

第一册

大青花鱼

目录

第一章 从自然数到有理数

1.1 分数、整数、有理数

我们已经学过自然数： $0, 1, 2, 3, \dots$ 。自然数是 0 和 1 相加得到的数。从 0 开始，不断加 1，就能得到任何自然数。自然数之间做加法和乘法，得到的还是自然数。

加法和乘法都满足结合律和交换律，乘法满足对加法的分配律。

自然数是自然产生的。当人们发现两头牛和两天有共同之处时，自然数的概念就诞生了。

为了回答类似“三个人分七只鸡”的问题，人们发明了除法。除法是乘法的逆运算。除法产生了分数。自然数可以看作分母是 1 的分数。分数之间可以做加法、乘法和除法，得到的还是分数。

为了回答类似“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的问题，人们发明了减法。减法是加法的逆运算。比如， $3 + 2 = 5$ ，于是 $3 = 5 - 2$ 。

既然可以写出 $5 - 2$ ，那么可不可以写 $0 - 2$ 呢？ $0 - 2$ 有什么含义呢？

借用“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的思路， $0 - 2$ 可以表示“本没有鸡蛋，借来两个鸡蛋吃了两个还剩几个”。这里剩下的，是“欠两个鸡蛋”，是一种负债状态。因此，这样的数称为负数。

我们一般把 $0 - 2$ 中的 0 去掉, 只记为 -2 。 -2 满足 $-2 + 2 = 0$ 。对某个数, 比如 73 来说, $73 + (-2) = 73 + (0 - 2) = 73 - 2$ 。也就是说, 一个数加上 -2 , 就和减去 2 一样。以此类推, 可以得到:

$$-1, -2, -3, \dots$$

它们由 $1, 2, 3, \dots$ 前加上减号得到, 表示 0 减去 $1, 2, 3, \dots$ 的结果, 读作“负一”、“负二”、“负三”等等。我们把负数带的减号称为**负号**(读作“负”), 和一般减法区别开来。

一般来说, 在任何分数前加上负号, 也可以得到一个负数, 表示 0 减去它的结果。

有没有 -0 呢? -0 就是 $0 - 0$, 也就是 0 自己, 所以就没有必要加负号了。

自然数和它们的负数合称**整数**。我们把 $-1, -2, -3, \dots$ 这些负数称为**负整数**, 把原来 $1, 2, 3, \dots$ 这些数称为**正整数**, 和负整数相对。由于 -0 就是 0 , 约定 0 既不是正数, 也不是负数。于是整数分为正整数、负整数和 0 。

分数和它们的负数合称**有理数**, 我们把带负号的分数称为**负有理数**或**负分数**, 把原来的分数(除了 0)称为**正有理数**或**正分数**。正有理数包括正整数, 负有理数也包括负整数, 有理数包括整数。

自然数或分数前面加负号得到的负数, 叫做它的**相反数**。反过来, 一个负整数或负数去掉负号得到的数, 也叫做这个它的相反数。约定 0 的相反数就是 0 。于是, 每个有理数都有唯一的相反数。除了 0 以外, 相反数总是成对的。一个有理数的相反数的相反数, 就是它自己。

思考 1.1.1. 一个有理数前面加上负号, 一定会得到一个负数吗?

加上一个负数, 就和减去它的相反数一样。所以, 现实问题中遇到和加法对应的具体概念, 都可以用减法和负数表示相反或相对的概念。比如, 如果把“往东走三步”视作“ $+3$ ”, 那么“往西走两步”就可以视作“ -2 ”。“原

地往东走三步，再往西走两步”，就可以视作“ $0 + 3 - 2$ ”。计算得到 1，就表示最终和原来比，往东走了一步。

1.2 有理数的大小

加法不仅可以表达累加的概念，还可以用于比较大小。比如，5 比 3 大，可以理解为 5 是 3 再加自然数 2 得到的，而 3 却没法通过 5 加上一个自然数得到。一般来说，两个不同的自然数或分数，如果其中一个加上某个自然数或分数等于另一个，那么它比另一个数小，另一个数比它大。

用这个方法，我们可以比较有理数的大小。首先，任何负有理数加上它的相反数都得到 0，所以 0 大于任何负有理数。而任何正有理数都大于 0，所以任何正有理数大于任何负有理数。

我们约定大于 0 的数叫做**正数**，小于 0 的数叫做**负数**。正整数、正有理数都是正数，负整数、负有理数都是负数。这样的约定和前面负数的定义是一致的。

负有理数之间如何比较大小呢？举例来说， $0 = -3 + 3 = -3 + 1 + 2$ ，所以 $-3 + 1 = 0 - 2 = -2$ 。 -2 由 -3 加上自然数 1 得到，所以 -3 小于 -2 。进一步分析，我们发现，自然数 1 来源于“3 可以写成 $1 + 2$ ”。所以我们可以总结出两个负有理数比较大小的方法：看它们的相反数。相反数中较大的，可以写成较小数加上一个分数，于是，相反数较大的负有理数加上这个分数，就等于相反数较小的负有理数。因此，相反数较大的负有理数比较小，相反数较小的负有理数比较大。

正数和负数可以比较大小。所以，现实问题中涉及到相反或相对的概念比较大小时，可以用有理数表示。比如，今天延安的气温是 3.4 摄氏度，长春的气温是 -8.2 摄氏度，哈尔滨的气温是 -15.1 摄氏度，那么延安气温最高，长春气温比延安低，而哈尔滨气温又比长春低。

1.3 数轴

为了直观表示有理数，我们引入**数轴**的概念。

从左往右画一条直线，在中间取一点表示 0，称为**原点**。选择适当长度作为单位长度，规定右边是**正方向**，往右移动一个单位长度就是“+1”，那么，从原点出发，每隔单位长度取一个点，就可以表示出 $1, 2, 3 \cdots$ 。相对的，往左移动一个单位长度就是“-1”，类似可以表示出 $-1, -2, -3 \cdots$ 。这就是数轴。

数轴上的点，越往右就越大，越往左就越小。正数都在 0 右边，负数都在 0 左边。两个数比较大小，可以在数轴上找到对应的点：靠右的比较大，靠左的比较小。

数轴上的数还可以做加减法。在数轴上找到一个数 a 的位置，然后往右移动 b 个单位长度，就得到了 $a + b$ 。反之，往左移动 b 个单位长度，就得到了 $a - b$ 。

数轴上的相反数：3 是从原点往右移动 3 个单位长度到达的点，而 -3 是从原点往左移动 3 个单位长度到达的点。如果先往右移动 3 个单位长度，再往左移动 3 个单位长度，就会回到原点。一般来说，在数轴上先往右再往左（或先往左再往右）走一样多的单位长度，最终自然就回到原点。这说明任何数加上自己的相反数，都得到 0。

思考 1.3.1. 有理数在数轴上吗？怎么在数轴上找到一个有理数？

1.4 乘方

乘法可以更方便地表示若干个相同的数相加。比如，我们用 3×4 表示 $3 + 3 + 3 + 3$ 。那么，能不能方便地表示若干个相同的数相乘呢？

我们把 3×3 称为 3 乘 2 次方，把 $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ 称为 7 乘 5 次方。

同一个数连乘几次，叫做它乘几次方。连乘的结果，叫做它的几次方或几次幂。这种运算叫做乘方或乘幂。

我们把 7 的 5 次方记作 7^5 ，把 7 称为底数，把 5 称为指数。这样记法，比 $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ 更方便。

一个数的 1 次方就是它自己。一个数的 2 次方也叫做它的平方。一个数的 3 次方也叫做它的立方。

约定任何数的 0 次方是 1。

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7)$ 。用乘方表示这个关系，就是： $7^5 = 7^3 \times 7^2$ 。注意到 $5 = 3 + 2$ 。用日常的话来说，5 个 7 相乘，等于 3 个 7 相乘，再和 2 个 7 相乘。

同底数乘方的积，等于指数之和的乘方。乘方的乘法，可以转化为指数的加法。因此，乘方的除法，也可以转化为指数的减法。

比如， $7^{5-2} = 7^3 = 7^5 \div 7^2$ 。

既然乘方的乘除可以转化为指数的加减，那么是否有负指数？能否定义一个数的负数次方？

如果定义 7^{-3} 为： $7^{-3} \times 7^3 = 7^0 = 1$ ，那么 $7^{(-3)}$ 就等于 $\frac{1}{7^3}$ 。一个数的负几次方，就是 1 除以它的几次方。

显然，0 没有负数次方。

思考 1.4.1.

1. 约定任何数的 0 次方是 1，有什么好处？
2. 负数次方和前面负数的定义矛盾吗？

第二章 从变量到方程（上）

2.1 数和代数

讨论数的性质时，我们常常发现，总结一些普遍的规律，需要用很多话来说清楚。比如：

例子 2.1.1.

$$4 = 3 + 1, \quad 4^2 - 3^2 = 4 + 3.$$

$$5 = 4 + 1, \quad 5^2 - 4^2 = 5 + 4.$$

$$(2 \times 4 + 1)^2 = 8 \times 10 + 1.$$

$$(2 \times 5 + 1)^2 = 8 \times 15 + 1.$$

我们想总结两个对所有数都适用的规律，但只举了几个例子。这种方法不好。

有没有更好的方法呢？

对于第一个规律，我们可以说：如果天元比地元大 1，那么天元的平方减去地元的平方等于天元加地元。对于第二个规律，我们可以说，每个自然数两倍加 1 的平方除以 8 余 1。

我们用“天元”、“地元”、“每个自然数”代替了具体的 4 和 5，以说明这是更普遍的规律，而不是只对 4 和 5 成立的等式。这种思想叫做**代数**的

思想。代数可以让我们暂时忽略具体的数，把重点放在数与数之间的关系上。我们能轻松看出这些关系是普遍的，不依赖特定的数。我们把这样的关系叫做**代数关系**。

为了和数区别，“天元”、“地元”、“每个自然数”等称为**量**。量是对可以运算的概念的称呼。量可以有现实意义，比如物理学里会讨论物理量，也可以没有现实意义，比如数学中代替数的量可以称为数量。

在讨论问题的时候，如果我们认为一个量代替的数不会变化，就说这个量是**常量**；如果会变化，就说它是**变量**。

我们可以变量描述上面两个规律：

$$\text{如果天} = \text{地} + 1, \text{那么天}^2 - \text{地}^2 = \text{天} + \text{地}.$$

$$(2 \times \text{甲} + 1)^2 \text{除以} 8 \text{余} 1.$$

为了方便，我们一般用字母命名的变量来指代数。

$$\text{如果} a = b + 1, \text{那么} a^2 - b^2 = a + b.$$

$$(2 \times x + 1)^2 \text{除以} 8 \text{余} 1.$$

其中变量 a, b, x 可以变成 3, 4, 5 或任何一个自然数。

用变量代替数，可以用简明的语言揭示更复杂、更普遍的规律。

思考 2.1.1.

1. 用代数的方法，说一说怎样比较两个负有理数的大小。
2. 用代数的方法，定义一个数的负数次方。
3. 用代数的方法，描述加法结合律、加法交换律、乘法结合律、乘法交换律和分配律。

2.2 代数式

含有变量的算式叫做**代数式**。为了区别，我们把只有数的算式叫做**数式**。

$a + 2$, $1.84 \times x - 3$, $0.79j^2 - \frac{h+1}{n} + 5$ 等等都是代数式。

数式既表示计算过程，也表示计算的结果：一个数。把数式中的数用变量代替，我们不再计算结果，只关心计算过程本身。这对我们找出并解释计算过程中的规律很有帮助。掌握了计算的规律后，我们再用具体的数代替变量（称为**取值或代入**），就能更快更好地算出结果。

乘号 \times 和 x 或 X 很像，为了避免混淆，一般省略乘号，或用 \cdot 代替乘号。 $1.84 \times x - 3$ 可以写成 $1.84x - 3$ 或 $1.84 \cdot x - 3$

代数式中不同的变量称为**元**。只与一个变量有关的式子叫做**一元式**，和多个变量有关的式子叫做**多元式**。

变量和数通过四则运算得到的代数式，叫做**有理式**。变量和数通过加法、减法和乘法得到的代数式，叫做**整式**。如果除法中涉及了变量，就叫**分式**。有理式中除了整式，就是分式。

例子 2.2.1.

整式： $x^3 + 5x - 3.32$, $a + b^2 - 2C$, $(b - 4)^9$.

分式： $\frac{1-0.9r+v^2}{3B-k}$, $n^2 - 7 + \frac{0.88}{(H-6)^3}$, $t - (t + 0.382g)^{-3}$.

我们知道，数的乘法比加减法优先。比如，计算 $4 + 3 \times 6$ 时，我们要先计算 $3 \times 6 = 18$ ，再计算 $4 + 18 = 22$ 。先计算加法是不对的。代数式特别是整式中，我们也更关心乘法。我们把变量和数相乘的部分称为**项**。 $0.54xba$, $-1.24 \cdot gb \cdot 1.19 \cdot g^2$, $u \cdot 98K$ 各是一项， $10b - V$ 是两项的差。

项是变量和数的乘积。变量之间不一定能运算，但数与数之间可以运

算。我们可以把项中所有的数相乘,放在最前面,叫做项的**系数**。其次,同一个变量多次相乘,可以放在一起,作为连乘,用乘方表示。这样得到更简洁清晰的项。代数式某一项化简后,总是一个数乘以若干个变量的乘幂。

如果某一项是另一项乘以某个(不是零的)数,就说它们是**同类项**。同类项的变量部分相同,因此根据乘法分配律,可以合并,规则是把系数相加。比如, $3.52x^2y$ 可以和 $0.19x^2y$ 合并,得到 $3.71x^2y$ 。**合并同类项**也是代数式化简的一部分。

一项中所有变量的指数的和,叫做它的**次数**。比如 $3.71x^2y$ 的次数是 3,它可以叫 3 次项。不含变量部分的项叫**常数项**。常数项次数为 0。

整式是变量和数通过加减法和乘法得到的代数式。由于乘法优先计算,可以认为整式是一些项做加减法得到的。合并同类项后,如果只剩下一项,就说它是**单项式**。一般来说剩下不止一项,称为**多项式**。多项式的每一项都是单项式。多项式次数最高的项叫做最高次项。最高次项的次数就叫多项式的次数。如果多项式每一项次数都相等,就称它为**齐次多项式**。

习题 2.2.1.

1. 合并同类项:

- $3 + 9x^3 + 5x - 7x^3 - 3.32 - 1.05x$
- $ab^2 + (c - b)a^2 - ba(b - c) + c(b + a)c + (a - c)b(c + a) - (b + c)bc.$

2. 判断是否是齐次多项式:

- $\frac{(a+b)^3}{a-b}$
- $a^4 - bx^3$
- $a^4b^4 \left(\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{a} \right)^4$

2.3 等式和方程

等式就是把两个式子或多个式子用等号连起来。**不等式**就是把两个式子或多个式子用不等号连起来。一般情况，默认是两个式子。

等式可以是真的，也可以是假的。前者也叫等式成立，后者也叫等式不成立。

按大小关系，**不等号**分为两类：大于类和小于类。按是否包含相等关系，不等号分为两类：严格类和可等于类。一共有四个不等号：“ $<$ ”（严格小于），“ \leq ”（小于等于），“ $>$ ”（严格大于），“ \geq ”（大于等于）。

等式的基本性质：两边同时加、减、乘、除同一个量，成立的等式仍然成立。

为了解决生活中的问题，我们学过简单的方程。把未知的数，用变量表示。问题中的相等关系，就变成了含变量的等式，称为**方程**。解决这个问题，求出变量的值，称为**解方程**。变量的值称为**方程的解**。

如果问题中的条件是不等关系，我们就得到了含变量的**不等式**。解决这个问题，求出变量的值，称为**解不等式**。变量的值称为**不等式的解**。

第三章 集合和映射

3.1 集合

我们用集合表示一类事物。把不同性质的事物聚集在一起，合起来考虑，就是**集合**，简称**集**。构成集合的事物称为集合的**元素**。

1. 集合的元素互不相同。
2. 集合的元素没有顺序。
3. 集合的元素是确定的：一个事物要么属于该集合，要么不属于。

某个事物 a 属于集合 A ，记作 $a \in A$ 。某个事物 a 不属于集合 A ，记作 $a \notin A$ 。

例子 3.1.1.

可以在大括号中列出集合的元素，比如： $\{1, 2, 3\}$ 是一个集合， $\{1, 2, 2, 3\}$ 不是集合。

也可以在大括号中用条件描述集合。集合的元素是满足条件的元素，比如： $\{a|a \text{ 是偶数}\}$ 。竖线左边是元素的样子，右边是它满足的条件。

还可以直接用文字描述集合，比如：一年的十二个月份是一个集合。

除了以上方式，也可以用示意图、图表、列表等方式表示集合。

没有元素的集合称为**空集**，记为 \emptyset 。

自然数、整数、分数、有理数都是集合。自然数一般简记为 \mathbb{N} ，分数一

一般简记为 \mathbb{F} ，整数一般简记为 \mathbb{Z} ，有理数一般简记为 \mathbb{Q} 。“ a 是自然数”可以记为 $a \in \mathbb{N}$ 。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，就说 A 是 B 的**子集**，记为 $A \subseteq B$ ， B 是 A 的**母集**，记为 $B \supseteq A$ 。如果两者不相同，就说 A 是 B 的**真子集**，记为 $A \subset B$ ， B 是 A 的**真母集**，记为 $B \supset A$ 。

如果 A 是 B 的子集，那么 B 中不属于 A 的元素也构成一个集合，称为 A 在 B 中的**补集**，记为 $B \setminus A$ 。讨论问题的时候，我们可能会默认某个集合是问题涉及的所有事物的集合，其他集合都是它的子集。这样的集合一般称为**全集**。全集存在的时候，集合 A 在全集中的补集可以简称为 A 的补集，记为 \bar{A} 或 A^c 。

自然数集、整数集、分数集和有理数集有以下关系：

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{Q}$$

以上每个集合中的正数与负数，构成它的子集，一般用上标 $+$ 和 $-$ 标示。比如， \mathbb{Z}^+ 就表示正整数集合， \mathbb{Q}^- 就表示负有理数集合。

考虑若干个集合。由属于其中至少一个集合的元素构成的集合，称为这些集合的**并集**；由属于所有集合的元素构成的集合，称为这些集合的**交集**。两个集合 A, B 的并集记为 $A \cup B$ ，交集记为 $A \cap B$ 。

几个集合交集为空集，就说它们**不相交**。几个集合中任取两个，都不相交，就说它们两两不相交。如果集合 A 的一些子集两两不相交，而且它们的并集是 A ，就说这些集合是 A 的**分划**。

3.2 判断和集合

判断和集合有密切的关系。把一个判断涉及的个体看作全集，使判断为真的个体就是全集的一个子集，使判断为假的个体就是它的补集。比如“自然数 n 能被 3 整除”这个判断，涉及了自然数这个全集。使它为真的自然数构成自然数集的子集，使它为假的自然数的集合是前者的补集。

全判断和有判断，也包含了集合的概念。比如，“所有兔子的眼睛都是红的”这个判断中，“所有兔子”可能指世界上所有的兔子，也可能指说话的人面前的几只兔子，因此是含混不清的。只有当我们把兔子的集合确定下来，比如“贵州毕节市黔西县境内的兔子”，这个判断才是清楚无疑的。同样地，“至少有一个学生得了满分”这个判断，也要在明确了学生的集合，比如“黎阳小学 2020 级三班的全体学生”，才是有意义的。

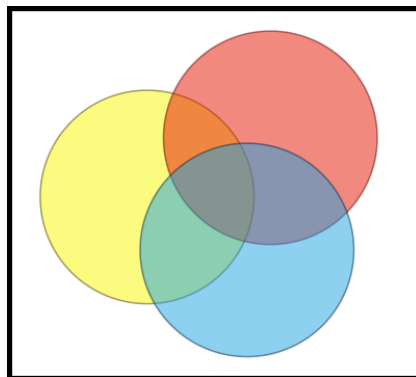
数学中，也有各种判断。为了方便，我们引进两个符号： \forall 和 \exists 。 \forall 表示“任一”、“每个”， \exists 表示“存在”、“至少有一个”。对某个集合 A 中元素的全判断，可以写成 $\forall x \in A, P(x)$ ；对某个集合 A 中元素的有判断，可以写成 $\exists x \in A, P(x)$ 。其中 $P(x)$ 表示一个包含变量 x 的判断。

比如，“所有 10 的倍数，个位数都是 0”可以写成： $\forall x \in \mathbb{N}, 10x$ 的个位数是 0。“至少有一个一位数比 5 大”可以写成： $\exists x \in [0, \dots, 9], x > 5$ 。

复合判断也可以用集合的方式表达。

为了更好理解，我们可以用**叠圈图**直观理解集合的关系。

如右图，每个圈表示一个集合，圈内的区域表示属于该集合的元素，圈外的区域表示不属于该集合的元素，也就是该集合（关于全集的）补集。两个圈重叠的部分就表示同时属于两者的元素的集合，也



就是两个集合的交集。而两个圈各自的部分加上重叠的部分，就是至少属于其中之一元素的集合，也就是两个集合的并集。

叠圈图可以让我们直接看到集合之间的关系。

联言判断是多个判断的全判断。使各个判断为真的个体都构成一个集合 S_i ，因此，通过这些集合的集合 I ，可以给出使联言判断为真的个体对应的集合：

$$\{x \mid \forall i \in I, x \in S_i\}$$

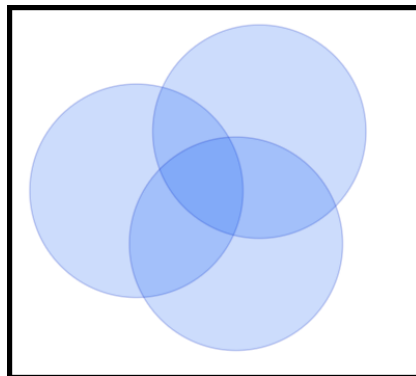
这个集合是各个集合 S_i 的交集，我们将它记为： $\bigcap_{i \in I} S_i$ 。

或言判断是多个判断的有判断。因此，使或言判断为真的个体对应的集合：

$$\{x \mid \exists i \in I, x \in S_i\}$$

这个集合是各个集合 S_i 的并集，我们将它记为： $\bigcup_{i \in I} S_i$ 。

右图中，联言判断对应着所有圈交叠的区域（颜色最深的部分），而或言判断对应着所有蓝色的区域的总和。



习题 3.2.1. 验证集合满足以下性质：

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup A = A \cap A = A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 如果 $A \subseteq B$ ，那么 $A \cap B = A$ ， $A \cup B = B$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

$$\bullet (A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$$

思考 3.2.1. 有个理发师，坚持只给那些不给自己理发的人理发。那么，他是否该给自己理发呢？

3.3 映射

我们用**映射**表示事物之间的对应关系。把一个事物对应到另一个事物，可以理解为事物的变换或对事物进行操作。因此映射也叫做**变换**或**操作**。**函数**是把数量对应到数量的映射。

我们把映射涉及的事物用两个集合记录：**出发集**和**到达集**。映射把出发集的一个元素对应到到达集的一个元素。用变量 x 指代出发集的元素， x 的取值在出发集里变化时，映射对应的元素也在到达集里变化，可以用变量 y 表示。一般称 x 为**自变量**， y 为**应变量**。

如果把映射记作 f ，那么可以用 $y = f(x)$ 或 $f: x \mapsto y$ 表达“映射把出发集的元素和到达集的元素对应起来”这件事。

出发集中，某个映射涉及的元素集合称为映射的**定义域**；到达集里，某个映射涉及的元素集合则称为映射的**值域**。定义域是出发集的子集，值域是到达集的子集。

需要强调的是，映射可以把多个元素对应到同一个元素，但不会把一个元素对应到多个元素。

每个一元式都可以用来定义映射。比如，设定定义域是自然数集 \mathbb{N} 后，代数式 $4 - 0.3x + 9x^2 + \frac{(1-x+2.69x^4)}{0.5x-1.385}$ 就可以定义映射：

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto 4 - 0.3x + 9x^2 + \frac{(1 - x + 2.69x^4)}{0.5x - 1.385}.$$

这里我们把映射的定义域设为自然数集： \mathbb{N} 。如果把定义域设成另一个集合，比如 $\{1, 2, 3\}$ 或全体偶数，就定义了另一个映射。

确定了定义域后, 每个含有变量的判断也可以定义一个映射。比如, 设定定义域是 $\{1, 2, 5, 6\}$ 后, “ $3n + 1$ 能被 5 整除” 就可以定义映射:

$$\forall n \in \{1, 2, 5, 6\}, \quad n \mapsto 3n + 1 \text{ 能被 5 整除。}$$

思考 3.3.1. 全判断 $\forall x \in A, P(x)$ 和映射 $\forall x \in A, x \mapsto P(x)$ 之间存在什么关系?

第四章 有理数的运算

我们已经学过自然数和分数的运算。两个自然数可以做加法、减法和乘法，任两个分数可以做加法、减法、乘法和（不为零的）除法。把自然数、分数扩展到有理数后，两个有理数可以做加法、减法、乘法和不为零的除法。

有理数的运算和自然数、分数相比，多了与负数有关的运算。为了讨论方便，我们首先介绍一个表示负数的方法：每个负数都能表示成 $-a$ 的形式，其中 a 是它的相反数，是一个正数。

4.1 有理数的加减法

我们先来看与负数有关的加减法。按照负数的定义，任何负数 $-a = 0 - a$ 。所以，一个数加上一个负数，就等于减去它的相反数：

$$b + (-a) = b + (0 - a) = b - a$$

换句话说，一个数减去一个正数，就等于加上它的相反数。另一方面，一个数减去一个负数，也等于加上它的相反数：

$$b - (-a) = b - (0 - a) = b + a$$

两者可以用同一句话描述：减去一个数，等于加上它的相反数。

于是，有理数的减法总可以转化为有理数的加法。

再来看两个有理数的加法。如果两者都是正数，就是我们熟悉的分数加法。如果被加数是正数，加数是负数，那么和等于被加数减加数的相反数：

$$b + (-a) = b - a$$

式子中 a 和 b 都是正数。如果 $b > a$ ，那么和是正数。如果 $b < a$ ，和是负数，它的相反数是：

$$-(b - a) = 0 - (b - a) = a - b$$

因此和是 $a - b$ 的相反数。

如果被加数是负数，加数是正数，那么和等于加数减被加数的相反数：

$$(-a) + b = 0 - a + b = b - a$$

式子中 a 和 b 都是正数。类似地，如果 $b > a$ ，那么和是正数。如果 $b < a$ ，和是负数，相反数是 $a - b$ 。如果两者都是负数，和也是负数：

$$(-a) + (-b) = 0 - a + (0 - b) = 0 - a - b$$

这个和加上 $a + b$ 等于 0，因此，和是 $a + b$ 的相反数。

看得出，上面讨论中 a 和 b 以及它们的大小关系很重要。为了方便总结，我们引进**绝对值**的概念：

定义 4.1.1. 正数的**绝对值**是它自身，负数的绝对值是它的相反数。0 的绝对值是 0。

按照这个定义，可以把前面讨论的结果简化：

如果两个有理数同为正数（负数），那么它们的和也是正数（负数），绝对值是它们绝对值的和。如果两个有理数一正一负，那么它们的和的正负

与两者绝对值较大者的正负一致，和的绝对值是绝对值较大者减去绝对值较小者的差。

总结两个有理数的加减法：

1. 将减法转为加法。
2. 任何数与 0 相加都得到自身。
3. 计算两个数的绝对值。
4. 如果两个数同正负，取绝对值的和，加上对应的正负号。
5. 如果两个数一正一负，用较大的绝对值减去较小的绝对值，加上绝对值较大的数的正负号。

习题 4.1.1. 算一算：

$$2.56 - (-1.9), (-4) + 3.29, 10.8 + (-42.15).$$

$$-59.76 + 40.3, -2.8 - 6.6, -5.09 - (-2.9).$$

$$-1.76 - (-5.21) - 1.874, 3.202 - (-1.94) - 1.57, 2 + (-9.18) - (20.354).$$

$$3 - 2 - (-8) + (-2.2), -8.1 - ((-1.6) - 1.96 + (-3.9 + 1.203)).$$

4.2 有理数的乘除法

讨论有理数的乘除法，可以从最简单的情况开始： $(-1) \times 1$ 和 $(-1) \times (-1)$ 。按照定义，

$$(-1) \times 1 = (0 - 1) \times 1 = 0 \times 1 - 1 \times 1 = 0 - 1 = -1.$$

同理， $(-1) \times 0 = 0$ ，于是：

$$\begin{aligned} (-1) \times (-1) &= (-1) \times (0 - 1) \\ &= (-1) \times 0 - (-1) \times 1 \\ &= 0 - (-1) = 1. \end{aligned}$$

类似的还有 $1 \times (-1) = 1$ 以及 $0 \times (-1) = 0$ 。所以, -1 的乘法性质可以归纳为“负零得零, 负正得负, 负负得正”。

同理, 把乘数换成一般的数, 也有:

$$(-1) \times a = 0 - a = -a, \quad (-1) \times (-a) = (-1) \times (0 - a) = a.$$

也就是说, 一个数乘以 -1 , 总得到它的相反数。任何负数都等于它的绝对值乘以 -1 。

因此, 两个有理数相乘, 乘积的绝对值总是两者绝对值的乘积, 只需把 -1 作为因子提出来, 然后看 -1 的个数确定乘积的正负就可以了。如果两个数都是正数, 那么不需要考虑 -1 的问题。如果两者一正一负, 那么有一个 -1 , 乘积是负数, 如果两个数都是负数, 有两个 -1 , “负负得正”, 于是乘积是正数。

如果乘数或被乘数是 0 , 结果是 0 。

除法是乘法的逆运算, 我们只需要把涉及负数的除法转为乘法即可。

除数是正有理数 a 的时候, 除以 a 等于乘以它的倒数: $\frac{1}{a}$ 。

除数是负有理数 $-a$ 的时候, 我们要找到 $b \div (-a)$, 也就是使得 $c \times (-a) = b$ 的数 c 。根据前面对乘法的推导, $b \times (-1) \times \frac{1}{a} = c \times a \times \frac{1}{a} = c$, 或者说

$$c = b \times \left((-1) \times \frac{1}{a} \right)$$

其中的关键是说明 $(-a)$ 存在倒数: $-\frac{1}{a}$ 。

$$(-a) \times \left(-\frac{1}{a} \right) = (-a) \times \left((-1) \times \frac{1}{a} \right) = a \times \frac{1}{a} = 1.$$

所以无论除数是正有理数还是负有理数, **除以一个数, 等于乘以它的倒数。**

于是, 有理数的除法总可以转化为有理数的乘法。

综上所述, 可以这样总结有理数的乘除法:

1. 将除法转为乘法。
2. 任何数与 0 相乘都得到 0。
3. 计算两个数的绝对值。
4. 如果两个数同正负，取绝对值的乘积。
5. 如果两个数一正一负，取绝对值乘积的相反数。

习题 4.2.1.

算一算：

$$4.51 \times (-2.2), (-1.2) \times (-3.9), (-1.8) \times 0.8.$$

$$1.98 \div (-0.3), -2.8 \div (-0.7), 5.2 \div (3 \div (-1.5)), (-3) \div (0.5 \times (-2.4)).$$

思考：

1. 为什么“任何数与 0 相加都得到自身”？
2. 为什么“任何数与 0 相乘都得到 0”？
3. 为什么说“涉及负数的乘法也满足交换律和分配律”？

第五章 代数式的运算

代数式是含有变量的算式。代数式的运算和数式并没有区别。毕竟，代数式里的变量只是用来代替数的。对代数式做运算，使用和数式运算一样的规则：加法结合律、乘法结合律、加法交换律、乘法交换律，以及乘法对加法的分配律。

5.1 整式的运算

例子 5.1.1. 计算：

1. $(a+b)(a-b)$

解：

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a \cdot (a-b) + b \cdot (a-b) \\ &= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b \\ &= a^2 + (-1+1)ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

$$2. (a^2 + ab + b^2)(a - b)$$

解:

$$\begin{aligned} (a^2 + ab + b^2)(a - b) &= a^2 \cdot (a - b) + ab \cdot (a - b) + b^2 \cdot (a - b) \\ &= a^2 \cdot a - a^2 \cdot b + ab \cdot a - ab \cdot b + b^2 \cdot a - b^2 \cdot b \\ &= a^3 + (-1 + 1)a^2b + (-1 + 1)ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

与整式有关的计算，一个常见的目标是把式子**展开**，也就是把几个整式的乘积转成一个整式：单项式或多项式。展开整式，可以按照以下步骤操作：

1. 用分配律把整式乘积转为整式中各项的乘积之和。
2. 合并同类项（用到结合律和交换律）。

比如，在第一个例子中，我们首先把 $a - b$ 看成一个整体，把 $a + b$ 看成两项相加。使用分配律，就把 $(a + b)(a - b)$ 转为 $a \cdot (a - b)$ 与 $b \cdot (a - b)$ 的和。接下来，我们把 $a - b$ 看成两项相减，再次使用分配律，就把 $(a + b)(a - b)$ 完全转成若干项的和：

$$a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b$$

接着，我们合并同类项。使用交换律，可以知道 $ab = ba$ ，所以这两项是同类项，可以合并。合并后，系数是 $-1 + 1 = 0$ ，所以这 ab 项被消去了。剩下的两项无法合并同类项了。于是我们最后得到：

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

另一种常见的代数式计算叫做**变量代换**。我们知道，变量是用来代替数的。其实，变量也可以用来代替变量。用变量代替变量，可以变化代数式的形式，很多时候，可以帮助我们更好地理解事物间的关系。

举例来说, 我们想展开 $(a - 2b + 1)(a - 2b - 1)$, 除了像上面的例子一样直接使用分配律然后合并同类项, 还有什么别的方法吗? 我们可以观察到, 这个式子是两个整式的乘积, 第一个是 $a - 2b$ 与 1 的和, 第二个是 $a - 2b$ 与 1 的差。于是, 我们可以把 $a - 2b$ 看成一个整体, 把 1 看成一个整体。我们用变量 x 代替 $a - 2b$, y 代替 1, 那么原式就变成了 $(x + y)(x - y)$, 于是等于 $x^2 - y^2$ 。

我们再把 x 和 y 代替的变量和数代回去, 就得到 $(a - 2b)^2 - 1^2$ 。 $1^2 = 1$, 所以我们现在只需要展开 $(a - 2b)^2$ 了。

数学中常用的整式等式:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a + b)(a + c) = a^2 + ab + ac + bc$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

习题 5.1.1. 验证以下等式:

$$1. (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

$$2. a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1).$$

$$3. 3(a - b)(b - c)(c - a) = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$$

求以下代数式中 x^3 的系数:

$$1. (x - 2)^5.$$

$$2. (x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 + 2x - 1).$$

5.2 分式的运算

例子 5.2.1. 通分:

$$1. \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

解:

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} &= \frac{(b+c)bc + (a+c)ac + (a+b)ab}{abc} \\ &= \frac{a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2}{abc} \end{aligned}$$

$$2. \frac{a+2b}{a+b-1} - \frac{a+b+1}{a-b+1}$$

解:

$$\begin{aligned} \frac{a+2b}{a+b-1} - \frac{a+b+1}{a-b+1} &= \frac{(a+2b)(a-b+1) - (a+b+1)(a+b-1)}{(a+b-1)(a-b+1)} \\ &= \frac{a^2 - ab + a + 2ab - 2b^2 + 2b - (a^2 + 2ab + b^2 - 1)}{(a+b-1)(a-b+1)} \\ &= \frac{-ab - 3b^2 + a + 2b + 1}{(a+b-1)(a-b+1)} \end{aligned}$$

和分数一样, 分式运算常见的目的有约分和通分。约分是把分子和分母中共有的式子消去, 让分式更简洁。无法继续约分的分式叫做既约分式。通分是让几个分式的分母相同, 以便相加。约分和通分的方法和分数相同。

习题 5.2.1. 验证以下等式:

$$1. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}.$$

$$2. \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

求以下代数式中 x 的系数:

$$1. (x^2 - \frac{1}{x})^5.$$

$$2. (x - x^2 - \frac{1}{x} + 1)(x^2 + x + 3 - \frac{2}{x}).$$

第六章 从变量到方程（下）

6.1 一元一次方程

例子 6.1.1. 根据以下问题，设未知数并列出方程：

- (1). 用一条 50 厘米长的丝带给一个正方形的盒子包装，捆好一周后，还有 26 厘米可以用于打结。盒子的边长是多少？
- (2). 把一箱书分给某组学生阅读。如果每人分 3 本，则剩余 20 本；如果每人分 4 本，则还差 16 本。这个班有多少学生？

解答.

- (1) 解：设盒子的边长是 x 厘米，列方程：

$$4x + 26 = 50.$$

- (2) 解：设这个班有 x 个学生，列方程：

$$3x + 20 = 4x - 16.$$

以上的方程都有这样的性质：恰好含有一个变量来表示未知数，而且含有变量的项都是一次项。这样的方程叫做**一元一次方程**。一元一次方程是由关于未知数的一元一次式构成的方程，它的一般形式是： $ax + b = cx + d$ 。其中变量 x 是方程的未知数， a, b, c, d 称为方程的系数。实际的问题中，系数 a, b, c, d 是已知数，根据等式的基本性质，我们可以求出未知数 x 的值。

首先，我们把含有变量 x 的项移到等式一边，把常数项移到等式另一边。利用等式的基本性质，我们将等式两边同时减去 b ，再同时减去 cx ，得到 $ax - cx = d - b$ 。

ax 和 cx 都是只含有 x 的一次项，它们之间只差一个系数，所以可以合并同类项： $ax - cx = (a - c)x$ 。

如果 $a \neq c$ ，那么可以把等式两边同除以 $a - c$ ，得到 $x = \frac{d-b}{a-c}$ 。这就是方程的解。

如果 $a = c$ ，那么我们得到 $0 = d - b$ 。如果 $b \neq d$ ，那么这个等式总是不成立的。任何 x 的值都不能使等式成立。我们说方程无解。如果 $b = d$ ，那么我们得到 $0 = 0$ 。这个等式总是成立的。任何 x 的值都能使等式成立。我们说方程有任意解。

使方程的等式成立的值是一个集合，称为它的**解集**。我们把上面的说法用集合的说法再表述一次：方程无解，就是说方程的解集是空集。方程有任意解，就是说方程的解集是全集。方程有唯一解 $x = \frac{d-b}{a-c}$ ，就是说方程的解集就是 $\{\frac{d-b}{a-c}\}$ ，我们把这种只含有一个元素的集合称为**单元集**。

解答. 按这个方法，我们可以解以上两个问题中的方程：

(1) 解：设盒子的边长是 x 厘米，列方程：

$$4x + 26 = 50.$$

等式右边没有含变量的项，我们将等式两边同时减去 26，得到：

$$4x = 50 - 26.$$

即：

$$4x = 24.$$

再将等式两边同时除以 4，就得到解： $x = 6$ 。

答：盒子的边长是 6 厘米。

(2) 解：设这个班有 x 个学生，列方程：

$$3x + 20 = 4x - 16.$$

将等式两边同时减去 20，再将等式两边同时减去 $4x$ ，得到：

$$3x - 4x = -20 - 16.$$

左边合并同类项，右边计算减法，就得到：

$$-x = -36.$$

再将等式两边同时除以 -1 ，就得到解： $x = 36$ 。

答：这个班有 36 个学生。

我们可以这样总结一元一次方程 $ax + b = cx + d$ 的解：

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \neq c & \text{有唯一解：} \frac{d-b}{a-c} \\ a = c & \left\{ \begin{array}{ll} b \neq d & \text{无解} \\ b = d & \text{有任意解} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

6.2 一元一次不等式

例子 6.2.1. 根据以下问题，设未知数并列出不等式：

(1). 海水的盐度是 0.351%，生理盐水的盐度是 0.9%，一千克海水中至少要加入多少克纯水，才能让盐度降到生理盐水的盐度以下？

(2). 100 亩地规划种植葡萄。食用葡萄每亩年收益为 0.4 万元，酿酒葡萄每亩年收益为 0.6 万元。规划年收益 52 万元。要如何安排种植？

解答.

(1) 解：设要加 x 克水，题目条件可以写成：

$$\frac{1000 \times 0.351\%}{1000 + x} < 0.9\%.$$

由题目条件，可以假设 $1000 + x$ 是正数，两边乘以左式分母，得到：

$$1000 \times 0.351\% < 0.9\% \times (1000 + x).$$

(2) 解：设 x 亩地种食用葡萄，那么 $100 - x$ 亩地种酿酒葡萄，题目条件可以写成：

$$0.4 \times x + 0.6 \times (100 - x) \geq 52.$$

一元一次不等式和一元一次方程很像，也涉及关于变量的一元一次式。一元一次方程中，两个一元一次式有相等关系，一元一次不等式中，两个一元一次式有不等关系。区别在于，相等关系只有一种，而不等关系有两类四种。

不等式的基本性质和等式有什么共同点，又有什么区别呢？

例子 6.2.2. 观察以下不等式，你能发现什么规律？

- (1). $2 < 3, \quad 3 < 4, \quad 6 < 7$
- (2). $4 \leq 7, \quad 6 \leq 10.5, \quad 1.2 \leq 2.1, \quad 28 \leq 49$
- (3). $3 < 5, \quad 9 < 15, \quad -6 > -10, \quad -0.36 > -0.6$
- (4). $-7 \leq 1, \quad 7 \geq -1, \quad -1.4 \leq 0.2, \quad 1.19 \geq -0.17$

等式的基本性质是：等式两边加、减、乘、除以同一个量，成立的等式仍然成立。

不等式两边加减同一个量，成立的不等式仍然成立。不等式两边乘以或除以同一个量，成立的不等式不一定成立。

我们观察到，只有当不等式两边同时乘以或除以正数的时候，不等式仍然成立；不等式两边同时乘以或除以负数的时候，不等式不再成立，反号的不等式反而成立。

为什么乘除法和加减法有这样的区别呢？因为大于、小于这些不等关系是按照加减法定义的。我们可以看以下的例子：

例子 6.2.3. 观察以下的式子，不等关系之间有什么联系？

(1). $2 < 3, \quad 3 > 2, \quad -2 > -3, \quad -3 < -2$

(2). $4 \leq 7, \quad 7 \geq 4, \quad -7 \leq -4, \quad -4 \geq -7$

一般来说，两个数 a, b 的不等关系是**互反**的：如果 $a < b$ ，那么 $b < a$ ，反之亦然；如果 $a \leq b$ ，那么 $b \geq a$ ，反之亦然。左右边互换的时候，不等号要反过来。而两个数的相等关系是**自反**的：如果 $a = b$ ，那么 $b = a$ 。左右边互换的时候，等号仍然是等号。

从 $2 < 3$ 到 $-2 > -3$ ，可以理解为两边同时乘以 -1 ；也可以理解为两边同时减去 2，再同时减去 3，然后左右边互换。左右边互换时，不等式反号。如果两个数相等，那么左右边互换时不需要反号，或者说，等号的反号仍然是等号（因此说相等关系是自反的）。

追根究底，不等关系反映了数与数之间的顺序，相等关系反映了数与数之间有共同之处。它们代表了数的不同性质。

一元一次不等式的解法，思路和一元一次方程类似。我们都希望把一次项整理到不等式一边，把常数项整理到不等式另一边，然后合并同类项，最后两边同时除以变量 x 的系数，求出 x 的解。

因此，在处理一元一次不等式的时候，可以有两种方式。要么用加减法使一次项的系数变成正数，然后两边同时除以系数得到解。这个方法不需考虑做除法时不等式反号的问题；要么不要求一次项的系数是正数，两边同时除以一次项系数的时候，视情况决定不等号是否要反号。

解答. 按这个方法，我们可以解以上两个问题中的不等式：

(1) 解：设要加 x 克纯水，题目条件可以写成：

$$\frac{1000 \times 0.35\%}{1000 + x} < 0.9\%.$$

由题目条件, 可以假设 $1000 + x$ 是正数, 两边乘以左式分母, 得到:

$$\begin{aligned} 1000 \times 0.351\% &< 0.9\% \times (1000 + x) \\ 3.51 &< 9 + 0.009x \\ 3.51 - 0.9 &< 0.009x \\ 2.61 &< 0.009x \end{aligned}$$

两边同时除以正数 0.009, 得到:

$$\frac{2.61}{0.009} < x$$

即:

$$x > \frac{2.61}{0.009} = 290.$$

此时 $1000 + x > 1290 > 0$, 符合假设。

答: 至少要加 290 克纯水。

(2) 解: 设 x 亩地种食用葡萄, 那么 $100 - x$ 亩地种酿酒葡萄, 题目条件可以写成:

$$\begin{aligned} 0.4 \times x + 0.6 \times (100 - x) &\geq 52 \\ 0.4x - 0.6x + 60 &\geq 52 \\ -0.2x &\geq 52 - 60 \\ -0.2x &\geq -8 \end{aligned}$$

一次项系数 -0.2 是负数, 所以两边同时除以 -0.2 , 不等式反号:

$$x \leq \frac{-8}{-0.2}$$

得到 $x \leq 40$ 。由问题条件, x 还需要满足 $0 \leq x \leq 100$, 所以解为: $x \leq 40$ 且 $0 \leq x \leq 100$, 也就是 $0 \leq x \leq 40$ 。

答: 至多 40 亩地种食用葡萄, 其余的地种酿酒葡萄。

可以看到，一元一次不等式的解与一元一次方程的解是不一样的。一元一次方程的解总是单元集、全集或空集，一元一次不等式的解一般既不是全集、也不是单元集或空集。

另外要注意的是，在解决实际问题的時候，往往需要根据题目条件做一些额外的假设，才能列出方程或不等式。解完方程、不等式后，应该及时检验得到的解，看是否能让这些假设成立。

综上所述，可以这样总结解一元一次不等式的方法：

方法一：

1. 通过两边同时加减法，将一次项移到不等式一边，将常数项移到另一边，并保证一次项系数不是负数。
2. 如果一次项系数等于 0，比较不等式两边：
 - 2.1. 如果不等式成立，则原不等式有任意解。
 - 2.2. 如果不等式不成立，则原不等式无解。
3. 如果一次项系数大于 0，将两边同时除以一次项系数，得到不等式的解。

方法二：

1. 通过两边同时加减法，将一次项移到不等式一边，将常数项移到另一边。
2. 如果一次项系数等于 0，比较不等式两边：
 - 2.1. 如果不等式成立，则原不等式有任意解。
 - 2.2. 如果不等式不成立，则原不等式无解。
3. 如果一次项系数大于 0，将两边同时除以一次项系数，得到不等式的解。
4. 如果一次项系数小于 0，将两边同时除以一次项系数，并将不等式反号，得到不等式的解。