

第五册

大青花鱼

目录

| | |
|---------------------------|-----------|
| 第一章 圆 | 5 |
| 1.1 圆的基本性质 | 5 |
| 1.2 圆和旋转 | 7 |
| 1.3 圆心角和圆周角 | 8 |
| 1.4 点到圆的势 | 11 |
| 1.5 切线 | 13 |
| 第二章 圆和多边形 | 15 |
| 2.1 三角形的外接圆和内切圆 | 15 |
| 2.2 圆内接四边形 | 16 |
| 2.3 垂心组和外接圆 | 20 |
| 2.4 九点圆 | 23 |
| 2.5 圆内接多边形 | 25 |
| 第三章 三角函数 | 29 |

| | | |
|------------|-------------------------|-----------|
| 3.1 | 正弦函数 | 29 |
| 3.2 | 正弦定理 | 33 |
| 3.3 | 余弦函数 | 36 |
| 3.4 | 余弦定理 | 38 |
| 3.5 | 和差角公式 | 41 |
| 3.6 | 正切函数和余切函数 | 48 |
| 3.7 | 多边形的边角关系 | 51 |
| 第四章 | 从或许到确定 | 53 |
| 4.1 | 事件和见知 | 53 |
| 4.2 | 概率和分布 | 56 |
| 4.3 | 二项分布和均匀分布 | 58 |
| 4.4 | 排列和组合 | 60 |
| 第五章 | 三段论 | 63 |
| 5.1 | 三段论的结构 | 63 |
| 5.2 | 三段论的规则 | 65 |
| 第六章 | 多元映射 | 71 |
| 6.1 | 映射与多元映射 | 71 |
| 6.2 | 通过映射理解多元映射 | 74 |
| 6.3 | “有求必允”与“一路全真” | 75 |

第一章 圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

1.1 圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点 O 距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段 XY ，到 O 的距离和 AB 等长的点构成一个圆。 O 叫做**圆心**， XY 叫做圆的**半径**，长度一般记为 r 。不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为 O 、半径为 r 的圆，一般记为圆 (O, r) 或 $\odot_{(O, r)}$ 。圆心 O 和另一点 P 确定的圆，一般记为圆 (O, P) 或 $\odot_{(O, P)}$ 。如果不在意半径，在不至于混淆的情况下，也可以简记为圆 O 。

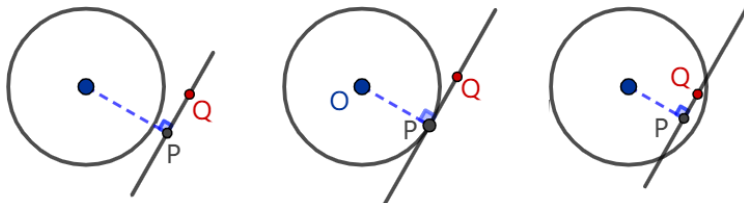
平面上的点到 O 的距离小于 r ，就说它在圆内；如果等于 r ，就说它在圆上；如果大于 r ，就说它在圆外。

和引进直线等概念时一样，圆也有一条公理，规定它和直线的关系。

公理 1. 直线交圆公理 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

从这个公理出发，我们可以整理直线和圆的位置关系。

考虑直线 l 和圆 $\odot_{(O,r)}$ 。过 O 作直线 $m \perp l$ ，记垂足为 P ， $|OP| = d$ 。



1. 如果 $d > r$ ，那么 P 在圆外。根据垂距定理， l 上任意点都在圆外。我们说直线 l 与圆 O **相离**。反之，如果直线与圆相离，那么 P 在圆外，因此 $d > r$ 。
2. 如果 $d = r$ ，那么 P 在圆上。根据垂距定理， l 上的点除了 P 都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线 l 与圆 O **相切**，称 P 为**切点**。反之，如果直线与圆相切于点 Q ，那么 $|OQ| = r$ 。 l 上其他点都在圆外，所以根据垂距定理的逆定理， $OQ \perp l$ ， $d = r$ 。
3. 如果 $d < r$ ，那么 P 在圆内。根据直线交圆公理，直线和圆有两个交点 A 、 B 。我们说直线与圆**相交**，或直线**割圆**于 A 、 B 。反之，如果直线和圆有两个交点，那么根据直线交圆公理，直线有部分在圆内，这部分上的点到圆心距离小于 r ，因此根据垂距定理， $d < r$ 。

设直线割圆于两点 A 、 B ，我们说直线是圆的**割线**。根据直线交圆公理，线段 AB （除端点）在圆内。我们把线段 AB 称为圆的一条**弦**。如果 AB 过圆心 O ，就说它是圆的直径， A 、 B 互为**对径点**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

考虑圆 O 上的弦 AB 的垂直平分线 m ，圆心 O 显然在 m 上。 $m \perp AB$ ，设垂足为 P ，那么 $|AP| = |PB|$ 。设 m 和圆交于两点 C 、 D ，则弦 CD 就是直径。所以我们说：**恰有一条直径平分每条弦**。

习题 1.1.1. 补充：

1. 设直线割圆于两点 A 、 B ，证明线段 AB （除端点）在圆内。
2. 证明：同一个圆中，直径是最长的弦。

1.2 圆和旋转

怎么画一个圆？我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点，我们将圆规尖定在要画的圆心处，将笔头接触圆上的点，然后轻轻旋转，笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段，我们首先张开圆规，圆规尖和笔头分别对齐半径两端，然后保持圆规形状不变，将圆规尖定在要画的圆心处，让笔头接触纸面，轻轻旋转，笔头就画出一个圆。

可以看出，圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作，把平面中的点映射到另一点。给定角 AOB ，可以这样定义**旋转**：

定义 1.2.1. 给定角 AOB ，平面中一点 P 关于 $\angle AOB$ 旋转的结果，是唯一使得 $\angle POQ = \angle AOB$ 且 $|OP| = |OQ|$ 的点 Q 。

O 称为旋转的**中心**。任何点 P 绕中心旋转，结果都在圆 (O, P) 上。

可以看到，给定一个圆 (O, P) ，从点 P 出发，旋转不同的角度，就得到圆上其它的点。用圆规画圆时，从零角出发，随着角度不断增大，直到周角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是 0° 到 360° ）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上 0 和 360 之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为 $\gamma_{(O,P)}$ 。

通过 $\gamma_{(O,P)}$ ，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然 $[0, 360)$ 对应整个圆，那么 $[0, 180]$ 就对应半个圆， $[0, 60]$ 就对应六分之一圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应 $[a_1, a_1 + x]$ 和 $[a_2, a_2 + x]$ ，这两个圆弧有什么不同吗？观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全

等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如 $[0, 60]$ 对应的圆弧，起点就是 P ，终点是 60 度角 POQ 的终边和圆的交点 Q 。如果圆弧对应的区间长度超过 180 ，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于 180 ，就说它是**劣弧**；如果等于 180 ，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。我们说它们互为**补弧**。

同一个圆上，明确了起点 A 和终点 B ，就唯一确定了圆弧 \widehat{AB} 。如果只说了两点 A 、 B ，那么 \widehat{AB} 一般指劣弧或起点为 A 终点为 B 的圆弧。

习题 1.2.1. 证明：

1. 任意线段经过旋转得到等长的线段。
2. 任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

1.3 圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为 A ，终点为 B 的圆弧 \widehat{AB} 和圆上弧外一点 P ，则角 APB 称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间，有什么关系呢？如右图，连接 PO ，延长交圆于对径点 Q 。由于 $\triangle AOP$ 是等腰三角形， $\angle OAP + \angle OPA = 0$ ，

同理, $\angle OBP + \angle OPB = 0$ 。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说, 圆心角是圆周角的两倍大小, 圆周角是圆心角的一半大小。

定理 1.3.1. 圆周角定理 给定圆 O 上的弧 \widehat{AB} 及圆上弧外的点 P , 如果 $P \notin \widehat{AB}$, 那么:

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果点 P 在弧上, $\angle APB$ 和 $\angle AOB$ 是什么关系呢? 这时 $\angle APB$ 对应 \widehat{AB} 的补弧, 于是它是 \widehat{AB} 对应的圆心角的一半大小。 \widehat{AB} 对应的圆心角是周角减去 $\angle AOB$, 所以

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角, 因此, 根据圆周角定理, 对径点对应的圆周角是直角。或者说, 半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是, 讨论圆心角时, 我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时, 为了方便, 我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里, 圆上的点 A 、 B 对应的圆心角 $\angle AOB$ 和点 C 、 D 对应的圆心角 $\angle COD$ 相等, 那么根据“边角边”, 圆心 O 和它们构成的三角形满足: $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。弦 AB 和 CD 也等长。不仅如此, 根据圆映射, 圆弧 \widehat{AB} 和 \widehat{CD} 也等长。事实上, \widehat{CD} 就是 \widehat{AB} 关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之, 如果两个圆弧 \widehat{AB} 和 \widehat{CD} 等长, 那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等, 那么弦 AB 和 CD

也等长。更进一步, 设 P 是圆上不属于两弧的点, 那么圆周角 $\angle APB$ 和 $\angle CPD$ 一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来, 如果圆 O 上两条弦 AB 和 CD 等长, 那么根据“边边边”, $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。于是圆心角相等, 所以劣弧 \widehat{AB} 和 \widehat{CD} 等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说, 在同一个圆里, 两点对应的弦长相等当且仅当对应的(劣弧)弧长相等, 当且仅当对应的圆心角相等, 当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角, 都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点 A 、 B , 它们对应的垂直平分线 l 平分 $\angle AOB$, 即把 $\angle AOB$ 分成两个相同大小的圆心角。因此, 设 l 和圆交于 P 、 Q , 则它们也分别平分所在的圆弧(称为弧的中点)。我们把这一系列结论总称为垂径定理:

定理 1.3.2. 垂径定理 给定圆上两点, 则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦, 同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成: 过圆 O 的弦 AB 中点的直径与弦 AB 垂直, 同时平分 $\angle AOB$ 和弧 \widehat{AB} 。

给定圆 (O, r) , 弦 AB 中点记为 M , $|MO|$ 称为弦 AB 的弦心距。由于 $MO \perp AB$, $\triangle OAM$ 是直角三角形, 根据勾股定理,

$$|OM|^2 + |AM|^2 = |OA|^2 = r^2.$$

设直线 MO 与圆 O 交于 P 、 Q 两点, 则

$$|MP| \cdot |MQ| = (r - |OM|)(r + |OM|) = r^2 - |OM|^2.$$

比较以上两式, 可以得到:

$$|MA| \cdot |MB| = |MA|^2 = |MB|^2 = |MP| \cdot |MQ|.$$

这个推论也常常被称为垂径定理。

1.4 点到圆的势

圆是到定点距离相同的点的集合，所以点对圆来说是关键的概念。一点和圆的关系，可以用它到圆的距离来理解。点 P 在圆 (O, r) 上，当且仅当它到圆心的距离为 r 。

如果不知道圆心的位置，有没有办法理解点和圆的位置关系呢？我们引进点到圆的势的概念。

定义 1.4.1. 点 P 到圆 (O, r) 的势，等于 $|OP|^2 - r^2$ 。

乍一看，点到圆的势，仍然和它到圆心的距离相关。点到圆心的距离 d 比 r 小的时候，点在圆内，这时它到圆的势小于 0。 $d > r$ 的时候，点在圆外，势也大于 0。 $d = r$ 的时候，点在圆上，势等于 0。

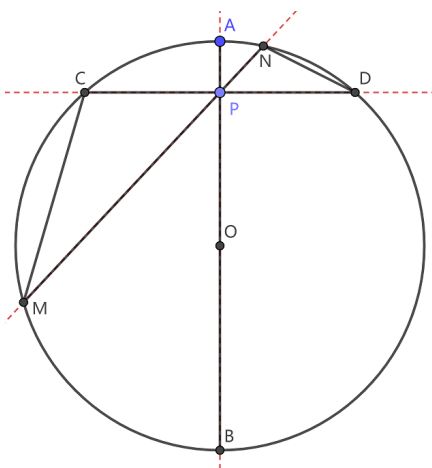
下面，我们从垂径定理出发，给出一种不依赖圆心的方法，计算点到圆的势。

首先设点 P 在圆 (O, r) 内。连接 OP ，延长为直径，交圆于 A, B 两点（ A, P 在 O 同侧）。过 P 作该直径的垂线，交圆于 C, D 两点。弦 CD 的垂直平分线过 O ，而 $OP \perp CD$ ，所以 OP 就是弦 CD 的垂直平分线。根据垂径定理， $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| = r^2 - |OP|^2$ 。这说明 $|PA| \cdot |PB|$ 、 $|PC| \cdot |PD|$ 是 P 的势的绝对值。

过 P 任意作一条直线，和圆交于两点 M, N ，是否也有这个结论呢？

如右图，可以发现， $\angle NDC$ 和 $\angle NMC$ 都对应同一段弧，且 C, M 都在弧外，所以 $\angle NDC = \angle NMC$ 。又对顶角 $\angle DPN = \angle CPM$ ，所以 $\triangle DPN \sim \triangle MPC$ 。也就是说，

$$\frac{|PD|}{|PN|} = \frac{|PM|}{|PC|}.$$



换句话说, $|PC| \cdot |PD| = |PN| \cdot |PM|$ 。这个结论也叫**相交弦定理**。

对圆内一点 P 来说, 即便不知道圆心, 只要过 P 作直线与圆交于两点, 那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势的绝对值。

如果点在圆外, 是否有类似的结论呢? 我们仍然连接 OP , 直线 OP 割圆于两点: A, B (A 位于 O, P 之间)。可以算出:

$$|PA| \cdot |PB| = (|PO| - |AO|) \cdot (|PO| + |PB|) = |OP|^2 - r^2.$$

过 P 作直线 l 和圆交于两点 M, N , $|PM| \cdot |PN|$ 是否也等于 $|OP|^2 - r^2$ 呢?

如右图, 注意到 $\angle BNA$ 和 $\angle BMA$ 都对应半圆, 所以都是直角。三角形外角 $\angle PAN = \angle ABN + \angle BNA$, 而 $\angle ABN$ 和 $\angle AMN$ 对应同一段弧且都不在弧上, 所以 $\angle ABN = \angle AMN$ 。于是,

$$\begin{aligned} \angle PAN &= \angle ABN + 90^\circ \\ &= \angle AMN + \angle BMA = \angle BMN. \end{aligned}$$

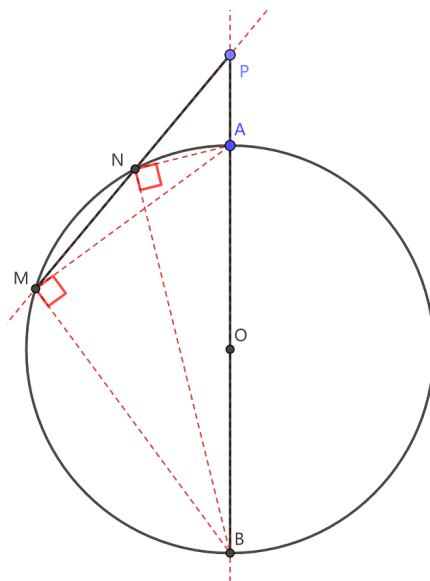
这说明 $\triangle PAN \sim \triangle PBM$, 所以

$$\frac{|PA|}{|PN|} = \frac{|PM|}{|PB|},$$

换句话说, $|PM| \cdot |PN| = |PA| \cdot |PB|$ 。这个性质也叫**割线定理**。

对圆外一点 P , 即便不知道圆心, 只要过 P 作直线与圆交于两点, 那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势。

因此, 无论在圆内还是圆外, 经过一点 P 的直线与圆交于两点, 则它到两点的距离乘积只与它和圆的远近关系有关。如果 P 在圆内, 这个乘积等于 $r^2 - |PO|^2$; 如果 P 在圆外, 这个乘积等于 $|PO|^2 - r^2$ 。或者说, 这个乘积就是势的绝对值。至于 P 在圆上的情形, 我们可以认为它与圆交于



两点，其中一点就是它自身，所以到自身距离为 0，从而乘积总是 0，等于它的势。

定理 1.4.1. 圆势定理 过点 P 作直线与圆 (O, r) 交于两点： A 、 B ，那么

$$|PA| \cdot |PB| = ||PO|^2 - r^2|.$$

比起乘积 $|PA| \cdot |PB|$ ，点到圆的势多了正负号。如何理解这个正负号呢？如果过圆 (O, r) 的圆心作一条直线，在上面建立数轴。当我们把原点 P 选在圆内的时候， A 和 B 就对应符号相异的数；如果把原点 P 设在圆外， A 和 B 就代表同号的数了。所以，以 P 为原点， PO 为正方向的数轴和圆交于两点，这两点代表的数的乘积就是 P 到圆的势。或者说，圆势附带了 P 和 A 、 B 的位置关系的信息。

1.5 切线

过一点作直线要与圆交于两点不难，与圆交于一点则不简单。根据直线交圆公理，过圆内的点，无法作和圆相切的直线。过圆外一点，可以与圆相切的直线直观上，我们可以把直尺从和圆相交的状态逐渐移动，直到尺子碰到圆的“边缘”，作出大致和圆相切的直线。

直线和圆相切是一种特殊的状况。过圆外或圆上一点的直线 l 如果和圆 O 相切，就说它是点到圆的**切线**。切线和圆的（唯一）交点，称为**切点**。根据相切的性质，过圆心 O 作关于 l 的垂线，切点就是垂足。过圆上一点，只有一条切线，过圆外一点，可以作两条切线。

过圆 (O, r) 外一点 P 作切线，记切点为 Q ，则 $\triangle OQP$ 为直角三角形。根据勾股定理，

$$|PQ|^2 + |OQ|^2 = |OP|^2.$$

因此， $|PQ|^2 = |OP|^2 - r^2$ 。也就是说，点 P 到切点的距离平方，是它关于

圆的势。若过 P 作圆 O 的割线，交圆于 A 、 B 两点，那么

$$|PA| \cdot |PB| = |OP|^2 - r^2 = |PQ|^2.$$

也就是说，

$$\frac{|PA|}{|PQ|} = \frac{|PQ|}{|PB|}.$$

因此， $\triangle PAQ \sim \triangle PQB$ 。这两个三角形的相似关系称为**切割线定理**。切割线定理可以看作割线定理的特例。

从切割线定理可以推出： $\angle PQA = \angle PBQ$ 。从另一个角度，可以这样理解：过圆上一点 Q 只有一条切线 PQ 。如果过 Q 再作一条直线，直线于圆必交于另一点 A ，而 $\angle PQA$ 等于圆弧 \widehat{QA} 对应的圆周角。

思考 1.5.1. 已知圆外一点 P ，如何准确作出 P 到 O 的切线？

第二章 圆和多边形

我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。

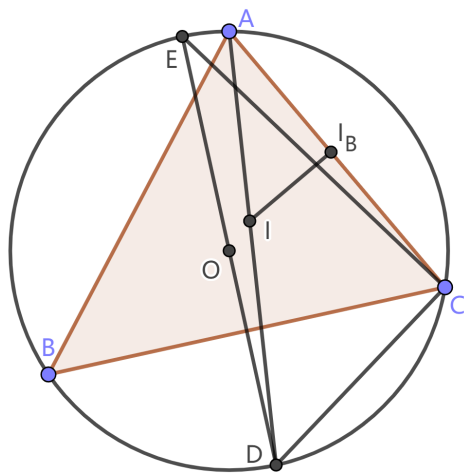
2.1 三角形的外接圆和内切圆

首先来看三个点的情形。

设 A 、 B 、 C 是圆 (O, r) 上（相异的）三点，则线段 AB 、 BC 、 AC 的垂直平分线都过圆心 O 。因此， O 是 $\triangle ABC$ 的外心（这里附带说明了圆上相异三点必然不共线）， $|OA| = |OB| = |OC| = r$ 。反之，设有（非退化的） $\triangle ABC$ ，以它的外心 O 为圆心，以 $|OA|$ 为半径，就可以画出一个圆，过顶点 A 、 B 、 C 。这说明，**不共线的三点恰好对应一个圆**。或者说，**不共线的三点确定一个圆**。我们把这个圆称为三角形的**外接圆**（“外心”即“外接圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**内接三角形**。

三角形不仅可以内接于圆，圆也可以内接于三角形。考虑三角形 ABC 的内心，它到三角形三边的距离相等。以内心为圆心，以它到三边的距离为半径作圆，这个圆和三角形三边都相切。我们把这个圆叫做三角形的**内切圆**（“内心”即“内切圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**外切三角形**。

除了内心，三角形还有旁心。旁心到三角形三边的距离也相等。因此，以每个旁心为圆心，以它到三遍的距离为圆心，各可以得到一个圆。每个圆都与三角形一边和另两边的延长线相切。这三个圆称为三角形的旁切圆（“旁心”即“旁切圆圆心”的简称），把三角形称为它们的旁切三角形。



习题 2.1.1.

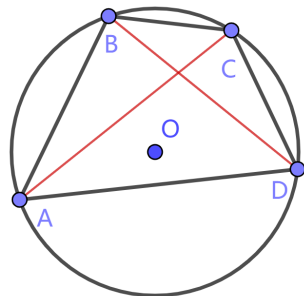
如右上图， $\triangle ABC$ 的内心为 I ，外心为 O 。设 I 到 AC 的垂足为 I_B ，射线 AI 与圆 O 交于 D ， D 的对径点为 E 。

1. 证明： $\triangle CDI$ 是等腰三角形， $|CD| = |DI|$ 。
2. 证明： $\triangle CDE \sim \triangle I_BIA$ 。
3. 证明： I 关于圆 O 的势 $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$ 。其中 R 是外接圆半径， r 是内切圆半径。
4. 设 J_A, J_B, J_C 是 $\triangle ABC$ 的旁心，证明：它们关于圆 O 的势分别等于外接圆半径与对应旁切圆半径乘积的两倍。

2.2 圆内接四边形

在三个点的基础上再加一个点 D ，四个点 A, B, C, D 能否恰好对应一个圆呢？显然， $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的外接圆未必是同一个圆。所以，四个点不总是在同一个圆上。换句话说，要让四个点共圆，这四个点必须满足一定的条件。

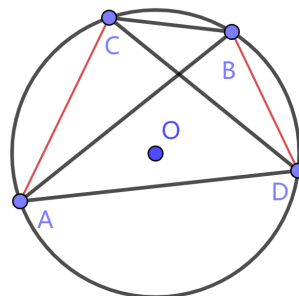
如右图，设 A, B, C, D 圆 (O, r) 上（相异的）四点，考察它们对应的圆弧。我们发现， \widehat{ABC} 和 \widehat{CDA} 是整个圆的分划，因此，它们对应的圆心角之和是



周角。根据圆周角定理, $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ 。同理, $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$ 。

我们还可以发现, 圆周角 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 都对应 \widehat{BC} , 因此根据“等弧对等角”, $\angle BAC = \angle BDC$ 。同理可得: $\angle ACB = \angle ADB$, $\angle CAD = \angle CBD$, $\angle DBA = \angle DCA$ 。

如果 A 、 B 、 C 、 D 顺序改变, 如右图, 那么四边形 $ABCD$ 就是蝶形。 \widehat{ABC} 和 \widehat{CDA} 对应同一段圆弧 \widehat{AC} 。这时 $\angle ABC + \angle CDA = 0^\circ$, 或者说 $\angle ABC = \angle ADC$ 。同理, $\angle BAD = \angle BCD$ 。



综合两种情况, 圆内接四边形对角要么和为平角, 要么相等。

可以看到, 如果把相交的对边 AB 、 CD 看作对角线, 把对角线 AC 、 BD 看作对边, 我们就得到一个凸四边形 $ACBD$ 。因此, 观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现, 我们仍然有 $\angle BAC = \angle BDC$ 、 $\angle ACB = \angle ADB$, $\angle CAD = \angle CBD$, $\angle DBA = \angle DCA$ 。如果对角线 AC 和 BD 交于点 P , 仍然有 $\triangle APB \sim \triangle CPD$ 、 $\triangle BPC \sim \triangle DPA$ 。换句话说, 即便圆内接四边形不是凸四边形, 用它的顶点也能画出圆内接凸四边形, 并且不妨碍我们讨论相关的性质。所以, 我们总把圆内接四边形问题归结为凸四边形来讨论, 也称之为四点共圆问题。

以上是圆内接四边形边和角的性质, 反过来, 满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢? 或者说, 满足什么条件的四个点共圆呢?

定理 2.2.1. 如果凸四边形 $ABCD$ 中的一对内角 $\angle ABC$ 与 $\angle CDA$ 的和是平角, 那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明. $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$, 所以要么两个角都是直角, 要么一个是钝角, 一个是锐角。

如果两个角都是直角, 作对角线 AC , 取它的中点 O 。 $\triangle ABC$ 是直角三角形, AC 是斜边, 根据直角三角形的中线定理, $|AO| = |BO| = |CO|$ 。同

理, $\triangle CDA$ 是直角三角形, AC 是斜边, 于是 $|AO| = |DO| = |CO|$ 。因此 A, B, C, D 四点都在 $\odot_{(O,A)}$ 上。

如果两个角一个是钝角, 一个是锐角。不妨设 $\angle ABC > 90^\circ > \angle CDA$ 。作对角线 AC , 则 B, D 在 AC 两侧。作对角线 AC 的垂直平分线 l 。显然, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 的外心都在 l 上, 只需证明两者是同一点。

设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot_{(O_1,B)}$ 。 $\angle ABC$ 是钝角, 因此它的圆心角对应优弧。于是, O_1 和 B 在直线 AC 两侧。 $\angle CO_1A = 360^\circ - 2\angle ABC$ 。

另一方面, 设 $\triangle CDA$ 的外接圆为 $\odot_{(O_2,D)}$ 。 $\angle CDA$ 是锐角, 因此它的圆心角对应劣弧。于是, O_2 和 D 在直线 AC 同一侧。 $\angle CO_2A = 2\angle CDA$ 。

以上两个结论说明, O_1 和 O_2 都和 D 在直线 AC 同一侧, 且 $\angle CO_1A = \angle CO_2A$ 。而 $\triangle CO_1A$ 和 $\triangle CO_2A$ 都是等腰三角形, 所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。 A, B, C, D 四点都在 $\odot_{O_1,A}$ 上。 \square

从这个定理可以推出, 矩形、等腰梯形和正方形都是圆内接四边形。

定理 2.2.2. 如果凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle ACB = \angle ADB$, 那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明. $ABCD$ 是凸四边形, 所以 C 和 D 在直线 AB 同侧。作边 AB 的垂直平分线 l , 显然, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的外心都在 l 上, 只需证明它们是同一点。

设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot_{(O_1,C)}$, $\triangle ABD$ 的外接圆为 $\odot_{(O_2,D)}$ 。如果 $\angle ACB$ 是钝角, 那么它的圆心角对应优弧。于是, O_1 和 C 在直线 AB 两侧, 且 $\angle BO_1A = 360^\circ - 2\angle ACB$ 。这时, $\angle ADB = \angle ACB$ 也是钝角, 所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 两侧, 且 $\angle BO_2A = 360^\circ - 2\angle ADB$ 。如果 $\angle ACB$ 是锐角, 那么它的圆心角对应劣弧。于是, O_1 和 C 在直线 AB 同侧, 且 $\angle BO_1A = 2\angle ACB$ 。这时, $\angle ADB = \angle ACB$ 也是锐角, 所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 同侧, 且 $\angle BO_2A = 2\angle ADB$ 。

因此, O_1 和 O_2 总在直线 AB 同侧, 且 $\angle BO_1A = \angle BO_2A$ 。而 $\triangle BO_1A$ 和

$\triangle BO_2A$ 都是等腰三角形, 所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。
 A, B, C, D 四点都在 $\odot_{O_1, A}$ 上。 \square

定理 2.2.3. 过一点 P 的两条直线 m, n 上各有两点: $A, C \in m$ 和 $B, D \in n$, 分别各在 P 两侧。如果

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|,$$

那么四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明. 考虑 $\triangle APB$ 和 $\triangle DPC$ 。对顶角 $\angle APB = \angle DPC$ 。而 $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$ 等于说

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

因此根据“边角边”, $\triangle APB \sim \triangle DPC$ 。于是有 $\angle ABP = \angle DCP, \angle BAP = \angle CDP$ 。因此, 根据定理 2.2.2, 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。 \square

这个定理也可以理解为: 两条线段相交, 如果交点把每条线段分成的两部分长度之积相等, 那么线段端点共圆。也就是说, 这两条线段实际上是圆的两条相交的弦, 乘积 $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$ 是 P 关于圆的势。这个定理是相交弦定理的逆定理。

习题 2.2.1.

1. $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 上分别有点 X, Y, Z 。设 $\triangle AYZ$ 的外接圆和 $\triangle BXZ$ 的外接圆交于点 P , 证明: C, X, Y, P 四点共圆。

2. 直线 XYZ 与三角形 ABC 的边 BC, CA, AB 所在直线分别交于点 X, Y, Z 。证明: $\triangle AYZ, \triangle BXZ, \triangle CXY, \triangle ABC$ 的外接圆过一公共点。

3. P 是平面上一点。过 P 作直线 l_1, l_2, l_3 与 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 分别交于点 X, Y, Z 。如果 $\angle AYP = \angle BZP = \angle CXP$, 证明: A, Y, Z, P 四点共圆、 B, X, Z, P 四点共圆、 C, X, Y, P 四点共圆。

给定圆内接凸四边形 $ABCD$ 。 E 是对角线 AC 上一点。 $\angle CDE = \angle BDA$ 。

4. 证明: $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ 。

5. 证明: $\triangle CDB \sim \triangle EDA$ 。

6. 证明: $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

给定凸四边形 $ABCD$, 作射线 CE 使得 $\angle ECD = \angle ABD$, 作射线 DE 使得 $\angle CDE = \angle BDA$ 。两射线交于点 E 。

7. 证明: $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ 。

8. 证明: $\triangle CDB \sim \triangle EDA$ 。

9. 证明: $|AC| \cdot |BD| \geq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

10. 证明, 凸四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形, 当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

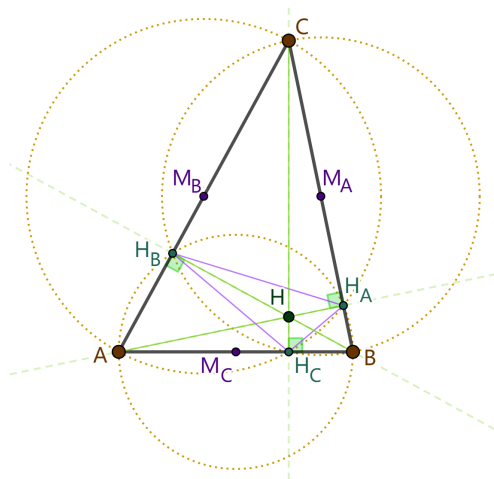
11. 证明: A, B, C, D 四点共圆, 当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

2.3 垂心组和外接圆

考虑锐角三角形 ABC , 把顶点到对边的垂足分别记作 H_A, H_B, H_C , 垂心为 H 。由于 $\angle HH_A B = \angle BH_C H = 90^\circ$, 两角之和为平角, 故 H, H_A, H_C, B 四点共圆, $\angle H_C H H_A + \angle H_A B H_C = 180^\circ$ 。这说明 $\angle CHA = \angle H_C H H_A$ 是钝角, $\triangle AHC$ 是钝角三角形。

考察钝角三角形 AHC , 它的顶点到对边的垂足也是 H_A, H_B, H_C , 而垂心是 B 。

类似地, 我们可以证明 H, H_B, H_C, A 四点共圆, H, H_A, H_B, C 四点共圆。钝角三角形 BHC 、 CHA 的顶点到对边的垂足也是 H_A, H_B, H_C , 而垂心分别是 A 和 B 。



于是,从锐角三角形 ABC 及其垂心 H 出发,可以得出四个三角形,每三个点构成的三角形的垂心,是四个点中剩余的那个点。我们把这样的四点称为**垂心组**。

从钝角三角形及其垂心出发,一样可以得到一个垂心组。从直角三角形出发,其垂心和直角顶点重合,四点的垂心组退化为三点。

从上面的讨论可知,垂心组四点共享三个垂足。任一顶点、垂心和另外两个顶点对应的垂足四点共圆。

考察 A, H_B, H_A, B 四点。由 $\angle AH_B B = 90^\circ = \angle AH_A B$ 可知, A, H_B, H_A, B 四点共圆。由于 $\angle AH_B B$ 是直角, A, H_B, H_A, B 四点所在的圆,圆心是边 AB 的中点 M_C 。同理, A, H_C, H_A, C 四点共圆,圆心是边 AC 的中点 M_B ; B, H_C, H_B, C 四点共圆,圆心是边 BC 的中点 M_A 。

从 A, H_B, H_A, B 四点共圆可以推出: $\angle A = \angle CH_A H_B, \angle B = \angle H_A H_B C$ 。也就是说, $\triangle CH_B H_A \sim \triangle CBA$ 。

从以上两个四点共圆性质还可以推出 $\angle H H_C H_A = \angle CAH, \angle H H_A H_C = \angle ACH$ 。因此, $\triangle H H_A H_C \sim \triangle HCA$ 。

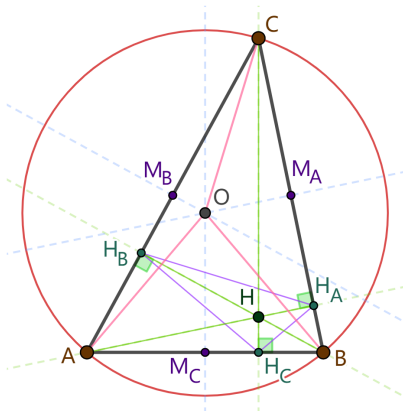
以上是三角形垂心组的基本性质。垂心是顶点到对边垂线的交点。另外一个和边垂直的概念是边的中垂线。如果把三角形的垂心和外心一起来看,会发现两者有密切的关联。

考虑锐角三角形 ABC 、其垂心 H 及其外心 O 。边 BC 可以看作 $\triangle ABC$ 外接圆的弦。圆心角 $\angle BOC = 2\angle A$, 因此在等腰三角形 BOC 中,

$$\angle CBO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle A = \angle HBA.$$

同理, $\angle BAO = \angle HAC, \angle ACO = \angle HCB$ 。

此外, $\angle H_C H_A B = \angle A$, 因此 $\angle H_C H_A B + \angle CBO = 90^\circ$ 。这说明半径 $OB \perp H_A H_C$ 。同理, 半径 $OA \perp H_B H_C, OC \perp H_A H_B$ 。



作点 A 在 ABC 外接圆上的对径点 A' ,
 AA' 是直径, 所以 $\angle ACA'$ 是直角。因此

$$\angle H_C H A' = 90^\circ - \angle A C H_C = \angle A.$$

另一方面, A, H_B, H, H_C 四点共圆, 所以

$$\angle H_C H B = 180^\circ - \angle H_B H H_C = \angle A.$$

这说明 $CA' \parallel HB$ 。同理, 我们可以得到 $BA' \parallel HC$ 。因此四边形 $A'BCH$ 是平行四边形。

作 B, C 的对径点 B', C' , 同样可以证明, 四边形 $AB'HC$ 和 $AHBC'$ 是平行四边形。

连接圆心 O 和 AB 中点 M_C , O 是直径 AA' 的中点, 所以 OM_C 平行于 $A'B$, 且长度为 $A'B$ 一半。我们把这种关系简称为“ OM_C 平行且等于 $A'B$ 的一半”。

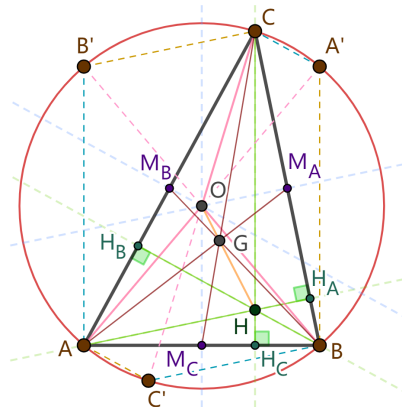
连接 OH 和 AM_C 。由于 OM_C 平行且等于 $A'B$ 的一半, $A'B$ 平行且等于 HC , 因此 OM_C 平行且等于 HC 的一半。记 OH 和 CM_C 交点为 G , 不难看出, $\triangle OGM_C \sim \triangle GHC$, 且

$$\frac{|M_C G|}{|GC|} = \frac{|OG|}{|GH|} = \frac{|OM_C|}{|HC|} = \frac{1}{2}.$$

也就是说, 点 G 在三角形 ABC 中线 CM_C 上, 且到 C 点的距离是到 M_C 距离的两倍。这说明 G 就是三角形 ABC 的重心。我们发现, 三角形的垂心、外心和重心满足以下的性质:

定理 2.3.1. 三心共线定理

三角形 ABC 的垂心、外心和重心共线, 重心位于外心和垂心为端点的线段上, 而且重心到垂心的距离是重心到外心距离的两倍。



习题 2.3.1. 沿用本节记号, 证明:

$$1. |AH| \cdot |HH_A| = |BH| \cdot |HH_B| = |CH| \cdot |HH_C|.$$

2. H 是 $\triangle H_A H_B H_C$ 的内心。

3. 记 $\triangle ABC$ 的内心为 I , 旁心分别为 J_A, J_B, J_C , 则 I 是 $\triangle J_A J_B J_C$ 的垂心。

4. H 关于 AB 的对称点 H^C 在 ABC 外接圆上, 且 $\widehat{AC'} = \widehat{H^C B}$ 。

5. $\triangle AHB$ 、 $\triangle AHC$ 和 $\triangle CHB$ 的外接圆都和 $\triangle ABC$ 的外接圆一样大。它们的圆心分别是 $\triangle ABC$ 的外心 O 关于三边的对称点, 和 O 组成垂心组。并且这个垂心组和垂心组 A, B, C, H 全等。

2.4 九点圆

我们已经了解过三角形的外接圆、内切圆和旁切圆。本节我们再介绍三角形内部的一个特殊的圆。

设有三角形 ABC , 上一节中, 我们证明了 $\triangle ABC$ 的垂心 H 、外心 O 和重心 G 共线。考虑线段 OH , 作它的中点 M 。我们知道 $AHBC'$ 是平行四边形, 所以 M_C 是其对角线 HC' 的中点。因此, MM_C 平行且等于 OC' 的一半。

作 CH 的中点 D_C , 由于 OM_C 平行且等于 CH 的一半, 因此平行且等于 HD_C 。也就是说, 四边形 $HD_C OM_C$ 是平行四边形, 于是 M_C, M, D_C 共线, M 是 $M_C D_C$ 的中点, $|MD_C| = |MM_C| = \frac{1}{2}|M_C D_C|$ 。

$\triangle M_C H_C D_C$ 是直角三角形, 所以斜边中点 M 到直角顶点 H_C 的距离是斜边长度 $M_C D_C$ 的一半。也就是说,

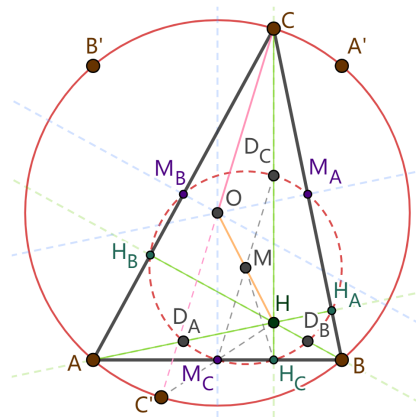
$$|MD_C| = |MM_C| = |MH_C| = \frac{1}{2}|OC'| = \frac{R}{2}.$$

其中 R 是 ABC 的外接圆半径。

同理，我们也有

$$\begin{aligned} |MD_A| &= |MM_A| = |MH_A| = \frac{R}{2}, \\ |MD_B| &= |MM_B| = |MH_B| = \frac{R}{2} \end{aligned}$$

所以，以 M 为圆心，以 $\frac{R}{2}$ 为半径画圆，我们就会发现，这个圆经过三边中点，三边上的垂足，以及三顶点到垂心连线的中点，合共九点。我们把这个圆称为**九点圆**。



定理 2.4.1. 九点圆定理

三角形三边中点、三边垂足，以及三顶点到垂心连线的中点共圆。圆心为外心与垂心的中点，半径为三角形外接圆半径的一半。

三角形的九点圆的大小，刚好是三角形外接圆的一半。如果我们把三角形的垂心 H 看作“起点”，那么三角形的外接圆可以看作是九点圆外延加倍得到的。比如，把线段 HD_C 加倍延长，就得到 HC ；把线段 HM_C 加倍延长，就得到 HC' ；把线段 HH_C 加倍延长，就得到外接圆上一点 H^C 。一般来说，从 H 出发，连接 H 和九点圆上任一点，加倍延长后，终点就会落在外接圆上。

习题 2.4.1. 沿用本节记号，证明：

1. 作外心 O 关于三边的对称点： O_A, O_B, O_C ，则垂心 H 是 $\triangle O_A O_B O_C$ 的外心。
2. $\triangle O_A O_B O_C \simeq \triangle ABC$ 。两者关于点 M 对称，有共同的九点圆。
3. 记 $\triangle ABC$ 的旁心为 J_A, J_B, J_C ，则 $\triangle J_A J_B J_C$ 的九点圆是 $\triangle ABC$ 的外接圆。

2.5 圆内接多边形

九点圆涉及了内接于同一个圆的九边形。对一般的多边形来说，成为圆内接多边形意味着什么呢？

从四边形的情况来看，顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点 A 、 B 、 C 、 D 按顺时针或逆时针顺序排列，那么四边形 $ABCD$ 是凸四边形，否则，四边形 $ABCD$ 可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形，我们只研究最简单的一类：顶点按逆时针顺序排列的多边形。具体来说，设圆 O 上有 n 个点： A_1, A_2, \dots, A_n ，从 A_1 出发构造圆映射 $\gamma_{(O, A_1)}$ ，把 $[0, 360)$ 映射到圆周，那么 0 对应 A_1 。设 t_1, t_2, \dots, t_n 分别对应 n 个点，那么 $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 。这样定义的圆内接多边形： $A_1 A_2 \dots A_n$ 就是我们研究的对象。这样定义的多边形，每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数 n ，凸 n 边形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。具体来说，每个顶点和相邻两个顶点的连线是 n 边形的边，和其余 $n-3$ 个顶点的连线是对角线。因此每个点是 $n-3$ 条对角线的端点。另一方面，每条对角线对应两个顶点，因此一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢？我们知道三角形的内角和是平角，凸四边形的内角和是两个平角（或者说周角，如果把角度约定在负平角和正平角之间，则减去一个周角变成零角）。边数继续增多时，我们定义凸 n 边形 $A_1 A_2 \dots A_n$ 的内角和为：

$$\angle A_1 A_2 A_3 + \angle A_2 A_3 A_4 + \dots + \angle A_{n-2} A_{n-1} A_n + \angle A_{n-1} A_n A_1 + \angle A_n A_1 A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间，可以猜测：凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形, 我们可以这样证明: n 个顶点把圆分为 n 段圆弧。每个顶点张成的内角, 对应了其中 $n-2$ 段圆弧。如果考虑所有 n 个内角对应的圆弧, 则每段圆弧计入 $n-2$ 次 (圆弧两端是内角顶点的时候不计入, 其它情况下都计入)。也就是说, n 个内角和对应 $n-2$ 个整圆。这些内角都是圆周角, 因此它们的和是 $n-2$ 个整圆对应的圆周角, 即 $n-2$ 个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况, 我们可以通过不断“裁剪”三角形来证明。我们还记得, 凸四边形可以裁成两个三角形, 因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看, 我们通过裁掉一个三角形, 把凸四边形变成了三角形。对一般的凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 来说, 由于它的每个内角都介于零角和平角之间, 我们可以考虑裁掉某个角, 把它变成 $n-1$ 边形。比如, 沿着线段 A_1A_3 剪一刀, 就把 $A_1A_2\cdots A_n$ 分成了三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$ 。

定理 2.5.1. 凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

证明. 用归纳法证明。命题 $P(n)$: 凸 $n+2$ 边形的内角和是 n 个平角。我们要证明 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立。

$n=1$ 时, 由于三角形内角和是平角, $P(1)$ 成立。

假设 $P(n)$ 成立, 下面证明 $P(n+1)$ 成立。

设有凸 $n+3$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$, 将它裁成三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$ 。前者的内角和是平角。根据 $P(n)$, 后者的内角和是 n 个平角, 因此, $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的内角和是 $n+1$ 个平角。于是 $P(n+1)$ 成立。

因此对所有正整数 n , 命题 $P(n)$ 成立。 \square

满足什么条件时, 凸多边形是圆内接多边形呢? 最直接的条件, 自然是平面上有一个圆, 使多边形顶点都在圆上。或者说, 能找到一点, 到多边形各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点, 可以查看多边形各边和各条对角线的垂

直平分线。如果多边形是圆内接多边形，它的边和对角线都是圆的弦，垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说，可以考察两条边（或对角线）的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等，那么多边形内接于以它为圆心的圆，否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形：**正多边形**。正多边形是各边等长，各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形各个的内角角度是 $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$ 。

习题 2.5.1.

1. 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形，哪些总是圆内接多边形？哪些可以是圆内接多边形？要满足什么条件？
2. 设有整数 $1 \leq i, j, k, l \leq n$ ，圆内接 n 边形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 中， $\angle A_i A_k A_j$ 和 $\angle A_i A_l A_j$ 有什么关系？

第三章 三角函数

通过研究点、直线、角和三角形、四边形、圆形，我们对简单的平面图形有了更多的认识。其中对三角形的研究贯通了我们对各种形状的探索。通过对三角形性质的理解，我们建立了三角形和四边形、圆形乃至更复杂的形状之间的关系。

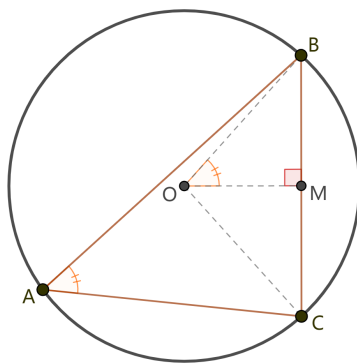
如果对前面学习的知识做一次整理，我们会发现，大多数的结论要么和共点、共线、共圆有关，要么是长度之间、角度之间的相等或简单倍数关系。我们把这些结论称为定性结论。

在科学研究和生产实践中，我们更需要知道的是形状之间定量的关系。比如，如果三角形的三边长度分别是 4, 5, 6，我们希望知道三角形内角到底是多少度。又比如，如果菱形两条邻边长度为 1，夹角为 50° ，我们希望知道菱形对角线的长度。为此，我们从三角形的边角关系着手研究。

我们的目标是解三角形：已知三角形部分边角的大小，求其余边角的值。

3.1 正弦函数

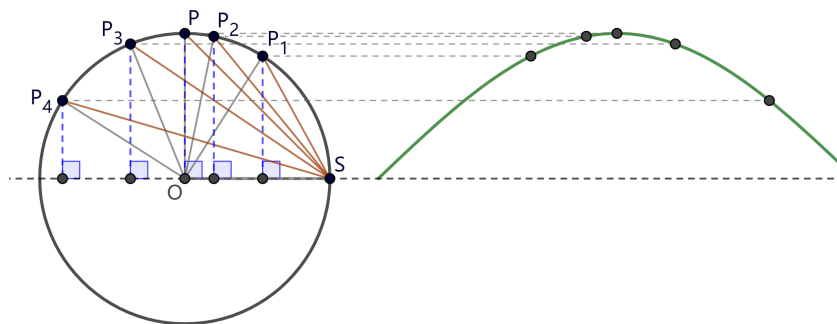
如右图，我们想知道三角形 ABC 中 $\angle A$ 的角度和对边 BC 长度的关系。为此，我们



作 ABC 的外接圆 O , 则 BC 是 O 的弦。 $\angle A$ 作为圆周角, 是圆心角 $\angle COB$ 的一半。作 BC 中点 M , 则 $\angle A = \angle MOB$ 。这样, 我们就把一般三角形的边角关系转化成了直角三角形 MBO 的边角关系。

那么, 直角三角形的角和边有什么关系呢? 我们先来看另一个问题。

考虑半径为 1 的圆 O (这个圆以后会经常出现, 我们把它叫做单位圆) 和圆上一点 S 。给定角 α , 以 OS 为始边, 角的终边交圆 O 于点 P 。称 $\triangle SOP$ 为角 α 对应的单位三角形 (如下图)。根据三角形面积公式 (底乘高除以 2), 单位三角形的面积等于 P 到始边距离的一半。



不难看出, α 为直角时, 单位三角形的面积最大, 为 $\frac{1}{2}$ 。其它情况下, 运用勾股定理可知, P 到始边距离小于半径, 因此面积小于 $\frac{1}{2}$ 。

我们把角 α 对应的单位三角形的面积和直角对应的单位三角形面积之比称为 α 的正弦或正弦值, 记为 $\sin \alpha$ 。 $\sin A$ 就是 P 到始边距离, 也就是前面直角三角形 MBO 中 BM 与外接圆半径之比, 或弦长与外接圆直径之比。

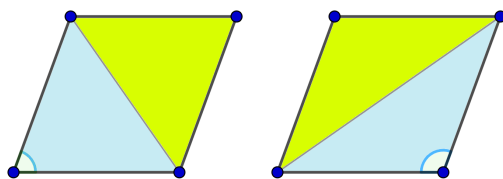
角度在零角到平角之间的每个角, 都可以按以上方法定义正弦。更准确来说, 我们定义的是角度的正弦。不过, 它实际上对应着一个把数映射到数的映射, 也就是函数。比如, 0 和 180 之间的任何实数, 都通过角度制的圆映射对应某个角度, 从而对应某个正弦值。

另一种对应方法使用弧度, 也就是把角度在单位圆上对应的弧长映射

到角度的正弦值。比如， 60° 角对应着圆周的六分之一，在单位圆上对应的弧长是 $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 。我们就说 60° 角的正弦值是 $\sin \frac{\pi}{3}$ 。把角度或角度在单位圆上的弧长对应到角度的正弦值的函数，称为**正弦函数**。

正弦函数有什么性质呢？观察不同角度对应的单位三角形可知，零角的正弦值是 0（退化的三角形面积为 0）。从零角出发，随着角度增大，正弦值不断增大；直角时，正弦值达到最大值 1。然后，随着角度增大，正弦值不断减小；平角时，正弦值减为 0。

两个角互为补角时，对应的单位三角形是同一个菱形按不同对角线剖开得到的一半。所以两者面积相等。也就是说，**两个角互为补角，则正弦值相等**。因此，我们将把重点放在研究锐角的正弦值上。



对具体的某个角度来说，怎么计算它的正弦值呢？这个问题不简单。以我们掌握的知识，还无法精确计算任意角度的正弦值，甚至难以估计任意角度的正弦值。求解任意角度的正弦值属于实变函数分析的重要基础内容。目前，我们可以使用正弦函数表，查找角度的正弦值，或通过使用计算器、编程等方式，借助计算机计算角度的正弦值。使用正弦表，可以方便地查找角度对应的正弦值。以下是整数角度的正弦表：

| | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0° | 0.0000 | 0.1736 | 0.3420 | 0.5000 | 0.6428 | 0.7660 | 0.8660 | 0.9397 | 0.9848 |
| 1° | 0.0175 | 0.1908 | 0.3584 | 0.5150 | 0.6561 | 0.7771 | 0.8746 | 0.9455 | 0.9877 |
| 2° | 0.0349 | 0.2079 | 0.3746 | 0.5299 | 0.6691 | 0.7880 | 0.8829 | 0.9511 | 0.9903 |
| 3° | 0.0523 | 0.2250 | 0.3907 | 0.5446 | 0.6820 | 0.7986 | 0.8910 | 0.9563 | 0.9925 |
| 4° | 0.0698 | 0.2419 | 0.4067 | 0.5592 | 0.6947 | 0.8090 | 0.8988 | 0.9613 | 0.9945 |
| 5° | 0.0872 | 0.2588 | 0.4226 | 0.5736 | 0.7071 | 0.8192 | 0.9063 | 0.9659 | 0.9962 |
| 6° | 0.1045 | 0.2756 | 0.4384 | 0.5878 | 0.7193 | 0.8290 | 0.9135 | 0.9703 | 0.9976 |
| 7° | 0.1219 | 0.2924 | 0.4540 | 0.6018 | 0.7314 | 0.8387 | 0.9205 | 0.9744 | 0.9986 |
| 8° | 0.1392 | 0.3090 | 0.4695 | 0.6157 | 0.7431 | 0.8480 | 0.9272 | 0.9781 | 0.9994 |
| 9° | 0.1564 | 0.3256 | 0.4848 | 0.6293 | 0.7547 | 0.8572 | 0.9336 | 0.9816 | 0.9998 |

每列的数据十位相同，每行的数据个位相同。比如，要查 26° 的正弦值，就在十位为 2 的第三列，找到个位为 6 的第七行，查得正弦值为 0.4384。

对于非整数角度的正弦值，我们可以查询更精确的正弦表，或者用一次函数来近似估计。如果我们把整数角度的正弦值看作正弦函数的函数值，在直角坐标系上画出函数值对应的点，可以观察到正弦函数的值从 0 平稳增长到 1。因此，可以认为两个整数角度之间，正弦函数的图像近似于线段，也就是一次函数图像的一部分。因此，非整数角度的正弦值可以通过计算线段上点的坐标而得到。

举例来说， 37° 和 38° 之间的角度（比如说 37.3° ）的正弦值，可以看作经过 $(37, \sin 37^\circ)$ 和 $(38, \sin 38^\circ)$ 两点的一次函数图像在横坐标为 37.3 时对应的纵坐标。这个一次函数可以写成：

$$y = \sin 37^\circ + \frac{\sin 38^\circ - \sin 37^\circ}{38 - 37} \cdot (x - 37)$$

横坐标 $x = 37.3$ 时，代入函数表达式，就得到：

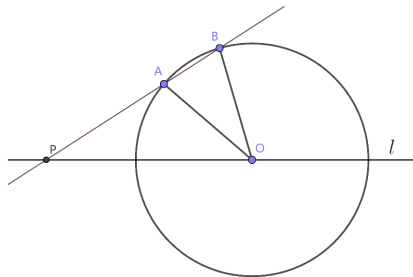
$$\begin{aligned} y &= \sin 37^\circ + 0.3 \cdot (\sin 38^\circ - \sin 37^\circ) \\ &= 0.6018 + 0.3 \cdot (0.6157 - 0.6018) \approx 0.60597 \end{aligned}$$

实际上 $\sin 37.3^\circ \approx 0.60599$ ，可见偏差不大。

反过来，如果已知角的正弦值，也可以通过查表，估计角度的大小。比如，已知 $\sin A = 0.83$ ，查表可知 $\angle A$ 大小在 56° 和 57° 之间。

想一想，如果要得到更精确的结果，除了查询更精确的正弦表，还可以怎么做？

习题 3.1.1. 如右图，延长 BA 交 l 于点 P 。



1. 计算 $S_{\triangle AOP}$ 和 $S_{\triangle BOP}$ 。

2. 通过比较 $S_{\triangle AOP}$ 和 $S_{\triangle BOP}$ ，证明

锐角的正弦值随角度增大而增大，钝角的正弦值随角度增大而减小。

3. 从 46° 、 48° 的正弦值出发，用一次函数近似估计 47° ，和正弦表上的值比较。哪个值比较大？对别的角度试一试，估计值的偏差有什么规律？

4. 已知某锐角的正弦值为 0.73 ，请估计它的角度大小。

3.2 正弦定理

我们可以用正弦值来探讨三角形的边角关系。首先把正弦值应用到一般三角形的面积上。我们知道 $\angle A$ 对应的单位三角形的面积是 $\frac{1}{2} \sin A$ 。如果 $\angle A$ 的两邻边长度分别是 b 和 c ，那么根据等高三角形的面积关系，三角形的面积是单位三角形的 bc 倍，也就是 $\frac{1}{2}bc \sin A$ 。

定理：三角形两边长度为 b 和 c ，夹角为 A ，则面积为 $\frac{1}{2}bc \sin A$ 。

设三角形 ABC 中 A, B, C 对边长度为 a, b, c ，那么它的面积可以用三

种方式表示:

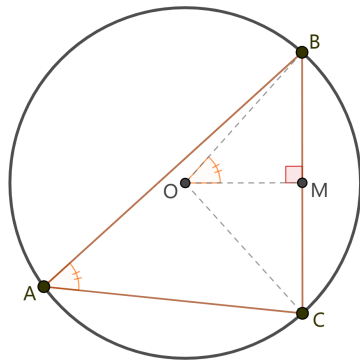
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

两边除以 $\frac{abc}{2}$, 就得到:

$$\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}.$$

上式告诉我们, 三角形三个内角的正弦值和对边长度的比是定值 $\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc}$ 。如何理解这个定值呢? 让我们回到前面的三角形 MOB 。我们知道 $BM = R \sin A$, 其中 R 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径。所以 $\frac{a}{2} = R \sin A$, 即 $\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{2R}$ 。也就是说,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



定理 3.2.1. 正弦定理 三角形任一边长与其对角正弦值之比为外接圆直径。

从正弦定理可以立刻得出: 三角形的面积等于三边长之积与外接圆半径之比的四分之一。

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}.$$

下面来看正弦定理的具体应用。

例子 3.2.1. 三角形 ABC 中, 边 AB 、 AC 长度分别为 3 和 5, $\angle B = 80^\circ$, 求 BC 的长度和 $\angle C$ 的大小。

解答. 根据正弦定理:

$$\frac{|AC|}{\sin B} = \frac{|AB|}{\sin C},$$

所以 $\sin C = \frac{|AB| \sin B}{|AC|}$ 。查表知 $\sin 80^\circ = 0.9848$, 算得 $\sin C \approx 0.5909$, 反查正弦表可知 $\angle C \approx 36.2^\circ$ 或 $\angle C \approx 143.8^\circ$ 。由于三角形内角和是平

角, $\angle C + \angle B < 180^\circ$, 故排除 $\angle C \approx 143.8^\circ$ 。于是 $\angle C \approx 36.2^\circ$, $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C \approx 63.8^\circ$, 使用正弦定理可算得:

$$|BC| = \frac{|AB| \sin A}{\sin B} = \frac{3 \cdot \sin 80^\circ}{\sin 63.8^\circ} \approx 3.29$$

已知三角形两边长度和其中一边对角的大小, 可以根据正弦定理得出另一边对角的正弦值, 从而得出它的角度。用平角减去两角角度, 就得到第三个角的大小。再次使用正弦定理, 就得到第三边的长度。要注意的是, 用正弦定理算出的是角的正弦值, 而不是角度。由于互为补角的正弦值相等, 同一个正弦值对应两个互为补角的角度。因此, 给定三角形两边和其中一边的对角, 并不一定能确定三角形的形状。换句话说, “边边角” 不能用来证明三角形全等。

例子 3.2.2. 已知三角形 ABC 中, $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 75^\circ$, $\angle C$ 对边长度 $c = 4$, 求另两边的长度。

解答. 三角形内角和为平角, 所以 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 41^\circ$ 。根据正弦定理:

$$\frac{a}{\sin 64^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 41^\circ}.$$

$$\text{所以 } a = \frac{c \sin 64^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{4 \times 0.8988}{0.6561} \approx 5.48, \quad b = \frac{c \sin 75^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{4 \times 0.9659}{0.6561} \approx 5.89.$$

已知两内角大小和一边的长度, 等于知道所有内角大小和一边边长。根据正弦定理, 可以算出另两边的长度。这说明 “角边角” 和 “角角边” 都可以用来证明三角形全等。

正弦定理不仅可以用来处理定量关系, 也可以用来处理定性关系。三角形的边长和对角的正弦值之比是定值, 所以, 边长越大, 对角的正弦值也越大。而锐角的正弦值随着角度增大而增大, 至直角达到最大。所以, 锐角和直角三角形中, 较大的边, 对角也较大, 较大的角, 对边也较大。这个性质称为 “大边对大角”、“大角对大边”。

对钝角三角形, “大边对大角”、“大角对大边”的结论是否也成立呢? 设三角形 ABC 中 $\angle A$ 是钝角, 则 $\angle A$ 的补角是锐角。三角形内角和为平角, 所以 $180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C > \angle B$, $\angle A$ 的补角大于 $\angle B$, 即 $\sin A = \sin(B + C) > \sin B$ 。同理, $\sin A > \sin C$ 。钝角 $\angle A$ 作为较大的角, 其正弦值大于锐角 $\angle B$ 和 $\angle C$ 。而 $\angle B$ 和 $\angle C$ 同为锐角, “大边对大角”、“大角对大边”的结论在两者之间同样成立。综上所述, 任意三角形中, “大边对大角”、“大角对大边”的结论总成立。

习题 3.2.1.

1. 设三角形 ABC 内角 A, B 的公共边为 c , 证明: $S_{\triangle ABC} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin(A+B)}$ 。
2. 三角形一边的长度是另一边的 2 倍。证明: 至少有一个内角不大于 30° , 一个内角不小于 75° 。
3. 已知三角形 ABC 中 $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C$ 对边长度 $c = 8$, 求另两边的长度。
4. 已知三角形两边长度是 4、5, 一个内角是 40° , 第三边的长度有几种可能? 找出所有满足条件的三角形。
5. 已知三角形两边长度是 4、5, 一个内角是 70° , 第三边的长度有几种可能? 结论和上一题有什么不同? 找出所有满足条件的三角形。

3.3 余弦函数

例子 3.3.1.

1. 三角形 ABC 中, 边 BC 、 AC 的长度分别是 4、6, $\angle C = 50^\circ$, 求 AB 长度。
2. 三角形 ABC 中, 边 AB 、 AC 、 BC 的长度分别为 3、5、6, 求三个内角的大小。

使用正弦定理, 我们列出以下等式:

$$1. \frac{4}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} = \frac{|BC|}{\sin 50^\circ}.$$

$$2. \frac{6}{\sin A} = \frac{5}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}.$$

每个等式中都有两个未知量。我们无法直接用正弦定理计算内角的正弦值了。不过，既然我们能通过“边边边”和“边角边”证明三角形全等，这让我们猜想，有别的方法计算内角的角度。

第一题中，让我们把 $\angle C$ 改为直角，那么根据勾股定理， $|AB| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ 。

第二题中，让我们把 AB 、 AC 、 BC 的长度换成 3、4、5，我们观察到最长边边长的平方等于另两边边长的平方和。根据勾股定理逆定理，三角形是直角三角形。所以 $\angle A$ 是直角。用正弦定理得 $\sin B = 0.8$ ， $\sin C = 0.6$ ，查表可知 $\angle B \approx 53^\circ$ ， $\angle C \approx 37^\circ$ 。

可以看出，对于直角三角形，由于有勾股定理作为“武器”，我们总可以破解三角形的边角关系。因此，我们需要“升级装备”，把勾股定理推广为对一般的三角形也适用的结论。为此，我们需要定义角的余弦。

什么是角的余弦呢？我们已经定义了角的正弦。在直角三角形中，锐角的正弦是对边长度与斜边长度之比。这个公式中我们用到了三角形的两条边。我们定义锐角的**余弦**（或**余弦值**）为剩余的直角边（也就是相邻的直角边）长度与斜边长度之比。在 MOB 的例子中，角 A 的余弦就是弦 BC 的弦心距，记为 $\cos A$ 。

显然，直角三角形中，一个锐角的邻边就是另一个锐角的对边。所以**锐角的余弦等于它的余角的正弦**：

$$\forall 0 \leq A \leq 90^\circ, \cos A = \sin(90^\circ - A).$$

这样我们就定义了**余弦函数**。零角的余弦是 1。从零角出发，随着角度增大，角的余弦逐渐减小。直角时，余弦值达到最小值 0。

此外，角的正弦和余弦分别是直角三角形两条直角边和斜边的比值。所

以根据勾股定理,

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1.$$

其中 $\cos^2 A, \sin^2 A$ 分别是 $(\cos A)^2, (\sin A)^2$ 的简便记法。这个结论也叫三角勾股定理。

怎么计算角的余弦值呢? 从三角勾股定理定理可以看出, 已知锐角的正弦, 就可以得到它的余弦: $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ 。所以, 可以查正弦表得到角的正弦值, 再求出余弦值。反过来, 已知锐角的余弦, 可以先算出它的正弦, 然后查表得到角度。

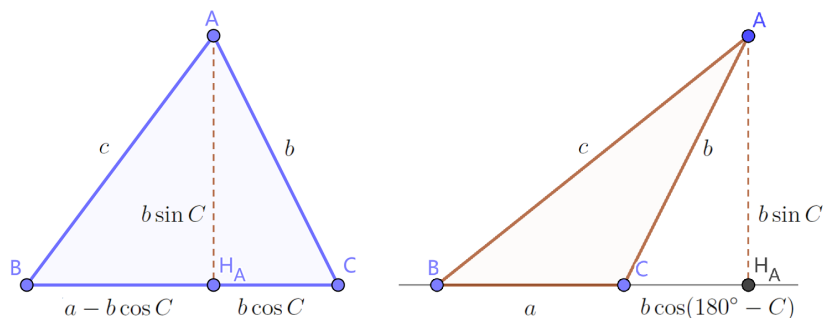
习题 3.3.1.

1. 从等腰直角三角形的性质出发, 计算 45° 的正弦和余弦值。
直角三角形 ABC 中, $\angle C$ 是直角。斜边长度 c 是直角边长度 a 的 2 倍。
2. 作斜边中点 M , 证明: $\triangle BMC$ 是正三角形。
3. 计算 30° 和 60° 的正弦和余弦值。
等腰三角形 ABC 中, 顶角 $\angle A$ 是底角 $\angle B$ 的 2 倍。
4. 设 $\angle B$ 的平分线交对边于点 D 。证明: $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ 。
5. 设底边长 $a = 1$, 腰长 $b = c = x$, 证明: $x^2 - x - 1 = 0$ 。
6. 计算 $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ$ 和 72° 的正弦和余弦值。

3.4 余弦定理

定义了角的余弦, 我们再来看前面“边边边”的问题 (例题 3.3.1 第一题)。如果 $\angle C$ 是直角, 那么根据勾股定理, 可以直接求出 AB 长度。如果 $\angle C$ 不是直角, 我们希望把问题转化为直角三角形的边角关系。

作顶点 A 到 BC 的高, 记垂足为 H_A , 则 $H_A \neq C$ 。 $\triangle ACH_A$ 是直角三角形, 所以 $|AH_A| = |AC| \sin C = b \sin C$ 。如果 $\angle C$ 是锐角, 那么 H_A 在线段 BC 上, $|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos C$; 如果 $\angle C$ 是钝角, 那么 H_A 在线段 BC 延长线上, $|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos(180^\circ - C)$ 。



$\triangle ABH_A$ 是直角三角形。根据勾股定理, $|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2$ 。如果 $\angle C$ 是锐角, 那么

$$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2 = |AH_A|^2 + (|BC| - |CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2 &= (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2 \\ &= b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2 C + a^2 - 2ab \cos C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}$$

我们得到了 a 、 b 、 c 和 $\angle C$ 的关系。这个关系叫做**余弦定理**。可以看出, $\angle C$ 为直角时, 余弦定理就变成了勾股定理。所以, 余弦定理是勾股定理的“升级版”, 勾股定理可以看作是余弦定理的特例。使用余弦定理, 我们可以解决例题 3.3.1 第一题。

解答. 根据余弦定理,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 50^\circ \approx 21.15.$$

因此 $c \approx \sqrt{21.15} \approx 4.6$ 。

用同样的方法, 能否解决第二题呢? 我们列出等式:

$$6^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos C$$

解得 $\cos C = -\frac{1}{15}$ 。显然，任何锐角或直角的余弦都不是负数。我们猜测，这是因为 C 是钝角，而前面的推导中， $\angle C$ 是锐角。

来看 $\angle C$ 是钝角的情况。如果 $\angle C$ 是钝角，那么

$$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2 = |AH_A|^2 + (|BC| + |CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2 &= (b \sin C)^2 + (a + b \cos(180^\circ - C))^2 \\ &= b^2 \sin^2 C + b^2 \cos^2(180^\circ - C) + a^2 + 2ab \cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

可以看到，对钝角三角形，余弦定理的表达式比锐角三角形复杂很多。把 $a = 3$ 、 $b = 5$ 、 $c = 6$ 代入钝角的余弦定理公式，我们发现难以解出 C 。公式中，含有 C 的项无法像锐角的情况里那样合并化简，原因在于我们没有定义钝角的余弦值，只能用锐角 $180^\circ - C$ 的余弦值来表示。

如何定义钝角的余弦值呢？钝角的正弦为其补角的正弦。我们希望钝角的余弦也满足三角勾股定理：

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

这就要求

$$\begin{aligned} \cos C &= \sqrt{1 - \sin^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(180^\circ - C)} \\ &= \pm \cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦： $\cos C = \cos(180^\circ - C)$ ，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos C.$$

如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦的相反数： $\cos C = -\cos(180^\circ - C)$ ，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

显然，后一种情况下，钝角三角形和锐角三角形余弦定理的形式就统一了。接下来我们会看到，后者在各个方面都更加合理。

习题 3.4.1.

1. 已知三角形三边长为 5、7、8，求三内角的大小。

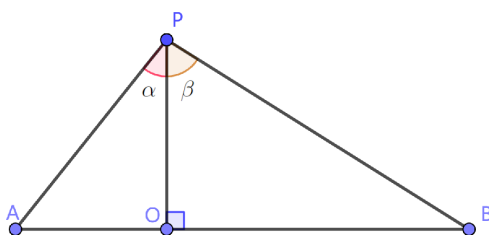
$\triangle ABC$ 中， $|AB| = 6, |BC| = 3, |CA| = 5$,

2. 求 $\angle A$ 的大小。

3. 求 $\angle B, \angle C$ 的大小。

3.5 和差角公式

解决平面形状的问题时，我们常常需要处理角度的和与差。给定两个角度 α 、 β ，我们希望能够给出 $\alpha + \beta$ 、 $\alpha - \beta$ 的正弦和余弦值。换句话说，我们希望能够打通正弦函数、余弦函数和实数的加减法的关系。



让我们从两个锐角的和出发。如上图， $\alpha = \angle APO$ 和 $\beta = \angle OPB$ 都是锐角， $OP \perp AB$ 。 $\triangle AOB$ 的面积是 $\triangle AOP$ 、 $\triangle BOP$ 面积之和。用相应的面积公式表示：

$$\frac{1}{2}|AP||BP| \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}|AP||OP| \sin \alpha + \frac{1}{2}|OP||BP| \sin \beta$$

因此：

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{|OP|}{|BP|} \sin \alpha + \frac{|OP|}{|AP|} \sin \beta$$

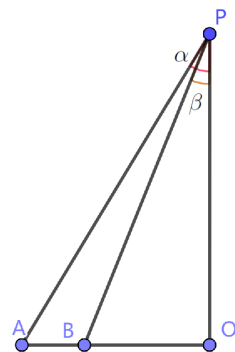
$\triangle AOP$ 、 $\triangle BOP$ 都是直角三角形，所以 $|OP| = |AP| \cos \alpha = |BP| \cos \beta$ 。
代入上式，就得到：

$$\forall 0 < \alpha, \beta < 90^\circ, \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

这就是两锐角之和正弦值的公式，简称**和角正弦公式**。可以验证，当 α 、 β 是零角或直角的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为 $0 \leq \alpha, \beta \leq 90^\circ$ 。

对于两锐角之差，可以用类似的方式推导。如右图，
设 $\alpha = \angle APO > \beta = \angle BPO$ ， $\triangle AOP$ 的面积是 $\triangle APB$ 、
 $\triangle OPB$ 面积之和。比照和角正弦公式的推导，可以得到：

$$\forall 0 < \beta < \alpha < 90^\circ, \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$



是为两锐角之差正弦值的公式，简称**差角正弦公式**。

可以验证，无论是当 α 、 β 是零角或直角的时候，还是 $\alpha = \beta$ 的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为 $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 90^\circ$ 。

注意到和角、差角正弦公式中都出现了角的余弦，我们可以据此推出和角、差角的余弦公式。首先，假设 α 、 β 、 $\alpha - \beta$ 都是锐角。从和角正弦公式出发，可以得到这样的关系：

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha - \beta + \beta) = \sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta.$$

这个等式中只有 $\cos(\alpha - \beta)$ 是未知的。根据差角正弦公式，可以得到：

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta \\ &= (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos^2 \beta - \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \sin \beta \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \sin \beta \cos(\alpha - \beta) &= \sin \alpha - \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \alpha \sin^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \beta (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)
 \end{aligned}$$

两边约去 $\sin \beta$, 就得到:

$$\forall 0 < \beta < \alpha < 90^\circ, \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta.$$

这就是两锐角之差余弦值的公式, 简称**差角余弦公式**。

同理, 假设 α 、 β 、 $\alpha + \beta$ 都是锐角, 从差角正弦公式出发, 可以得到:

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha) &= \sin(\alpha + \beta - \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta \\
 &= (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta \\
 &= \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \sin \beta \cos(\alpha + \beta) &= -\sin \alpha + \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= -\sin \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= -\sin \alpha \sin^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\
 &= \sin \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)
 \end{aligned}$$

两边约去 $\sin \beta$, 就得到:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

这就是两锐角之和余弦值的公式, 简称**和角余弦公式**。

要注意的是, 上面的推导中, 我们假设 α 、 β 、 $\alpha + \beta$ 是锐角。然而, 推导中涉及的项, 除了 $\cos(\alpha + \beta)$, 都不要要求 $\alpha + \beta$ 是锐角。另一方面, 在和

角余弦公式中, 只要确定了 α, β , 就能计算 $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 。所以, $\alpha + \beta$ 是直角或钝角时, 我们可以定义 $\cos(\alpha + \beta)$ 为关于 x 的方程:

$$x = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

的唯一解。这样, 我们就定义了钝角的余弦值。当然, 这样定义钝角余弦值, 不好理解。为了好理解, 我们仿照正弦, 给出互为补角的两角余弦的关系。这样, 通过单个锐角的余弦值, 就能得到钝角的余弦值了。

在和角余弦公式中, 令较大角为直角, 代入得到

$$\forall 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \cos(90^\circ + \beta) = -\sin \beta.$$

对锐角 β 来说, $90^\circ - \beta$ 也是锐角, 于是:

$$-\cos \beta = -\sin(90^\circ - \beta) = \cos(180^\circ - \beta).$$

这说明 $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$ 。互为补角的两角, 余弦值互为相反数。

上一节中, 我们让钝角的余弦等于其补角的相反数。现在我们看到, 这个选择是合理的。至此, 我们可以写出余弦定理的统一形式:

定理 3.5.1. 余弦定理 设三角形 ABC 的内角 A, B, C 对边长度分别为 a, b, c , 则

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

余弦定理说明, 三角形内角的余弦值, 决定了它对边边长的平方与另两边边长的平方和的大小关系。锐角的余弦值大于 0, 它对边边长的平方小于另两边边长的平方和。钝角的余弦值小于 0, 它对边边长的平方大于另两边边长的平方和。直角的余弦值是 0, 它对边边长的平方等于另两边边长的平方和。

回到例题 3.3.1 第二题。之前我们算出 $\cos C = -\frac{1}{15}$, 说明 C 是钝角。于是 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} \approx 0.9978$, 查表知锐角 $180^\circ - C \approx 86.2^\circ$, 即 $\angle C \approx 93.8^\circ$ 。同理, 可以算得 $\angle A \approx 29.9^\circ$, $\angle B \approx 56.3^\circ$ 。

我们用和角余弦公式定义了钝角的余弦。用同样的思路，我们考虑差角正弦公式：

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

上式对 $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 90^\circ$ 成立。现在我们把它扩展到 $\alpha < \beta$ 的情况。也就是说，对小于零角的角度 $\alpha - \beta$ ，我们定义 $\sin(\alpha - \beta)$ 是关于 x 的方程：

$$x = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

的唯一解。令 $\alpha = 0$ ，就得到：

$$\forall 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \sin(-\beta) = -\sin \beta.$$

我们再把这个关系扩展到钝角。这样，我们就定义了负平角到正平角之间所有角度的正弦值。

最后，考虑差角余弦公式：

$$\cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta.$$

比照差角正弦公式，对小于零角的角度 $\alpha - \beta$ ，我们同样可以定义 $\sin(\alpha - \beta)$ 是关于 x 的方程：

$$x = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta$$

的唯一解。令 $\alpha = 0$ ，就得到：

$$\forall 0 \leq \beta \leq 90^\circ, \cos(-\beta) = \cos \beta.$$

同样把这个关系扩展到钝角，我们就定义了负平角到正平角之间所有角度的余弦值。

注意到负平角到正平角经历了整个周角，因此，定义了负平角到正平角的正弦和余弦值，实际上就定义了所有角度的正弦和余弦值。至此，我们可以从锐角出发，得到所有角度的正弦、余弦，而且它们的关系与和差角公式相容。

例子 3.5.1.

1. 求 500° 的正弦、余弦值。
2. 求 -465° 的正弦、余弦值。

解答.

1. 首先加减周角，让角度落在负平角和正平角之间：

$$\sin 500^\circ = \sin 140^\circ, \quad \cos 500^\circ = \cos 140^\circ.$$

140° 是正钝角，因此取补角得到锐角：

$$\sin 140^\circ = \sin 40^\circ, \quad \cos 140^\circ = -\cos 40^\circ.$$

查表得到 $\sin 500^\circ = \sin 40^\circ \approx 0.6428$, $\cos 500^\circ = -\cos 40^\circ \approx -0.766$ 。

2. 首先加减周角，让角度落在负平角和正平角之间：

$$\sin -465^\circ = \sin -105^\circ, \quad \cos -465^\circ = \cos -165^\circ.$$

140° 是负钝角，取相反数变为正角，再取补角得到锐角：

$$\begin{aligned} \sin -105^\circ &= -\sin 105^\circ = -\sin 75^\circ, \\ \cos -105^\circ &= \cos 105^\circ = -\cos 75^\circ. \end{aligned}$$

查表得到 $\sin -465^\circ = -\sin 75^\circ \approx -0.9659$, $\cos -465^\circ = -\cos 75^\circ \approx -0.2588$ 。

综上所述，可以这样总结任意角的正余弦与锐角正余弦的关系：

求任意角的正弦：

1. 不断加减周角，直到角度落在 $(-180^\circ, 180^\circ]$ 中。
2. 如果是负角，取相反数变正角，结果取相反数。
3. 如果是钝角，取补角变锐角，结果不变。

求任意角的余弦：

1. 不断加减周角，直到角度落在 $(-180^\circ, 180^\circ]$ 中。
2. 如果是负角，取相反数变正角，结果不变。
3. 如果是钝角，取补角变锐角，结果取相反数。

习题 3.5.1.

1. 验证：和角、差角公式对负平角到正平角中的角度成立。
2. 证明正弦和余弦的倍角公式：

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 90^\circ, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

3. 证明正弦和余弦的半角公式：

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 180^\circ, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

4. 证明正弦和余弦的积化和差公式：

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

5. 证明正弦和余弦的和差化积公式：

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

5. 设平行四边形 $ABCD$ 的相邻两边长为 a, b , 两对角线长为 u, v , 证明： $u^2 + v^2 = 2a^2 + 2b^2$ 。

6. 设 $\triangle ABC$ 三边长分别为 a, b, c , 证明：

$$\sin A = \frac{\sqrt{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{2bc}.$$

7. 设 $\triangle ABC$ 周长的一半为 p , 证明： $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 。

8. $\triangle ABC$ 一边的长度是另一边的 2 倍。设 A 是 $\triangle ABC$ 最大的内角, 证明： $\cos A \leq 0.25$ 。

3.6 正切函数和余切函数

历史上,除了正弦函数和余弦函数,数学家们还发明了别的函数来讨论角度。**正切函数**和**余切函数**就是两种常用的函数。

如下图,单位圆的切线 l 与锐角 $\angle AOP$ 的终边交于 Q ,定义 $\angle AOP$ 的**正切(值)**为 $\tan \angle AOP = |AQ|$,**余切(值)**为 $\cot \angle AOP = \frac{1}{|AQ|}$ 。也就是说,我们用角截切线的长度来度量角的大小。按照定义,**同角的正切值和余切值互为倒数**。

和正弦、余弦一样,我们可以定义正切、余切函数。要注意的是,正切函数对零角和锐角有定义,但对直角没有定义。余切函数对锐角和直角有定义,对零角没有定义。

不难证明:

$$\forall 0 < \alpha < 90^\circ, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

换句话说,可以用锐角的正弦和余弦定义它的正切和余切。不难推出:

$$\forall 0 < \alpha < 90^\circ, \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha, \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$

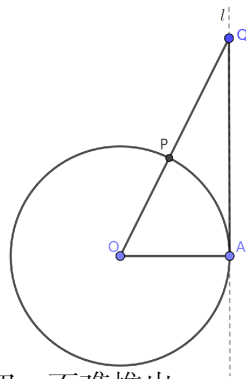
零角的正切是 0,直角的余切是 0。从零角开始,随着角度增大,正切值不断增大。从直角开始随着角度减小,余切值不断减小。 $\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$, 因此 $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$ 。

反过来,也可以用锐角的正切和余切定义它的正弦和余弦:

$$\forall 0 < \alpha < 90^\circ, \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}}, \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}}$$

对其他角度,我们保持正切、余切和正弦、余弦的关系,定义

$$\forall \alpha, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



这样，除去分母为零的情况，我们定义了任意角的正切和余切。

从正弦和余弦的和差角公式，可以推出正切和余切的和差角公式：

$$\forall 0 \leq \alpha, \beta < 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

$$\forall 0 < \alpha, \beta \leq 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}\cot(\alpha + \beta) &= \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta} \\ \cot(\alpha - \beta) &= \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha - \cot \beta}\end{aligned}$$

以上关系可以简写为：

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}\end{aligned}$$

除去分母为零的情况，任意角的正切和余切也满足以上的和差角公式。

三角形中，内角之和为平角。因此，两角之和的正切值是第三个角正切

值的相反数:

$$\begin{aligned}\tan C &= \tan(180^\circ - (A + B)) = -\tan(A + B) \\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.\end{aligned}$$

于是:

$$\begin{aligned}\tan C(1 - \tan A \tan B) &= -\tan A - \tan B, \\ \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C.\end{aligned}$$

定理 3.6.1. 正切定理 三角形内角的正切值之和等于它们的乘积。

正切定理和正弦定理、余弦定理不同。它并不涉及三角形的边,是纯粹关于角的定理。使用正切定理无法解决边角关系的问题,但可以比较方便地给出三角形内角的关系。利用正切和余切的倒数关系,可以写出关于余切的类似结论:

定理 3.6.2. 余切定理 三角形 ABC 内角的余切值满足:

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1.$$

习题 3.6.1.

1. 证明正切和余切的倍角公式:

$$\begin{aligned}\forall 0 < \alpha < 45^\circ, \quad \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}\end{aligned}$$

2. 证明正切和余切的半角公式:

$$\begin{aligned}\forall 0 < \alpha < 180^\circ, \quad \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \\ \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}\end{aligned}$$

定义锐角 α 的**正割值** ($\sec \alpha$) 和**余割值** ($\csc \alpha$):

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

3. 证明: 锐角的正割等于它的余角的余割, 锐角的余割等于它的余角的正割。

4. 证明: $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$, $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$.

5. 证明**万能公式**:

$\forall 0 < \alpha < 180^\circ$, 记 $\tan \frac{\alpha}{2} = t$, 则:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2t}{1+t^2}, & \tan \alpha &= \frac{2t}{1-t^2}, & \sec \alpha &= \frac{1+t^2}{1-t^2}, \\ \cos \alpha &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, & \cot \alpha &= \frac{1-t^2}{2t}, & \csc \alpha &= \frac{1+t^2}{2t}. \end{aligned}$$

3.7 多边形的边角关系

多边形的边和角没有直接对应关系。因此, 多边形的边角关系, 要通过对角线来间接建立。比如, 圆内接凸四边形 $ABCD$ 中, 对角之和为平角。根据余弦定理,

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos \angle ABC \\ &= |AD|^2 + |DC|^2 - 2|AD||DC|\cos \angle CDA \end{aligned}$$

于是, 我们得到圆内接凸四边形的内角和四边边长的关系:

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= -\cos \angle CDA = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |CD|^2 - |DA|^2}{2(|AB||BC| + |CD||DA|)}, \\ \cos \angle BCD &= -\cos \angle DAB = \frac{|BC|^2 + |CD|^2 - |DA|^2 - |AB|^2}{2(|BC||CD| + |DA||AB|)}. \end{aligned}$$

另一个例子是正多边形。设单位圆 O 的内接正 n 边形边长为 b_n , 连接圆心 O 和相邻两顶点 A, B , $\triangle OAB$ 是等腰三角形。正 n 边形内角为

$\alpha_n = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$, 因此 $\angle OAB = -\angle OBA = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{(n-2)90^\circ}{n}$, $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ 。
根据正弦定理,

$$\frac{b_n}{\sin \angle AOB} = \frac{1}{\sin \angle OAB}.$$

因此

$$b_n = \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{\sin \frac{(n-2)90^\circ}{n}} = \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{\cos \frac{180^\circ}{n}}.$$

为了方便, 记 $\beta_n = \frac{180^\circ}{n}$, 则 $b_n = \frac{\sin 2\beta_n}{\cos \beta_n} = 2 \sin \beta_n$ 。于是, 正 n 边形的周长是 $nb_n = 2n \sin \beta_n$ 。

习题 3.7.1.

1. 求单位圆内接正 12 边形的周长。

设圆内接四边形 $ABCD$ 面积为 S , 周长为 $2p$,

2. 证明 $S = \frac{1}{2} \sin \angle ABC (|AB||BC| + |CD||DA|)$ 。

3. 证明 $S^2 = (p - |AB|)(p - |BC|)(p - |CD|)(p - |DA|)$ 。

4. 对一般的四边形 $ABCD$, 如何用 $|AB|, |BC|, |CD|, |DA|$ 和 $\frac{\angle ABC + \angle CDA}{2}$ 表示它的面积 S ?

第四章 从或许到确定

预测未来，是人类社会的重要活动。合理有效地预测未来，是社会文明进步的标志。中华文明作为农耕文明，很早就懂得预测未来的重要性。历法、史书、节气，都是我们的祖先为了后人更好地预测未来，留下的经验总结。

生产活动中，预测尤其重要。比如，农牧业、渔业、运输业等行业需要预测天气，销售行业需要预测产品的市场需求。科学研究和工程制造中，如果能够提前知道产品在各种各样的情境和场景下的性能，可以节约大量人力物力。社会要发展，就需要更高的预测水平。

4.1 事件和见知

如何判断某件事情将来会不会发生？我们要依赖已有的知识和经验。日常生活中，我们会说“明天大概要下雨”、“今年冬天肯定很冷”、“我明天大概去不了了”。根据已有条件，有些事情必然发生，有些事情或许会发生，有些事情不可能发生。事情发生与否，取决于某些条件。我们把这样的事情叫作**随机事件**，简称**事件**。在已知条件下，如果某事件必然发生，就说它是**必然事件**；如果某事件必然不发生，就说它是**不可能事件**；如果某事件或许会发生，就说它是**或然事件**。数学中，研究这些事情的理论叫作概率论。

概率论假定，我们关心的随机事件有某些恒定的内在规律，受某些固

有未知因素的影响。概率论通过研究这些内在规律和因素，预测事件是否会发生。

如何描述一个事件？从客观的角度，我们可以把“发生一件事”看成事物状态、形势局面的改变。一件事是否发生，可以用改变后的状态或局面表示。我们也许无法确定未来事物发展成哪个状态、形势走向哪个局面，但我们可以事先确定事物未来所有可能的状态、所有可能出现的局面。

比如，我们无法确定明天杭州是否下雨，但我们知道，在明天杭州是否下雨这个问题上，只可能出现两个结果：下雨或不下雨。又比如，我们投一个骰子前，无法确定朝上一面的点数，但我们知道，投出的骰子最终只有六个状态：朝上一面是 1, 2, 3, 4, 5 或 6 点。这些最终状态、局面是**互斥**的。比如明天杭州不可能既下雨又不下雨，骰子停下之后不可能既是 1 点朝上又是 2 点朝上。

我们把所有可能的最终状态或局面看成一个集合，集合中的每个元素称为事情的**终态或结果**。比如，考虑明天杭州是否下雨这个问题时，所有结果构成 {下雨, 不下雨} 这个集合，每次投骰子时，骰子的终态构成 {1, 2, 3, 4, 5, 6} 这个集合。我们把这个集合叫作**终集**，即终态的全集。我们可以把相关的事件用终集的子集表示。比如，“明天杭州下雨”对应 {下雨} 这个子集，“骰子点数是偶数”对应 {2, 4, 6} 这个子集。事物发展的终态如果在子集里，就说明事件发生了，否则事件没有发生。

单元集也对应着事件。我们把这些事件叫做**基本事件**。不是任何其他事件的交集的事件，叫做基本事件。比如 {1} 对应的“骰子点数是 1”就是基本事件。基本事件是各种事件的“基本单元”，它们通过合并形成别的事件。基本事件之间是互斥事件，它们是终集的分划。

终集可以是有限的，也可以是无限的。目前我们只讨论有限的情况。要注意的是，随着问题的条件、环境、思考问题的角度发生变化，终集也会变化。比如，我们考虑明天杭州下雨的问题时，可能要把准备经过杭州的台风“凤凰”也考虑在内。台风“凤凰”也许继续靠近，也许转向。这时，我们

的终集是：

{台风靠近且下雨, 台风靠近且不下雨, 台风转向且下雨, 台风转向且不下雨}

而“明天杭州下雨”对应子集 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}。

对于随机事件，如果我们知道得更多，就能作出更准确的预测。比如，如果我们不知道台风的情况，那么即便我们把终集依照“台风是否继续靠近”划分，我们能把握的也只是 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}、{台风靠近且不下雨, 台风转向且不下雨} 两个事件，与 {下雨}, {不下雨} 并没有不同。如果我们掌握了台风的动向，我们就希望把 {下雨} 分成 {台风靠近且下雨} 和 {台风转向且下雨} 来讨论了。可以说，随着我们对事物、形势的认知增加，我们的终集会越来越“细”。

为了描述认知增加的过程，我们从最“细”的终集出发，定义每个阶段的**知集**，代替不同阶段的终集。知集是最“细”终集的子集构成的集合，满足：

1. 空集属于知集；
2. 如果集合 A 属于知集，那么 A 的补集也属于知集；
3. 如果集合 A 和 B 属于知集，那么它们的并集也属于知集。

知集表示我们每个阶段的认知。我们根据当前的认知来讨论各种事件。比如，在杭州下雨的例子中，可以有两个知集，分别是：

$$S_1 = \{\emptyset, \{AR, DR\}, \{AN, DN\}, \{AR, AN, DR, DN\}\}$$

和

$$S_2 = \{\emptyset, \{AR\}, \{AN\}, \{DR\}, \{DN\}, \{AR, AN\}, \{AR, DR\}, \{AR, DN\}, \\ \{AN, DR\}, \{DN, AN\}, \{DR, DN\}, \{AR, AN, DR\}, \{AR, AN, DN\}, \\ \{AR, DR, DN\}, \{AN, DR, DN\}, \{AR, AN, DR, DN\}\}$$

其中 AR, AN, DR, DN 分别表示“台风靠近且下雨”、“台风靠近且不下雨”、“台风转向且下雨”和“台风转向且不下雨”。可以看出, S_1 是 S_2 的子集。 S_1 到 S_2 的过程, 就是对台风认知加深的过程。

这种描述下, 不同的知集就对应不同“粗细”的终集。每个知集都对应自己的基本事件。这时候的基本事件不一定是单元集。比如, $\{AR, DR\}$ 在 S_1 中是基本事件, 在 S_2 中就不是基本事件了。

习题 4.1.1. 写出以下问题的终集和知集。

1. 我国朱鹮从东北省份向南迁徙的路线有三条: 西线、中线和东北线。小明想知道黑龙江省的某只朱鹮沿哪条路线南迁。

2. 某航空公司规定: 作为补偿, 飞机晚点一小时以上, 返还全票票价的 40%; 如果晚点三小时以上, 返还全票票价的 75%。乘客实际购票价低于前述返还价格的, 返还乘客实际购票价。航班因晚点取消, 且乘客自愿接受转乘下一班机的, 公司协助补票, 实施“就低返利”政策: 按照下一班机实时票价和乘客最初购票价的较低者计算新票价, 多则退还差价; 并另外补偿新票价的 30%。某乘客购票后, 在候机时被告知飞机可能晚点, 他试着分析可能得到的晚点补偿。

4.2 概率和分布

预测随机事件时, 我们除了关心会发生什么事情, 还关心事情有多大可能发生。当我们说“这事百分之百能成”, “他八成还在路上”, “他的话只有三分准头”, 我们认为某些事情比另一些事情更可能发生。习惯上, 我们用数来描述事情有多大可能发生。在数学中, 我们把这个做法称为**事件的概率**。

我们用不大于 1 的非负实数表示事件的概率。约定不可能事件的概率是 0, 必然事件的概率是 1, 事件的概率越大, 越有可能发生。此外, 事件的概率应当和事件之间的关系相符。两个互斥事件同时发生的概率应该是

0, 至少有一个发生的概率应该是它俩概率的和。

用集合的语言来说, 空集的概率应该是 0, 终集的概率应该是 1; 两个集合不相交, 那么它们的并集的概率等于它们概率的和。

我们习惯用映射 \mathbb{P} 来记录概率, 把事件 A 的概率记为 $\mathbb{P}(A)$ 。比如, “明天八成会下雨”, 可以写成 $\mathbb{P}(\{\text{明天下雨}\}) = 0.8$ 。不至于混淆时, 也可以省略表示集合的大括号, 写成: $\mathbb{P}(\text{明天下雨}) = 0.8$ 。

基本事件两两互斥, 并集是终集 (全集)。所以, 基本事件的概率之和等于 1。

一般来说, 由于每个事件都是知集的子集, 两个事件互斥时, 它们的概率之和等于它们的并集的概率。比如, 两个事件对立的时候, 它们的概率之和就是全集的概率, 也就是 1:

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$$

举例来说, 投骰子的时候, 我们一般认为投出 1, 2, 3, 4, 5, 6 点的可能性都一样大, 即每个基本事件的概率都相等。于是它们各自的概率是六分之一。据此, 可以算出任何事件的概率。比如, “投出 5 点或以上” 的概率是 “投出 5 点” 的概率加上 “投出 6 点” 的概率, 也就是三分之一。如果我们知道骰子有问题, 比如投出 6 点的可能性是其他任一点数的 2 倍, 那么 “投出 6 点” 的概率是七分之二; 投出其他点数, 比如 “投出 3 点” 的概率是七分之一; 而 “投出 5 点或以上” 的概率是七分之三。

终集是有限集合的时候, 只要知道了知集中每个基本事件分配到的概率 (称为**概率分布**), 就可以推出知集里其他事件的概率。

如果某些事件 B_1, B_2, \dots, B_k 两两互斥, 那么它们和另一事件的交集也两两互斥。因此, 设 B_1, B_2, \dots, B_k 的并集为 B , 则这些交集的概率之和等于它们的并集, 也就是 $A \cap B$ 的概率:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \dots + \mathbb{P}(A \cap B_k)$$

如果并集 B 是全集，那么 $A \cap B = A$ ，上式变成：

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \cdots + \mathbb{P}(A \cap B_k)$$

也就是说，如果某个问题中，我们不重复也不遗漏地列举了若干种情况，那么任何事件的概率，都等于该事件分别在这些情况下发生的概率之和。比如说，我们知道明天杭州要么下雨，要么不下雨。因此，事件“明天杭州气温低于 10 摄氏度”的概率等于“明天杭州下雨且气温低于 10 摄氏度”的概率与“明天杭州不下雨且气温低于 10 摄氏度”的概率之和。

两个事件 A, B 有交集时，可以考虑它们各自减去交集剩下的部分，分别记为 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 。 $A \setminus B$ 就是属于 A 但不属于 B 的终态的集合， $B \setminus A$ 就是属于 B 但不属于 A 的终态的集合。集合 $A \setminus B$ 、 $B \setminus A$ 、 $A \cap B$ 两两不相交，它们的并集是 $A \cup B$ 。因此，

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

另一方面，由于 $A \setminus B$ 和 $A \cap B$ 不相交，并集为 A ，所以 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)$ ；同理 $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$ 。带入上面的式子，就得到：

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

这个关系和容斥原理的形式是一样的。

思考 4.2.1.

1. 同一个终集下的不同知集中，同一个事件的概率是否相同？
2. 事件的概率和集合的元素个数有什么关系？为什么有这样的关系？

4.3 二项分布和均匀分布

我们来看两种简单的概率分布。

考虑只有两个终态 a, b 的终集，两个基本事件 $\{a\}, \{b\}$ 概率之和是 1。设其中一个的概率是 p ，则另一个的概率是 $1 - p$ 。我们把这样的概率分布叫作**二项分布**。举例来说，如果我们认为明天杭州下雨的概率是 0.7，不下雨的概率就是 $1 - 0.7 = 0.3$ 。我们说，我们认为明天杭州下雨的问题服从二项分布。

又比如：抛一枚硬币，我们认为正面朝上的概率是 0.52，那么反面朝上的概率就是 $1 - 0.52 = 0.48$ 。我们说，我们认为抛这枚硬币的问题服从二项分布。为了好说话，我们会在两个基本事件中选一个我们更关心的，称为**正面事件**，把另一个称作**反面事件**。如果正面事件的概率是 p ，就说问题服从系数为 p 的二项分布。

终集为 $\{a, b\}$ 的二项分布，包括四个事件，分别对应 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ 四个子集。设 $\{a\}$ 是正面事件，概率为 p ，那么这四个事件的概率分别是 0、 p 、 $1 - p$ 和 1。

对于元素更多的终集，情况更加复杂。我们考虑一种简单情形：每个基本事件的概率相等。这样的概率分布称为**等概率分布**或**均匀分布**。比如，投骰子时，如果我们认为每面朝上的概率都相等，就说投骰子服从均匀分布。

假设终集有 n 个终态，那么每个基本事件的概率就是 $\frac{1}{n}$ 。对于任意事件，我们可以数一下事件包含了几个终态，用终态个数除以所有终态的个数，就是它的概率。我们把这个性质写作：

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

其中 $|A|$ 表示事件 A 作为集合的元素个数， $|S|$ 表示终集 S 的元素个数。比如，服从均匀分布的投骰子问题中，要求“大于 2 点”的概率，我们数一下事件 $\{3, 4, 5, 6\}$ ，它包含了 4 个终态，所以“大于 2 点”的概率是 $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 。

习题 4.3.1.

1. 把 1 到 100 分别写在小纸条上放入黑箱里，随意抽取一张，抽到的数是素数的概率是多少？完全平方数的概率是多少？各位数字乘积大于 10

的概率是多少?

2. 有没有以全体自然数为终集的均匀分布? 为什么? 说说你的理由。

4.4 排列和组合

均匀分布的问题里, 事件的概率只和它包含的终态的个数以及所有终态的个数有关。因此, 在相关的一些问题里, 我们关心如何计出事件包含的终态的个数。

例子 4.4.1. 将编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一行, 最左边的球是 1 的概率是多少?

要知道事件“最左边的球是 1”的概率, 用“最左边的球是 1”包含的终态个数除以所有终态的个数。怎么计算“最左边的球是 1”包含的终态个数和所有终态的个数呢?

首先考虑所有终态的个数: 将编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一行, 有多少种方法?

不妨设三个球从左到右排列。无论排列方式如何, 三个球分别占据“左”、“中”、“右”三个位置。从左边开始, 把球一个个放到位置上。左边的位置可以放三个球中任何一个, 因此有 3 种方法。按任一种方法放好左边的球以后, 中间的位置可以放剩余两个球中任何一个, 因此有 2 种方法。按任一种方法放好中间的球以后, 右边的位置可以放最后一个球, 只有 1 种方法。于是一共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种方法。

如果最左边的球是 1, 有多少种方法? 这时左边的位置已经放好了 1 号球, 因此中间的位置还有两种放法。任一种方法放好中间的球以后, 右边的位置放最后一个球, 只有 1 中方法。因此, 一共有 $2 \times 1 = 2$ 种方法。

综上所述,“最左边的球是 1” 的概率是:

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是1}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

我们把 n 个互不相同的物品排成一系列的方法数目称为 n **排列数**, 记作 P_n 。比如, 编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一系列的方法数目就叫做 “3 排列数”, 记作 P_3 。

对于一般的自然数 n , n 排列数是 $n-1$ 排列数的 n 倍。这是因为, 如果把 n 个互不相同的物品排成一系列, 第一个位置总可以放 n 个物品中的任何一个, 有 n 种方法。按任一种方法放好第一个位置后, 剩下的 $n-1$ 个位置摆放剩下的 $n-1$ 个物品的方法数目, 恰好就是 $n-1$ 排列数。

因此, 用归纳法可以证明, n 排列数就是 n 乘以 $n-1$ 乘以 $n-2 \cdots$ 直到乘以 1 的乘积。比如, 5 排列数就是 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 。

如果我们把从 n 乘到 1 的计算看成关于 n 的函数的话, 这个函数叫做 (n 的) **阶乘**, 记作 $n!$ 。 n 排列数就是 n 的阶乘。

例子 4.4.2. 将 3 个红球和 2 个白球组成一系列, 最左边的球是红球的概率是多少?

我们仍然先计算 3 个红球和 2 个白球组成一系列的方法数。这里球只有红白两种颜色的分别。同色的球没有差别。如果我们把球编号, 1, 2, 3 号球是红球, 4, 5 号球是白球, 那么, 按照编号排列, 有 $5! = 120$ 种方法。不过, $1-2-3-4-5$ 和 $2-3-1-4-5$ 其实是同一种方法。因为 1, 2, 3 号球都是红球, 并没有差别。把 $1-2-3-4-5$ 里的 3 个红球任意改变次序, 都不影响结果。同理, 把 $1-2-3-4-5$ 里的 2 个白球任意改变次序, 都不影响结果。3 个红球的排列方法有 $3! = 6$ 种, 2 个白球的排列方法有 $2! = 2$ 种, 于是这 $6 \times 2 = 12$ 种方法都对应同一种结果。也就是说, 带编号的 12 个排列方法对应一种不带编号的排列方法。因此, 实际上只有 $\frac{5!}{3!2!} = 10$ 种排列方法。

我们把不带编号的排列方法称为**组合数**或**选列数**。比如, 3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目叫做“3,2 组合数”, 或“5 选 3”(因为也可以看作从 5 个位置里选 3 个放红球), 记作 C_5^3 或 $\binom{5}{3}$ 。

如果最左边的球是红球, 那么剩下的 4 个位置要放 2 个红球、2 个白球。于是, 一共有 C_4^2 种方法。计算可知:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6.$$

即一共有 6 种方法。因此最左边的球是红球的概率是:

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是红球}) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

一般来说, “ n 选 m ” 也可以用阶乘计算:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

容易发现: “ n 选 m ” 等于 “ n 选 $n-m$ ”。比如, 5 选 3 等于 5 选 2。用红球和白球的例子, 可以理解为: 3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目, 等于 3 个白球和 2 个红球组成一列的方法数目。

掌握了排列数和组合数, 我们就可以计算一些复杂问题里终态的个数。

习题 4.4.1.

1. 5 个红球和 3 个白球排成一列, 有多少种方法?
2. 2 个红球、3 个白球和 2 个黄球排成一列, 有多少种方法?
3. 从编号 1,2,3,4,5 的 5 个球中选出 3 个排成一列, 有多少种方法? 这个数目叫做 5,3 排列数。试求一般情况下 n, m 排列数 (从编号为 1 到 n 的 n 个球中选出 m 个排成一列的方法数目) 的公式。
4. 设有两个正整数 $m < n$, 证明: $m!$ 整除 $n!$ 。

第五章 三段论

我们已经学习过换质法和换位法。它们都属于直接推理，即通过一个前提得出一个结论。通过多个前提得出结论，称为**间接推理**。**三段论**是一种常见的间接推理。

5.1 三段论的结构

三段论是由三个判断构成的推理，一共涉及三个概念，每个判断中的主语和断语分别涉及一个概念，每个概念在两个判断中各出现一次。例如：

- ①所有的科学规律都是不以人们的意志为转移的。
- ②物理学规律是科学规律。
- ③所以，物理学规律是不以人们的意志为转移的。

就是一个三段论。它包含两个前提（①和②）和一个结论（③）共三个判断，涉及三个概念：“科学规律”、“物理学规律”和“不以人们的意志为转移的”。每个概念在两个判断中分别出现一次。比如“科学规律”就在①和②中各出现一次。

组成三段论的每个判断可以是简单判断，也可以是复合判断。这里我们只研究由三个简单判断组成的三段论。

我们把三段论涉及的三个概念称为**大项**、**中项**和**小项**。大项是结论的断语中出现的概念，中项是在两个前提中分别出现的概念，小项是结论的主语中出现的概念。以上的例子中，“不以人们的意志为转移的”是大项，“科学规律”是中项，“物理学规律”是小项。小项和大项除了在结论中出现，还各在前提中出现一次。出现大项的前提称为**大前提**，出现小项的前提叫做**小前提**。以上的例子中，①是大前提，②是小前提。

中项在两个前提中各出现一次，每次可以是主语或断语。因此，它出现的位置一共有 4 种情况：

$$\begin{array}{lcl}
 \text{中} \rightarrow \text{大}, & \text{中} \rightarrow \text{小} & \Rightarrow \text{小} \rightarrow \text{大} \\
 \text{大} \rightarrow \text{中}, & \text{小} \rightarrow \text{中} & \Rightarrow \text{小} \rightarrow \text{大} \\
 \text{小} \rightarrow \text{中}, & \text{中} \rightarrow \text{大} & \Rightarrow \text{小} \rightarrow \text{大} \\
 \text{大} \rightarrow \text{中}, & \text{中} \rightarrow \text{小} & \Rightarrow \text{小} \rightarrow \text{大}
 \end{array}$$

其中 $\text{大} \rightarrow \text{中}$ 表示主语是大项，断语是中项，其余类似。可以看出，中项是连接小项和大项的“桥梁”。

习题 5.1.1. 判断以下推理是否是三段论：

1. 雷锋是人民的儿子；我是人民；所以，雷锋是我的儿子。
2. 有些金丝猴生活在山上；所有生活在山上的动物都是陆生动物；所以，金丝猴是陆生动物。
3. 所有的公麋鹿都有角；所有的母麋鹿都没有角；所以，有角的麋鹿都不是母麋鹿。
4. 海豚可以发出超声波；超声波可以判断胎儿性别；所以，海豚可以判断胎儿性别。
5. 1990 年前出生的马耳他人是欧盟公民；1990 年前出生的欧盟公民可以领取埃提尔奖学金；所以，1990 年前出生的马耳他人可以领取埃提尔奖学金。
6. 雪豹生活在海拔较高的地区；雪豹是肉食动物；所以，雪豹是生活在海拔较高地区的肉食动物。

5.2 三段论的规则

三段论只是一种推理形式。不是每个三段论都是正确的推理。比如，以下的推理就是错误的。

所有鱼都生活在水里。
所有的鲸鱼都生活在水里。
所以，所有的鲸鱼都是鱼。

正确的三段论推理，必须满足几个规则。

1. 前提中讨论的概念如果不周延，它在结论中也不周延。
这个规则和换位法是一样的。

例子. 以下的三段论是错误的：

所有莲花牌棉被都采用了提花工艺。
所有莲花牌棉被都使用新疆长绒棉。
所以，所有采用了提花工艺的棉被都使用新疆长绒棉。

错误原因：小项“采用了提花工艺的棉被”在小前提中不周延，但在结论中周延。改为“有些采用了提花工艺的棉被使用新疆长绒棉”则正确。

2. 中项至少周延一次。
中项是连接小项和大项的“桥梁”。中项在两个前提里都不周延，那么两个前提中涉及的可能是中项不同的部分。这样中项就无法连接小项和大项了。

例子. 以下的三段论是错误的：

所有个位为 7 的数都是整数。
有些整数是完全平方数。
所以，所有个位为 7 的数是完全平方数。

错误原因：中项“整数”两次都不周延。“个位为 7 的数”和“完全平方数”涉及的是不同的整数。

3. 前提不能都是否定判断。

否定判断中，主语对应的集合与断语对应的集合的交集为空集。比如，“所有二年级的老师都不住在福明小区”表示“所有二年级的老师”集合和“住在福明小区的老师”集合的交集为空集。如果两个前提都是否定判断，那么中项对应的集合和大项、小项对应的集合都不相交，我们无法判断小项和大项的关系。

例子：以下的三段论是错误的：

有些树叶不是白色的。

所有的兔子都不是树叶。

所以，所有的兔子都不是白色的。

错误原因：两个前提都是否定判断。所以我们无法确定“兔子”和“白色”的关系。

4. 前提中有否定判断，则结论必须是否定判断。前提都是肯定判断，则结论必须是肯定判断。

同上一条规则的思路。否定判断表示主语、断语对应的集合的交集为空集，而肯定判断表示它们的交集不是空集。前提如果有否定判断，那么中项和某一项的交集为空，所以无法用来推出另两项相交；如果前提总是肯定判断，那么中项和另两项的交集都不是空集，所以无法用来推出另两项交集为空。

例子：以下的三段论是错误的：

有些树叶是绿色的。

所有的兔子都不是树叶。

所以，有些绿色的东西是兔子。

错误原因：前提中有否定判断，而结论为肯定判断。改为“有些绿色的东西不是兔子”则正确。

只要符合以上所有规则，就是正确的三段论。只要不符合任一条规则，就是错误的三段论。

从这些规则，可以导出几个比较简单的判定依据。要注意这几个依据只起“一票否决”的作用，即便三段论符合这些依据，也不一定正确。

1. 前提中必须有全判断。

证明. 根据规则 3，两个前提不能都是否定判断。如果两个前提都是肯定判断，那么两者的断语都不周延。然而根据规则 2，中项至少周延一次，所以必然在某个前提的主语周延。如果恰有一个前提是否定判断，则根据规则 4，结论是否定判断，即大项在结论中周延。因此，根据规则 1，大项在前提中周延。考虑中项的位置，根据规则 2，要么中项在主语周延，于是前提中有全判断；要么中项在否定判断里做断语周延。后一种情况下，另一个前提是肯定判断，断语不周延，所以大项不在前提的断语中，而在主语中。这说明主语周延。综上所述，总有一个前提主语周延，即是全判断。 □

例子. 以下的三段论是错误的：

有些学生是戏剧社成员。

有些学生是校篮球队成员。

所以，有些戏剧社成员是校篮球队成员。

错误原因：两个前提都是有判断，无法得出任何结论。

2. 如果某前提是有判断，则结论是有判断。

证明. 根据规则 3，两个前提不能都是否定判断。如果两个前提都是肯定判断，那么两者的断语都不周延。然而根据规则 2，中项至少周延一次，所以必然在某个前提的主语周延，于是另一个前提主语不周延。这说明大项和小项在前提中都不周延。根据规则 1，小项在结论中不周延。如果恰有一个前提是否定判断，则根据规则 4，结论是否定判断，即大项在结论中周延。因此，根据规则 1，大项在前提中周延。根据上一个准则，前提中必须有全判断，因此两个前提一个是有

判断，一个是全判断。于是前提中恰有两个概念周延：有判断的主语和否定判断的断语。这两个概念必然一个是大项，另一个是中项，所以小项总不周延。根据规则 1，小项在结论中也不周延。综上所述，小项在结论中不周延，即结论是有判断。□

例子. 以下的三段论是错误的：

有些树叶是绿色的。

所有树叶都会腐烂。

所以，所有绿色的东西都会腐烂。

错误原因：小前提是有判断，所以结论应该是有判断。改为“有些绿色的东西会腐烂”则正确。

3. 大前提是有判断，小前提是否定判断，则无法得出结论。

证明. 顺着上一个依据的证明思路，大前提是有判断，主语不周延；小前提是否定判断，说明大前提是肯定判断，断语不周延。因此大项在前提中不周延。反设能得出结论，根据规则 4，结论是否定判断，大项在结论中周延。这与规则 1 矛盾！因此假设不成立，无法得出结论。□

例子. 以下的三段论是错误的：

有些四院职工参与了联合险。

所有事故伤者都不是四院职工。

所以，所有事故伤者都没有参与联合险。

错误原因：大前提是有判断，小前提是否定判断，我们无法在“事故伤者”和“参与了联合险”之间建立关系。

习题 5.2.1. 判断以下的推理是否成立。如果不成立，违反了哪条规则：

1. 所有的维纳过程都是马尔可夫过程；所有的维纳过程都是鞅；所以，有些马尔可夫过程是鞅。
2. 有些香港居民不是中国人；所有香港居民都有权决定香港的命运；所以，有些中国人无权决定香港的命运。

3. 所有的猫科动物都不是两栖动物；所有的花豹都是猫科动物；所以，所有花豹都不是两栖动物。

4. 有些有理数是无限循环小数；所有整数都是有理数；所以，有些整数是无限循环小数。

5. 我国的历史古迹分布于全国各地；龙门石窟是我国的历史古迹；所以，龙门石窟分布于全国各地。

6. 有些化合物不是有机物；所有的化合物都不是单质；所以，有些有机物不是单质。

第六章 多元映射

我们已经学习过映射。映射表示事物之间的对应关系。映射涉及两个集合：出发集和到达集。至今为止，我们接触的映射，都是把出发集里的一个元素对应到到达集里的一个元素。除了这种对应方式，现实生活中还有别的对应方式。

6.1 映射与多元映射

例子 6.1.1.

1. 某公司希望清点各个门店过去一年各个月份的销售额。

| 门店 | 月份 | 销售额 |
|-------|----|-------------|
| 大连 01 | 1 | ¥ 121902.54 |
| 上海 03 | 4 | ¥ 204361.08 |
| 武汉 01 | 2 | ¥ 194720.10 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

2. 某次全市联考的名册。

| 学校 | 班级 | 姓名 | 准考证号 |
|----------|----------|----------|----------|
| 立德中学 | 初三 (1) 班 | 张三 | A00281 |
| 师大附中 | 初三 (6) 班 | 李四 | A00916 |
| 第六中学 | 初三 (3) 班 | 王五 | F00045 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |

第一个例子里，我们可以建立这样的对应关系：

$$\begin{aligned}
 f: \text{门店} \times \text{月份} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\
 f(\text{大连01}, 1) &= 121902.54, \\
 f(\text{上海03}, 4) &= 204361.08, \\
 f(\text{武汉01}, 2) &= 194720.10, \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

第二个例子里，我们可以建立这样的对应关系：

$$\begin{aligned}
 f: \text{学校} \times \text{班级} \times \text{姓名} &\rightarrow \text{准考证号} \\
 f(\text{立德中学}, \text{初三 (1) 班}, \text{张三}) &= A00281, \\
 f(\text{师大附中}, \text{初三 (6) 班}, \text{李四}) &= A00916, \\
 f(\text{第六中学}, \text{初三 (3) 班}, \text{王五}) &= F00045, \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

从多个出发集中各取一个元素，与到达集里的一个元素对应。这样的对应关系叫做**多元映射**。它把多个元素对应到一个元素。为了区别，我们把一个元素对应到一个元素的对应关系叫做**一元映射**。事实上，多元映射也可以看作一种特殊的一元映射，但在这个阶段我们不讨论这个问题，姑且认为它们是有区别的。以下提到“映射”，如果不特别指出，一般指一元映射。

多元映射也和映射一样，有自变量和应变变量。多元映射的自变量是多个集合中的元素按顺序组成的，称为**有序元组**。比如，第一个例子中，自变

量 (大连01, 1) 就是由门店集合的元素“大连 01”和月份集合的元素“1”构成的有序二元组。第二个例子中, 自变量 (师大附中, 初三 (6) 班, 李四) 就是由校名集合的元素“师大附中”、班级集合的元素“初三 (6) 班”和姓名集合的元素“李四”构成的有序三元组。

再来看一个数学中的例子:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

这个映射把实数 x, y 映射为 $x^2 + y^2$ 。比如, 我们令 $x = 3, y = 1$, 就得到: $f(x, y) = 3^2 + 1^2 = 10$ 。

出发集和到达集都是数集的映射, 叫做函数。多元映射也如此。出发集和到达集都是数集的多元映射, 叫做**多元函数**。以上的 f 就是二元函数。

再来看以下关于命题的多元映射:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \{\text{真}, \text{假}\} \\ (n, m) &\mapsto \text{若 } n > 1, \text{ 则 } n^2 < m^3 < 2n^2 + 1. \end{aligned}$$

对任何自然数 n, m , f 将它们映射到命题 $P(n, m)$: “若 $n > 1$, 则 $n^2 < m^3 < 2n^2 + 1$ ”。对某些 (n, m) , 命题 $P(n, m)$ 为真命题, 对另一些 (n, m) , 命题 $P(n, m)$ 为假命题。这样含有两个变量的命题 $P(n, m)$ 称为**二元命题**。

习题 6.1.1.

1. 将加减乘除表示为多元函数。
2. 将正弦、余弦函数的和差角公式表示为多元函数。
3. 考虑将三角形顶点对应到它的重心的多元映射。如何在直角坐标系中把这个映射表示为多元函数?

6.2 通过映射理解多元映射

多元映射比映射更复杂,涉及到更多的集合,因此,我们希望通过映射来理解多元映射。

给定一个二元映射 $f: S_1 \times S_2 \rightarrow S_3$, 如果只考虑 S_1 中的一个元素 a , 那么

$$g_2: t \mapsto f(a, t)$$

就是一个映射。同理, 如果只考虑 S_2 中的一个元素 b , 那么

$$g_1: t \mapsto f(t, b)$$

也是一个映射。这两个映射都是根据 f 定义的。很多时候, 为了研究二元映射 f , 我们会先研究 g_1 和 g_2 , 它们比原来的二元映射更简单, 只涉及一个自变量, 更方便研究。

比如, 要研究关于实数 x, y 的二元函数 $f: (x, y) \mapsto \frac{xy}{x+y}$, 我们可以先让 x 等于某个定值 a , 研究函数 $g_1: t \mapsto f(a, t) = \frac{at}{a+t}$ 。可以把 g_1 的表达式改写为

$$g_1(t) = a - \frac{a^2}{a+t}.$$

$a = 0$ 的时候, $g_1(t) = 0$ 总成立。 $a > 0$ 的时候, $g_1(0) = 0$, 当 t 从 0 开始不断变大, 正数 $a+t$ 越来越大, 于是正数 $\frac{a^2}{a+t}$ 越来越小。 $g_1(t)$ 随着 t 不断变大, 逐渐从 0 变大, 往 a 靠拢。可以看到, 随着我们对不同的 a 对应的函数 g_1 做出分析, 我们对二元函数 f 的了解就不断增加。

除了让自变量中的某个元素等于定值, 我们还可以施加其它条件, 把多元映射转化为映射。比如, 对以上的二元函数 f , 我们可以让 x 和 y 的和等于定值 a , 研究函数

$$g: t \mapsto f(t, a-t) = \frac{t(a-t)}{a} = -\frac{t^2}{a} + t$$

g 是一个二次函数，最高次项是 $-\frac{1}{a}$ 。 $a > 0$ 时，最高次项系数小于 0，函数图像关于 $x = \frac{a}{2}$ 对称，最高点是 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{4})$ ； $a < 0$ 时，最高次项系数大于 0，函数图像关于 $x = \frac{a}{2}$ 对称，最低点是 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{4})$ 。

习题 6.2.1.

1. 给定关于实数 x, y 的二元函数 $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{xy}$ 。当 x 为定值 a 时，研究对应函数的性质。
2. 给定关于实数 x, y 的二元函数 $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{xy}$ 。当 $x+y$ 为定值 a 时，研究对应函数的性质。
3. 给定源于实数 x, y, z 的三元函数 $f : (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx - x^2$ ，研究这个函数的性质。

6.3 “有求必允”与“一路全真”

对二元命题，我们也可以采取同样的方法，分析它的性质。我们可以先让其中一个变量等于某个定值，这样二元命题就变成了含有一个变量的命题。比如，要研究关于正整数 n, m 的二元命题 $P(n, m) : m+n$ 整除 m^2-n^2 。我们可以让 n 等于定值 3，研究关于变量 m 的命题 $P_1(m) = P(3, m)$ 。如果 $P_1(m)$ 对所有正整数 m 为真，那么我们可以说：

存在正整数 n ，使得对所有自然数 m ， $P(n, m)$ 为真。

显然，如果 n 取某个定值的时候，考虑关于变量 m 的命题 $P_1(m) = P(n, m)$ 。如果对所有正整数 m ， $P_1(m)$ 都是真命题，那么以上这句话也成立。

我们用表格来表示这个结论（图 6.1）。

可以看到，“存在正整数 n ，使得对所有正整数 m ， $P(n, m)$ 为真（假）”，说明表格中有一行的值全是真（假）。同理，“存在正整数 m ，使得对所有正整数 n ， $P(n, m)$ 为真（假）”，说明表格中有一列的值全是真（假）。我们把这种性质称为“一路全真（假）”。

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | 真 | 真 | 真 | 真 | 真 | 真 | 真 | 真 | 真 | 真 |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |

图 6.1: $P(n, m)$ 对 $n = 3$ 一路为真

很多时候, 二元命题并没有这么整齐的性质。比如这个关于正整数 n, m 的命题 $P(n, m): n < m^2 \leq 3n + 1$ 。正整数 n 是定值的时候, 考虑 $P_1: m \mapsto P(n, m)$, $P_1(m)$ 只对一部分自然数为真。但我们可以说,

对任意正整数 n , 总有正整数 m , 使得 $P(n, m)$ 为真。

比如, $n = 10$ 的时候, 让 $m = 5$, 则 $n < m^2 \leq 3n + 1$; $n = 100$ 的时候, 让 $m = 16$, 则 $n < m^2 \leq 3n + 1$ 。一般来说, 对给定的正整数 n , 让 m 等于大于 \sqrt{n} 的最小整数, 就能使 $P_1(m)$ 为真。用表格来表示这个结论 (图 6.2):

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 假 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |
| 2 | 假 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |
| 3 | 假 | 真 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |
| 4 | 假 | 假 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |
| 5 | 假 | 假 | 真 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |
| 6 | 假 | 假 | 真 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |
| 7 | 假 | 假 | 真 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |
| 8 | 假 | 假 | 真 | 真 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |
| 9 | 假 | 假 | 假 | 真 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |
| 10 | 假 | 假 | 假 | 真 | 真 | 假 | 假 | 假 | 假 | 假 |

图 6.2: $P(n, m)$ 对 n 有求必允

可以看到,“对任意正整数 n , 总有正整数 m , 使得 $P(n, m)$ 为真”, 说明表格里每一行都至少有一个值为真, 我们称这种性质为对 n “有求必允”。反过来, “对任意自然数 n , 总有自然数 m , 使得 $P(n, m)$ 为假”, 说明表格里每一行都至少有一个值为假, 我们称这种性质为对 n “有求必拒”。

二元命题“有求必允”时, 我们可以把 n 对应到一个使得 $P(n, m)$ 为真的 m 。这样定义的映射, 称为二元命题的**求允映射**。同理, 二元命题“有求必拒”时, 我们可以把 n 对应到一个使得 $P(n, m)$ 为假的 m 。这样定义的映射, 称为二元命题的**求拒映射**。

例子. 考虑关于正整数的二元命题 $P(n, m): n > m$ 。对每个 n , 取 $m = n+1$, 就有 $m > n$ 为真。因此, 我们可以构造求允映射:

$$f: n \mapsto n+1$$

对任意 n , 总存在 $m = f(n)$, 使得 $P(n, m)$ 为真。另一方面, 对每个 n , 取 $m = n$, 就有 $m > n$ 为假, 因此, 我们又可以构造求拒映射:

$$g: n \mapsto n$$

对任意 n , 总存在 $m = g(n)$, 使得 $P(n, m)$ 为假。

从上面可以看出, 二元命题可以既“有求必允”又“有求必拒”。此外, 求允映射、求拒映射不一定是唯一的。比如, 以上例子中, 我们也可以构造 $n \mapsto n+3$ 或 $n \mapsto n+100$, 它们都能“有求必允”。

二元命题存在求允映射, 说明它对于某个变量“有求必允”, 否则, 就说明它对该变量的某个取值无法“应允”, 只能“拒绝”, 也就是说它对这个取值“一路全假”。比如, 要么二元命题 $P(n, m)$ 对 n 有求必允, 要么对某个 n 的值“一路全假”。也就是说, “有求必允”的否定是“一路全假”。同理, “有求必拒”的否定是“一路全真”。

习题 6.3.1.

1. 用集合的语言解释: “有求必允”的否定是“一路全假”。用图表的

方式画一个例子来说明它。

2. 考虑关于正整数 n, m 的二元命题 $P(n, m): n^2$ 整除 $m+1$ 。这个命题是否关于 n 有求必允? 是否关于 m 有求必允? 是否关于某个 m 一路全假? 是否关于某个 m 一路全真?

3. 考虑关于有理数 n, m 的二元命题 $P(n, m): n^2 = m$ 。这个命题是否关于 n 有求必允? 是否关于 m 有求必允?

4. 考虑关于实数的 x, y 的二元命题 $P(x, y):$ 只要实数 r 的绝对值小于 x , r^2 就小于 y 。这个命题是否关于 x 有求必允? 是否关于 y 有求必允?