四个点不总是在同一个圆上。换句话说，要让四个点共圆，这四个点必须满足一定的条件。

如右图，设  $A, B, C, D$  圆  $(O, r)$  上（相异的）四点，考察它们对应的圆弧。我们发现， $\widehat{ABC}$  和  $\widehat{CDA}$  是整个圆的分划，因此，它们对应的圆心角之和是

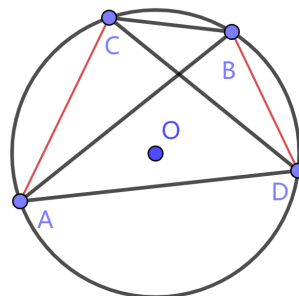




周角。根据圆周角定理,  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ 。同理,  $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$ 。

我们还可以发现, 圆周角  $\angle BAC$  和  $\angle BDC$  都对应  $\widehat{BC}$ , 因此根据“等弧对等角”,  $\angle BAC = \angle BDC$ 。同理可得:  $\angle ACB = \angle ADB$ ,  $\angle CAD = \angle CBD$ ,  $\angle DBA = \angle DCA$ 。

如果  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  顺序改变, 如右图, 那么四边形  $ABCD$  就是蝶形。 $\widehat{ABC}$  和  $\widehat{CDA}$  对应同一段圆弧  $\widehat{AC}$ 。这时  $\angle ABC + \angle CDA = 0^\circ$ , 或者说  $\angle ABC = \angle ADC$ 。同理,  $\angle BAD = \angle BCD$ 。



综合两种情况, 圆内接四边形对角要么和为平角, 要么相等。

可以看到, 如果把相交的对边  $AB$ 、 $CD$  看作对角线, 把对角线  $AC$ 、 $BD$  看作对边, 我们就得到一个凸四边形  $ACBD$ 。因此, 观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现, 我们仍然有  $\angle BAC = \angle BDC$ 、 $\angle ACB = \angle ADB$ ,  $\angle CAD = \angle CBD$ ,  $\angle DBA = \angle DCA$ 。如果对角线  $AC$  和  $BD$  交于点  $P$ , 仍然有  $\triangle APB \sim \triangle CPD$ 、 $\triangle BPC \sim \triangle DPA$ 。换句话说, 即便圆内接四边形不是凸四边形, 用它的顶点也能画出圆内接凸四边形, 并且不妨碍我们讨论相关的性质。所以, 我们总把圆内接四边形问题归结为凸四边形来讨论, 也称之为四点共圆问题。

以上是圆内接四边形边和角的性质, 反过来, 满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢? 或者说, 满足什么条件的四个点共圆呢?

**定理 2.2.1.** 如果凸四边形  $ABCD$  中的一对内角  $\angle ABC$  与  $\angle CDA$  的和是平角, 那么  $ABCD$  是圆内接四边形。

**证明.**  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ , 所以要么两个角都是直角, 要么一个是钝角, 一个是锐角。

如果两个角都是直角, 作对角线  $AC$ , 取它的中点  $O$ 。 $\triangle ABC$  是直角三角形,  $AC$  是斜边, 根据直角三角形的中线定理,  $|AO| = |BO| = |CO|$ 。同

理,  $\triangle CDA$  是直角三角形,  $AC$  是斜边, 于是  $|AO| = |DO| = |CO|$ 。因此  $A, B, C, D$  四点都在  $\odot_{(O,A)}$  上。

如果两个角一个是钝角, 一个是锐角。不妨设  $\angle ABC > 90^\circ > \angle CDA$ 。作对角线  $AC$ , 则  $B, D$  在  $AC$  两侧。作对角线  $AC$  的垂直平分线  $l$ 。显然,  $\triangle ABC$  和  $\triangle CDA$  的外心都在  $l$  上, 只需证明两者是同一点。

设  $\triangle ABC$  的外接圆为  $\odot_{(O_1,B)}$ 。 $\angle ABC$  是钝角, 因此它的圆心角对应优弧。于是,  $O_1$  和  $B$  在直线  $AC$  两侧。 $\angle CO_1A = 360^\circ - 2\angle ABC$ 。

另一方面, 设  $\triangle CDA$  的外接圆为  $\odot_{(O_2,D)}$ 。 $\angle CDA$  是锐角, 因此它的圆心角对应劣弧。于是,  $O_2$  和  $D$  在直线  $AC$  同一侧。 $\angle CO_2A = 2\angle CDA$ 。

以上两个结论说明,  $O_1$  和  $O_2$  都和  $D$  在直线  $AC$  同一侧, 且  $\angle CO_1A = \angle CO_2A$ 。而  $\triangle CO_1A$  和  $\triangle CO_2A$  都是等腰三角形, 所以两者同角全等。这说明  $O_1$  和  $O_2$  是同一点。 $A, B, C, D$  四点都在  $\odot_{O_1,A}$  上。  $\square$

从这个定理可以推出, 矩形、等腰梯形和正方形都是圆内接四边形。

**定理 2.2.2.** 如果凸四边形  $ABCD$  中,  $\angle ACB = \angle ADB$ , 那么  $ABCD$  是圆内接四边形。

**证明.**  $ABCD$  是凸四边形, 所以  $C$  和  $D$  在直线  $AB$  同侧。作边  $AB$  的垂直平分线  $l$ , 显然,  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  的外心都在  $l$  上, 只需证明它们是同一点。

设  $\triangle ABC$  的外接圆为  $\odot_{(O_1,C)}$ ,  $\triangle ABD$  的外接圆为  $\odot_{(O_2,D)}$ 。如果  $\angle ACB$  是钝角, 那么它的圆心角对应优弧。于是,  $O_1$  和  $C$  在直线  $AB$  两侧, 且  $\angle BO_1A = 360^\circ - 2\angle ACB$ 。这时,  $\angle ADB = \angle ACB$  也是钝角, 所以同样有  $O_2$  和  $D$  在直线  $AB$  两侧, 且  $\angle BO_2A = 360^\circ - 2\angle ADB$ 。如果  $\angle ACB$  是锐角, 那么它的圆心角对应劣弧。于是,  $O_1$  和  $C$  在直线  $AB$  同侧, 且  $\angle BO_1A = 2\angle ACB$ 。这时,  $\angle ADB = \angle ACB$  也是锐角, 所以同样有  $O_2$  和  $D$  在直线  $AB$  同侧, 且  $\angle BO_2A = 2\angle ADB$ 。

因此,  $O_1$  和  $O_2$  总在直线  $AB$  同侧, 且  $\angle BO_1A = \angle BO_2A$ 。而  $\triangle BO_1A$  和

$\triangle BO_2A$  都是等腰三角形, 所以两者同角全等。这说明  $O_1$  和  $O_2$  是同一点。  
 $A, B, C, D$  四点都在  $\odot_{O_1, A}$  上。  $\square$

**定理 2.2.3.** 过一点  $P$  的两条直线  $m, n$  上各有两点:  $A, C \in m$  和  $B, D \in n$ , 分别各在  $P$  两侧。如果

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|,$$

那么四边形  $ABCD$  是圆内接四边形。

**证明.** 考虑  $\triangle APB$  和  $\triangle DPC$ 。对顶角  $\angle APB = \angle DPC$ 。而  $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$  等于说

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

因此根据“边角边”,  $\triangle APB \sim \triangle DPC$ 。于是有  $\angle ABP = \angle DCP, \angle BAP = \angle CDP$ 。因此, 根据定理 2.2.2, 四边形  $ABCD$  是圆内接四边形。  $\square$

这个定理也可以理解为: 两条线段相交, 如果交点把每条线段分成的两部分长度之积相等, 那么线段端点共圆。也就是说, 这两条线段实际上是圆的两条相交的弦, 乘积  $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$  是  $P$  关于圆的势。这个定理是相交弦定理的逆定理。

### 习题 2.2.1.

1.  $\triangle ABC$  三边  $BC, CA, AB$  上分别有点  $X, Y, Z$ 。设  $\triangle AYZ$  的外接圆和  $\triangle BXZ$  的外接圆交于点  $P$ , 证明:  $C, X, Y, P$  四点共圆。

2. 直线  $XYZ$  与三角形  $ABC$  的边  $BC, CA, AB$  所在直线分别交于点  $X, Y, Z$ 。证明:  $\triangle AYZ, \triangle BXZ, \triangle CXY, \triangle ABC$  的外接圆过一公共点。

3.  $P$  是平面上一点。过  $P$  作直线  $l_1, l_2, l_3$  与  $\triangle ABC$  三边  $BC, CA, AB$  分别交于点  $X, Y, Z$ 。如果  $\angle AYP = \angle BZP = \angle CXP$ , 证明:  $A, Y, Z, P$  四点共圆、 $B, X, Z, P$  四点共圆、 $C, X, Y, P$  四点共圆。

给定圆内接凸四边形  $ABCD$ 。  $E$  是对角线  $AC$  上一点。  $\angle CDE = \angle BDA$ 。

4. 证明:  $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ 。

5. 证明:  $\triangle CDB \sim \triangle EDA$ 。

6. 证明:  $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

给定凸四边形  $ABCD$ , 作射线  $CE$  使得  $\angle ECD = \angle ABD$ , 作射线  $DE$  使得  $\angle CDE = \angle BDA$ 。两射线交于点  $E$ 。

7. 证明:  $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ 。

8. 证明:  $\triangle CDB \sim \triangle EDA$ 。

9. 证明:  $|AC| \cdot |BD| \geq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

10. 证明, 凸四边形  $ABCD$  是圆内接四边形, 当且仅当  $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

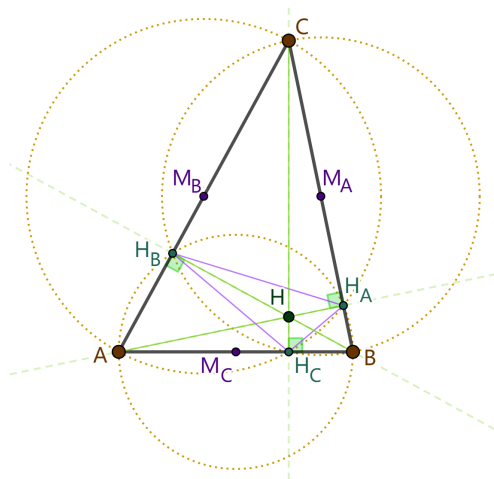
11. 证明:  $A, B, C, D$  四点共圆, 当且仅当  $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

## 2.3 垂心组和外接圆

考虑锐角三角形  $ABC$ , 把顶点到对边的垂足分别记作  $H_A, H_B, H_C$ , 垂心为  $H$ 。由于  $\angle HH_A B = \angle BH_C H = 90^\circ$ , 两角之和为平角, 故  $H, H_A, H_C, B$  四点共圆,  $\angle H_C H H_A + \angle H_A B H_C = 180^\circ$ 。这说明  $\angle CHA = \angle H_C H H_A$  是钝角,  $\triangle AHC$  是钝角三角形。

考察钝角三角形  $AHC$ , 它的顶点到对边的垂足也是  $H_A, H_B, H_C$ , 而垂心是  $B$ 。

类似地, 我们可以证明  $H, H_B, H_C, A$  四点共圆,  $H, H_A, H_B, C$  四点共圆。钝角三角形  $BHC$ 、 $CHA$  的顶点到对边的垂足也是  $H_A, H_B, H_C$ , 而垂心分别是  $A$  和  $B$ 。



于是,从锐角三角形  $ABC$  及其垂心  $H$  出发,可以得出四个三角形,每三个点构成的三角形的垂心,是四个点中剩余的那个点。我们把这样的四点称为**垂心组**。

从钝角三角形及其垂心出发,一样可以得到一个垂心组。从直角三角形出发,其垂心和直角顶点重合,四点的垂心组退化为三点。

从上面的讨论可知,垂心组四点共享三个垂足。任一顶点、垂心和另外两个顶点对应的垂足四点共圆。

考察  $A, H_B, H_A, B$  四点。由  $\angle AH_B B = 90^\circ = \angle AH_A B$  可知,  $A, H_B, H_A, B$  四点共圆。由于  $\angle AH_B B$  是直角,  $A, H_B, H_A, B$  四点所在的圆,圆心是边  $AB$  的中点  $M_C$ 。同理,  $A, H_C, H_A, C$  四点共圆,圆心是边  $AC$  的中点  $M_B$ ;  $B, H_C, H_B, C$  四点共圆,圆心是边  $BC$  的中点  $M_A$ 。

从  $A, H_B, H_A, B$  四点共圆可以推出:  $\angle A = \angle CH_A H_B, \angle B = \angle H_A H_B C$ 。也就是说,  $\triangle CH_B H_A \sim \triangle CBA$ 。

从以上两个四点共圆性质还可以推出  $\angle H H_C H_A = \angle CAH, \angle H H_A H_C = \angle ACH$ 。因此,  $\triangle H H_A H_C \sim \triangle HCA$ 。

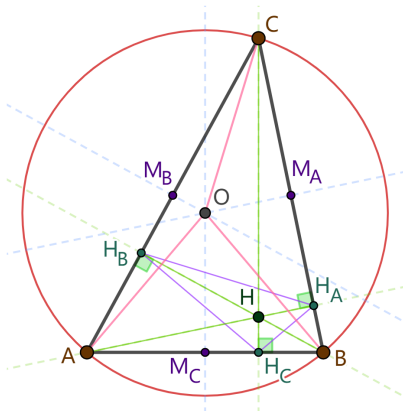
以上是三角形垂心组的基本性质。垂心是顶点到对边垂线的交点。另外一个和边垂直的概念是边的中垂线。如果把三角形的垂心和外心一起来看,会发现两者有密切的关联。

考虑锐角三角形  $ABC$ 、其垂心  $H$  及其外心  $O$ 。边  $BC$  可以看作  $\triangle ABC$  外接圆的弦。圆心角  $\angle BOC = 2\angle A$ , 因此在等腰三角形  $BOC$  中,

$$\angle CBO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle A = \angle HBA.$$

同理,  $\angle BAO = \angle HAC, \angle ACO = \angle HCB$ 。

此外,  $\angle H_C H_A B = \angle A$ , 因此  $\angle H_C H_A B + \angle CBO = 90^\circ$ 。这说明半径  $OB \perp H_A H_C$ 。同理, 半径  $OA \perp H_B H_C, OC \perp H_A H_B$ 。



作点  $A$  在  $ABC$  外接圆上的对径点  $A'$ ,  
 $AA'$  是直径, 所以  $\angle ACA'$  是直角。因此

$$\angle H_C H A' = 90^\circ - \angle A C H_C = \angle A.$$

另一方面,  $A, H_B, H, H_C$  四点共圆, 所以

$$\angle H_C H B = 180^\circ - \angle H_B H H_C = \angle A.$$

这说明  $CA' \parallel HB$ 。同理, 我们可以得到  $BA' \parallel HC$ 。因此四边形  $A'BCH$  是平行四边形。

作  $B, C$  的对径点  $B', C'$ , 同样可以证明, 四边形  $AB'HC$  和  $AHBC'$  是平行四边形。

连接圆心  $O$  和  $AB$  中点  $M_C$ ,  $O$  是直径  $AA'$  的中点, 所以  $OM_C$  平行于  $A'B$ , 且长度为  $A'B$  一半。我们把这种关系简称为“ $OM_C$  平行且等于  $A'B$  的一半”。

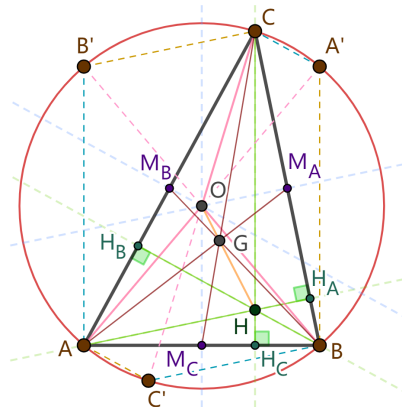
连接  $OH$  和  $AM_C$ 。由于  $OM_C$  平行且等于  $A'B$  的一半,  $A'B$  平行且等于  $HC$ , 因此  $OM_C$  平行且等于  $HC$  的一半。记  $OH$  和  $CM_C$  交点为  $G$ , 不难看出,  $\triangle OGM_C \sim \triangle GHC$ , 且

$$\frac{|M_C G|}{|GC|} = \frac{|OG|}{|GH|} = \frac{|OM_C|}{|HC|} = \frac{1}{2}.$$

也就是说, 点  $G$  在三角形  $ABC$  中线  $CM_C$  上, 且到  $C$  点的距离是到  $M_C$  距离的两倍。这说明  $G$  就是三角形  $ABC$  的重心。我们发现, 三角形的垂心、外心和重心满足以下的性质:

### 定理 2.3.1. 三心共线定理

三角形  $ABC$  的垂心、外心和重心共线, 重心位于外心和垂心为端点的线段上, 而且重心到垂心的距离是重心到外心距离的两倍。



**习题 2.3.1.** 沿用本节记号, 证明:

$$1. |AH| \cdot |HH_A| = |BH| \cdot |HH_B| = |CH| \cdot |HH_C|.$$

2.  $H$  是  $\triangle H_A H_B H_C$  的内心。

3. 记  $\triangle ABC$  的内心为  $I$ , 旁心分别为  $J_A, J_B, J_C$ , 则  $I$  是  $\triangle J_A J_B J_C$  的垂心。

4.  $H$  关于  $AB$  的对称点  $H^C$  在  $ABC$  外接圆上, 且  $\widehat{AC'} = \widehat{H^C B}$ 。

5.  $\triangle AHB$ 、 $\triangle AHC$  和  $\triangle CHB$  的外接圆都和  $\triangle ABC$  的外接圆一样大。它们的圆心分别是  $\triangle ABC$  的外心  $O$  关于三边的对称点, 和  $O$  组成垂心组。并且这个垂心组和垂心组  $A, B, C, H$  全等。

## 2.4 九点圆

我们已经了解过三角形的外接圆、内切圆和旁切圆。本节我们再介绍三角形内部的一个特殊的圆。

设有三角形  $ABC$ , 上一节中, 我们证明了  $\triangle ABC$  的垂心  $H$ 、外心  $O$  和重心  $G$  共线。考虑线段  $OH$ , 作它的中点  $M$ 。我们知道  $AHBC'$  是平行四边形, 所以  $M_C$  是其对角线  $HC'$  的中点。因此,  $MM_C$  平行且等于  $OC'$  的一半。

作  $CH$  的中点  $D_C$ , 由于  $OM_C$  平行且等于  $CH$  的一半, 因此平行且等于  $HD_C$ 。也就是说, 四边形  $HD_C OM_C$  是平行四边形, 于是  $M_C, M, D_C$  共线,  $M$  是  $M_C D_C$  的中点,  $|MD_C| = |MM_C| = \frac{1}{2}|M_C D_C|$ 。

$\triangle M_C H_C D_C$  是直角三角形, 所以斜边中点  $M$  到直角顶点  $H_C$  的距离是斜边长度  $M_C D_C$  的一半。也就是说,

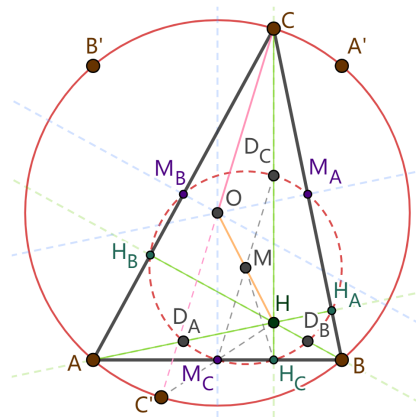
$$|MD_C| = |MM_C| = |MH_C| = \frac{1}{2}|OC'| = \frac{R}{2}.$$

其中  $R$  是  $ABC$  的外接圆半径。

同理，我们也有

$$\begin{aligned} |MD_A| &= |MM_A| = |MH_A| = \frac{R}{2}, \\ |MD_B| &= |MM_B| = |MH_B| = \frac{R}{2} \end{aligned}$$

所以，以  $M$  为圆心，以  $\frac{R}{2}$  为半径画圆，我们就会发现，这个圆经过三边中点，三边上的垂足，以及三顶点到垂心连线的中点，合共九点。我们把这个圆称为**九点圆**。



### 定理 2.4.1. 九点圆定理

三角形三边中点、三边垂足，以及三顶点到垂心连线的中点共圆。圆心为外心与垂心的中点，半径为三角形外接圆半径的一半。

三角形的九点圆的大小，刚好是三角形外接圆的一半。如果我们把三角形的垂心  $H$  看作“起点”，那么三角形的外接圆可以看作是九点圆外延加倍得到的。比如，把线段  $HD_C$  加倍延长，就得到  $HC$ ；把线段  $HM_C$  加倍延长，就得到  $HC'$ ；把线段  $HH_C$  加倍延长，就得到外接圆上一点  $H^C$ 。一般来说，从  $H$  出发，连接  $H$  和九点圆上任一点，加倍延长后，终点就会落在外接圆上。

**习题 2.4.1.** 沿用本节记号，证明：

1. 作外心  $O$  关于三边的对称点： $O_A, O_B, O_C$ ，则垂心  $H$  是  $\triangle O_A O_B O_C$  的外心。
2.  $\triangle O_A O_B O_C \simeq \triangle ABC$ 。两者关于点  $M$  对称，有共同的九点圆。
3. 记  $\triangle ABC$  的旁心为  $J_A, J_B, J_C$ ，则  $\triangle J_A J_B J_C$  的九点圆是  $\triangle ABC$  的外接圆。



## 2.5 圆内接多边形

九点圆涉及了内接于同一个圆的九边形。对一般的多边形来说，成为圆内接多边形意味着什么呢？

从四边形的情况来看，顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  按顺时针或逆时针顺序排列，那么四边形  $ABCD$  是凸四边形，否则，四边形  $ABCD$  可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形，我们只研究最简单的一类：顶点按逆时针顺序排列的多边形。具体来说，设圆  $O$  上有  $n$  个点： $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，从  $A_1$  出发构造圆映射  $\gamma_{(O, A_1)}$ ，把  $[0, 360)$  映射到圆周，那么  $0$  对应  $A_1$ 。设  $t_1, t_2, \dots, t_n$  分别对应  $n$  个点，那么  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 。这样定义的圆内接多边形： $A_1 A_2 \dots A_n$  就是我们研究的对象。这样定义的多边形，每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数  $n$ ，凸  $n$  边形  $A_1 A_2 \dots A_n$  有  $\frac{n(n-3)}{2}$  条对角线。具体来说，每个顶点和相邻两个顶点的连线是  $n$  边形的边，和其余  $n-3$  个顶点的连线是对角线。因此每个点是  $n-3$  条对角线的端点。另一方面，每条对角线对应两个顶点，因此一共有  $\frac{n(n-3)}{2}$  条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢？我们知道三角形的内角和是平角，凸四边形的内角和是两个平角（或者说周角，如果把角度约定在负平角和正平角之间，则减去一个周角变成零角）。边数继续增多时，我们定义凸  $n$  边形  $A_1 A_2 \dots A_n$  的内角和为：

$$\angle A_1 A_2 A_3 + \angle A_2 A_3 A_4 + \dots + \angle A_{n-2} A_{n-1} A_n + \angle A_{n-1} A_n A_1 + \angle A_n A_1 A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间，可以猜测：凸  $n$  边形的内角和是  $n-2$  个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形, 我们可以这样证明:  $n$  个顶点把圆分为  $n$  段圆弧。每个顶点张成的内角, 对应了其中  $n-2$  段圆弧。如果考虑所有  $n$  个内角对应的圆弧, 则每段圆弧计入  $n-2$  次 (圆弧两端是内角顶点的时候不计入, 其它情况下都计入)。也就是说,  $n$  个内角和对应  $n-2$  个整圆。这些内角都是圆周角, 因此它们的和是  $n-2$  个整圆对应的圆周角, 即  $n-2$  个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况, 我们可以通过不断“裁剪”三角形来证明。我们还记得, 凸四边形可以裁成两个三角形, 因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看, 我们通过裁掉一个三角形, 把凸四边形变成了三角形。对一般的凸  $n$  边形  $A_1A_2\cdots A_n$  来说, 由于它的每个内角都介于零角和平角之间, 我们可以考虑裁掉某个角, 把它变成  $n-1$  边形。比如, 沿着线段  $A_1A_3$  剪一刀, 就把  $A_1A_2\cdots A_n$  分成了三角形  $A_1A_2A_3$  和  $n-1$  边形  $A_1A_3\cdots A_n$ 。

**定理 2.5.1.** 凸  $n$  边形的内角和是  $n-2$  个平角。

**证明.** 用归纳法证明。命题  $P(n)$ : 凸  $n+2$  边形的内角和是  $n$  个平角。我们要证明  $P(n)$  对所有正整数  $n$  成立。

$n=1$  时, 由于三角形内角和是平角,  $P(1)$  成立。

假设  $P(n)$  成立, 下面证明  $P(n+1)$  成立。

设有凸  $n+3$  边形  $A_1A_2A_3\cdots A_n$ , 将它裁成三角形  $A_1A_2A_3$  和  $n-1$  边形  $A_1A_3\cdots A_n$ 。前者的内角和是平角。根据  $P(n)$ , 后者的内角和是  $n$  个平角, 因此,  $A_1A_2A_3\cdots A_n$  的内角和是  $n+1$  个平角。于是  $P(n+1)$  成立。

因此对所有正整数  $n$ , 命题  $P(n)$  成立。  $\square$

满足什么条件时, 凸多边形是圆内接多边形呢? 最直接的条件, 自然是平面上有一个圆, 使多边形顶点都在圆上。或者说, 能找到一点, 到多边形各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点, 可以查看多边形各边和各条对角线的垂

直平分线。如果多边形是圆内接多边形，它的边和对角线都是圆的弦，垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说，可以考察两条边（或对角线）的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等，那么多边形内接于以它为圆心的圆，否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形：**正多边形**。正多边形是各边等长，各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形各个的内角角度是  $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$ 。

### 习题 2.5.1.

1. 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形，哪些总是圆内接多边形？哪些可以是圆内接多边形？要满足什么条件？
2. 设有整数  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ ，圆内接  $n$  边形  $A_1 A_2 \cdots A_n$  中， $\angle A_i A_k A_j$  和  $\angle A_i A_l A_j$  有什么关系？



## 第三章 三角函数

通过研究点、直线、角和三角形、四边形、圆形，我们对简单的平面图形有了更多的认识。其中对三角形的研究贯通了我们对各种形状的探索。通过对三角形性质的理解，我们建立了三角形和四边形、圆形乃至更复杂的形状之间的关系。

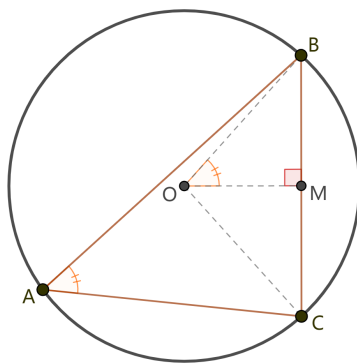
如果对前面学习的知识做一次整理，我们会发现，大多数的结论要么和共点、共线、共圆有关，要么是长度之间、角度之间的相等或简单倍数关系。我们把这些结论称为定性结论。

在科学研究和生产实践中，我们更需要知道的是形状之间定量的关系。比如，如果三角形的三边长度分别是 4, 5, 6，我们希望知道三角形内角到底是多少度。又比如，如果菱形两条邻边长度为 1，夹角为  $50^\circ$ ，我们希望知道菱形对角线的长度。为此，我们从三角形的边角关系着手研究。

我们的目标是解三角形：已知三角形部分边角的大小，求其余边角的值。

### 3.1 正弦函数

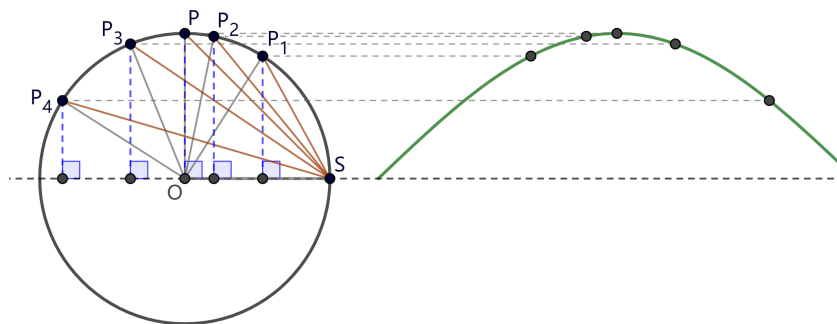
如右图，我们想知道三角形  $ABC$  中  $\angle A$  的角度和对边  $BC$  长度的关系。为此，我们



作  $ABC$  的外接圆  $O$ , 则  $BC$  是  $O$  的弦。 $\angle A$  作为圆周角, 是圆心角  $\angle COB$  的一半。作  $BC$  中点  $M$ , 则  $\angle A = \angle MOB$ 。这样, 我们就把一般三角形的边角关系转化成了直角三角形  $MBO$  的边角关系。

那么, 直角三角形的角和边有什么关系呢? 我们先来看另一个问题。

考虑半径为 1 的圆  $O$  (这个圆以后会经常出现, 我们把它叫做单位圆) 和圆上一点  $S$ 。给定角  $\alpha$ , 以  $OS$  为始边, 角的终边交圆  $O$  于点  $P$ 。称  $\triangle SOP$  为角  $\alpha$  对应的单位三角形 (如下图)。根据三角形面积公式 (底乘高除以 2), 单位三角形的面积等于  $P$  到始边距离的一半。



不难看出,  $\alpha$  为直角时, 单位三角形的面积最大, 为  $\frac{1}{2}$ 。其它情况下, 运用勾股定理可知,  $P$  到始边距离小于半径, 因此面积小于  $\frac{1}{2}$ 。

我们把角  $\alpha$  对应的单位三角形的面积和直角对应的单位三角形面积之比称为  $\alpha$  的正弦或正弦值, 记为  $\sin \alpha$ 。 $\sin A$  就是  $P$  到始边距离, 也就是前面直角三角形  $MBO$  中  $BM$  与外接圆半径之比, 或弦长与外接圆直径之比。

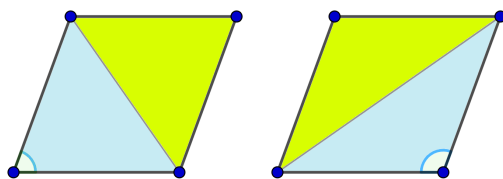
角度在零角到平角之间的每个角, 都可以按以上方法定义正弦。更准确来说, 我们定义的是角度的正弦。不过, 它实际上对应着一个把数映射到数的映射, 也就是函数。比如, 0 和 180 之间的任何实数, 都通过角度制的圆映射对应某个角度, 从而对应某个正弦值。

另一种对应方法使用弧度, 也就是把角度在单位圆上对应的弧长映射

到角度的正弦值。比如， $60^\circ$  角对应着圆周的六分之一，在单位圆上对应的弧长是  $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 。我们就说  $60^\circ$  角的正弦值是  $\sin \frac{\pi}{3}$ 。把角度或角度在单位圆上的弧长对应到角度的正弦值的函数，称为**正弦函数**。

正弦函数有什么性质呢？观察不同角度对应的单位三角形可知，零角的正弦值是 0（退化的三角形面积为 0）。从零角出发，随着角度增大，正弦值不断增大；直角时，正弦值达到最大值 1。然后，随着角度增大，正弦值不断减小；平角时，正弦值减为 0。

两个角互为补角时，对应的单位三角形是同一个菱形按不同对角线剖开得到的一半。所以两者面积相等。也就是说，**两个角互为补角，则正弦值相等**。因此，我们将把重点放在研究锐角的正弦值上。



对具体的某个角度来说，怎么计算它的正弦值呢？这个问题不简单。以我们掌握的知识，还无法精确计算任意角度的正弦值，甚至难以估计任意角度的正弦值。求解任意角度的正弦值属于实变函数分析的重要基础内容。目前，我们可以使用正弦函数表，查找角度的正弦值，或通过使用计算器、编程等方式，借助计算机计算角度的正弦值。使用正弦表，可以方便地查找角度对应的正弦值。以下是整数角度的正弦表：

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0°	0.0000	0.1736	0.3420	0.5000	0.6428	0.7660	0.8660	0.9397	0.9848
1°	0.0175	0.1908	0.3584	0.5150	0.6561	0.7771	0.8746	0.9455	0.9877
2°	0.0349	0.2079	0.3746	0.5299	0.6691	0.7880	0.8829	0.9511	0.9903
3°	0.0523	0.2250	0.3907	0.5446	0.6820	0.7986	0.8910	0.9563	0.9925
4°	0.0698	0.2419	0.4067	0.5592	0.6947	0.8090	0.8988	0.9613	0.9945
5°	0.0872	0.2588	0.4226	0.5736	0.7071	0.8192	0.9063	0.9659	0.9962
6°	0.1045	0.2756	0.4384	0.5878	0.7193	0.8290	0.9135	0.9703	0.9976
7°	0.1219	0.2924	0.4540	0.6018	0.7314	0.8387	0.9205	0.9744	0.9986
8°	0.1392	0.3090	0.4695	0.6157	0.7431	0.8480	0.9272	0.9781	0.9994
9°	0.1564	0.3256	0.4848	0.6293	0.7547	0.8572	0.9336	0.9816	0.9998

每列的数据十位相同，每行的数据个位相同。比如，要查  $26^\circ$  的正弦值，就在十位为 2 的第三列，找到个位为 6 的第七行，查得正弦值为 0.4384。

对于非整数角度的正弦值，我们可以查询更精确的正弦表，或者用一次函数来近似估计。如果我们把整数角度的正弦值看作正弦函数的函数值，在直角坐标系上画出函数值对应的点，可以观察到正弦函数的值从 0 平稳增长到 1。因此，可以认为两个整数角度之间，正弦函数的图像近似于线段，也就是一次函数图像的一部分。因此，非整数角度的正弦值可以通过计算线段上点的坐标而得到。

举例来说， $37^\circ$  和  $38^\circ$  之间的角度（比如说  $37.3^\circ$ ）的正弦值，可以看作经过  $(37, \sin 37^\circ)$  和  $(38, \sin 38^\circ)$  两点的一次函数图像在横坐标为 37.3 时对应的纵坐标。这个一次函数可以写成：

$$y = \sin 37^\circ + \frac{\sin 38^\circ - \sin 37^\circ}{38 - 37} \cdot (x - 37)$$



横坐标  $x = 37.3$  时，代入函数表达式，就得到：

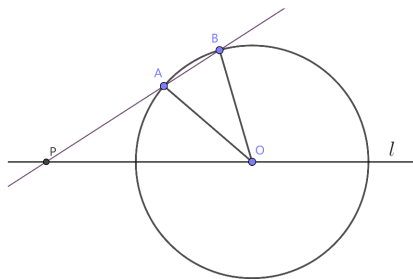
$$\begin{aligned} y &= \sin 37^\circ + 0.3 \cdot (\sin 38^\circ - \sin 37^\circ) \\ &= 0.6018 + 0.3 \cdot (0.6157 - 0.6018) \approx 0.60597 \end{aligned}$$

实际上  $\sin 37.3^\circ \approx 0.60599$ ，可见偏差不大。

反过来，如果已知角的正弦值，也可以通过查表，估计角度的大小。比如，已知  $\sin A = 0.83$ ，查表可知  $\angle A$  大小在  $56^\circ$  和  $57^\circ$  之间。

想一想，如果要得到更精确的结果，除了查询更精确的正弦表，还可以怎么做？

**习题 3.1.1.** 如右图，延长  $BA$  交  $l$  于点  $P$ 。



1. 计算  $S_{\triangle AOP}$  和  $S_{\triangle BOP}$ 。

2. 通过比较  $S_{\triangle AOP}$  和  $S_{\triangle BOP}$ ，证明

锐角的正弦值随角度增大而增大，钝角的正弦值随角度增大而减小。

3. 从  $46^\circ$ 、 $48^\circ$  的正弦值出发，用一次函数近似估计  $47^\circ$ ，和正弦表上的值比较。哪个值比较大？对别的角度试一试，估计值的偏差有什么规律？

4. 已知某锐角的正弦值为  $0.73$ ，请估计它的角度大小。

## 3.2 正弦定理

我们可以用正弦值来探讨三角形的边角关系。首先把正弦值应用到一般三角形的面积上。我们知道  $\angle A$  对应的单位三角形的面积是  $\frac{1}{2} \sin A$ 。如果  $\angle A$  的两邻边长度分别是  $b$  和  $c$ ，那么根据等高三角形的面积关系，三角形的面积是单位三角形的  $bc$  倍，也就是  $\frac{1}{2}bc \sin A$ 。

定理：三角形两边长度为  $b$  和  $c$ ，夹角为  $A$ ，则面积为  $\frac{1}{2}bc \sin A$ 。

设三角形  $ABC$  中  $A, B, C$  对边长度为  $a, b, c$ ，那么它的面积可以用三

种方式表示:

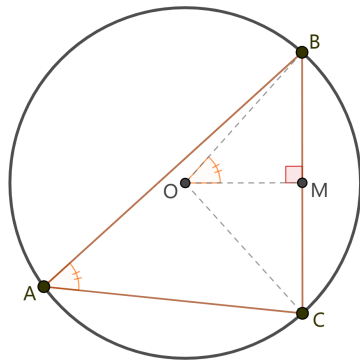
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

两边除以  $\frac{abc}{2}$ , 就得到:

$$\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}.$$

上式告诉我们, 三角形三个内角的正弦值和对边长度的比是定值  $\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc}$ 。如何理解这个定值呢? 让我们回到前面的三角形  $MOB$ 。我们知道  $BM = R \sin A$ , 其中  $R$  是  $\triangle ABC$  外接圆半径。所以  $\frac{a}{2} = R \sin A$ , 即  $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{2R}$ 。也就是说,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



**定理 3.2.1. 正弦定理** 三角形任一边长与其对角正弦值之比为外接圆直径。

从正弦定理可以立刻得出: 三角形的面积等于三边长之积与外接圆半径之比的四分之一。

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}.$$

下面来看正弦定理的具体应用。

**例子 3.2.1.** 三角形  $ABC$  中, 边  $AB$ 、 $AC$  长度分别为 3 和 5,  $\angle B = 80^\circ$ , 求  $BC$  的长度和  $\angle C$  的大小。

**解答.** 根据正弦定理:

$$\frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|AB|}{\sin C},$$

所以  $\sin C = \frac{|AB| \sin B}{|AC|}$ 。查表知  $\sin 80^\circ = 0.9848$ , 算得  $\sin C \approx 0.5909$ , 反查正弦表可知  $\angle C \approx 36.2^\circ$  或  $\angle C \approx 143.8^\circ$ 。由于三角形内角和是平

角,  $\angle C + \angle B < 180^\circ$ , 故排除  $\angle C \approx 143.8^\circ$ 。于是  $\angle C \approx 36.2^\circ$ ,  $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C \approx 63.8^\circ$ , 使用正弦定理可算得:

$$|BC| = \frac{|AB| \sin A}{\sin B} = \frac{3 \cdot \sin 80^\circ}{\sin 63.8^\circ} \approx 3.29$$

已知三角形两边长度和其中一边对角的大小, 可以根据正弦定理得出另一边对角的正弦值, 从而得出它的角度。用平角减去两角角度, 就得到第三个角的大小。再次使用正弦定理, 就得到第三边的长度。要注意的是, 用正弦定理算出的是角的正弦值, 而不是角度。由于互为补角的正弦值相等, 同一个正弦值对应两个互为补角的角度。因此, 给定三角形两边和其中一边的对角, 并不一定能确定三角形的形状。换句话说, “边边角” 不能用来证明三角形全等。

**例子 3.2.2.** 已知三角形  $ABC$  中,  $\angle A = 64^\circ$ ,  $\angle B = 75^\circ$ ,  $\angle C$  对边长度  $c = 4$ , 求另两边的长度。

**解答.** 三角形内角和为平角, 所以  $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 41^\circ$ 。根据正弦定理:

$$\frac{a}{\sin 64^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 41^\circ}.$$

$$\text{所以 } a = \frac{c \sin 64^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{4 \times 0.8988}{0.6561} \approx 5.48, \quad b = \frac{c \sin 75^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{4 \times 0.9659}{0.6561} \approx 5.89.$$

已知两内角大小和一边的长度, 等于知道所有内角大小和一边边长。根据正弦定理, 可以算出另两边的长度。这说明 “角边角” 和 “角角边” 都可以用来证明三角形全等。

正弦定理不仅可以用来处理定量关系, 也可以用来处理定性关系。三角形的边长和对角的正弦值之比是定值, 所以, 边长越大, 对角的正弦值也越大。而锐角的正弦值随着角度增大而增大, 至直角达到最大。所以, 锐角和直角三角形中, 较大的边, 对角也较大, 较大的角, 对边也较大。这个性质称为 “大边对大角”、“大角对大边”。

对钝角三角形, “大边对大角”、“大角对大边”的结论是否也成立呢? 设三角形  $ABC$  中  $\angle A$  是钝角, 则  $\angle A$  的补角是锐角。三角形内角和为平角, 所以  $180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C > \angle B$ ,  $\angle A$  的补角大于  $\angle B$ , 即  $\sin A = \sin(B + C) > \sin B$ 。同理,  $\sin A > \sin C$ 。钝角  $\angle A$  作为较大的角, 其正弦值大于锐角  $\angle B$  和  $\angle C$ 。而  $\angle B$  和  $\angle C$  同为锐角, “大边对大角”、“大角对大边”的结论在两者之间同样成立。综上所述, 任意三角形中, “大边对大角”、“大角对大边”的结论总成立。

### 习题 3.2.1.

1. 设三角形  $ABC$  内角  $A, B$  的公共边为  $c$ , 证明:  $S_{\triangle ABC} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin(A+B)}$ 。
2. 三角形一边的长度是另一边的 2 倍。证明: 至少有一个内角不大于  $30^\circ$ , 一个内角不小于  $75^\circ$ 。
3. 已知三角形  $ABC$  中  $\angle A = 36^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C$  对边长度  $c = 8$ , 求另两边的长度。
4. 已知三角形两边长度是 4、5, 一个内角是  $40^\circ$ , 第三边的长度有几种可能? 找出所有满足条件的三角形。
5. 已知三角形两边长度是 4、5, 一个内角是  $70^\circ$ , 第三边的长度有几种可能? 结论和上一题有什么不同? 找出所有满足条件的三角形。

## 3.3 余弦函数

### 例子 3.3.1.

1. 三角形  $ABC$  中, 边  $BC$ 、 $AC$  的长度分别是 4、6,  $\angle C = 50^\circ$ , 求  $AB$  长度。
2. 三角形  $ABC$  中, 边  $AB$ 、 $AC$ 、 $BC$  的长度分别为 3、5、6, 求三个内角的大小。

使用正弦定理, 我们列出以下等式:

$$1. \frac{4}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} = \frac{|BC|}{\sin 50^\circ}.$$

$$2. \frac{6}{\sin A} = \frac{5}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}.$$

每个等式中都有两个未知量。我们无法直接用正弦定理计算内角的正弦值了。不过，既然我们能通过“边边边”和“边角边”证明三角形全等，这让我们猜想，有别的方法计算内角的角度。

第一题中，让我们把  $\angle C$  改为直角，那么根据勾股定理， $|AB| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ 。

第二题中，让我们把  $AB$ 、 $AC$ 、 $BC$  的长度换成 3、4、5，我们观察到最长边边长的平方等于另两边边长的平方和。根据勾股定理逆定理，三角形是直角三角形。所以  $\angle A$  是直角。用正弦定理得  $\sin B = 0.8$ ， $\sin C = 0.6$ ，查表可知  $\angle B \approx 53^\circ$ ， $\angle C \approx 37^\circ$ 。

可以看出，对于直角三角形，由于有勾股定理作为“武器”，我们总可以破解三角形的边角关系。因此，我们需要“升级装备”，把勾股定理推广为对一般的三角形也适用的结论。为此，我们需要定义角的余弦。

什么是角的余弦呢？我们已经定义了角的正弦。在直角三角形中，锐角的正弦是对边长度与斜边长度之比。这个公式中我们用到了三角形的两条边。我们定义锐角的**余弦**（或**余弦值**）为剩余的直角边（也就是相邻的直角边）长度与斜边长度之比。在  $MOB$  的例子中，角  $A$  的余弦就是弦  $BC$  的弦心距，记为  $\cos A$ 。

显然，直角三角形中，一个锐角的邻边就是另一个锐角的对边。所以**锐角的余弦等于它的余角的正弦**：

$$\forall 0 \leq A \leq 90^\circ, \cos A = \sin(90^\circ - A).$$

这样我们就定义了**余弦函数**。零角的余弦是 1。从零角出发，随着角度增大，角的余弦逐渐减小。直角时，余弦值达到最小值 0。

此外，角的正弦和余弦分别是直角三角形两条直角边和斜边的比值。所

以根据勾股定理,

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1.$$

其中  $\cos^2 A, \sin^2 A$  分别是  $(\cos A)^2, (\sin A)^2$  的简便记法。这个结论也叫三角勾股定理。

怎么计算角的余弦值呢? 从三角勾股定理定理可以看出, 已知锐角的正弦, 就可以得到它的余弦:  $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ 。所以, 可以查正弦表得到角的正弦值, 再求出余弦值。反过来, 已知锐角的余弦, 可以先算出它的正弦, 然后查表得到角度。

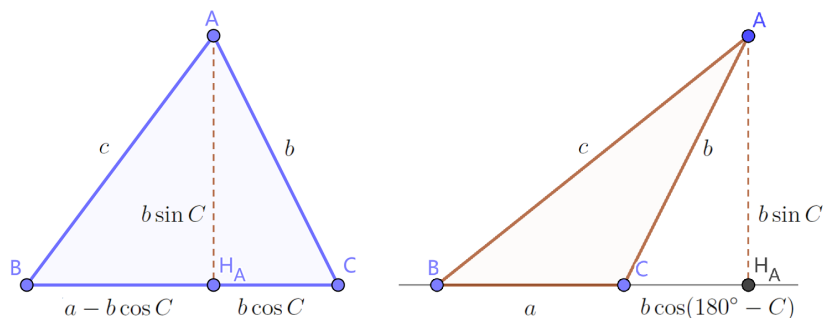
### 习题 3.3.1.

1. 从等腰直角三角形的性质出发, 计算  $45^\circ$  的正弦和余弦值。
- 直角三角形  $ABC$  中,  $\angle C$  是直角。斜边长度  $c$  是直角边长度  $a$  的 2 倍。
2. 作斜边中点  $M$ , 证明:  $\triangle BMC$  是正三角形。
3. 计算  $30^\circ$  和  $60^\circ$  的正弦和余弦值。
- 等腰三角形  $ABC$  中, 顶角  $\angle A$  是底角  $\angle B$  的 2 倍。
4. 设  $\angle B$  的平分线交对边于点  $D$ 。证明:  $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ 。
5. 设底边长  $a = 1$ , 腰长  $b = c = x$ , 证明:  $x^2 - x - 1 = 0$ 。
6. 计算  $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ$  和  $72^\circ$  的正弦和余弦值。

## 3.4 余弦定理

定义了角的余弦, 我们再来看前面“边边边”的问题 (例题 3.3.1 第一题)。如果  $\angle C$  是直角, 那么根据勾股定理, 可以直接求出  $AB$  长度。如果  $\angle C$  不是直角, 我们希望把问题转化为直角三角形的边角关系。

作顶点  $A$  到  $BC$  的高, 记垂足为  $H_A$ , 则  $H_A \neq C$ 。 $\triangle ACH_A$  是直角三角形, 所以  $|AH_A| = |AC| \sin C = b \sin C$ 。如果  $\angle C$  是锐角, 那么  $H_A$  在线段  $BC$  上,  $|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos C$ ; 如果  $\angle C$  是钝角, 那么  $H_A$  在线段  $BC$  延长线上,  $|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos(180^\circ - C)$ 。



$\triangle ABH_A$  是直角三角形。根据勾股定理,  $|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2$ 。如果  $\angle C$  是锐角, 那么

$$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2 = |AH_A|^2 + (|BC| - |CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2 &= (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2 \\ &= b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2 C + a^2 - 2ab \cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

我们得到了  $a$ 、 $b$ 、 $c$  和  $\angle C$  的关系。这个关系叫做**余弦定理**。可以看出,  $\angle C$  为直角时, 余弦定理就变成了勾股定理。所以, 余弦定理是勾股定理的“升级版”, 勾股定理可以看作是余弦定理的特例。使用余弦定理, 我们可以解决例题 3.3.1 第一题。

**解答.** 根据余弦定理,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 50^\circ \approx 21.15.$$

因此  $c \approx \sqrt{21.15} \approx 4.6$ 。

用同样的方法, 能否解决第二题呢? 我们列出等式:

$$6^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos C$$

解得  $\cos C = -\frac{1}{15}$ 。显然，任何锐角或直角的余弦都不是负数。我们猜测，这是因为  $C$  是钝角，而前面的推导中， $\angle C$  是锐角。

来看  $\angle C$  是钝角的情况。如果  $\angle C$  是钝角，那么

$$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2 = |AH_A|^2 + (|BC| + |CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2 &= (b \sin C)^2 + (a + b \cos(180^\circ - C))^2 \\ &= b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2(180^\circ - C) + a^2 + 2ab \cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

可以看到，对钝角三角形，余弦定理的表达式比锐角三角形复杂很多。把  $a = 3$ 、 $b = 5$ 、 $c = 6$  代入钝角的余弦定理公式，我们发现难以解出  $C$ 。公式中，含有  $C$  的项无法像锐角的情况里那样合并化简，原因在于我们没有定义钝角的余弦值，只能用锐角  $180^\circ - C$  的余弦值来表示。

如何定义钝角的余弦值呢？钝角的正弦为其补角的正弦。我们希望钝角的余弦也满足三角勾股定理：

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

这就要求

$$\begin{aligned} \cos C &= \sqrt{1 - \sin^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(180^\circ - C)} \\ &= \pm \cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦： $\cos C = \cos(180^\circ - C)$ ，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos C.$$



如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦的相反数： $\cos C = -\cos(180^\circ - C)$ ，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

显然，后一种情况下，钝角三角形和锐角三角形余弦定理的形式就统一了。接下来我们会看到，后者在各个方面都更加合理。

### 习题 3.4.1.

1. 已知三角形三边长为 5、7、8，求三内角的大小。

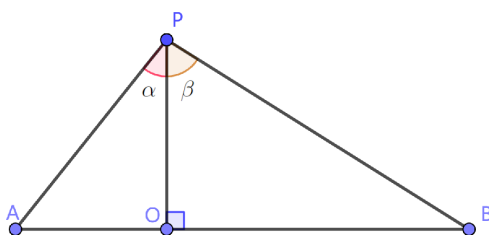
$\triangle ABC$  中， $|AB| = 6, |BC| = 3, |CA| = 5$ ,

2. 求  $\angle A$  的大小。

3. 求  $\angle B, \angle C$  的大小。

## 3.5 和差角公式

解决平面形状的问题时，我们常常需要处理角度的和与差。给定两个角度  $\alpha$ 、 $\beta$ ，我们希望能够给出  $\alpha + \beta$ 、 $\alpha - \beta$  的正弦和余弦值。换句话说，我们希望能够打通正弦函数、余弦函数和实数的加减法的关系。



让我们从两个锐角的和出发。如上图， $\alpha = \angle APO$  和  $\beta = \angle OPB$  都是锐角， $OP \perp AB$ 。 $\triangle AOB$  的面积是  $\triangle AOP$ 、 $\triangle BOP$  面积之和。用相应的面积公式表示：

$$\frac{1}{2}|AP||BP| \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}|AP||OP| \sin \alpha + \frac{1}{2}|OP||BP| \sin \beta$$

因此：

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{|OP|}{|BP|} \sin \alpha + \frac{|OP|}{|AP|} \sin \beta$$

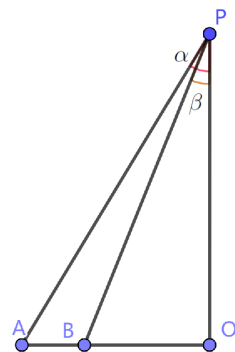
$\triangle AOP$ 、 $\triangle BOP$  都是直角三角形，所以  $|OP| = |AP| \cos \alpha = |BP| \cos \beta$ 。  
代入上式，就得到：

$$\forall 0 < \alpha, \beta < 90^\circ, \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

这就是两锐角之和正弦值的公式，简称**和角正弦公式**。可以验证，当  $\alpha$ 、 $\beta$  是零角或直角的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为  $0 \leq \alpha, \beta \leq 90^\circ$ 。

对于两锐角之差，可以用类似的方式推导。如右图，  
设  $\alpha = \angle APO > \beta = \angle BPO$ ， $\triangle AOP$  的面积是  $\triangle APB$ 、  
 $\triangle OPB$  面积之和。比照和角正弦公式的推导，可以得到：

$$\forall 0 < \beta < \alpha < 90^\circ, \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$



是为两锐角之差正弦值的公式，简称**差角正弦公式**。

可以验证，无论是当  $\alpha$ 、 $\beta$  是零角或直角的时候，还是  $\alpha = \beta$  的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 90^\circ$ 。

注意到和角、差角正弦公式中都出现了角的余弦，我们可以据此推出和角、差角的余弦公式。首先，假设  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\alpha - \beta$  都是锐角。从和角正弦公式出发，可以得到这样的关系：

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha - \beta + \beta) = \sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta.$$

这个等式中只有  $\cos(\alpha - \beta)$  是未知的。根据差角正弦公式，可以得到：

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta \\ &= (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos^2 \beta - \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \sin \beta \cos(\alpha - \beta) &= \sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \alpha \sin^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \beta (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)
 \end{aligned}$$

两边约去  $\sin \beta$ , 就得到:

$$\forall 0 < \beta < \alpha < 90^\circ, \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta.$$

这就是两锐角之差余弦值的公式, 简称**差角余弦公式**。

同理, 假设  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\alpha + \beta$  都是锐角, 从差角正弦公式出发, 可以得到:

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha) &= \sin(\alpha + \beta - \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta \\
 &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta \\
 &= \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \sin \beta \cos(\alpha + \beta) &= -\sin \alpha + \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= -\sin \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= -\sin \alpha \sin^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)
 \end{aligned}$$

两边约去  $\sin \beta$ , 就得到:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

这就是两锐角之和余弦值的公式, 简称**和角余弦公式**。

要注意的是, 上面的推导中, 我们假设  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\alpha + \beta$  是锐角。然而, 推导中涉及的项, 除了  $\cos(\alpha + \beta)$ , 都不要要求  $\alpha + \beta$  是锐角。另一方面, 在和

角余弦公式中, 只要确定了  $\alpha, \beta$ , 就能计算  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 。所以,  $\alpha + \beta$  是直角或钝角时, 我们可以定义  $\cos(\alpha + \beta)$  为关于  $x$  的方程:

$$x = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

的唯一解。这样, 我们就定义了钝角的余弦值。当然, 这样定义钝角余弦值, 不好理解。为了好理解, 我们仿照正弦, 给出互为补角的两角余弦的关系。这样, 通过单个锐角的余弦值, 就能得到钝角的余弦值了。

在和角余弦公式中, 令较大角为直角, 代入得到

$$\forall 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \cos(90^\circ + \beta) = -\sin \beta.$$

对锐角  $\beta$  来说,  $90^\circ - \beta$  也是锐角, 于是:

$$-\cos \beta = -\sin(90^\circ - \beta) = \cos(180^\circ - \beta).$$

这说明  $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$ 。互为补角的两角, 余弦值互为相反数。

上一节中, 我们让钝角的余弦等于其补角的相反数。现在我们看到, 这个选择是合理的。至此, 我们可以写出余弦定理的统一形式:

**定理 3.5.1. 余弦定理** 设三角形  $ABC$  的内角  $A, B, C$  对边长度分别为  $a, b, c$ , 则

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

余弦定理说明, 三角形内角的余弦值, 决定了它对边边长的平方与另两边边长的平方和的大小关系。锐角的余弦值大于 0, 它对边边长的平方小于另两边边长的平方和。钝角的余弦值小于 0, 它对边边长的平方大于另两边边长的平方和。直角的余弦值是 0, 它对边边长的平方等于另两边边长的平方和。

回到例题 3.3.1 第二题。之前我们算出  $\cos C = -\frac{1}{15}$ , 说明  $C$  是钝角。于是  $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} \approx 0.9978$ , 查表知锐角  $180^\circ - C \approx 86.2^\circ$ , 即  $\angle C \approx 93.8^\circ$ 。同理, 可以算得  $\angle A \approx 29.9^\circ$ ,  $\angle B \approx 56.3^\circ$ 。

我们用和角余弦公式定义了钝角的余弦。用同样的思路，我们考虑差角正弦公式：

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

上式对  $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 90^\circ$  成立。现在我们把它扩展到  $\alpha < \beta$  的情况。也就是说，对小于零角的角度  $\alpha - \beta$ ，我们定义  $\sin(\alpha - \beta)$  是关于  $x$  的方程：

$$x = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

的唯一解。令  $\alpha = 0$ ，就得到：

$$\forall 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \sin(-\beta) = -\sin \beta.$$

我们再把这个关系扩展到钝角。这样，我们就定义了负平角到正平角之间所有角度的正弦值。

最后，考虑差角余弦公式：

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta.$$

比照差角正弦公式，对小于零角的角度  $\alpha - \beta$ ，我们同样可以定义  $\sin(\alpha - \beta)$  是关于  $x$  的方程：

$$x = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

的唯一解。令  $\alpha = 0$ ，就得到：

$$\forall 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \cos(-\beta) = \cos \beta.$$

同样把这个关系扩展到钝角，我们就定义了负平角到正平角之间所有角度的余弦值。

注意到负平角到正平角经历了整个周角，因此，定义了负平角到正平角的正弦和余弦值，实际上就定义了所有角度的正弦和余弦值。至此，我们可以从锐角出发，得到所有角度的正弦、余弦，而且它们的关系与和差角公式相容。

**例子 3.5.1.**

1. 求  $500^\circ$  的正弦、余弦值。
2. 求  $-465^\circ$  的正弦、余弦值。

**解答.**

1. 首先加减周角，让角度落在负平角和正平角之间：

$$\sin 500^\circ = \sin 140^\circ, \quad \cos 500^\circ = \cos 140^\circ.$$

$140^\circ$  是正钝角，因此取补角得到锐角：

$$\sin 140^\circ = \sin 40^\circ, \quad \cos 140^\circ = -\cos 40^\circ.$$

查表得到  $\sin 500^\circ = \sin 40^\circ \approx 0.6428$ ,  $\cos 500^\circ = -\cos 40^\circ \approx -0.766$ 。

2. 首先加减周角，让角度落在负平角和正平角之间：

$$\sin -465^\circ = \sin -105^\circ, \quad \cos -465^\circ = \cos -165^\circ.$$

$140^\circ$  是负钝角，取相反数变为正角，再取补角得到锐角：

$$\begin{aligned} \sin -105^\circ &= -\sin 105^\circ = -\sin 75^\circ, \\ \cos -105^\circ &= \cos 105^\circ = -\cos 75^\circ. \end{aligned}$$

查表得到  $\sin -465^\circ = -\sin 75^\circ \approx -0.9659$ ,  $\cos -465^\circ = -\cos 75^\circ \approx -0.2588$ 。

综上所述，可以这样总结任意角的正余弦与锐角正余弦的关系：

求任意角的正弦：

1. 不断加减周角，直到角度落在  $(-180^\circ, 180^\circ]$  中。
2. 如果是负角，取相反数变正角，结果取相反数。
3. 如果是钝角，取补角变锐角，结果不变。

求任意角的余弦：

1. 不断加减周角，直到角度落在  $(-180^\circ, 180^\circ]$  中。
2. 如果是负角，取相反数变正角，结果不变。
3. 如果是钝角，取补角变锐角，结果取相反数。

## 习题 3.5.1.

1. 验证：和角、差角公式对负平角到正平角中的角度成立。
2. 证明正弦和余弦的倍角公式：

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

3. 证明正弦和余弦的半角公式：

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 180^\circ, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

4. 证明正弦和余弦的积化和差公式：

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

5. 证明正弦和余弦的和差化积公式：

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

5. 设平行四边形  $ABCD$  的相邻两边长为  $a, b$ , 两对角线长为  $u, v$ , 证明： $u^2 + v^2 = 2a^2 + 2b^2$ 。

6. 设  $\triangle ABC$  三边长分别为  $a, b, c$ , 证明：

$$\sin A = \frac{\sqrt{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{2bc}.$$

7. 设  $\triangle ABC$  周长的一半为  $p$ , 证明： $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 。

8.  $\triangle ABC$  一边的长度是另一边的 2 倍。设  $A$  是  $\triangle ABC$  最大的内角，证明： $\cos A \leq 0.25$ 。

### 3.6 正切函数和余切函数

历史上,除了正弦函数和余弦函数,数学家们还发明了别的函数来讨论角度。**正切函数**和**余切函数**就是两种常用的函数。

如下图,单位圆的切线  $l$  与锐角  $\angle AOP$  的终边交于  $Q$ ,定义  $\angle AOP$  的**正切(值)**为  $\tan \angle AOP = |AQ|$ ,**余切(值)**为  $\cot \angle AOP = \frac{1}{|AQ|}$ 。也就是说,我们用角截切线的长度来度量角的大小。按照定义,**同角的正切值和余切值互为倒数**。

和正弦、余弦一样,我们可以定义正切、余切函数。要注意的是,正切函数对零角和锐角有定义,但对直角没有定义。余切函数对锐角和直角有定义,对零角没有定义。

不难证明:

$$\forall 0 < \alpha < 90^\circ, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

换句话说,可以用锐角的正弦和余弦定义它的正切和余切。不难推出:

$$\forall 0 < \alpha < 90^\circ, \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$

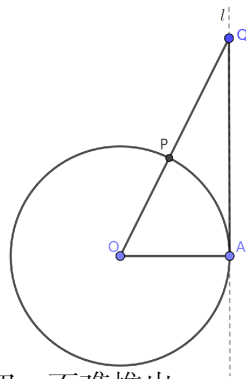
零角的正切是 0,直角的余切是 0。从零角开始,随着角度增大,正切值不断增大。从直角开始随着角度减小,余切值不断减小。 $\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$ , 因此  $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$ 。

反过来,也可以用锐角的正切和余切定义它的正弦和余弦:

$$\forall 0 < \alpha < 90^\circ, \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}}, \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}}$$

对其他角度,我们保持正切、余切和正弦、余弦的关系,定义

$$\forall \alpha, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$





这样，除去分母为零的情况，我们定义了任意角的正切和余切。

从正弦和余弦的和差角公式，可以推出正切和余切的和差角公式：

$$\forall 0 \leq \alpha, \beta < 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

$$\forall 0 < \alpha, \beta \leq 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}\cot(\alpha + \beta) &= \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \\ \cot(\alpha - \beta) &= \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha - \cot \beta}\end{aligned}$$

以上关系可以简写为：

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}\end{aligned}$$

除去分母为零的情况，任意角的正切和余切也满足以上的和差角公式。

三角形中，内角之和为平角。因此，两角之和的正切值是第三个角正切

值的相反数:

$$\begin{aligned}\tan C &= \tan(180^\circ - (A + B)) = -\tan(A + B) \\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.\end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned}\tan C(1 - \tan A \tan B) &= -\tan A - \tan B, \\ \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C.\end{aligned}$$

**定理 3.6.1. 正切定理** 三角形内角的正切值之和等于它们的乘积。

正切定理和正弦定理、余弦定理不同。它并不涉及三角形的边,是纯粹关于角的定理。使用正切定理无法解决边角关系的问题,但可以比较方便地给出三角形内角的关系。利用正切和余切的倒数关系,可以写出关于余切的类似结论:

**定理 3.6.2. 余切定理** 三角形  $ABC$  内角的余切值满足:

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

**习题 3.6.1.**

1. 证明正切和余切的倍角公式:

$$\begin{aligned}\forall 0 < \alpha < 45^\circ, \quad \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}\end{aligned}$$

2. 证明正切和余切的半角公式:

$$\begin{aligned}\forall 0 < \alpha < 180^\circ, \quad \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \\ \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}\end{aligned}$$

定义锐角  $\alpha$  的**正割值** ( $\sec \alpha$ ) 和**余割值** ( $\csc \alpha$ ):

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

3. 证明: 锐角的正割等于它的余角的余割, 锐角的余割等于它的余角的正割。

4. 证明:  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ ,  $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ .

5. 证明**万能公式**:

$\forall 0 < \alpha < 180^\circ$ , 记  $\tan \frac{\alpha}{2} = t$ , 则:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2t}{1+t^2}, & \tan \alpha &= \frac{2t}{1-t^2}, & \sec \alpha &= \frac{1+t^2}{1-t^2}, \\ \cos \alpha &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \cot \alpha &= \frac{1-t^2}{2t}, & \csc \alpha &= \frac{1+t^2}{2t}. \end{aligned}$$

## 3.7 多边形的边角关系

多边形的边和角没有直接对应关系。因此, 多边形的边角关系, 要通过对角线来间接建立。比如, 圆内接凸四边形  $ABCD$  中, 对角之和为平角。根据余弦定理,

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos \angle ABC \\ &= |AD|^2 + |DC|^2 - 2|AD||DC|\cos \angle CDA \end{aligned}$$

于是, 我们得到圆内接凸四边形的内角和四边边长的关系:

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= -\cos \angle CDA = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |CD|^2 - |DA|^2}{2(|AB||BC| + |CD||DA|)}, \\ \cos \angle BCD &= -\cos \angle DAB = \frac{|BC|^2 + |CD|^2 - |DA|^2 - |AB|^2}{2(|BC||CD| + |DA||AB|)}. \end{aligned}$$

另一个例子是正多边形。设单位圆  $O$  的内接正  $n$  边形边长为  $b_n$ , 连接圆心  $O$  和相邻两顶点  $A, B$ ,  $\triangle OAB$  是等腰三角形。正  $n$  边形内角为

$\alpha_n = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$ , 因此  $\angle OAB = -\angle OBA = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{(n-2)90^\circ}{n}$ ,  $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ 。  
根据正弦定理,

$$\frac{b_n}{\sin \angle AOB} = \frac{1}{\sin \angle OAB}.$$

因此

$$b_n = \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{\sin \frac{(n-2)90^\circ}{n}} = \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{\cos \frac{180^\circ}{n}}.$$

为了方便, 记  $\beta_n = \frac{180^\circ}{n}$ , 则  $b_n = \frac{\sin 2\beta_n}{\cos \beta_n} = 2 \sin \beta_n$ 。于是, 正  $n$  边形的周长是  $nb_n = 2n \sin \beta_n$ 。

### 习题 3.7.1.

1. 求单位圆内接正 12 边形的周长。

设圆内接四边形  $ABCD$  面积为  $S$ , 周长为  $2p$ ,

2. 证明  $S = \frac{1}{2} \sin \angle ABC (|AB||BC| + |CD||DA|)$ 。

3. 证明  $S^2 = (p - |AB|)(p - |BC|)(p - |CD|)(p - |DA|)$ 。

4. 对一般的四边形  $ABCD$ , 如何用  $|AB|, |BC|, |CD|, |DA|$  和  $\frac{\angle ABC + \angle CDA}{2}$  表示它的面积  $S$ ?

## 第四章 从或许到确定

预测未来，是人类社会的重要活动。合理有效地预测未来，是社会文明进步的标志。中华文明作为农耕文明，很早就懂得预测未来的重要性。历法、史书、节气，都是我们的祖先为了后人更好地预测未来，留下的经验总结。

生产活动中，预测尤其重要。比如，农牧业、渔业、运输业等行业需要预测天气，销售行业需要预测产品的市场需求。科学研究和工程制造中，如果能够提前知道产品在各种各样的情境和场景下的性能，可以节约大量人力物力。社会要发展，就需要更高的预测水平。

### 4.1 事件和见知

如何判断某件事情将来会不会发生？我们要依赖已有的知识和经验。日常生活中，我们会说“明天大概要下雨”、“今年冬天肯定很冷”、“我明天大概去不了了”。根据已有条件，有些事情必然发生，有些事情或许会发生，有些事情不可能发生。事情发生与否，取决于某些条件。我们把这样的事情叫作**随机事件**，简称**事件**。在已知条件下，如果某事件必然发生，就说它是**必然事件**；如果某事件必然不发生，就说它是**不可能事件**；如果某事件或许会发生，就说它是**或然事件**。数学中，研究这些事情的理论叫作概率论。

概率论假定，我们关心的随机事件有某些恒定的内在规律，受某些固

有未知因素的影响。概率论通过研究这些内在规律和因素，预测事件是否会发生。

如何描述一个事件？从客观的角度，我们可以把“发生一件事”看成事物状态、形势局面的改变。一件事是否发生，可以用改变后的状态或局面表示。我们也许无法确定未来事物发展成哪个状态、形势走向哪个局面，但我们可以事先确定事物未来所有可能的状态、所有可能出现的局面。

比如，我们无法确定明天杭州是否下雨，但我们知道，在明天杭州是否下雨这个问题上，只可能出现两个结局：下雨或不下雨。又比如，我们投一个骰子前，无法确定朝上一面的点数，但我们知道，投出的骰子最终只有六个状态：朝上一面是 1, 2, 3, 4, 5 或 6 点。这些最终状态、局面是互斥的。比如明天杭州不可能既下雨又不下雨，骰子停下之后不可能既是 1 点朝上又是 2 点朝上。

我们把所有可能的最终状态或局面看成一个集合，集合中的每个元素称为事情的**终态或结局**。比如，考虑明天杭州是否下雨这个问题时，所有结局构成 {下雨, 不下雨} 这个集合，每次投骰子时，骰子的终态构成 {1, 2, 3, 4, 5, 6} 这个集合。我们把这个集合叫作**终集**，即终态的全集。我们可以把相关的事件用终集的子集表示。比如，“明天杭州下雨”对应 {下雨} 这个子集，“骰子点数是偶数”对应 {2, 4, 6} 这个子集。事物发展的终态如果在子集里，就说明事件发生了，否则事件没有发生。

单元集也对应着事件。我们把这些事件叫做**基本事件**。不是任何其他事件的交集的事件，叫做基本事件。比如 {1} 对应的“骰子点数是 1”就是基本事件。基本事件是各种事件的“基本单元”，它们通过合并形成别的事件。基本事件之间是互斥事件，它们是终集的分划。

终集可以是有限的，也可以是无限的。目前我们只讨论有限的情况。要注意的是，随着问题的条件、环境、思考问题的角度发生变化，终集也会变化。比如，我们考虑明天杭州下雨的问题时，可能要把准备经过杭州的台风“凤凰”也考虑在内。台风“凤凰”也许继续靠近，也许转向。这时，我们

的终集是：

{台风靠近且下雨, 台风靠近且不下雨, 台风转向且下雨, 台风转向且不下雨}

而“明天杭州下雨”对应子集 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}。

对于随机事件，如果我们知道得更多，就能作出更准确的预测。比如，如果我们不知道台风的情况，那么即便我们把终集依照“台风是否继续靠近”划分，我们能把握的也只是 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}、{台风靠近且不下雨, 台风转向且不下雨} 两个事件，与 {下雨}, {不下雨} 并没有不同。如果我们掌握了台风的动向，我们就希望把 {下雨} 分成 {台风靠近且下雨} 和 {台风转向且下雨} 来讨论了。可以说，随着我们对事物、形势的认知增加，我们的终集会越来越“细”。

为了描述认知增加的过程，我们从最“细”的终集出发，定义每个阶段的**知集**，代替不同阶段的终集。知集是最“细”终集的子集构成的集合，满足：

1. 空集属于知集；
2. 如果集合  $A$  属于知集，那么  $A$  的补集也属于知集；
3. 如果集合  $A$  和  $B$  属于知集，那么它们的并集也属于知集。

知集表示我们每个阶段的认知。我们根据当前的认知来讨论各种事件。比如，在杭州下雨的例子中，可以有两个知集，分别是：

$$S_1 = \{\emptyset, \{AR, DR\}, \{AN, DN\}, \{AR, AN, DR, DN\}\}$$

和

$$S_2 = \{\emptyset, \{AR\}, \{AN\}, \{DR\}, \{DN\}, \{AR, AN\}, \{AR, DR\}, \{AR, DN\}, \\ \{AN, DR\}, \{DN, AN\}, \{DR, DN\}, \{AR, AN, DR\}, \{AR, AN, DN\}, \\ \{AR, DR, DN\}, \{AN, DR, DN\}, \{AR, AN, DR, DN\}\}$$

其中 AR, AN, DR, DN 分别表示“台风靠近且下雨”、“台风靠近且不下雨”、“台风转向且下雨”和“台风转向且不下雨”。可以看出,  $S_1$  是  $S_2$  的子集。 $S_1$  到  $S_2$  的过程, 就是对台风认知加深的过程。

这种描述下, 不同的知集就对应不同“粗细”的终集。每个知集都对应自己的基本事件。这时候的基本事件不一定是单元集。比如,  $\{AR, DR\}$  在  $S_1$  中是基本事件, 在  $S_2$  中就不是基本事件了。

**习题 4.1.1.** 写出以下问题的终集和知集。

1. 我国朱鹮从东北省份向南迁徙的路线有三条: 西线、中线和东北线。小明想知道黑龙江省的某只朱鹮沿哪条路线南迁。

2. 某航空公司规定: 作为补偿, 飞机晚点一小时以上, 返还全票票价的 40%; 如果晚点三小时以上, 返还全票票价的 75%。乘客实际购票价低于前述返还价格的, 返还乘客实际购票价。航班因晚点取消, 且乘客自愿接受转乘下一班机的, 公司协助补票, 实施“就低返利”政策: 按照下一班机实时票价和乘客最初购票价的较低者计算新票价, 多则退还差价; 并另外补偿新票价的 30%。某乘客购票后, 在候机时被告知飞机可能晚点, 他试着分析可能得到的晚点补偿。

## 4.2 概率和分布

预测随机事件时, 我们除了关心会发生什么事情, 还关心事情有多大可能发生。当我们说“这事百分之百能成”, “他八成还在路上”, “他的话只有三分准头”, 我们认为某些事情比另一些事情更可能发生。习惯上, 我们用数来描述事情有多大可能发生。在数学中, 我们把这个做法称为**事件的概率**。

我们用不大于 1 的非负实数表示事件的概率。约定不可能事件的概率是 0, 必然事件的概率是 1。事件的概率越大, 越有可能发生。此外, 事件的概率应当和事件之间的关系相符。两个互斥事件同时发生的概率应该是



0, 至少有一个发生的概率应该是它俩概率的和。用集合的语言来说, 空集的概率应该是 0, 终集的概率应该是 1; 两个集合不相交, 那么它们的并集的概率等于它们概率的和。

我们习惯用映射  $\mathbb{P}$  来记录概率。把事件  $A$  的概率记为  $\mathbb{P}(A)$ 。比如, 我们说明天八成会下雨, 可以写成  $\mathbb{P}(\{\text{下雨}\}) = 0.8$ 。不至于混淆时, 也可以省略表示集合的大括号, 写成:  $\mathbb{P}(\text{下雨}) = 0.8$ 。

基本事件两两互斥, 并集是终集 (全集)。所以, 基本事件的概率之和等于 1。

举例来说, 投骰子的时候, 我们一般认为投出 1, 2, 3, 4, 5, 6 点的可能性都一样大, 即每个基本事件的概率都相等。于是它们各自的概率是六分之一。据此, 可以算出任何事件的概率。比如, “投出 5 点或以上” 的概率是 “投出 5 点” 的概率加上 “投出 6 点” 的概率, 也就是三分之一。如果我们知道骰子有问题, 比如投出 6 点的可能性是其他任一点数的 2 倍, 那么 “投出 6 点” 的概率是七分之二; 投出其他点数, 比如 “投出 3 点” 的概率是七分之一; 而 “投出 5 点或以上” 的概率是七分之三。

终集是有限集合的时候, 对每个知集来说, 只要知道了其中每个基本事件分配到的概率 (称为**概率分布**), 就可以推出知集里其他事件的概率。

**思考 4.2.1.** 同一个终集下的不同知集中, 同一个事件的概率是否相同?

## 4.3 二项分布和均匀分布

我们来看两种简单的概率分布。

考虑只有两个终态  $a, b$  的终集, 两个基本事件  $\{a\}, \{b\}$  概率之和是 1。设其中一个的概率是  $p$ , 则另一个的概率是  $1 - p$ 。我们把这样的概率分布叫作**二项分布**。举例来说, 如果我们认为明天杭州下雨的概率是 0.7, 不下雨的概率就是  $1 - 0.7 = 0.3$ 。我们说, 我们认为明天杭州下雨的问题服从二

项分布。

又比如：抛一枚硬币，我们认为正面朝上的概率是 0.52，那么反面朝上的概率就是  $1 - 0.52 = 0.48$ 。我们说，我们认为抛这枚硬币的问题服从二项分布。为了好说话，我们会在两个基本事件中选一个我们更关心的，称为**正面事件**，把另一个称作**反面事件**。如果正面事件的概率是  $p$ ，就说问题服从系数为  $p$  的二项分布。

终集为  $\{a, b\}$  的二项分布，包括四个事件，分别对应  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$  四个子集。设  $\{a\}$  是正面事件，概率为  $p$ ，那么这四个事件的概率分别是 0、 $p$ 、 $1 - p$  和 1。

对于元素更多的终集，情况更加复杂。我们考虑一种简单情形：每个基本事件的概率相等。这样的概率分布称为**等概率分布**或**均匀分布**。比如，投骰子时，如果我们认为每面朝上的概率都相等，就说投骰子服从均匀分布。

假设终集有  $n$  个终态，那么每个基本事件的概率就是  $\frac{1}{n}$ 。对于任意事件，我们可以数一下事件包含了几个终态，用终态个数除以所有终态的个数，就是它的概率。我们把这个性质写作：

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

其中  $|A|$  表示事件  $A$  作为集合的元素个数， $|S|$  表示终集  $S$  的元素个数。比如，服从均匀分布的投骰子问题中，要求“大于 2 点”的概率，我们数一下事件  $\{3, 4, 5, 6\}$ ，它包含了 4 个终态，所以“大于 2 点”的概率是  $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 。

### 习题 4.3.1.

1. 把 1 到 100 分别写在小纸条上放入黑箱里，随意抽取一张，抽到的数是素数的概率是多少？完全平方数的概率是多少？各位数字乘积大于 10 的概率是多少？

2. 有没有以全体自然数为终集的均匀分布？为什么？说说你的理由。

## 4.4 排列和组合

均匀分布的问题里，事件的概率只和它包含的终态的个数以及所有终态的个数有关。因此，在相关的一些问题里，我们关心如何计出事件包含的终态的个数。

**例子 4.4.1.** 将编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一列，最左边的球是 1 的概率是多少？

要知道事件“最左边的球是 1”的概率，用“最左边的球是 1”包含的终态个数除以所有终态的个数。怎么计算“最左边的球是 1”包含的终态个数和所有终态的个数呢？

首先考虑所有终态的个数：将编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一列，有多少种方法？

不妨设三个球从左到右排列。无论排列方式如何，三个球分别占据“左”、“中”、“右”三个位置。从左边开始，把球一个个放到位置上。左边的位置可以放三个球中任何一个，因此有 3 种方法。按任一种方法放好左边的球以后，中间的位置可以放剩余两个球中任何一个，因此有 2 种方法。按任一种方法放好中间的球以后，右边的位置可以放最后一个球，只有 1 种方法。于是一共有  $3 \times 2 \times 1 = 6$  种方法。

如果最左边的球是 1，有多少种方法？这时左边的位置已经放好了 1 号球，因此中间的位置还有两种放法。任一种方法放好中间的球以后，右边的位置放最后一个球，只有 1 中方法。因此，一共有  $2 \times 1 = 2$  种方法。

综上所述，“最左边的球是 1”的概率是：

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是1}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

我们把  $n$  个互不相同的物品排成一列的方法数目称为  $n$  **排列数**，记作

$P_n$ 。比如, 编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一行方法数目就叫做“3 排列数”, 记作  $P_3$ 。

对于一般的自然数  $n$ ,  $n$  排列数是  $n-1$  排列数的  $n$  倍。这是因为, 如果把  $n$  个互不相同的物品排成一行, 第一个位置总可以放  $n$  个物品中的任何一个, 有  $n$  种方法。按任一种方法放好第一个位置后, 剩下的  $n-1$  个位置摆放剩下的  $n-1$  个物品的方法数目, 恰好就是  $n-1$  排列数。

因此, 用归纳法可以证明,  $n$  排列数就是  $n$  乘以  $n-1$  乘以  $n-2$ ……直到乘以 1 的乘积。比如, 5 排列数就是  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 。

如果我们把从  $n$  乘到 1 的计算看成关于  $n$  的函数的话, 这个函数叫做 ( $n$  的) **阶乘**, 记作  $n!$ 。 $n$  排列数就是  $n$  的阶乘。

**例子 4.4.2.** 将 3 个红球和 2 个白球组成一行, 最左边的球是红球的概率是多少?

我们仍然先计算 3 个红球和 2 个白球组成一行的方法数。这里球只有红白两种颜色的分别。同色的球没有差别。如果我们把球编号, 1, 2, 3 号球是红球, 4, 5 号球是白球, 那么, 按照编号排列, 有  $5! = 120$  种方法。不过,  $1-2-3-4-5$  和  $2-3-1-4-5$  其实是同一种方法。因为 1, 2, 3 号球都是红球, 并没有差别。把  $1-2-3-4-5$  里的 3 个红球任意改变次序, 都不影响结果。同理, 把  $1-2-3-4-5$  里的 2 个白球任意改变次序, 都不影响结果。3 个红球的排列方法有  $3! = 6$  种, 2 个白球的排列方法有  $2! = 2$  种, 于是这  $6 \times 2 = 12$  种方法都对应同一种结果。也就是说, 带编号的 12 个排列方法对应一种不带编号的排列方法。因此, 实际上只有  $\frac{5!}{3!2!} = 10$  种排列方法。

我们把不带编号的排列方法称为**组合数**或**选列数**。比如, 3 个红球和 2 个白球组成一行的方法数目叫做“3, 2 组合数”, 或“5 选 3” (因为也可以看作从 5 个位置里选 3 个放红球), 记作  $C_5^3$  或  $\binom{5}{3}$ 。

如果最左边的球是红球, 那么剩下的 4 个位置要放 2 个红球、2 个白

球。于是，一共有  $C_4^2$  种方法。计算可知：

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6.$$

即一共有 6 种方法。因此最左边的球是红球的概率是：

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是红球}) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

一般来说，“ $n$  选  $m$ ” 也可以用阶乘计算：

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

容易发现：“ $n$  选  $m$ ” 等于 “ $n$  选  $n-m$ ”。比如，5 选 3 等于 5 选 2。用红球和白球的例子，可以理解为：3 个红球和 2 个白球组成一系列的方法数目，等于 3 个白球和 2 个红球组成一系列的方法数目。

掌握了排列数和组合数，我们就可以计算一些复杂问题里终态的个数。

#### 习题 4.4.1.

1. 5 个红球和 3 个白球排成一行，有多少种方法？

2. 2 个红球、3 个白球和 2 个黄球排成一行，有多少种方法？

3. 从编号 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个球中选出 3 个排成一行，有多少种方法？

这个数目叫做 5, 3 排列数。试求一般情况下  $n, m$  排列数（从编号为 1 到  $n$  的  $n$  个球中选出  $m$  个排成一行方法数目）的公式。

4. 设有两个正整数  $m < n$ ，证明： $m!$  整除  $n!$ 。