

# 第五册

大青花鱼



# 目录



# 第一章 圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

## 1.1 圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点  $O$  距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段  $XY$ ，到  $O$  的距离和  $AB$  等长的点构成一个圆。 $O$  叫做**圆心**， $XY$  叫做圆的**半径**，长度一般记为  $r$ 。不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为  $O$ 、半径为  $r$  的圆，一般记为圆  $(O, r)$  或  $\odot_{(O, r)}$ 。圆心  $O$  和另一点  $P$  确定的圆，一般记为圆  $(O, P)$  或  $\odot_{(O, P)}$ 。如果不在意半径，在不至于混淆的情况下，也可以简记为圆  $O$ 。

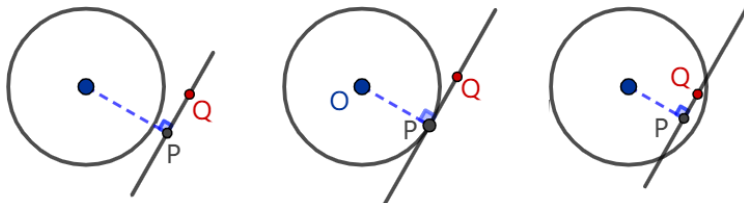
平面上的点到  $O$  的距离小于  $r$ ，就说它在圆内；如果等于  $r$ ，就说它在圆上；如果大于  $r$ ，就说它在圆外。

和引进直线等概念时一样，圆也有一条公理，规定它和直线的关系。

**公理 1. 直线交圆公理** 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

从这个公理出发，我们可以整理直线和圆的位置关系。

考虑直线  $l$  和圆  $\odot_{(O,r)}$ 。过  $O$  作直线  $m \perp l$ ，记垂足为  $P$ ， $|OP| = d$ 。



1. 如果  $d > r$ ，那么  $P$  在圆外。根据垂距定理， $l$  上任意点都在圆外。我们说直线  $l$  与圆  $O$  **相离**。反之，如果直线与圆相离，那么  $P$  在圆外，因此  $d > r$ 。
2. 如果  $d = r$ ，那么  $P$  在圆上。根据垂距定理， $l$  上的点除了  $P$  都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线  $l$  与圆  $O$  **相切**，称  $P$  为**切点**。反之，如果直线与圆相切于点  $Q$ ，那么  $|OQ| = r$ 。 $l$  上其他点都在圆外，所以根据垂距定理的逆定理， $OQ \perp l$ ， $d = r$ 。
3. 如果  $d < r$ ，那么  $P$  在圆内。根据直线交圆公理，直线和圆有两个交点  $A$ 、 $B$ 。我们说直线与圆**相交**，或直线**割圆**于  $A$ 、 $B$ 。反之，如果直线和圆有两个交点，那么根据直线交圆公理，直线有部分在圆内，这部分上的点到圆心距离小于  $r$ ，因此根据垂距定理， $d < r$ 。

设直线割圆于两点  $A$ 、 $B$ ，我们说直线是圆的**割线**。根据直线交圆公理，线段  $AB$ （除端点）在圆内。我们把线段  $AB$  称为圆的一条**弦**。如果  $AB$  过圆心  $O$ ，就说它是圆的直径， $A$ 、 $B$  互为**对径点**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

考虑圆  $O$  上的弦  $AB$  的垂直平分线  $m$ ，圆心  $O$  显然在  $m$  上。 $m \perp AB$ ，设垂足为  $P$ ，那么  $|AP| = |PB|$ 。设  $m$  和圆交于两点  $C$ 、 $D$ ，则弦  $CD$  就是直径。所以我们说：**恰有一条直径平分每条弦**。

#### 习题 1.1.1. 补充：

1. 设直线割圆于两点  $A$ 、 $B$ ，证明线段  $AB$ （除端点）在圆内。
2. 证明：同一个圆中，直径是最长的弦。

## 1.2 圆和旋转

怎么画一个圆？我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点，我们将圆规尖定在要画的圆心处，将笔头接触圆上的点，然后轻轻旋转，笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段，我们首先张开圆规，圆规尖和笔头分别对齐半径两端，然后保持圆规形状不变，将圆规尖定在要画的圆心处，让笔头接触纸面，轻轻旋转，笔头就画出一个圆。

可以看出，圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作，把平面中的点映射到另一点。给定角  $AOB$ ，可以这样定义**旋转**：

**定义 1.2.1.** 给定角  $AOB$ ，平面中一点  $P$  关于  $\angle AOB$  旋转的结果，是唯一使得  $\angle POQ = \angle AOB$  且  $|OP| = |OQ|$  的点  $Q$ 。

$O$  称为旋转的**中心**。任何点  $P$  绕中心旋转，结果都在圆  $(O, P)$  上。

可以看到，给定一个圆  $(O, P)$ ，从点  $P$  出发，旋转不同的角度，就得到圆上其它的点。用圆规画圆时，从零角出发，随着角度不断增大，直到周角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是  $0^\circ$  到  $360^\circ$ ）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上 0 和 360 之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为  $\gamma_{(O,P)}$ 。

通过  $\gamma_{(O,P)}$ ，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然  $[0, 360)$  对应整个圆，那么  $[0, 180]$  就对应半个圆， $[0, 60]$  就对应六分之一圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应  $[a_1, a_1 + x]$  和  $[a_2, a_2 + x]$ ，这两个圆弧有什么不同吗？观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全

等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如  $[0, 60]$  对应的圆弧，起点就是  $P$ ，终点是  $60$  度角  $POQ$  的终边和圆的交点  $Q$ 。如果圆弧对应的区间长度超过  $180$ ，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于  $180$ ，就说它是**劣弧**；如果等于  $180$ ，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。我们说它们互为**补弧**。

同一个圆上，明确了起点  $A$  和终点  $B$ ，就唯一确定了圆弧  $\widehat{AB}$ 。如果只说了两点  $A$ 、 $B$ ，那么  $\widehat{AB}$  一般指劣弧或起点为  $A$  终点为  $B$  的圆弧。

**习题 1.2.1.** 证明：

1. 任意线段经过旋转得到等长的线段。
2. 任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

### 1.3 圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为  $A$ ，终点为  $B$  的圆弧  $\widehat{AB}$  和圆上弧外一点  $P$ ，则角  $APB$  称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间，有什么关系呢？如右图，连接  $PO$ ，延长交圆于对径点  $Q$ 。由于  $\triangle AOP$  是等腰三角形， $\angle OAP + \angle OPA = 0$ ，



同理,  $\angle OBP + \angle OPB = 0$ 。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说, 圆心角是圆周角的两倍大小, 圆周角是圆心角的一半大小。

**定理 1.3.1. 圆周角定理** 给定圆  $O$  上的弧  $\widehat{AB}$  及圆上弧外的点  $P$ , 如果  $P \notin \widehat{AB}$ , 那么:

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果点  $P$  在弧上,  $\angle APB$  和  $\angle AOB$  是什么关系呢? 这时  $\angle APB$  对应  $\widehat{AB}$  的补弧, 于是它是  $\widehat{AB}$  对应的圆心角的一半大小。 $\widehat{AB}$  对应的圆心角是周角减去  $\angle AOB$ , 所以

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角, 因此, 根据圆周角定理, 对径点对应的圆周角是直角。或者说, 半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是, 讨论圆心角时, 我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时, 为了方便, 我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里, 圆上的点  $A$ 、 $B$  对应的圆心角  $\angle AOB$  和点  $C$ 、 $D$  对应的圆心角  $\angle COD$  相等, 那么根据“边角边”, 圆心  $O$  和它们构成的三角形满足:  $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。弦  $AB$  和  $CD$  也等长。不仅如此, 根据圆映射, 圆弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{CD}$  也等长。事实上,  $\widehat{CD}$  就是  $\widehat{AB}$  关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之, 如果两个圆弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{CD}$  等长, 那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等, 那么弦  $AB$  和  $CD$

也等长。更进一步, 设  $P$  是圆上不属于两弧的点, 那么圆周角  $\angle APB$  和  $\angle CPD$  一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来, 如果圆  $O$  上两条弦  $AB$  和  $CD$  等长, 那么根据“边边边”,  $\triangle AOB \simeq \triangle COD$ 。于是圆心角相等, 所以劣弧  $\widehat{AB}$  和  $\widehat{CD}$  等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说, 在同一个圆里, 两点对应的弦长相等当且仅当对应的(劣弧)弧长相等, 当且仅当对应的圆心角相等, 当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角, 都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点  $A$ 、 $B$ , 它们对应的垂直平分线  $l$  平分  $\angle AOB$ , 即把  $\angle AOB$  分成两个相同大小的圆心角。因此, 设  $l$  和圆交于  $P$ 、 $Q$ , 则它们也分别平分所在的圆弧(称为弧的中点)。我们把这一系列结论总称为垂径定理:

**定理 1.3.2. 垂径定理** 给定圆上两点, 则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦, 同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成: 过圆  $O$  的弦  $AB$  中点的直径与弦  $AB$  垂直, 同时平分  $\angle AOB$  和弧  $\widehat{AB}$ 。

给定圆  $(O, r)$ , 弦  $AB$  中点记为  $M$ ,  $|MO|$  称为弦  $AB$  的弦心距。由于  $MO \perp AB$ ,  $\triangle OAM$  是直角三角形, 根据勾股定理,

$$|OM|^2 + |AM|^2 = |OA|^2 = r^2.$$

设直线  $MO$  与圆  $O$  交于  $P$ 、 $Q$  两点, 则

$$|MP| \cdot |MQ| = (r - |OM|)(r + |OM|) = r^2 - |OM|^2.$$

比较以上两式, 可以得到:

$$|MA| \cdot |MB| = |MA|^2 = |MB|^2 = |MP| \cdot |MQ|.$$

这个推论也常常被称为垂径定理。

## 1.4 点到圆的势

圆是到定点距离相同的点的集合，所以点对圆来说是关键的概念。一点和圆的关系，可以用它到圆的距离来理解。点  $P$  在圆  $(O, r)$  上，当且仅当它到圆心的距离为  $r$ 。

如果不知道圆心的位置，有没有办法理解点和圆的位置关系呢？我们引进点到圆的**势**的概念。

**定义 1.4.1.** 点  $P$  到圆  $(O, r)$  的势，等于  $|OP|^2 - r^2$ 。

乍一看，点到圆的势，仍然和它到圆心的距离相关。点到圆心的距离  $d$  比  $r$  小的时候，点在圆内，这时它到圆的势小于 0。 $d > r$  的时候，点在圆外，势也大于 0。 $d = r$  的时候，点在圆上，势等于 0。

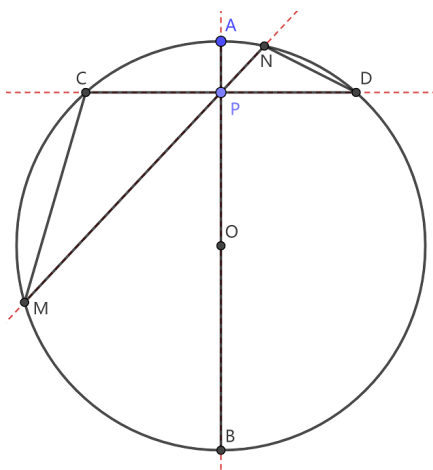
下面，我们从垂径定理出发，给出一种不依赖圆心的方法，计算点到圆的势。

首先设点  $P$  在圆  $(O, r)$  内。连接  $OP$ ，延长为直径，交圆于  $A, B$  两点（ $A, P$  在  $O$  同侧）。过  $P$  作该直径的垂线，交圆于  $C, D$  两点。弦  $CD$  的垂直平分线过  $O$ ，而  $OP \perp CD$ ，所以  $OP$  就是弦  $CD$  的垂直平分线。根据垂径定理， $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| = r^2 - |OP|^2$ 。这说明  $|PA| \cdot |PB|$ 、 $|PC| \cdot |PD|$  是  $P$  的势的绝对值。

过  $P$  任意作一条直线，和圆交于两点  $M, N$ ，是否也有这个结论呢？

如右图，可以发现， $\angle NDC$  和  $\angle NMC$  都对应同一段弧，且  $C, M$  都在弧外，所以  $\angle NDC = \angle NMC$ 。又对顶角  $\angle DPN = \angle CPM$ ，所以  $\triangle DPN \sim \triangle MPC$ 。也就是说，

$$\frac{|PD|}{|PN|} = \frac{|PM|}{|PC|}.$$



换句话说,  $|PC| \cdot |PD| = |PN| \cdot |PM|$ 。

对圆内一点  $P$  来说, 即便不知道圆心, 只要过  $P$  作直线与圆交于两点, 那么  $P$  到两点的距离乘积就是它到圆的势的绝对值。

如果点在圆外, 是否有类似的结论呢? 我们仍然连接  $OP$ , 直线  $OP$  割圆于两点:  $A, B$  ( $A$  位于  $O, P$  之间)。可以算出:

$$|PA| \cdot |PB| = (|PO| - |AO|) \cdot (|PO| + |PB|) = |OP|^2 - r^2.$$

过  $P$  作直线  $l$  和圆交于两点  $M, N$ ,  $|PM| \cdot |PN|$  是否也等于  $|OP|^2 - r^2$  呢?

如右图, 注意到  $\angle BNA$  和  $\angle BMA$  都对应半圆, 所以都是直角。三角形外角  $\angle PAN = \angle ABN + \angle BNA$ , 而  $\angle ABN$  和  $\angle AMN$  对应同一段弧且都不在弧上, 所以  $\angle ABN = \angle AMN$ 。于是,

$$\angle PAN = \angle ABN + 90^\circ = \angle AMN + \angle BMA = \angle BMN.$$

这说明  $\triangle PAN \sim \triangle PBM$ , 所以

$$\frac{|PA|}{|PN|} = \frac{|PM|}{|PB|},$$

换句话说,  $|PM| \cdot |PN| = |PA| \cdot |PB|$ 。我们把这个性质总结为:

对圆内一点  $P$  来说, 即便不知道圆心, 只要过  $P$  作直线与圆交于两点, 那么  $P$  到两点的距离乘积就是它到圆的势。

因此, 无论在圆内还是圆外, 经过一点  $P$  的直线与圆交于两点, 则它到两点的距离乘积只与它和圆的远近关系有关。如果  $P$  在圆内, 这个乘积等于  $r^2 - |PO|^2$ ; 如果  $P$  在圆外, 这个乘积等于  $|PO|^2 - r^2$ 。或者说, 这个乘积就是势的绝对值。至于  $P$  在圆上的情形, 我们可以认为它与圆交于两点, 其中一点就是它自身, 所以到自身距离为 0, 从而乘积总是 0, 等于它的势。

**定理 1.4.1. 圆势定理** 过点  $P$  作直线与圆  $(O, r)$  交于两点:  $A, B$ , 那么

$$|PA| \cdot |PB| = ||PO|^2 - r^2|.$$

比起乘积  $|PA| \cdot |PB|$ ，点到圆的势多了正负号。如何理解这个正负号呢？如果过圆  $(O, r)$  的圆心作一条直线，在上面建立数轴。当我们把原点  $P$  选在圆内的时候， $A$  和  $B$  就对应符号相异的数；如果把原点  $P$  设在圆外， $A$  和  $B$  就代表同号的数了。所以，以  $P$  为原点， $PO$  为正方向的数轴和圆交于两点，这两点代表的数的乘积就是  $P$  到圆的势。或者说，圆势附带了  $P$  和  $A$ 、 $B$  的位置关系的信息。

## 1.5 切线

过一点作直线要与圆交于两点不难，与圆交于一点则不简单。根据直线交圆公理，过圆内的点，无法作和圆相切的直线。过圆外一点，可以与圆相切的直线直观上，我们可以把直尺从和圆相交的状态逐渐移动，直到尺子碰到圆的“边缘”，作出大致和圆相切的直线。

直线和圆相切是一种特殊的状况。过圆外或圆上一点的直线  $l$  如果和圆  $O$  相切，就说它是点到圆的**切线**。切线和圆的（唯一）交点，称为**切点**。根据相切的性质，过圆心  $O$  作关于  $l$  的垂线，切点就是垂足。过圆上一点，只有一条切线，过圆外一点，可以作两条切线。

过圆  $(O, r)$  外一点  $P$  作切线，记切点为  $Q$ ，则  $\triangle OQP$  为直角三角形。根据勾股定理，

$$|PQ|^2 + |OQ|^2 = |OP|^2.$$

因此， $|PQ|^2 = |OP|^2 - r^2$ 。也就是说，点  $P$  到切点的距离平方，是它关于圆的势。若过  $P$  作圆  $O$  的割线，交圆于  $A$ 、 $B$  两点，那么由上一节可知

$$|PA| \cdot |PB| = |OP|^2 - r^2 = |PQ|^2.$$

也就是说，

$$\frac{|PA|}{|PQ|} = \frac{|PQ|}{|PB|}.$$

因此， $\triangle PAQ \sim \triangle PQB$ 。这两个三角形的相似关系称为**切割线定理**。

从切割线定理可以推出： $\angle PQA = \angle PBQ$ 。从另一个角度，可以这样理解：过圆上一点  $Q$  只有一条切线  $PQ$ 。如果过  $Q$  再作一条直线，直线于圆必交于另一点  $A$ ，而  $\angle PQA$  等于圆弧  $\widehat{QA}$  对应的圆周角。

## 第二章 圆和多边形

我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。

### 2.1 三角形的外接圆和内切圆

首先来看三个点的情形。

设  $A, B, C$  是圆  $(O, r)$  上 (相异的) 三点, 则线段  $AB, BC, AC$  的垂直平分线都过圆心  $O$ 。因此,  $O$  是  $\triangle ABC$  的外心 (这里附带说明了圆上相异三点必然不共线),  $|OA| = |OB| = |OC| = r$ 。反之, 设有 (非退化的)  $\triangle ABC$ , 以它的外心  $O$  为圆心, 以  $|OA|$  为半径, 就可以画出一个圆, 过顶点  $A, B, C$ 。这说明, **不共线的三点恰好对应一个圆**。或者说, **不共线的三点确定一个圆**。我们把这个圆称为三角形的**外接圆** (“外心”即“外接圆圆心”的简称), 把三角形称为圆的**内接三角形**。

三角形不仅可以内接于圆, 圆也可以内接于三角形。考虑三角形  $ABC$  的内心, 它到三角形三边的距离相等。以内心为圆心, 以它到三边的距离为半径作圆, 这个圆和三角形三边都相切。我们把这个圆叫做三角形的**内切圆** (“内心”即“内切圆圆心”的简称), 把三角形称为圆的**外切三角形**。

除了内心, 三角形还有旁心。旁心到三角形三边的距离也相等。因此,

以每个旁心为圆心,以它到三遍的距离为圆心,各可以得到一个圆。每个圆都与三角形一边和另两边的延长线相切。这三个圆称为三角形的旁切圆(“旁心”即“旁切圆圆心”的简称),把三角形称为它们的旁切三角形。

## 2.2 圆内接四边形

在三个点的基础上再加一个点  $D$ , 四个点  $A, B, C, D$  能否恰好对应一个圆呢? 显然,  $\triangle ABC$  和  $\triangle BCD$  的外接圆未必是同一个圆。所以, 四个点不总是在同一个圆上。换句话说, 要让四个点共圆, 这四个点必须满足一定的条件。

如右图上情形, 设  $A, B, C, D$  圆  $(O, r)$  上(相异的)四点, 考察它们对应的圆弧。我们发现,  $\widehat{ABC}$  和  $\widehat{CDA}$  是整个圆的分划, 因此, 它们对应的圆心角之和是周角。根据圆周角定理,  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ 。同理,  $\angle BCD + \angle DAB = 180^\circ$ 。

我们还可以发现, 圆周角  $\angle BAC$  和  $\angle BDC$  都对应  $\widehat{BC}$ , 因此根据“等弧对等角”,  $\angle BAC = \angle BDC$ 。同理可得:  $\angle ACB = \angle ADB$ ,  $\angle CAD = \angle CBD$ ,  $\angle DBA = \angle DCA$ 。

如果  $A, B, C, D$  顺序改变, 如右图下情形, 那么四边形  $ABCD$  就是蝶形。 $\widehat{ABC}$  和  $\widehat{CDA}$  对应同一段圆弧  $\widehat{AC}$ 。这时  $\angle ABC + \angle CDA = 0^\circ$ , 或者说  $\angle ABC = \angle ADC$ 。同理,  $\angle BAD = \angle BCD$ 。

综合两种情况, 圆内接四边形对角要么和为平角, 要么相等。

可以看到, 如果把相交的对边  $AB, CD$  看作对角线, 把对角线  $AC, BD$  看作对边, 我们就得到一个凸四边形  $ACBD$ 。因此, 观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现, 我们仍然有  $\angle BAC = \angle BDC$ ,  $\angle ACB = \angle ADB$ ,  $\angle CAD = \angle CBD$ ,  $\angle DBA = \angle DCA$ 。如果对角线  $AC$  和  $BD$  交于点  $P$ , 仍然有  $\triangle APB \sim \triangle CPD$ ,  $\triangle BPC \sim \triangle DPA$ 。换句话说, 即便圆内接四边



形不是凸四边形，用它的顶点也能画出圆内接凸四边形，并且不妨碍我们讨论相关的性质。所以，我们总把圆内接四边形问题归结为凸四边形来讨论，也称之为四边共圆问题。

以上是圆内接四边形边和角的性质，反过来，满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢？或者说，满足什么条件的四个点共圆呢？

**定理 2.2.1.** 如果凸四边形  $ABCD$  中的一对内角  $\angle ABC$  与  $\angle CDA$  的和是平角，那么  $ABCD$  是圆内接四边形。

**证明.**  $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ ，所以要么两个角都是直角，要么一个是钝角，一个是锐角。

如果两个角都是直角，作对角线  $AC$ ，取它的中点  $O$ 。 $\triangle ABC$  是直角三角形， $AC$  是斜边，根据直角三角形的中线定理， $|AO| = |BO| = |CO|$ 。同理， $\triangle CDA$  是直角三角形， $AC$  是斜边，于是  $|AO| = |DO| = |CO|$ 。因此  $A, B, C, D$  四点都在  $\odot_{(O,A)}$  上。

如果两个角一个是钝角，一个是锐角。不妨设  $\angle ABC > 90^\circ > \angle CDA$ 。作对角线  $AC$ ，则  $B, D$  在  $AC$  两侧。作对角线  $AC$  的垂直平分线  $l$ 。显然， $\triangle ABC$  和  $\triangle CDA$  的外心都在  $l$  上，只需证明两者是同一点。

设  $\triangle ABC$  的外接圆为  $\odot_{(O_1,B)}$ 。 $\angle ABC$  是钝角，因此它的圆心角对应优弧。于是， $O_1$  和  $B$  在直线  $AC$  两侧。 $\angle CO_1A = 360^\circ - 2\angle ABC$ 。

另一方面，设  $\triangle CDA$  的外接圆为  $\odot_{(O_2,D)}$ 。 $\angle CDA$  是锐角，因此它的圆心角对应劣弧。于是， $O_2$  和  $D$  在直线  $AC$  同一侧。 $\angle CO_2A = 2\angle CDA$ 。

以上两个结论说明， $O_1$  和  $O_2$  都和  $D$  在直线  $AC$  同一侧，且  $\angle CO_1A = \angle CO_2A$ 。而  $\triangle CO_1A$  和  $\triangle CO_2A$  都是等腰三角形，所以两者同角全等。这说明  $O_1$  和  $O_2$  是同一点。 $A, B, C, D$  四点都在  $\odot_{O_1,A}$  上。  $\square$

从这个定理可以推出，矩形、等腰梯形和正方形都是圆内接四边形。

**定理 2.2.2.** 如果凸四边形  $ABCD$  中， $\angle ACB = \angle ADB$ ，那么  $ABCD$  是圆内接四边形。

**证明.**  $ABCD$  是凸四边形, 所以  $C$  和  $D$  在直线  $AB$  同侧。作边  $AB$  的垂直平分线  $l$ , 显然,  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$  的外心都在  $l$  上, 只需证明它们是同一点。

设  $\triangle ABC$  的外接圆为  $\odot_{(O_1, C)}$ ,  $\triangle ABD$  的外接圆为  $\odot_{(O_2, D)}$ 。如果  $\angle ACB$  是钝角, 那么它的圆心角对应优弧。于是,  $O_1$  和  $C$  在直线  $AB$  两侧, 且  $\angle BO_1A = 360^\circ - 2\angle ACB$ 。这时,  $\angle ADB = \angle ACB$  也是钝角, 所以同样有  $O_2$  和  $D$  在直线  $AB$  两侧, 且  $\angle BO_2A = 360^\circ - 2\angle ADB$ 。如果  $\angle ACB$  是锐角, 那么它的圆心角对应劣弧。于是,  $O_1$  和  $C$  在直线  $AB$  同侧, 且  $\angle BO_1A = 2\angle ACB$ 。这时,  $\angle ADB = \angle ACB$  也是锐角, 所以同样有  $O_2$  和  $D$  在直线  $AB$  同侧, 且  $\angle BO_2A = 2\angle ADB$ 。

因此,  $O_1$  和  $O_2$  总在直线  $AB$  同侧, 且  $\angle BO_1A = \angle BO_2A$ 。而  $\triangle BO_1A$  和  $\triangle BO_2A$  都是等腰三角形, 所以两者同角全等。这说明  $O_1$  和  $O_2$  是同一点。 $A, B, C, D$  四点都在  $\odot_{O_1, A}$  上。  $\square$

**定理 2.2.3.** 过一点  $P$  的两条直线  $m, n$  上各有两点:  $A, C \in m$  和  $B, D \in n$ , 分别各在  $P$  两侧。如果

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|,$$

那么四边形  $ABCD$  是圆内接四边形。

**证明.** 考虑  $\triangle APB$  和  $\triangle DPC$ 。对顶角  $\angle APB = \angle DPC$ 。而  $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$  等于说

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

因此根据“边角边”,  $\triangle APB \sim \triangle DPC$ 。于是有  $\angle ABP = \angle DCP$ ,  $\angle BAP = \angle CDP$ 。因此, 根据定理??, 四边形  $ABCD$  是圆内接四边形。  $\square$

这个定理也可以理解为: 两条线段相交, 如果交点把每条线段分成的两部分长度之积相等, 那么线段端点共圆。也就是说, 这两条线段实际上是圆的两条相交的弦。

反之,圆的两条弦  $AC$  和  $BD$  相交于  $P$ ,则“等弦对等角”说明  $\angle ACD = \angle ABD$ 、 $\angle BAC = \angle BDC$ 。因此  $\triangle ABP \sim \triangle DCP$ ,  $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$ 。

**定理 2.2.4. 相交弦定理** 圆的两条弦  $AC$  和  $BD$  相交于  $P$ , 则

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|.$$

### 习题 2.2.1.

给定圆内接凸四边形  $ABCD$ 。  $E$  是对角线  $AC$  上一点。  $\angle CDE = \angle BDA$ 。

1. 证明:  $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ 。
2. 证明:  $\triangle CDB \sim \triangle EDA$ 。
3. 证明:  $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

给定凸四边形  $ABCD$ , 作射线  $CE$  使得  $\angle ECD = \angle ABD$ , 作射线  $DE$  使得  $\angle CDE = \angle BDA$ 。两射线交于点  $E$ 。

1. 证明:  $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ 。
2. 证明:  $\triangle CDB \sim \triangle EDA$ 。
3. 证明:  $|AC| \cdot |BD| \geq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。
4. 证明, 凸四边形  $ABCD$  是圆内接四边形, 当且仅当  $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。
5. 证明:  $A, B, C, D$  四点共圆, 当且仅当  $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$ 。

## 2.3 垂心组和外接圆

## 2.4 九点圆

## 2.5 圆内接多边形

从四边形的情况来看, 顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  按顺时针或逆时针顺序排列, 那么四边形  $ABCD$  是凸四边形, 否则, 四边形  $ABCD$  可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形, 我们只研究最简单的一类: 顶点按逆时针顺序排列的多边形。具体来说, 设圆  $O$  上有  $n$  个点:  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 从  $A_1$  出发构造圆映射  $\gamma_{(O, A_1)}$ , 把  $[0, 360)$  映射到圆周, 那么  $0$  对应  $A_1$ 。设  $t_1, t_2, \dots, t_n$  分别对应  $n$  个点, 那么  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 。这样定义的圆内接多边形:  $A_1 A_2 \dots A_n$  就是我们研究的对象。这样定义的多边形, 每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数  $n$ , 凸  $n$  边形  $A_1 A_2 \dots A_n$  有  $\frac{n(n-3)}{2}$  条对角线。具体来说, 每个顶点和相邻两个顶点的连线是  $n$  边形的边, 和其余  $n-3$  个顶点的连线是对角线。因此每个点是  $n-3$  条对角线的端点。另一方面, 每条对角线对应两个顶点, 因此一共有  $\frac{n(n-3)}{2}$  条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢? 我们知道三角形的内角和是平角, 凸四边形的内角和是两个平角 (或者说周角, 如果把角度约定在负平角和正平角之间, 则减去一个周角变成零角)。边数继续增多时, 我们定义凸  $n$  边形  $A_1 A_2 \dots A_n$  的内角和为:

$$\angle A_1 A_2 A_3 + \angle A_2 A_3 A_4 + \dots + \angle A_{n-2} A_{n-1} A_n + \angle A_{n-1} A_n A_1 + \angle A_n A_1 A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间，可以猜测：凸  $n$  边形的内角和是  $n - 2$  个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形，我们可以这样证明： $n$  个顶点把圆分为  $n$  段圆弧。每个顶点张成的内角，对应了其中  $n - 2$  段圆弧。如果考虑所有  $n$  个内角对应的圆弧，则每段圆弧计入  $n - 2$  次（圆弧两端是内角顶点的时候不计入，其它情况下都计入）。也就是说， $n$  个内角和对应  $n - 2$  个整圆。这些内角都是圆周角，因此它们的和是  $n - 2$  个整圆对应的圆周角，即  $n - 2$  个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况，我们可以通过不断“裁剪”三角形来证明。我们还记得，凸四边形可以裁成两个三角形，因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看，我们通过裁掉一个三角形，把凸四边形变成了三角形。对一般的凸  $n$  边形  $A_1A_2 \cdots A_n$  来说，由于它的每个内角都介于零角和平角之间，我们可以考虑裁掉某个角，把它变成  $n - 1$  边形。比如，沿着线段  $A_1A_3$  剪一刀，就把  $A_1A_2 \cdots A_n$  分成了三角形  $A_1A_2A_3$  和  $n - 1$  边形  $A_1A_3 \cdots A_n$ 。

**定理 2.5.1.** 凸  $n$  边形的内角和是  $n - 2$  个平角。

**证明.** 用归纳法证明。命题  $P(n)$ ：凸  $n + 2$  边形的内角和是  $n$  个平角。我们要证明  $P(n)$  对所有正整数  $n$  成立。

$n = 1$  时，由于三角形内角和是平角， $P(1)$  成立。

假设  $P(n)$  成立，下面证明  $P(n + 1)$  成立。

设有凸  $n + 3$  边形  $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ ，将它裁成三角形  $A_1A_2A_3$  和  $n - 1$  边形  $A_1A_3 \cdots A_n$ 。前者的内角和是平角。根据  $P(n)$ ，后者的内角和是  $n$  个平角，因此， $A_1A_2A_3 \cdots A_n$  的内角和是  $n + 1$  个平角。于是  $P(n + 1)$  成立。

因此对所有正整数  $n$ ，命题  $P(n)$  成立。  $\square$

满足什么条件时，凸多边形是圆内接多边形呢？最直接的条件，自然是平面上有一个圆，使多边形顶点都在圆上。或者说，能找到一点，到多边形

各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点，可以查看多边形各边和各条对角线的垂直平分线。如果多边形是圆内接多边形，它的边和对角线都是圆的弦，垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说，可以考察两条边（或对角线）的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等，那么多边形内接于以它为圆心的圆，否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形：**正多边形**。正多边形是各边等长，各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形各个的内角角度是  $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$ 。

#### 习题 2.5.1.

1. 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形，哪些总是圆内接多边形？哪些可以是圆内接多边形？要满足什么条件？

2. 设有整数  $1 \leq i, j, k, l \leq n$ ，圆内接  $n$  边形  $A_1 A_2 \cdots A_n$  中， $\angle A_i A_k A_j$  和  $\angle A_i A_l A_j$  有什么关系？

## 第三章 三角函数

### 3.1 锐角的三角函数

### 3.2 三角函数的图像和性质

### 3.3 三角函数和三角形





## 第四章 从或许到确定

预测未来，是人类社会的重要活动。合理有效地预测未来，是社会文明进步的标志。中华文明作为农耕文明，很早就懂得预测未来的重要性。历法、史书、节气，都是我们的祖先为了后人更好地预测未来，留下的经验总结。

生产活动中，预测尤其重要。比如，农牧业、渔业、运输业等行业需要预测天气，销售行业需要预测产品的市场需求。科学研究和工程制造中，如果能够提前知道产品在各种各样的情境和场景下的性能，可以节约大量人力物力。社会要发展，就需要更高的预测水平。

### 4.1 事件和见知

如何判断某件事情将来会不会发生？我们要依赖已有的知识和经验。日常生活中，我们会说“明天大概要下雨”、“今年冬天肯定很冷”、“我明天大概去不了了”。根据已有条件，有些事情必然发生，有些事情或许会发生，有些事情不可能发生。事情发生与否，取决于某些条件。我们把这样的事情叫作**随机事件**，简称**事件**。在已知条件下，如果某事件必然发生，就说它是**必然事件**；如果某事件必然不发生，就说它是**不可能事件**；如果某事件或许会发生，就说它是**或然事件**。数学中，研究这些事情的理论叫作概率论。

概率论假定，我们关心的随机事件有某些恒定的内在规律，受某些固

有未知因素的影响。概率论通过研究这些内在规律和因素，预测事件是否会发生。

如何描述一个事件？从客观的角度，我们可以把“发生一件事”看成事物状态、形势局面的改变。一件事是否发生，可以用改变后的状态或局面表示。我们也许无法确定未来事物发展成哪个状态、形势走向哪个局面，但我们可以事先确定事物未来所有可能的状态、所有可能出现的局面。

比如，我们无法确定明天杭州是否下雨，但我们知道，在明天杭州是否下雨这个问题上，只可能出现两个结局：下雨或不下雨。又比如，我们投一个骰子前，无法确定朝上一面的点数，但我们知道，投出的骰子最终只有六个状态：朝上一面是 1, 2, 3, 4, 5 或 6 点。这些最终状态、局面是**互斥**的。比如明天杭州不可能既下雨又不下雨，骰子停下之后不可能既是 1 点朝上又是 2 点朝上。

我们把所有可能的最终状态或局面看成一个集合，集合中的每个元素称为事情的**终态或结局**。比如，考虑明天杭州是否下雨这个问题时，所有结局构成 {下雨, 不下雨} 这个集合，每次投骰子时，骰子的终态构成 {1, 2, 3, 4, 5, 6} 这个集合。我们把这个集合叫作**终集**，即终态的全集。我们可以把相关的事件用终集的子集表示。比如，“明天杭州下雨”对应 {下雨} 这个子集，“骰子点数是偶数”对应 {2, 4, 6} 这个子集。事物发展的终态如果在子集里，就说明事件发生了，否则事件没有发生。

单元集也对应着事件。我们把单元集对应的事件叫做**基本事件**。比如 {1} 对应的“骰子点数是 1”就是基本事件。基本事件之间是互斥事件，它们是终集的分划。

终集可以是有限的，也可以是无限的。目前我们只讨论有限的情况。要注意的是，随着问题的条件、环境、思考问题的角度发生变化，终集也会变化。比如，我们考虑明天杭州下雨的问题时，可能要把准备经过杭州的台风“凤凰”也考虑在内。台风“凤凰”也许继续靠近，也许转向。这时，我们

的终集是：

{台风靠近且下雨, 台风靠近且不下雨, 台风转向且下雨, 台风转向且不下雨}

而“明天杭州下雨”对应子集 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}。

对于随机事件，如果我们知道得更多，就能作出更准确的预测。比如，如果我们不知道台风的情况，那么即便我们把终集依照“台风是否继续靠近”划分，我们能把握的也只是 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}、{台风靠近且不下雨, 台风转向且不下雨} 两个事件，与 {下雨}, {不下雨} 并没有不同。如果我们掌握了台风的动向，我们就希望把 {下雨} 分成 {台风靠近且下雨} 和 {台风转向且下雨} 来讨论了。可以说，随着我们对事物、形势的认知增加，我们的终集会越来越“细”。

为了描述认知增加的过程，我们从最“细”的终集出发，定义每个阶段的**知集**，代替不同阶段的终集。知集是最“细”终集的子集构成的集合，满足：

1. 空集属于知集；
2. 如果集合  $A$  属于知集，那么  $A$  的补集也属于知集；
3. 如果集合  $A$  和  $B$  属于知集，那么它们的并集也属于知集。

知集表示我们每个阶段的认知。我们根据当前的认知来讨论各种事件。比如，在杭州下雨的例子中，可以有两个知集，分别是：

$$S_1 = \{\emptyset, \{AR, DR\}, \{AN, DN\}, \{AR, AN, DR, DN\}\}$$

和

$$S_2 = \{\emptyset, \{AR\}, \{AN\}, \{DR\}, \{DN\}, \{AR, AN\}, \{AR, DR\}, \{AR, DN\}, \\ \{AN, DR\}, \{DN, AN\}, \{DR, DN\}, \{AR, AN, DR\}, \{AR, AN, DN\}, \\ \{AR, DR, DN\}, \{AN, DR, DN\}, \{AR, AN, DR, DN\}\}$$

其中 AR, AN, DR, DN 分别表示“台风靠近且下雨”、“台风靠近且不下雨”、“台风转向且下雨”和“台风转向且不下雨”。可以看出,  $S_1$  是  $S_2$  的子集。 $S_1$  到  $S_2$  的过程, 就是对台风认知加深的过程。

这种描述下, 不同的知集就对应不同“粗细”的终集。每个知集都对应自己的基本事件。比如,  $\{AR, DR\}$  在  $S_1$  中是基本事件, 在  $S_2$  中就不是基本事件了。

**习题 4.1.1.** 写出以下问题的终集和知集。

1. 我国朱鹮从东北省份向南迁徙的路线有三条: 西线、中线和东北线。小明想知道黑龙江省的某只朱鹮沿哪条路线南迁。

2. 某航空公司规定: 作为补偿, 飞机晚点一小时以上, 返还全票票价的 40%; 如果晚点三小时以上, 返还全票票价的 75%。乘客实际购票价低于前述返还价格的, 返还乘客实际购票价。航班因晚点取消, 且乘客自愿接受转乘下一班机的, 公司协助补票, 实施“就低返利”政策: 按照下一班机实时票价和乘客最初购票价的较低者计算新票价, 多则退还差价; 并另外补偿新票价的 30%。某乘客购票后, 在候机时被告知飞机可能晚点, 他试着分析可能得到的晚点补偿。

## 4.2 概率和分布

预测随机事件时, 我们除了关心会发生什么事情, 还关心事情有多大可能发生。当我们说“这事百分之百能成”, “他八成还在路上”, “他的话只有三分准头”, 我们认为某些事情比另一些事情更可能发生。习惯上, 我们用数来描述事情有多大可能发生。在数学中, 我们把这个做法称为**事件的概率**。

我们用不大于 1 的非负实数表示事件的概率。约定不可能事件的概率是 0, 必然事件的概率是 1。事件的概率越大, 越有可能发生。此外, 事件的概率应当和事件之间的关系相符。两个互斥事件同时发生的概率应该是

0, 至少有一个发生的概率应该是它俩概率的和。用集合的语言来说, 空集的概率应该是 0, 终集的概率应该是 1; 两个集合不相交, 那么它们的并集的概率等于它们概率的和。

我们习惯用映射  $\mathbb{P}$  来记录概率。把事件  $A$  的概率记为  $\mathbb{P}(A)$ 。比如, 我们说明天八成会下雨, 可以写成  $\mathbb{P}(\{\text{下雨}\}) = 0.8$ 。不至于混淆时, 也可以省略表示集合的大括号, 写成:  $\mathbb{P}(\text{下雨}) = 0.8$ 。

基本事件两两互斥, 并集是终集 (全集)。所以, 基本事件的概率之和等于 1。

举例来说, 投骰子的时候, 我们一般认为投出 1, 2, 3, 4, 5, 6 点的可能性都一样大, 即每个基本事件的概率都相等。于是它们各自的概率是六分之一。据此, 可以算出任何事件的概率。比如, “投出 5 点或以上” 的概率是 “投出 5 点” 的概率加上 “投出 6 点” 的概率, 也就是三分之一。如果我们知道骰子有问题, 比如投出 6 点的可能性是其他任一点数的 2 倍, 那么 “投出 6 点” 的概率是七分之二; 投出其他点数, 比如 “投出 3 点” 的概率是七分之一; 而 “投出 5 点或以上” 的概率是七分之三。

终集是有限集合的时候, 对每个知集来说, 只要知道了其中每个基本事件分配到的概率 (称为**概率分布**), 就可以推出知集里其他事件的概率。

**思考 4.2.1.** 同一个终集下的不同知集中, 同一个事件的概率是否相同?

## 4.3 二项分布和均匀分布

我们来看两种简单的概率分布。

考虑只有两个终态  $a, b$  的终集, 两个基本事件  $\{a\}, \{b\}$  概率之和是 1。设其中一个的概率是  $p$ , 则另一个的概率是  $1 - p$ 。我们把这样的概率分布叫作**二项分布**。举例来说, 如果我们认为明天杭州下雨的概率是 0.7, 不下雨的概率就是  $1 - 0.7 = 0.3$ 。我们说, 我们认为明天杭州下雨的问题服从二

项分布。

又比如：抛一枚硬币，我们认为正面朝上的概率是 0.52，那么反面朝上的概率就是  $1 - 0.52 = 0.48$ 。我们说，我们认为抛这枚硬币的问题服从二项分布。为了好说话，我们会在两个基本事件中选一个我们更关心的，称为**正面事件**，把另一个称作**反面事件**。如果正面事件的概率是  $p$ ，就说问题服从系数为  $p$  的二项分布。

终集为  $\{a, b\}$  的二项分布，包括四个事件，分别对应  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$  四个子集。设  $\{a\}$  是正面事件，概率为  $p$ ，那么这四个事件的概率分别是 0、 $p$ 、 $1 - p$  和 1。

对于元素更多的终集，情况更加复杂。我们考虑一种简单情形：每个基本事件的概率相等。这样的概率分布称为**等概率分布**或**均匀分布**。比如，投骰子时，如果我们认为每面朝上的概率都相等，就说投骰子服从均匀分布。

假设终集有  $n$  个终态，那么每个基本事件的概率就是  $\frac{1}{n}$ 。对于任意事件，我们可以数一下事件包含了几个终态，用终态个数除以所有终态的个数，就是它的概率。我们把这个性质写作：

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

其中  $|A|$  表示事件  $A$  作为集合的元素个数， $|S|$  表示终集  $S$  的元素个数。比如，服从均匀分布的投骰子问题中，要求“大于 2 点”的概率，我们数一下事件  $\{3, 4, 5, 6\}$ ，它包含了 4 个终态，所以“大于 2 点”的概率是  $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 。

### 习题 4.3.1.

1. 把 1 到 100 分别写在小纸条上放入黑箱里，随意抽取一张，抽到的数是素数的概率是多少？完全平方数的概率是多少？各位数字乘积大于 10 的概率是多少？

2. 有没有以全体自然数为终集的均匀分布？为什么？说说你的理由。

## 4.4 排列和组合

均匀分布的问题里，事件的概率只和它包含的终态的个数以及所有终态的个数有关。因此，在相关的一些问题里，我们关心如何计出事件包含的终态的个数。

**例子 4.4.1.** 将编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一行，最左边的球是 1 的概率是多少？

要知道事件“最左边的球是 1”的概率，用“最左边的球是 1”包含的终态个数除以所有终态的个数。怎么计算“最左边的球是 1”包含的终态个数和所有终态的个数呢？

首先考虑所有终态的个数：将编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一行，有多少种方法？

不妨设三个球从左到右排列。无论排列方式如何，三个球分别占据“左”、“中”、“右”三个位置。从左边开始，把球一个个放到位置上。左边的位置可以放三个球中任何一个，因此有 3 种方法。按任一种方法放好左边的球以后，中间的位置可以放剩余两个球中任何一个，因此有 2 种方法。按任一种方法放好中间的球以后，右边的位置可以放最后一个球，只有 1 种方法。于是一共有  $3 \times 2 \times 1 = 6$  种方法。

如果最左边的球是 1，有多少种方法？这时左边的位置已经放好了 1 号球，因此中间的位置还有两种放法。任一种方法放好中间的球以后，右边的位置放最后一个球，只有 1 中方法。因此，一共有  $2 \times 1 = 2$  种方法。

综上所述，“最左边的球是 1”的概率是：

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是1}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

我们把  $n$  个互不相同的物品排成一行的方法数目称为  $n$  **排列数**，记作

$P_n$ 。比如, 编号为 1, 2, 3 的 3 个小球排成一列的方法数目就叫做“3 排列数”, 记作  $P_3$ 。

对于一般的自然数  $n$ ,  $n$  排列数是  $n-1$  排列数的  $n$  倍。这是因为, 如果把  $n$  个互不相同的物品排成一列, 第一个位置总可以放  $n$  个物品中的任何一个, 有  $n$  种方法。按任一种方法放好第一个位置后, 剩下的  $n-1$  个位置摆放剩下的  $n-1$  个物品的方法数目, 恰好就是  $n-1$  排列数。

因此, 用归纳法可以证明,  $n$  排列数就是  $n$  乘以  $n-1$  乘以  $n-2$ ……直到乘以 1 的乘积。比如, 5 排列数就是  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 。

如果我们把从  $n$  乘到 1 的计算看成关于  $n$  的函数的话, 这个函数叫做 ( $n$  的) **阶乘**, 记作  $n!$ 。 $n$  排列数就是  $n$  的阶乘。

**例子 4.4.2.** 将 3 个红球和 2 个白球组成一列, 最左边的球是红球的概率是多少?

我们仍然先计算 3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数。这里球只有红白两种颜色的分别。同色的球没有差别。如果我们把球编号, 1, 2, 3 号球是红球, 4, 5 号球是白球, 那么, 按照编号排列, 有  $5! = 120$  种方法。不过,  $1-2-3-4-5$  和  $2-3-1-4-5$  其实是同一种方法。因为 1, 2, 3 号球都是红球, 并没有差别。把  $1-2-3-4-5$  里的 3 个红球任意改变次序, 都不影响结果。同理, 把  $1-2-3-4-5$  里的 2 个白球任意改变次序, 都不影响结果。3 个红球的排列方法有  $3! = 6$  种, 2 个白球的排列方法有  $2! = 2$  种, 于是这  $6 \times 2 = 12$  种方法都对应同一种结果。也就是说, 带编号的 12 个排列方法对应一种不带编号的排列方法。因此, 实际上只有  $\frac{5!}{3!2!} = 10$  种排列方法。

我们把不带编号的排列方法称为**组合数**或**选列数**。比如, 3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目叫做“3, 2 组合数”, 或“5 选 3” (因为也可以看作从 5 个位置里选 3 个放红球), 记作  $C_5^3$  或  $\binom{5}{3}$ 。

如果最左边的球是红球, 那么剩下的 4 个位置要放 2 个红球、2 个白



球。于是，一共有  $C_4^2$  种方法。计算可知：

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6.$$

即一共有 6 种方法。因此最左边的球是红球的概率是：

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是红球}) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

一般来说，“ $n$  选  $m$ ” 也可以用阶乘计算：

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

容易发现：“ $n$  选  $m$ ” 等于 “ $n$  选  $n-m$ ”。比如，5 选 3 等于 5 选 2。用红球和白球的例子，可以理解为：3 个红球和 2 个白球组成一系列的方法数目，等于 3 个白球和 2 个红球组成一系列的方法数目。

掌握了排列数和组合数，我们就可以计算一些复杂问题里终态的个数。

#### 习题 4.4.1.

1. 5 个红球和 3 个白球排成一行，有多少种方法？

2. 2 个红球、3 个白球和 2 个黄球排成一行，有多少种方法？

3. 从编号 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个球中选出 3 个排成一行，有多少种方法？

这个数目叫做 5, 3 排列数。试求一般情况下  $n, m$  排列数（从编号为 1 到  $n$  的  $n$  个球中选出  $m$  个排成一行方法数目）的公式。

4. 设有两个正整数  $m < n$ ，证明： $m!$  整除  $n!$ 。