

# 极简数学·中学篇

## 第五册

大青花鱼



# 目录

<b>第一章 圆</b>	<b>5</b>
1.1 圆的基本性质 . . . . .	5
1.2 圆和旋转 . . . . .	8
1.3 圆心角和圆周角 . . . . .	10
1.4 圆内接四边形 . . . . .	12
1.5 圆内接多边形 . . . . .	13
1.6 弧长和面积 . . . . .	16
 <b>第二章 圆和三角形</b>	 <b>17</b>
2.1 圆幂 . . . . .	17
2.2 切线和割线 . . . . .	17
2.3 垂心和外接圆 . . . . .	17
2.4 内切圆和旁切圆 . . . . .	17
2.5 九点圆 . . . . .	17

<b>第三章 三角函数</b>	<b>19</b>
3.1 锐角的三角函数 . . . . .	19
3.2 三角函数的图像和性质 . . . . .	19
3.3 三角函数和三角形 . . . . .	19
 <b>第四章 从或许到确定</b>	 <b>21</b>
4.1 事件和试验 . . . . .	21
4.2 计数和概率 . . . . .	21
4.3 组合和排列 . . . . .	21
 <b>第五章 三段论</b>	 <b>23</b>
5.1 大前提、小前提和结论 . . . . .	23
5.2 直言三段论 . . . . .	23

# 第一章 圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

## 1.1 圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点  $O$  距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段  $XY$ ，到  $O$  的距离和  $AB$  等长的点构成一个圆。 $O$  叫做**圆心**， $XY$  叫做圆的**半径**，长度一般记为  $r$ ，不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为  $O$ 、半径为  $r$  的圆，一般记为圆  $(O, r)$  或  $\odot(O, r)$ 。圆心  $O$  和另一点  $P$  确定的圆，一般记为圆  $(O, P)$  或  $\odot(O, P)$ 。如果不在意半径，不至于混淆的情况下，也可以简记为圆  $O$ 。

平面上的点到  $O$  的距离小于  $r$ ，就说它在圆内；如果等于  $r$ ，就说它在圆上；如果大于  $r$ ，就说它在圆外。

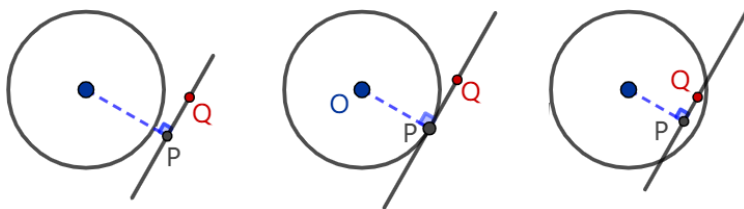
关于圆，我们有以下公理：

- 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

- 给定点  $A, B$  和线段  $EF, GH$ , 如果  $|EF| + |GH| > |AB| > ||EF| - |GH||$ , 那么总存在两点  $P, Q$ , 使得  $|AP| = |EF|, |PB| = |GH|, |AQ| = |EF|, |QB| = |GH|$ .  $P, Q$  分别在直线  $AB$  两侧。

第一个公理说明直线与圆相交的条件, 第二个公理则说明圆与圆相交的条件。

考虑直线  $l$  和圆  $\odot(O, r)$ 。过  $O$  作直线  $m \perp l$ , 记垂足为  $P$ ,  $|OP| = d$ 。



1. 如果  $d > r$ , 那么  $P$  在圆外。对  $l$  上任意其他点  $Q$ , 根据勾股定理,  $|OQ|^2 = |OP|^2 + |PQ|^2 > |OP|^2$ , 因此  $|OQ| > |OP| > r$ 。这说明  $l$  上的点都在圆外。我们说直线  $l$  与圆  $O$  **相离**。反之, 如果直线与圆相离, 那么  $P$  在圆外, 因此  $d > r$ 。
2. 如果  $d = r$ , 那么  $P$  在圆上。对  $l$  上任意其他点  $Q$ , 根据勾股定理,  $|OQ|^2 = |OP|^2 + |PQ|^2 > |OP|^2$ , 因此  $|OQ| > |OP| = r$ 。这说明  $l$  上其他点都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线  $l$  与圆  $O$  **相切**, 称  $P$  为**切点**。反之, 如果直线与圆相切于点  $Q$ , 那么  $|OQ| = r$ 。反设  $Q$  不是  $P$ , 那么根据勾股定理,  $|OP|^2 = |OQ|^2 - |PQ|^2 < |OQ|^2$ , 这说明  $P$  在圆内。根据第一个公理, 圆  $O$  和  $l$  有两个交点, 矛盾! 因此  $Q$  就是  $P$ ,  $d = r$ 。
3. 如果  $d < r$ , 那么  $P$  在圆内。根据第一个公理, 直线和圆有两个交点  $A, B$ 。我们说直线与圆**相交**, 或直线**割圆**于  $A, B$ 。反之, 如果直线和圆有两个交点, 那么根据第一个公理, 直线有部分在圆内。设  $Q$  在圆内, 那么根据勾股定理,  $|OP|^2 = |OQ|^2 - |PQ|^2 < |OQ|^2$ , 这说明  $P$  在圆内, 即  $d < r$ 。

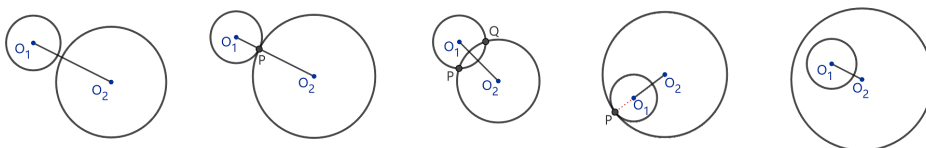
从以上的讨论可以看出, 圆心到直线的垂足  $P$ , 以及  $OP$ , 是判断直线和圆

关系的重要依据。

设直线割圆于两点  $A, B$ ，根据第一个公理，线段  $AB$ （除端点）在圆内。我们把线段  $AB$  称为圆的一条**弦**。连接圆上一点  $A$  和圆心  $O$ ，延长  $AO$ ，根据第一个公理，它和圆有另一个交点  $B$ ，称为点  $A$  的**对径点**。 $AB$  称为圆的**直径**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

给定圆上两点  $A, B$ ，考虑弦  $AB$  的垂直平分线  $l$ ，圆心  $O$  显然在  $l$  上。也就是说，**恰有一条直径垂直平分每条弦**。

考虑两个圆： $\odot(O_1, r_1)$  和  $\odot(O_2, r_2)$ ，设两个圆心的距离是： $|O_1O_2| = s$ ，那么，两个圆的关系可能有以下几种：



1.  $s > r_1 + r_2$ . 用反证法可以证明，两个圆没有公共点。我们说两圆**相离**。
2.  $s = r_1 + r_2$ . 考虑线段  $O_1O_2$ ，上面有一点  $P$  使得  $|O_1P| = r_1$ ，于是  $|PO_2| = |O_1O_2| - |O_1P| = r_2$ 。这说明两个圆有一个公共点。如果点  $Q$  不在线段  $O_1O_2$  上，则  $|O_1Q| + |QO_2| > |O_1O_2|$ 。于是  $Q$  不可能是公共点。也就是说，两个圆恰有一个共同点，在圆心连线上。我们说两圆**外切**。
3.  $|r_1 - r_2| < s < r_1 + r_2$ . 根据第二个公理， $\odot(O_1, r_1)$  和  $\odot(O_2, r_2)$  恰有两个公共点，分别在圆心连线两侧。我们说两圆**相交**。
4.  $s = |r_1 - r_2|$ .  $r_1 > r_2$  时， $s = r_1 - r_2$ 。考虑直线  $O_1O_2$ ，上面有一点  $P$ ，使得  $|O_1P| = r_1$ ，且和  $O_2$  在  $O_1$  同一边。于是  $|O_2P| = |O_1P| - |O_1O_2| = r_2$ 。这说明两个圆有一个公共点。如果点  $Q$  不在线段  $O_1O_2$  上，则  $|O_1O_2| + |QO_2| < |O_1Q|$ 。于是  $Q$  不可能是公共点。也就是说，两个圆恰有一个共同点，在圆心连线上。 $r_1 > r_2$  时，通过类似推理可以得到同样的结论。我们说两圆**内切**。

5.  $s < |r_1 - r_2|$ . 用反证法可以证明, 两个圆没有公共点。如果  $r_1 > r_2$ , 我们说  $\odot(O_1, r_1)$  **内含**  $\odot(O_2, r_2)$ ,  $\odot(O_2, r_2)$  **容于**  $\odot(O_1, r_1)$ ; 反之亦然。

要注意的是, 如果仅知道两圆恰有一个公共点, 我们无法判断到底是第二还是第四种情形; 如果仅知道两圆没有公共点, 我们无法判断到底是第一还是第五种情形。第二和第四种情形可以统称为两圆**相切**, 第一和第五种情形可以统称为两圆**相离**。

**习题 1.1.1.** 补充:

1. 设直线割圆于两点  $A$ 、 $B$ , 证明线段  $AB$  (除端点) 在圆内。
2. 完成两圆关系的第一和第五种情形中的证明。
3. 阐明两圆关系的第四种情形中,  $r_1 > r_2$  情况下的推理过程。

## 1.2 圆和旋转

怎么画一个圆? 我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点, 我们将圆规尖定在要画的圆心处, 将笔头接触圆上的点, 然后轻轻旋转, 笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段, 我们首先张开圆规, 圆规尖和笔头分别对齐半径两端, 然后保持圆规形状不变, 将圆规尖定在要画的圆心处, 让笔头接触纸面, 轻轻旋转, 笔头就画出一个圆。

可以看出, 圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作, 把平面中的点映射到另一点。给定角  $AOB$ , 可以这样定义**旋转**:

**定义 1.2.1.** 给定角  $AOB$ , 平面中一点  $P$  关于  $\angle AOB$  旋转的结果, 是唯一使得  $\angle POQ = \angle AOB$  且  $|OP| = |OQ|$  的点  $Q$ 。

$O$  称为旋转的**中心**。任何点  $P$  绕中心旋转, 结果都在圆  $(O, P)$  上。

可以看到, 给定一个圆  $(O, P)$ , 从点  $P$  出发, 旋转不同的角度, 就得到圆上其它的点。用圆规画圆时, 从零角出发, 随着角度不断增大, 直到周



角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是  $0^\circ$  到  $360^\circ$ ）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上 0 和 360 之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为  $\gamma_{(O,P)}$ 。

通过  $\gamma_{(O,P)}$ ，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然  $[0, 360)$  对应整个圆，那么  $[0, 180]$  就对应半个圆， $[0, 60]$  就对应六分之一圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应  $[a_1, a_1 + x]$  和  $[a_2, a_2 + x]$ ，这两个圆弧有什么不同吗？观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如  $[0, 60]$  对应的圆弧，起点就是  $P$ ，终点是 60 度角  $POQ$  的终边和圆的交点  $Q$ 。如果圆弧对应的区间长度超过 180，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于 180，就说它是**劣弧**；如果等于 180，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点表示这两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。

同一个圆上，明确了起点  $A$  和终点  $B$ ，就唯一确定了圆弧  $\widehat{AB}$ 。如果只说了两点  $A, B$ ，那么  $\widehat{AB}$  一般指劣弧或起点为  $A$  终点为  $B$  的圆弧。如果要指优弧，一般会特别强调。

**习题 1.2.1.** 证明：

1. 同一个圆中，直径是最长的弦。
2. 任意线段经过旋转得到等长的线段。任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

### 1.3 圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为  $A$ ，终点为  $B$  的圆弧  $\widehat{AB}$  和圆上一点  $P$ ，则角  $APB$  称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间，有什么关系呢？如右图，连接  $PO$ ，延长交圆于对径点  $Q$ 。由于  $\triangle AOP$  是等腰三角形， $\angle OAP + \angle OPA = 0$ ，同理， $\angle OBP + \angle OPB = 0$ 。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说，圆心角是圆周角的两倍大小，圆周角是圆心角的一半大小。由于每段圆弧只对应一个圆心角，无论  $P$  取圆上哪个点，只要不在弧上，圆周角  $APB$  都是圆心角的一半大小。

如果点  $P$  在弧上， $\angle APB$  和  $\angle AOB$  是什么关系呢？如果点在弧上，它对应的就是构成圆的另一段弧，于是它是另一段弧对应的圆心角的一般大小。另一段弧对应的圆心角是周角减去  $\angle AOB$ ，所以

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AOB.$$

**定理 1.3.1. 圆周角定理** 给定圆  $O$  上的弧  $\widehat{AB}$  及圆上的点  $P$ ，如果  $P \notin \widehat{AB}$ ，那么：

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果  $P \in \widehat{AB}$ ，那么：

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角，因此，根据圆周角定理，对径点对应的圆周角是直角。或者说，半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是，讨论圆心角时，我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时，为了方便，我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里，圆上的点  $A$ 、 $B$  对应的圆心角  $\angle AOB$  和点  $C$ 、 $D$  对应的圆心角  $\angle COD$  相等，那么根据“边角边”，圆心  $O$  和它们构成的三角形满足： $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。弦  $AB$  和  $CD$  也等长。不仅如此，根据圆映射，圆弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{CD}$  也等长。事实上， $\widehat{CD}$  就是  $\widehat{AB}$  关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之，如果两个圆弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{CD}$  等长，那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等，那么弦  $AB$  和  $CD$  也等长。更进一步，设  $P$  是圆上不属于两弧的点，那么圆周角  $\angle APB$  和  $\angle CPD$  一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来，如果圆  $O$  上两条弦  $AB$  和  $CD$  等长，那么根据“边边边”， $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。于是圆心角相等，所以劣弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{CD}$  等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说，在同一个圆里，两点对应的弦长相等当且仅当对应的（劣弧）弧长相等，当且仅当对应的圆心角相等，当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角，都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点  $A$ 、 $B$ ，它们对应的垂直平分线  $l$  平分  $\angle AOB$ ，即把  $\angle AOB$  分成两个相同大小的圆心角。因此，设  $l$  和圆交于  $P$ 、 $Q$ ，则它们也分别平分所在的圆弧（称为弧的中点）。我们把这一系列结论总称为垂径定理：

**定理 1.3.2. 垂径定理** 给定圆上两点，则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦，同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成：过圆  $O$  的弦  $AB$  中点的直径与弦  $AB$  垂直，同

时平分  $\angle AOB$  和弧  $\widehat{AB}$ 。

**习题 1.3.1.** 给定圆  $O$ ，弦  $AB$  中点记为  $M$ ， $|MO|$  称为弦  $AB$  的弦心距。

1. 证明：圆心角相等，当且仅当对应的弦心距相等。
2. 设直线  $MO$  与圆  $O$  交于  $P$ 、 $Q$  两点，证明： $|MP| \cdot |MQ| = |MA| \cdot |MB|$ 。

## 1.4 圆内接四边形

我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。首先来看三个点的情形。

设  $A$ 、 $B$ 、 $C$  是圆  $(O, r)$  上（相异的）三点，则线段  $AB$ 、 $BC$ 、 $AC$  的垂直平分线都过圆心  $O$ 。因此， $O$  是  $\triangle ABC$  的外心（这里附带说明了圆上相异三点必然不共线）， $|OA| = |OB| = |OC| = r$ 。反之，设有（非退化的） $\triangle ABC$ ，以它的外心  $O$  为圆心，以  $|OA|$  为半径，就可以画出一个圆，过顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 。这说明，不共线的三点恰好对应一个圆。或者说，不共线的三点确定一个圆。我们把这个圆称为三角形的外接圆（“外心”即“外接圆圆心”简称），把三角形称为圆的内接三角形。

在三个点的基础上再加一个点  $D$ ，四个点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  能否恰好对应一个圆呢？显然， $\triangle ABC$  和  $\triangle BCD$  的外接圆未必是同一个圆。所以，四个点不总是在同一个圆上。换句话说，要让四个点共圆，这四个点必须满足一定的条件。

如右图上情形，设  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  圆  $(O, r)$  上（相异的）四点，考察它们对应的圆弧。我们发现， $\widehat{ABC}$  和  $\widehat{CDA}$  是整个圆的两部分，因此，它们对应的圆心角之和是周角。根据圆周角定理， $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ 。同理， $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$ 。

我们还可以发现，圆周角  $\angle BAC$  和  $\angle BDC$  都对应  $\widehat{BC}$ ，因此根据“等弧

对等角”， $\angle BAC = \angle BDC$ 。同理可得： $\angle ACB = \angle ADB$ ,  $\angle CAD = \angle CBD$ ,  $\angle DBA = \angle DCA$ 。从这些等角关系出发，如果对角线  $AC$  和  $BD$  交于点  $P$ ，那么  $\triangle APB \sim \triangle CPD$ 、 $\triangle BPC \sim \triangle DPA$ 。

如果  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  顺序改变，如右图下情形，那么  $\widehat{ABC}$  和  $\widehat{CDA}$  对应同一段圆弧  $\widehat{AC}$ 。这时  $\angle ABC + \angle CDA = 0^\circ$ ，或者说  $\angle ABC = \angle ADC$ 。同理， $\angle BAD = \angle BCD$ 。我们把这样的四边形  $ABCD$  称为**凹四边形**，把前一种情况中的四边形  $ABCD$  称为**凸四边形**。凸四边形包含我们学过的平行四边形、梯形和筝形，它的内角都是正的。凹四边形的内角总有负的。无论是凸四边形还是凹四边形，内角和总是零角。

综合两种情况，**圆内接凸四边形对角之和是平角，圆内接凹四边形对角相等。**

四边形  $ABCD$  有一对边相交，像一只蝴蝶。我们把这样的四边形叫做**蝶形**。可以看到，如果把相交的对边  $AB$ 、 $CD$  看作对角线，把对角线  $AC$ 、 $BD$  看作对边，我们就得到一个凸四边形  $ACBD$ 。因此，观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现，我们仍然有  $\angle BAC = \angle BDC$ 、 $\angle ACB = \angle ADB$ ,  $\angle CAD = \angle CBD$ ,  $\angle DBA = \angle DCA$ 。如果对角线  $AC$  和  $BD$  交于点  $P$ ，仍然有  $\triangle APB \sim \triangle CPD$ 、 $\triangle BPC \sim \triangle DPA$ 。

以上是圆内接四边形边和角的性质，反过来，满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢？

## 1.5 圆内接多边形

从四边形的情况来看，顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  按顺时针或逆时针顺序排列，那么四边形  $ABCD$  是凸四边形，否则，四边形  $ABCD$  可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形，我们只研究最简单的一类：顶点按逆时针顺序

排列的多边形。具体来说, 设圆  $O$  上有  $n$  个点:  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 从  $A_1$  出发构造圆映射  $\gamma_{(O, A_1)}$ , 把  $[0, 360)$  映射到圆周, 那么  $0$  对应  $A_1$ 。设  $t_1, t_2, \dots, t_n$  分别对应  $n$  个点, 那么  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 。这样定义的圆内接多边形:  $A_1 A_2 \cdots A_n$  就是我们研究的对象。这样定义的多边形, 每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数  $n$ , 凸  $n$  边形  $A_1 A_2 \cdots A_n$  有  $\frac{n(n-3)}{2}$  条对角线。具体来说, 每个顶点和相邻两个顶点的连线是  $n$  边形的边, 和其余  $n-3$  个顶点的连线是对角线。因此每个点是  $n-3$  条对角线的端点。另一方面, 每条对角线对应两个顶点, 因此一共有  $\frac{n(n-3)}{2}$  条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢? 我们知道三角形的内角和是平角, 凸四边形的内角和是两个平角 (或者说周角, 如果把角度约定在负平角和正平角之间, 则减去一个周角变成零角)。边数继续增多时, 我们定义凸  $n$  边形  $A_1 A_2 \cdots A_n$  的内角和为:

$$\angle A_1 A_2 A_3 + \angle A_2 A_3 A_4 + \cdots + \angle A_{n-2} A_{n-1} A_n + \angle A_{n-1} A_n A_1 + \angle A_n A_1 A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间, 可以猜测: 凸  $n$  边形的内角和是  $n-2$  个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形, 我们可以这样证明:  $n$  个顶点把圆分为  $n$  段圆弧。每个顶点张成的内角, 对应了其中  $n-2$  段圆弧。如果考虑所有  $n$  个内角对应的圆弧, 则每段圆弧计入  $n-2$  次 (圆弧两端是内角顶点的时候不计入, 其它情况下都计入)。也就是说,  $n$  个内角和对应  $n-2$  个整圆。这些内角都是圆周角, 因此它们的和是  $n-2$  个整圆对应的圆周角, 即  $n-2$  个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况, 我们可以通过不断“裁剪”三角形来证明。我们还记得, 凸四边形可以裁成两个三角形, 因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看, 我们通过裁掉一个三角形, 把凸四边形变成

了三角形。对一般的凸  $n$  边形  $A_1A_2\cdots A_n$  来说, 由于它的每个内角都介于零角和平角之间, 我们可以考虑裁掉某个角, 把它变成  $n-1$  边形。比如, 沿着线段  $A_1A_3$  剪一刀, 就把  $A_1A_2\cdots A_n$  分成了三角形  $A_1A_2A_3$  和  $n-1$  边形  $A_1A_3\cdots A_n$ 。

**定理 1.5.1.** 凸  $n$  边形的内角和是  $n-2$  个平角。

**证明.** 用归纳法证明。命题  $P(n)$ : 凸  $n+2$  边形的内角和是  $n$  个平角。我们要证明  $P(n)$  对所有正整数  $n$  成立。

$n=1$  时, 由于三角形内角和是平角,  $P(1)$  成立。

假设  $P(n)$  成立, 下面证明  $P(n+1)$  成立。

设有凸  $n+3$  边形  $A_1A_2A_3\cdots A_n$ , 将它裁成三角形  $A_1A_2A_3$  和  $n-1$  边形  $A_1A_3\cdots A_n$ 。前者的内角和是平角。根据  $P(n)$ , 后者的内角和是  $n$  个平角, 因此,  $A_1A_2A_3\cdots A_n$  的内角和是  $n+1$  个平角。于是  $P(n+1)$  成立。因此对所有正整数  $n$ , 命题  $P(n)$  成立。

满足什么条件时, 凸多边形是圆内接多边形呢? 最直接的条件, 自然是平面上有一个圆, 使多边形顶点都在圆上。或者说, 能找到一点, 到多边形各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点, 可以查看多边形各边和各条对角线的垂直平分线。如果多边形是圆内接多边形, 它的边和对角线都是圆的弦, 垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说, 可以考察两条边(或对角线)的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等, 那么多边形内接于以它为圆心的圆, 否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形: **正多边形**。正多边形是各边等长, 各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形的内角角度是  $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$

### 习题 1.5.1.

1. 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形, 哪些总是圆内接多边形?

哪些可以是圆内接多边形? 要满足什么条件?

2. 设有整数  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ , 圆内接  $n$  边形  $A_1A_2 \cdots A_n$  中,  $\angle A_iA_kA_j$  和  $\angle A_iA_lA_j$  有什么关系?

## 1.6 弧长和面积



## 第二章 圆和三角形

### 2.1 圆幂

### 2.2 切线和割线

### 2.3 垂心和外接圆

### 2.4 内切圆和旁切圆

### 2.5 九点圆



## 第三章 三角函数

### 3.1 锐角的三角函数

### 3.2 三角函数的图像和性质

### 3.3 三角函数和三角形



## 第四章 从或许到确定

### 4.1 事件和试验

### 4.2 计数和概率

### 4.3 组合和排列



## 第五章 三段论

### 5.1 大前提、小前提和结论

### 5.2 直言三段论