第五册

大青花鱼

目录

第一章　圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

1.1　圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点 O 距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段 XY，到 O 的距离和 AB 等长的点构成一个圆。O 叫做**圆心**，XY 叫做圆的**半径**，长度一般记为 r。不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为 O、半径为 r 的圆，一般记为圆 (O, r) 或 $\odot_{(O,r)}$。圆心 O 和另一点 P 确定的圆，一般记为圆 (O, P) 或 $\odot_{(O,P)}$。如果不在意半径，在不至于混淆的情况下，也可以简记为圆 O。

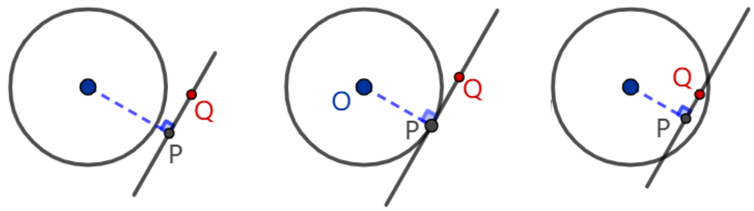
平面上的点到 O 的距离小于 r，就说它在圆内；如果等于 r，就说它在圆上；如果大于 r，就说它在圆外。

和引进直线等概念时一样，圆也有一条公理，规定它和直线的关系。

公理 1. 直线交圆公理 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

从这个公理出发，我们可以整理直线和圆的位置关系。

考虑直线 l 和圆 $\odot_{(O,r)}$。过 O 作直线 $m \perp l$，记垂足为 P，$|OP| = d$。



1. 如果 $d > r$，那么 P 在圆外。根据垂距定理，l 上任意点都在圆外。我们说直线 l 与圆 O **相离**。反之，如果直线与圆相离，那么 P 在圆外，因此 $d > r$。
2. 如果 $d = r$，那么 P 在圆上。根据垂距定理，l 上的点除了 P 都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线 l 与圆 O **相切**，称 P 为**切点**。反之，如果直线与圆相切于点 Q，那么 $|OQ| = r$。l 上其他点都在在圆外，所以根据垂距定理的逆定理，$OQ \perp l$，$d = r$。
3. 如果 $d < r$，那么 P 在圆内。根据直线交圆公理，直线和圆有两个交点 A、B。我们说直线与圆**相交**，或直线**割圆**于 A、B。反之，如果直线和圆有两个交点，那么根据直线交圆公理，直线有部分在圆内，这部分上的点到圆心距离小于 r，因此根据垂距定理，$d < r$。

设直线割圆于两点 A、B，我们说直线是圆的**割线**。根据直线交圆公理，线段 AB（除端点）在圆内。我们把线段 AB 称为圆的一条**弦**。如果 AB 过圆心 O，就说它是圆的直径，A、B 互为**对径点**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

考虑圆 O 上的弦 AB 的垂直平分线 m，圆心 O 显然在 m 上。$m \perp AB$，设垂足为 P，那么 $|AP| = |PB|$。设 m 和圆交于两点 C, D，则弦 CD 就是直径。所以我们说：**恰有一条直径平分每条弦**。

习题 1.1.1. 补充：

1. 设直线割圆于两点 A、B，证明线段 AB（除端点）在圆内。

2. 证明：同一个圆中，直径是最长的弦。

1.2 圆和旋转

怎么画一个圆？我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点，我们将圆规尖定在要画的圆心处，将笔头接触圆上的点，然后轻轻旋转，笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段，我们首先张开圆规，圆规尖和笔头分别对齐半径两端，然后保持圆规形状不变，将圆规尖定在要画的圆心处，让笔头接触纸面，轻轻旋转，笔头就画出一个圆。

可以看出，圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作，把平面中的点映射到另一点。给定角 AOB，可以这样定义**旋转**：

定义 1.2.1. 给定角 AOB，平面中一点 P 关于 $\angle AOB$ 旋转的结果，是唯一使得 $\angle POQ = \angle AOB$ 且 $|OP| = |OQ|$ 的点 Q。

O 称为旋转的**中心**。任何点 P 绕中心旋转，结果都在圆 (O, P) 上。

可以看到，给定一个圆 (O, P)，从点 P 出发，旋转不同的角度，就得到圆上其它的点。用圆规画圆时，从零角出发，随着角度不断增大，直到周角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是 $0°$ 到 $369°$）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上 0 和 360 之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为 $\gamma_{(O,P)}$。

通过 $\gamma_{(O,P)}$，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然 $[0, 360)$ 对应整个圆，那么 $[0, 180]$ 就对应半个圆，$[0, 60]$ 就对应六分之一个圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应 $[a_1, a_1 + x]$ 和 $[a_2, a_2 + x]$，这两个圆弧有什么不同吗？观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全

等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如 $[0,60]$ 对应的圆弧，起点就是 P，终点是 60 度角 POQ 的终边和圆的交点 Q。如果圆弧对应的区间长度超过 180，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于 180，就说它是**劣弧**；如果等于 180，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。我们说它们互为**补弧**。

同一个圆上，明确了起点 A 和终点 B，就唯一确定了圆弧 $\overset{\frown}{AB}$。如果只说了两点 A、B，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 一般指劣弧或起点为 A 终点为 B 的圆弧。

习题 1.2.1. 证明:

1. 任意线段经过旋转得到等长的线段。 *2.* 任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

1.3 圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为 A，终点为 B 的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和圆上弧外一点 P，则角 APB 称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间，有什么关系呢? 如右图，连接 PO，延长交圆于对径点 Q。由于 $\triangle AOP$ 是等腰三角形，$\angle OAP + \angle OPA = 0$，

同理，$\angle OBP + \angle OPB = 0$。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说，圆心角是圆周角的两倍大小，圆周角是圆心角的一半大小。

定理 1.3.1. 圆周角定理 给定圆 O 上的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 及圆上弧外的点 P，如果 $P \notin \overset{\frown}{AB}$，那么：

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果点 P 在弧上，$\angle APB$ 和 $\angle AOB$ 是什么关系呢？这时 $\angle APB$ 对应 $\overset{\frown}{AB}$ 的补弧，于是它是 $\overset{\frown}{AB}$ 对应的圆心角的一半大小。$\overset{\frown}{AB}$ 对应的圆心角是周角减去 $\angle AOB$，所以

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角，因此，根据圆周角定理，对径点对应的圆周角是直角。或者说，半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是，讨论圆心角时，我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时，为了方便，我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里，圆上的点 A、B 对应的圆心角 $\angle AOB$ 和点 C、D 对应的圆心角 $\angle COD$ 相等，那么根据“边角边”，圆心 O 和它们构成的三角形满足：$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。弦 AB 和 CD 也等长。不仅如此，根据圆映射，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 也等长。事实上，$\overset{\frown}{CD}$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之，如果两个圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长，那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等，那么弦 AB 和 CD

也等长。更进一步，设 P 是圆上不属于两弧的点，那么圆周角 $\angle APB$ 和 $\angle CPD$ 一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来，如果圆 O 上两条弦 AB 和 CD 等长，那么根据“边边边”，$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。于是圆心角相等，所以劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说，在同一个圆里，两点对应的弦长相等当且仅当对应的（劣弧）弧长相等，当且仅当对应的圆心角相等，当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角，都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点 A、B，它们对应的垂直平分线 l 平分 $\angle AOB$，即把 $\angle AOB$ 分成两个相同大小的圆心角。因此，设 l 和圆交于 P、Q，则它们也分别平分所在的圆弧（称为弧的中点）。我们把这一系列结论总称为垂径定理：

定理 1.3.2. 垂径定理 给定圆上两点，则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦，同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成：过圆 O 的弦 AB 中点的直径与弦 AB 垂直，同时平分 $\angle AOB$ 和弧 $\overset{\frown}{AB}$。

给定圆 (O,r)，弦 AB 中点记为 M，$|MO|$ 称为弦 AB 的**弦心距**。由于 $MO \perp AB$，$\triangle OAM$ 是直角三角形，根据勾股定理，

$$|OM|^2 + |AM|^2 = |OA|^2 = r^2.$$

设直线 MO 与圆 O 交于 P、Q 两点，则

$$|MP| \cdot |MQ| = (r - |OM|)(r + |OM|) = r^2 - |OM|^2.$$

比较以上两式，可以得到：

$$|MA| \cdot |MB| = |MA|^2 = |MB|^2 = |MP| \cdot |MQ|.$$

这个推论也常常被称为垂径定理。

1.4 点到圆的势

圆是到定点距离相同的点的集合，所以点对圆来说是关键的概念。一点和圆的关系，可以用它到圆的距离来理解。点 P 在圆 (O,r) 上，当且仅当它到圆心的距离为 r。

如果不知道圆心的位置，有没有办法理解点和圆的位置关系呢？我们引进点到圆的**势**的概念。

定义 1.4.1. 点 P 到圆 (O,r) 的势，等于 $|OP|^2-r^2$。

乍一看，点到圆的势，仍然和它到圆心的距离相关。点到圆心的距离 d 比 r 小的时候，点在圆内，这时它到圆的势小于 0。$d>r$ 的时候，点在圆外，势也大于 0。$d=r$ 的时候，点在圆上，势等于 0。

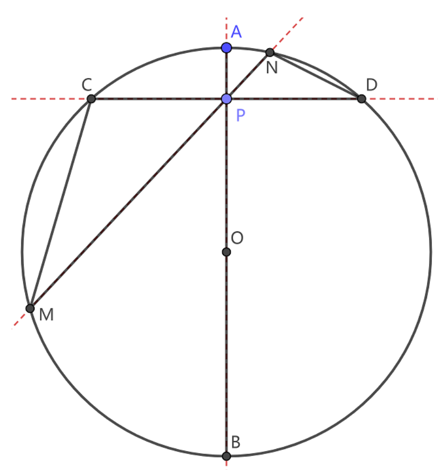
下面，我们从垂径定理出发，给出一种不依赖圆心的方法，计算点到圆的势。

首先设点 P 在圆 (O,r) 内。连接 OP，延长为直径，交圆于 A,B 两点（A、P 在 O 同侧）。过 P 作该直径的垂线，交圆于 C,D 两点。弦 CD 的垂直平分线过 O，而 $OP\perp CD$，所以 OP 就是弦 CD 的垂直平分线。根据垂径定理，$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|=r^2-|OP|^2$。这说明 $|PA|\cdot|PB|$、$|PC|\cdot|PD|$ 是 P 的势的绝对值。

过 P 任意作一条直线，和圆交于两点 M,N，是否也有这个结论呢？

如右图，可以发现，$\angle NDC$ 和 $\angle NMC$ 都对应同一段弧，且 C,M 都在弧外，所以 $\angle NDC=\angle NMC$。又对顶角 $\angle DPN=\angle CPM$，所以 $\triangle DPN\backsim\triangle MPC$。也就是说，

$$\frac{|PD|}{|PN|}=\frac{|PM|}{|PC|}.$$



换句话说，$|PC|\cdot|PD|=|PN|\cdot|PM|$。

对圆内一点 P 来说，即便不知道圆心，只要过 P 作直线与圆交于两点，那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势的绝对值。

如果点在圆外，是否有类似的结论呢？我们仍然连接 OP，直线 OP 割圆于两点：A,B （A 位于 O、P 之间）。可以算出：

$$|PA|\cdot|PB|=(|PO|-|AO|)\cdot(|PO|+|PB|)=|OP|^2-r^2.$$

过 P 作直线 l 和圆交于两点 M,N，$|PM|\cdot|PN|$ 是否也等于 $|OP|^2-r^2$ 呢？

如右图，注意到 $\angle BNA$ 和 $\angle BMA$ 都对应半圆，所以都是直角。三角形外角 $\angle PAN=\angle ABN+\angle BNA$，而 $\angle ABN$ 和 $\angle AMN$ 对应同一段弧且都不在弧上，所以 $\angle ABN=\angle AMN$。于是，

$$\angle PAN=\angle ABN+90^\circ=\angle AMN+\angle BMA=\angle BMN.$$

这说明 $\triangle PAN\backsim\triangle PBM$，所以

$$\frac{|PA|}{|PN|}=\frac{|PM|}{|PB|},$$

换句话说，$|PM|\cdot|PN|=|PA|\cdot|PB|$。我们把这个性质总结为：

对圆内一点 P 来说，即便不知道圆心，只要过 P 作直线与圆交于两点，那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势。

因此，无论在圆内还是圆外，经过一点 P 的直线与圆交于两点，则它到两点的距离乘积只与它和圆的远近关系有关。如果 P 在圆内，这个乘积等于 $r^2-|PO|^2$；如果 P 在圆外，这个乘积等于 $|PO|^2-r^2$。或者说，这个乘积就是势的绝对值。至于 P 在圆上的情形，我们可以认为它与圆交于两点，其中一点就是它自身，所以到自身距离为 0，从而乘积总是 0，等于它的势。

定理 1.4.1. 圆势定理 过点 P 作直线与圆 (O,r) 交于两点：A、B，那么

$$|PA|\cdot|PB|=\left||PO|^2-r^2\right|.$$

比起乘积 $|PA|\cdot|PB|$，点到圆的势多了正负号。如何理解这个正负号呢？如果过圆 (O,r) 的圆心作一条直线，在上面建立数轴。当我们把原点 P 选在圆内的时候，A 和 B 就对应符号相异的数；如果把原点 P 设在圆外，A 和 B 就代表同号的数了。所以，以 P 为原点，PO 为正方向的数轴和圆交于两点，这两点代表的数的乘积就是 P 到圆的势。或者说，圆势附带了 P 和 A、B 的位置关系的信息。

1.5 切线

过一点作直线要与圆交于两点不难，与圆交于一点则不简单。根据直线交圆公理，过圆内的点，无法作和圆相切的直线。过圆外一点，可以作与圆相切的直线直观上，我们可以把直尺从和圆相交的状态逐渐移动，直到碰到圆的“边”，作出大致和圆相切的直线。

直线和圆相切是一种特殊的状况。过圆外或圆上一点的直线 l 如果和圆 O 相切，就说它是点到圆的**切线**。切线和圆的（唯一）交点，称为**切点**。根据相切的性质，过圆心 O 作关于 l 的垂线，切点就是垂足。过圆上一点，只有一条切线，过圆外一点，可以作两条切线。

第二章　圆和多边形

我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。

2.1　三角形的外接圆和内切圆

首先来看三个点的情形。

设 A、B、C 是圆 (O, r) 上（相异的）三点，则线段 AB、BC、AC 的垂直平分线都过圆心 O。因此，O 是 $\triangle ABC$ 的外心（这里附带说明了圆上相异三点必然不共线），$|OA| = |OB| = |OC| = r$。反之，设有（非退化的）$\triangle ABC$，以它的外心 O 为圆心，以 $|OA|$ 为半径，就可以画出一个圆，过顶点 A、B、C。这说明，**不共线的三点恰好对应一个圆**。或者说，**不共线的三点确定一个圆**。我们把这个圆称为三角形的**外接圆**（“外心”即“外接圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**内接三角形**。

三角形不仅可以内接于圆，圆也可以内接于三角形。考虑三角形 ABC 的内心，它到三角形三边的距离相等。以内心为圆心，以它到三边的距离为半径作圆，这个圆和三角形三边都相切。我们把这个圆叫做三角形的**内切圆**（“内心”即“内切圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**外切三角形**。

除了内心，三角形还有旁心。旁心到三角形三边的距离也相等。因此，

以每个旁心为圆心，以它到三遍的距离为圆心，各可以得到一个圆。每个圆都与三角形一边和另两边的延长线相切。这三个圆称为三角形的旁切圆（“旁心”即“旁切圆圆心”的简称），把三角形称为它们的**旁切三角形**。

2.2 圆内接四边形

在三个点的基础上再加一个点 D，四个点 A、B、C、D 能否恰好对应一个圆呢？显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的外接圆未必是同一个圆。所以，四个点不总是在同一个圆上。换句话说，要让四个点共圆，这四个点必须满足一定的条件。

如右图上情形，设 A、B、C、D 圆 (O, r) 上（相异的）四点，考察它们对应的圆弧。我们发现，$\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 是整个圆的两部分，因此，它们对应的圆心角之和是周角。根据圆周角定理，$\angle ABC + \angle CDA = 180°$。同理，$\angle BCD + \angle DAB = 180°$。

我们还可以发现,圆周角 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 都对应 $\overset{\frown}{BC}$,因此根据“等弧对等角”,$\angle BAC = \angle BDC$。同理可得:$\angle ACB = \angle ADB$,$\angle CAD = \angle CBD$,$\angle DBA = \angle DCA$。

如果 A、B、C、D 顺序改变，如右图下情形，那么 $\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 对应同一段圆弧 $\overset{\frown}{AC}$。这时 $\angle ABC + \angle CDA = 0°$，或者说 $\angle ABC = \angle ADC$。同理，$\angle BAD = \angle BCD$。我们把这样的四边形 $ABCD$ 称为**凹四边形**，把前一种情况中的四边形 $ABCD$ 称为**凸四边形**。凸四边形包含我们学过的平行四边形、梯形和筝形，它的内角都是正的。凹四边形的内角总有负的。无论是凸四边形还是凹四边形，内角和总是零角。

综合两种情况，**圆内接凸四边形对角之和是平角**，**圆内接凹四边形对角相等**。

四边形 $ABCD$ 有一对边相交，像一只蝴蝶。我们把这样的四边形叫做

蝶形。可以看到，如果把相交的对边 AB、CD 看作对角线，把对角线 AC、BD 看作对边，我们就得到一个凸四边形 $ACBD$。因此，观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现，我们仍然有 $\angle BAC = \angle BDC$、$\angle ACB = \angle ADB$，$\angle CAD = \angle CBD$，$\angle DBA = \angle DCA$。如果对角线 AC 和 BD 交于点 P，仍然有 $\triangle APB \backsim \triangle CPD$、$\triangle BPC \backsim \triangle DPA$。换句话说，即便圆内接四边形不是凸四边形，用它的顶点也能画出圆内接凸四边形，并且不妨碍我们讨论相关的性质。所以，我们也可以把圆内接四边形相关的问题简称为四点共圆的问题。

以上是圆内接四边形边和角的性质，反过来，满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢？或者说，满足什么条件的四个点共圆呢？

定理 2.2.1. 如果凸四边形 $ABCD$ 中的一对内角 $\angle ABC$ 与 $\angle CDA$ 的和是平角，那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明. $\angle ABC + \angle CDA = 180°$，所以要么两个角都是直角，要么一个是钝角，一个是锐角。
如果两个角都是直角，作对角线 AC，取它的中点 O。$\triangle ABC$ 是直角三角形，AC 是斜边，根据直角三角形的中线定理，$|AO| = |BO| = |CO|$。同理，$\triangle CDA$ 是直角三角形，AC 是斜边，于是 $|AO| = |DO| = |CO|$。因此 A, B, C, D 四点都在 $\odot_{(O,A)}$ 上。
如果两个角一个是钝角，一个是锐角。不妨设 $\angle ABC > 90° > \angle CDA$。作对角线 AC，则 B、D 在 AC 两侧。作对角线 AC 的垂直平分线 l。显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 的外心都在 l 上，只需证明两者是同一点。
设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot_{(O_1,B)}$。$\angle ABC$ 是钝角，因此它的圆心角对应优弧。于是，O_1 和 B 在直线 AC 两侧。$\angle CO_1A = 360° - 2\angle ABC$。
另一方面，设 $\triangle CDA$ 的外接圆为 $\odot_{(O_2,D)}$。$\angle CDA$ 是锐角，因此它的圆心角对应劣弧。于是，O_2 和 D 在直线 AC 同一侧。$\angle CO_2A = 2\angle CDA$。
以上两个结论说明，O_1 和 O_2 都和 D 在直线 AC 同一侧，且 $\angle CO_1A = \angle CO_2A$。而 $\triangle CO_1A$ 和 $\triangle CO_2A$ 都是等腰三角形，所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。A, B, C, D 四点都在 $\odot_{O_1,A}$ 上。

从这个定理可以推出，矩形、等腰梯形和正方形都是圆内接四边形。

定理 2.2.2. 如果凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ACB = \angle ADB$，那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明. $ABCD$ 是凸四边形，所以 C 和 D 在直线 AB 同侧。作边 AB 的垂直平分线 l，显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的外心都在 l 上，只需证明它们是同一点。
设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot_{(O_1,C)}$，$\triangle ABD$ 的外接圆为 $\odot_{(O_2,D)}$。如果 $\angle ACB$ 是钝角，那么它的圆心角对应优弧。于是，O_1 和 C 在直线 AB 两侧，且 $\angle BO_1A = 360° - 2\angle ACB$。这时，$\angle ADB = \angle ACB$ 也是钝角，所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 两侧，且 $\angle BO_2A = 360° - 2\angle ADB$。如果 $\angle ACB$ 是锐角，那么它的圆心角对应劣弧。于是，O_1 和 C 在直线 AB 同侧，且 $\angle BO_1A = 2\angle ACB$。这时，$\angle ADB = \angle ACB$ 也是锐角，所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 同侧，且 $\angle BO_2A = 2\angle ADB$。
因此，O_1 和 O_2 总在直线 AB 同侧，且 $\angle BO_1A = \angle BO_2A$。而 $\triangle BO_1A$ 和 $\triangle BO_2A$ 都是等腰三角形，所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。A, B, C, D 四点都在 $\odot_{O_1,A}$ 上。

定理 2.2.3. 过一点 P 的两条直线 m, n 上各有两点: $A, C \in m$ 和 $B, D \in n$，分别各在 P 两侧。如果

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|,$$

那么四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明. 考虑 $\triangle APB$ 和 $\triangle DPC$。对顶角 $\angle APB = \angle DPC$。而 $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$ 等于说

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

因此根据“边角边”，$\triangle APB \sim \triangle DPC$。于是有 $\angle ABP = \angle DCP$，$\angle BAP = \angle CDP$。因此，根据定理 *2.2.2*，四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。

这个定理也可以理解为：两条线段相交，如果交点把每条线段分成的两部分长度之积相等，那么线段端点共圆。也就是说，这两条线段实际上是圆的两条相交的弦。

反之，圆的两条弦 AC 和 BD 相交于 P，则"等弦对等角"说明 $\angle ACD = \angle ABD$、$\angle BAC = \angle BDC$。因此 $\triangle ABP \sim \triangle DCP$，$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$。

定理 2.2.4. 相交弦定理 圆的两条弦 AC 和 BD 相交于 P，则

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|.$$

习题 2.2.1.

给定圆内接凸四边形 $ABCD$。E 是对角线 AC 上一点。$\angle CDE = \angle BDA$。

1. 证明：$\triangle CDE \sim \triangle BDA$。

2. 证明：$\triangle CDB \sim \triangle EDA$。

3. 证明：$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

给定凸四边形 $ABCD$，作射线 CE 使得 $\angle ECD = \angle ABD$，作射线 DE 使得 $\angle CDE = \angle BDA$。两射线交于点 E。

1. 证明：$\triangle CDE \sim \triangle BDA$。

2. 证明：$\triangle CDB \sim \triangle EDA$。

3. 证明：$|AC| \cdot |BD| \geqslant |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

4. 证明，凸四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

5. 证明：A, B, C, D 四点共圆，当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

2.3 垂心组和外接圆

2.4 九点圆

2.5 圆内接多边形

从四边形的情况来看，顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点 A、B、C、D 按顺时针或逆时针顺序排列，那么四边形 $ABCD$ 是凸四边形，否则，四边形 $ABCD$ 可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形，我们只研究最简单的一类: 顶点按逆时针顺序排列的多边形。具体来说，设圆 O 上有 n 个点: $A_1, A_2, \cdots, A_n$，从 A_1 出发构造圆映射 $\gamma_{(O,A_1)}$，把 $[0, 360)$ 映射到圆周，那么 0 对应 A_1。设 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分别对应 n 个点，那么 $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n$。这样定义的圆内接多边形: $A_1A_2\cdots A_n$ 就是我们研究的对象。这样定义的多边形，每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数 n，凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。具体来说，每个顶点和相邻两个顶点的连线是 n 边形的边，和其余 $n-3$ 个顶点的连线是对角线。因此每个点是 $n-3$ 条对角线的端点。另一方面，每条对角线对应两个顶点，因此一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢? 我们知道三角形的内角和是平角，凸四边形的内角和是两个平角（或者说周角，如果把角度约定在负平角和正平角之间，则减去一个周角变成零角)。边数继续增多时，我们定义凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的内角和为:

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n + \angle A_{n-1}A_nA_1 + \angle A_nA_1A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间，可以猜测：凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形，我们可以这样证明：n 个顶点把圆分为 n 段圆弧。每个顶点张成的内角，对应了其中 $n-2$ 段圆弧。如果考虑所有 n 个内角对应的圆弧，则每段圆弧计入 $n-2$ 次（圆弧两端是内角顶点的时候不计入，其它情况下都计入）。也就是说，n 个内角和对应 $n-2$ 个整圆。这些内角都是圆周角，因此它们的和是 $n-2$ 个整圆对应的圆周角，即 $n-2$ 个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况，我们可以通过不断“裁剪”三角形来证明。我们还记得，凸四边形可以裁成两个三角形，因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看，我们通过裁掉一个三角形，把凸四边形变成了三角形。对一般的凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 来说，由于它的每个内角都介于零角和平角之间，我们可以考虑裁掉某个角，把它变成 $n-1$ 边形。比如，沿着线段 A_1A_3 剪一刀，就把 $A_1A_2\cdots A_n$ 分成了三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。

定理 2.5.1. 凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

证明. 用归纳法证明。命题 $P(n)$：凸 $n+2$ 边形的内角和是 n 个平角。我们要证明 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立。
$n=1$ 时，由于三角形内角和是平角，$P(1)$ 成立。
假设 $P(n)$ 成立，下面证明 $P(n+1)$ 成立。
设有凸 $n+3$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，将它裁成三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。前者的内角和是平角。根据 $P(n)$，后者的内角和是 n 个平角，因此，$A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的内角和是 $n+1$ 个平角。于是 $P(n+1)$ 成立。
因此对所有正整数 n，命题 $P(n)$ 成立。

满足什么条件时，凸多边形是圆内接多边形呢？最直接的条件，自然是平面上有一个圆，使多边形顶点都在圆上。或者说，能找到一点，到多边形各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点，可以查看多边形各边和各条对角线的垂直平分线。如果多边形是圆内接多边形，它的边和对角线都是圆的弦，垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说，可以考察两条边（或对角线）的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等，那么多边形内接于以它为圆心的圆，否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形：**正多边形**。正多边形是各边等长，各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形各个的内角角度是 $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$。

习题 2.5.1.

1. 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形，哪些总是圆内接多边形？哪些可以是圆内接多边形？要满足什么条件？

2. 设有整数 $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$，圆内接 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，$\angle A_iA_kA_j$ 和 $\angle A_iA_lA_j$ 有什么关系？

第三章　三角函数

3.1　锐角的三角函数

3.2　三角函数的图像和性质

3.3　三角函数和三角形

第四章　从或许到确定

预测未来，是人类社会的重要活动。合理有效地预测未来，是社会文明进步的标志。中华文明作为农耕文明，很早就懂得预测未来的重要性。历法、史书、节气，都是我们的祖先为了后人更好地预测未来，留下的经验总结。

生产活动中，预测尤其重要。比如，农牧业、渔业、运输业等行业需要预测天气，销售行业需要预测产品的市场需求。科学研究和工程制造中，如果能够提前知道产品在各种各样的情境和场景下的性能，可以节约大量人力物力。社会要发展，就需要更高的预测水平。

4.1　事件和见知

如何判断某件事情将来会不会发生? 我们要依赖已有的知识和经验。日常生活中，我们会说“明天大概要下雨”、“今年冬天肯定很冷”、“我明天大概去不了了”。根据已有条件，有些事情必然发生，有些事情或许会发生，有些事情不可能发生。事情发生与否，取决于某些条件。我们把这样的事情叫作**随机事件**，简称**事件**。在已知条件下，如果某事件必然发生，就说它是**必然事件**；如果某事件必然不发生，就说它是**不可能事件**；如果某事件或许会发生，就说它是**或然事件**。数学中，研究这些事情的理论叫作概率论。

概率论假定，我们关心的随机事件有某些恒定的内在规律，受某些固

有未知因素的影响。概率论通过研究这些内在规律和因素，预测事件是否会发生。

如何描述一个事件？从客观的角度，我们可以把“发生一件事”看成事物状态、形势局面的改变。一件事是否发生，可以用改变后的状态或局面表示。我们也许无法确定未来事物发展成哪个状态、形势走向哪个局面，但我们可以事先确定事物未来所有可能的状态、所有可能出现的局面。

比如，我们无法确定明天杭州是否下雨，但我们知道，在明天杭州是否下雨这个问题上，只可能出现两个结局：下雨或不下雨。又比如，我们投一个骰子前，无法确定朝上一面的点数，但我们知道，投出的骰子最终只有六个状态：朝上一面是 $1, 2, 3, 4, 5$ 或 6 点。这些最终状态、局面是**互斥**的。比如明天杭州不可能既下雨又不下雨，骰子停下之后不可能既是 1 点朝上又是 2 点朝上。

我们把所有可能的最终状态或局面看成一个集合，集合中的每个元素称为事情的**终态**或**结局**。比如，考虑明天杭州是否下雨这个问题时，所有结局构成 $\{$下雨, 不下雨$\}$ 这个集合，每次投骰子时，骰子的终态构成 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 这个集合。我们把这个集合叫作**终集**，即终态的全集。我们可以把相关的事件用终集的子集表示。比如，“明天杭州下雨”对应 $\{$下雨$\}$ 这个子集，“骰子点数是偶数”对应 $\{2, 4, 6\}$ 这个子集。事物发展的终态如果在子集里，就说明事件发生了，否则事件没有发生。

单元集也对应着事件。我们把单元集对应的事件叫做**基本事件**。比如 $\{1\}$ 对应的“骰子点数是 1”就是基本事件。基本事件之间是互斥事件，它们是终集的分划。

终集可以是有限的，也可以是无限的。目前我们只讨论有限的情况。要注意的是，随着问题的条件、环境、思考问题的角度发生变化，终集也会变化。比如，我们考虑明天杭州下雨的问题时，可能要把准备经过杭州的台风“凤凰”也考虑在内。台风“凤凰”也许继续靠近，也许转向。这时，我们

的终集是:

{台风靠近且下雨, 台风靠近且不下雨, 台风转向且下雨, 台风转向且不下雨}

而“明天杭州下雨”对应子集 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}。

对于随机事件，如果我们知道得更多，就能作出更准确的预测。比如，如果我们不知道台风的情况，那么即便我们把终集依照“台风是否继续靠近”划分，我们能把握的也只是 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}、{台风靠近且不下雨, 台风转向且不下雨} 两个事件，与 {下雨}, {不下雨} 并没有不同。如果我们掌握了台风的动向，我们就希望把 {下雨} 分成 {台风靠近且下雨} 和 {台风转向且下雨} 来讨论了。可以说，随着我们对事物、形势的认知增加，我们的终集会越来越“细”。

为了描述认知增加的过程，我们从最“细”的终集出发，定义每个阶段的**知集**，代替不同阶段的终集。知集是最“细”终集的子集构成的集合，满足:

1. 空集属于知集;
2. 如果集合 A 属于知集，那么 A 的补集也属于知集;
3. 如果集合 A 和 B 属于知集，那么它们的并集也属于知集。

知集表示我们每个阶段的认知。我们根据当前的认知来讨论各种事件。比如，在杭州下雨的例子里，可以有两个知集，分别是:

$$S_1 = \big\{\varnothing, \{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{AN}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}\big\}$$

和

$$\begin{aligned} S_2 = \big\{&\varnothing, \{\mathrm{AR}\}, \{\mathrm{AN}\}, \{\mathrm{DR}\}, \{\mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{DN}\}, \\ &\{\mathrm{AN}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{DN}, \mathrm{AN}\}, \{\mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DN}\}, \\ &\{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AN}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}\big\} \end{aligned}$$

其中 AR, AN, DR, DN 分别表示“台风靠近且下雨”、“台风靠近且不下雨”、“台风转向且下雨”和”台风转向且不下雨“。可以看出，S_1 是 S_2 的子集。S_1 到 S_2 的过程，就是对台风认知加深的过程。

这种描述下，不同的知集就对应不同“粗细”的终集。每个知集都对应自己的基本事件。比如，$\{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}\}$ 在 S_1 中是基本事件，在 S_2 中就不是基本事件了。

习题 4.1.1. 写出以下问题的终集和知集。

1. 我国朱鹮从东北省份向南迁徙的路线有三条：西线、中线和东北线。小明想知道黑龙江省的某只朱鹮沿哪条路线南迁。

2. 某航空公司规定：作为补偿，飞机晚点一小时以上，返还全票票价的 40%；如果晚点三小时以上，返还全票票价的 75%。乘客实际购票价低于前述返还价格的，返还乘客实际购票价。航班因晚点取消，且乘客自愿接受转乘下一班机的，公司协助补票，实施“就低返利”政策：按照下一班机实时票价和乘客最初购票价的较低者计算新票价，多则退还差价；并另外补偿新票价的 30%。某乘客购票后，在候机时被告知飞机可能晚点，他试着分析可能得到的晚点补偿。

4.2　概率和分布

预测随机事件时，我们除了关心会发生什么事情，还关心事情有多大可能发生。当我们说“这事百分之百能成”，“他八成还在路上”，“他的话只有三分准头”，我们认为某些事情比另一些事情更可能发生。习惯上，我们用数来描述事情有多大可能发生。在数学中，我们把这个做法称为**事件的概率**。

我们用不大于 1 的非负实数表示事件的概率。约定不可能事件的概率是 0，必然事件的概率是 1。事件的概率越大，越有可能发生。此外，事件的概率应当和事件之间的关系相符。两个互斥事件同时发生的概率应该是

0，至少有一个发生的概率应该是它俩概率的和。用集合的语言来说，空集的概率应该是 0，终集的概率应该是 1；两个集合不相交，那么它们的并集的概率等于它们概率的和。

我们习惯用映射 $\mathbb{P}$ 来记录概率。把事件 A 的概率记为 $\mathbb{P}(A)$。比如，我们说明天八成会下雨，可以写成 $\mathbb{P}(\{\text{下雨}\}) = 0.8$。不至于混淆时，也可以省略表示集合的大括号，写成：$\mathbb{P}(\text{下雨}) = 0.8$。

基本事件两两互斥，并集是终集（全集）。所以，基本事件的概率之和等于 1。

举例来说，投骰子的时候，我们一般认为投出 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 点的可能性都一样大，即每个基本事件的概率都相等。于是它们各自的概率是六分之一。据此，可以算出任何事件的概率。比如，"投出 5 点或以上"的概率是"投出 5 点"的概率加上"投出 6 点"的概率，也就是三分之一。如果我们知道骰子有问题，比如投出 6 点的可能性是其他任一点数的 2 倍，那么"投出 6 点"的概率是七分之二；投出其他点数，比如"投出 3 点"的概率是七分之一；而"投出 5 点或以上"的概率是七分之三。

终集是有限集合的时候，对每个知集来说，只要知道了其中每个基本事件分配到的概率（称为**概率分布**），就可以推出知集里其他事件的概率。

思考 4.2.1. 同一个终集下的不同知集中，同一个事件的概率是否相同?

4.3 二项分布和均匀分布

我们来看两种简单的概率分布。

考虑只有两个终态 a, b 的终集，两个基本事件 $\{a\}, \{b\}$ 概率之和是 1。设其中一个的概率是 p，则另一个的概率是 $1 - p$。我们把这样的概率分布叫作**二项分布**。举例来说，如果我们认为明天杭州下雨的概率是 0.7，不下雨的概率就是 $1 - 0.7 = 0.3$。我们说，我们认为明天杭州下雨的问题服从二

项分布。

又比如：抛一枚硬币，我们认为正面朝上的概率是 0.52，那么反面朝上的概率就是 $1-0.52=0.48$。我们说，我们认为抛这枚硬币的问题服从二项分布。为了好说话，我们会在两个基本事件中选一个我们更关心的，称为**正面事件**，把另一个称作**反面事件**。如果正面事件的概率是 p，就说问题服从系数为 p 的二项分布。

终集为 $\{a,b\}$ 的二项分布，包括四个事件，分别对应 $\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}$ 四个子集。设 $\{a\}$ 是正面事件，概率为 p，那么这四个事件的概率分别是 0、p、$1-p$ 和 1。

对于元素更多的终集，情况更加复杂。我们考虑一种简单情形：每个基本事件的概率相等。这样的概率分布称为**等概率分布**或**均匀分布**。比如，投骰子时，如果我们认为每面朝上的概率都相等，就说投骰子服从均匀分布。

假设终集有 n 个终态，那么每个基本事件的概率就是 $\frac{1}{n}$。对于任意事件，我们可以数一下事件包含了几个终态，用终态个数除以所有终态的个数，就是它的概率。我们把这个性质写作：

$$\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|S|}$$

其中 $|A|$ 表示事件 A 作为集合的元素个数，$|S|$ 表示终集 S 的元素个数。比如，服从均匀分布的投骰子问题中，要求“大于 2 点”的概率，我们数一下事件 $\{3,4,5,6\}$，它包含了 4 个终态，所以“大于 2 点”的概率是 $4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$。

习题 4.3.1.

1. 把 1 到 100 分别写在小纸条上放入黑箱里，随意抽取一张，抽到的数是素数的概率是多少？完全平方数的概率是多少？各位数字乘积大于 10 的概率是多少？

2. 有没有以全体自然数为终集的均匀分布？为什么？说说你的理由。

4.4 排列和组合

均匀分布的问题里，事件的概率只和它包含的终态的个数以及所有终态的个数有关。因此，在相关的一些问题里，我们关心如何计出事件包含的终态的个数。

例子 4.4.1. 将编号为 $1,2,3$ 的 3 个小球排成一列，最左边的球是 1 的概率是多少?

要知道事件“最左边的球是 1”的概率，用“最左边的球是 1”包含的终态个数除以所有终态的个数。怎么计算“最左边的球是 1”包含的终态个数和所有终态的个数呢?

首先考虑所有终态的个数：将编号为 $1,2,3$ 的 3 个小球排成一列，有多少种方法?

不妨设三个球从左到右排列。无论排列方式如何，三个球分别占据“左”、“中”、“右”三个位置。从左边开始，把球一个个放到位置上。左边的位置可以放三个球中任何一个，因此有 3 种方法。按任一种方法放好左边的球以后，中间的位置可以放剩余两个球中任何一个，因此有 2 种方法。按任一种方法放好中间的球以后，右边的位置可以放最后一个球，只有 1 种方法。于是一共有 $3\times 2\times 1=6$ 种方法。

如果最左边的球是 1，有多少种方法? 这时左边的位置已经放好了 1 号球，因此中间的位置还有两种放法。任一种方法放好中间的球以后，右边的位置放最后一个球，只有 1 中方法。因此，一共有 $2\times 1=2$ 种方法。

综上所述，“最左边的球是 1”的概率是:

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是}1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

我们把 n 个互不相同的物品排成一列的方法数目称为 n **排列数**，记作

P_n。比如，编号为 $1,2,3$ 的 3 个小球排成一列的方法数目就叫做“3 排列数”，记作 P_3。

对于一般的自然数 n，n 排列数是 $n-1$ 排列数的 n 倍。这是因为，如果把 n 个互不相同的物品排成一列，第一个位置总可以放 n 个物品中的任何一个，有 n 种方法。按任一种方法放好第一个位置后，剩下的 $n-1$ 个位置摆放剩下的 $n-1$ 个物品的方法数目，恰好就是 $n-1$ 排列数。

因此，用归纳法可以证明，n 排列数就是 n 乘以 $n-1$ 乘以 $n-2\cdots\cdots$ 直到乘以 1 的乘积。比如，5 排列数就是 $5\times4\times3\times2\times1=120$。

如果我们把从 n 乘到 1 的计算看成关于 n 的函数的话，这个函数叫做（n 的）**阶乘**，记作 $n!$。n 排列数就是 n 的阶乘。

例子 4.4.2. 将 3 个红球和 2 个白球组成一列，最左边的球是红球的概率是多少?

我们仍然先计算 3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数。这里球只有红白两种颜色的分别。同色的球没有差别。如果我们把球编号，$1,2,3$ 号球是红球，$4,5$ 号球是白球，那么，按照编号排列，有 $5!=120$ 种方法。不过，$1-2-3-4-5$ 和 $2-3-1-4-5$ 其实是同一种方法。因为 $1,2,3$ 号球都是红球，并没有差别。把 $1-2-3-4-5$ 里的 3 个红球任意改变次序，都不影响结果。同理，把 $1-2-3-4-5$ 里的 2 个白球任意改变次序，都不影响结果。3 个红球的排列方法有 $3!=6$ 种，2 个白球的排列方法有 $2!=2$ 种，于是这 $6\times2=12$ 种方法都对应同一种结果。也就是说，带编号的 12 个排列方法对应一种不带编号的排列方法。因此，实际上只有 $\frac{5!}{3!2!}=10$ 种排列方法。

我们把不带编号的排列方法称为**组合数**或**选列数**。比如，3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目叫做“$3,2$ 组合数”，或“5 选 3”（因为也可以看作从 5 个位置里选 3 个放红球），记作 C_5^3 或 $\binom{5}{3}$。

如果最左边的球是红球，那么剩下的 4 个位置要放 2 个红球、2 个白

球。于是，一共有 C_4^2 种方法。计算可知：

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6.$$

即一共有 6 种方法。因此最左边的球是红球的概率是：

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是红球}) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

一般来说，“n 选 m”也可以用阶乘计算：

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

容易发现：“n 选 m”等于“n 选 $n-m$”。比如，5 选 3 等于 5 选 2。用红球和白球的例子，可以理解为：3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目，等于 3 个白球和 2 个红球组成一列的方法数目。

掌握了排列数和组合数，我们就可以计算一些复杂问题里终态的个数。

习题 4.4.1.

1. 5 个红球和 3 个白球排成一列，有多少种方法？

2. 2 个红球、3 个白球和 2 个黄球排成一列，有多少种方法？

3. 从编号 $1, 2, 3, 4, 5$ 的 5 个球中选出 3 个排成一列，有多少种方法？这个数目叫做 $5, 3$ 排列数。试求一般情况下 n, m 排列数（从编号为 1 到 n 的 n 个球中选出 m 个排成一列的方法数目）的公式。

4. 设有两个正整数 $m < n$，证明：$m!$ 整除 $n!$。