第四册

大青花鱼

目录

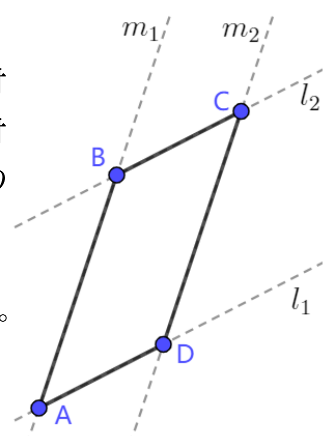
第一章　四边形

四边形是生活中常见的形状。下面来看几种常见的四边形。

1.1　平行四边形

平行四边形是一种重要的四边形。它由两组平行线确定。

设直线 $l_1 \mathbin{/\!/} l_2$，$m_1 \mathbin{/\!/} m_2$，且 l_1 和 m_1 有交点 A，那么 l_2 和 m_1、l_2 和 m_2、l_1 和 m_2 各有交点 B、C、D，四边形 $ABCD$ 叫做平行四边形，记作 $\square ABCD$。



设有四边形 $ABCD$，我们说 AB、CD 互为**对边**，BC、DA 互为对边；$\angle ABC$ 和 $\angle CDA$ 互为**对角**，$\angle BCD$ 和 $\angle DAB$ 互为对角。线段 AC 和 BD 称为四边形的**对角线**。

定理 1.1.1. 平行四边形对边平行且等长，对角相等。

证明： 给定 $\square ABCD$，按定义可知对边平行。
接着证明 $\square ABCD$ 的对角相等。
$\angle ABC$ 和 $\angle DAB$ 是同旁内角，所以和为平角。类似地，$\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 是同旁内角，所以和为平角。于是，$\angle DAB = \angle BCD$。同理，$\angle ABC$ 和

$\angle DAB$ 是同旁内角，所以和为平角。类似地，$\angle CDA$ 和 $\angle DAB$ 是同旁内角，所以和为平角。于是，$\angle ABC = \angle CDA$。
最后证明 $\square ABCD$ 的对边等长。
连接对角线 AC。$AB \parallel CD$，所以内错角 $\angle CAB = \angle ACD$；同理，$BC \parallel DA$，所以内错角 $\angle BCA = \angle DAC$。另外 $|AC| = |AC|$。所以，根据“角边角”，$\triangle ABC \simeq \triangle CDA$。因此，$|AB| = |CD|$，$|BC| = |DA|$。 □

从证明中可以看出，平行四边形和三角形有密切的关系。把平行四边形沿对角线“裁开”，就得到一对同角全等的三角形。一般来说，任何四边形沿对角线裁开，都会得到两个三角形。因此，在约定角的范围是负平角到正平角时，**四边形的内角和是零角**。对平行四边形来说，为了方便，也说它的内角和是周角。

除了对边分别平行，还有什么办法，判断一个四边形是不是平行四边形呢？我们可以从这对全等三角形入手。以上证明中用到了“角边角”，是否可以换成“边角边”或“边边边”呢？

定理 1.1.2. 对边等长的四边形是平行四边形。

证明： 设四边形 $ABCD$ 中 $|AB| = |CD|$，$|BC| = |DA|$。连接 AC，根据“边边边”，$\triangle ABC \simeq \triangle CDA$，因此，$\angle CAB = \angle ACD$，于是 $AB \parallel CD$。同理，由于 $\angle BCA = \angle DAC$，$BC \parallel DA$。于是四边形 $ABCD$ 是平行四边形。 □

定理 1.1.3. 一对边平行且等长的四边形是平行四边形。

证明： 设四边形 $ABCD$ 中 $AB \parallel CD$ 且 $|AB| = |CD|$。连接 AC。$|AC| = |AC|$。由于 $AB \parallel CD$，内错角 $\angle CAB = \angle ACD$。根据“边角边”，$\triangle ABC \simeq \triangle CDA$，因此，由于 $\angle BCA = \angle DAC$，$BC \parallel DA$。于是四边形 $ABCD$ 是平行四边形。 □

定理 1.1.4. 对角相等的四边形是平行四边形。

证明： 设四边形 $ABCD$ 中 $\angle ABC = \angle CDA$，$\angle BCD = \angle DAB$。四边形的内角和是两个平角，所以同旁内角 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 满足 $\angle ABC + \angle BCD = 180°$，这说明 $AB \mathbin{/\mkern-5mu/} CD$。同理，同旁内角 $\angle ABC$ 和 $\angle DAB$ 满足 $\angle ABC + \angle DAB = 180°$，因此 $BC \mathbin{/\mkern-5mu/} DA$。 □

思考 1.1.1. 一对边等长，一对角相等的四边形，是否是平行四边形?

给定 $\square ABCD$，设对角线 AC 和 BD 的交点为 G，我们把 G 叫做平行四边形的**中心**。可以用"角边角"证明：$\triangle ABG \simeq \triangle CDG$，$\triangle BCG \simeq \triangle DAG$。因此，$|AG| = |CG|$、$|BG| = |DG|$。$G$ 同时是两条对角线的中点。换句话说，**平行四边形的两条对角线相互平分**。用对称的说法，A 和 C 关于 G 对称，B 和 D 关于 G 对称。

在直角坐标系中，如果 A 的坐标是 (x_A, y_A)，B 的坐标是 (x_B, y_B)，C 的坐标是 (x_C, y_C)，D 的坐标是 (x_D, y_D)，那么 G 的坐标 (x_G, y_G) 满足：

$$x_A + x_C = 2x_G = x_B + x_D, \quad y_A + y_C = 2y_G = y_B + y_D.$$

平行四边形还可以用来定义平移变换。直角坐标系中，我们已经定义过平移。使用平行四边形的概念，设 A 是原点，那么关于另一点 B 的平移可以这样定义：对平面上任一点 D，作平行四边形 $ABCD$，则 C 就是 D 平移后得到的点。用坐标来表示的话，这个平移就是：

$$(x_D, y_D) \mapsto (x_D + x_B, y_D + y_B).$$

习题 1.1.1. 证明：

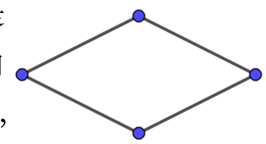
1. 对角线相互平分的四边形是平行四边形。

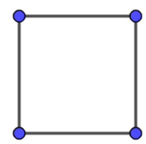
1.2 特殊平行四边形

平行四边形是对边平行、对角相等的四边形。下面我们来看几种特殊的平行四边形。

如果四边形四边等长，就说它是**菱形**。菱形肯定是平行四边形。由于平行四边形对边等长，所以也可以这样判定菱形：

定理 1.2.1. 邻边等长的平行四边形是菱形。





把菱形沿对角线“裁开”，得到的一对三角形都是等腰三角形。由于对角线平分，菱形的中心是等腰三角心底边中点，对角线也是中线。而等腰三角形三线合一，中线就是高线。所以菱形的对角线不仅相互平分，而且相互垂直。

反过来，如果四边形的对角线相互平分，而且相互垂直，那么它是菱形。菱形的两条对角线把它分为四个全等的直角三角形。

如果四边形四角相等，就说它是**矩形**或**长方形**。由于四边形内角和是周角，平行四边形对角相等，所以也可以这样判定矩形：

定理 1.2.2. 有一个角是直角的平行四边形是矩形。

把矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC“裁开”，得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$，由于 $\angle ABC$ 和 $\angle CDA$ 都是直角，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 是直角三角形。根据勾股定理。$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$。另一方面，把矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD“裁开”，通过类似推理可以得到：$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$。而 $|BC| = |AD|$，所以 $|AC| = |BD|$。即：

定理 1.2.3. 矩形的对角线相互平分，而且等长。

反过来，如果四边形的对角线相互平分而且等长，那么它是矩形。矩形的两条把它分为两对全等的等腰三角形。

如果一个四边形既是菱形，又是矩形，就称它为**正方形**。正方形是我们很熟悉的图形。正方形的四边等长，四个内角都是直角。它的对角线长度是

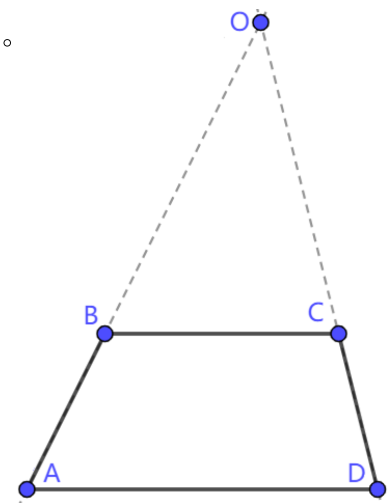
边长的 $\sqrt{2}$ 倍。把正方形沿对角线“裁开”，得到一对等腰直角三角形。正方形的两条对角线把它分为四个更小而全等的等腰直角三角形。

1.3 梯形

除了平行四边形，还有其他类型的四边形。

如果四边形有一对边平行，就说它是**梯形**。如果梯形另一对边也平行，就是平行四边形。我们已经研究过平行四边形了，所以，一般说梯形时，都指非平行四边形的梯形。

研究相似三角形的时候，我们已经接触过梯形。如右图，大的三角形里去掉小的三角形，就是梯形。把梯形补全为一对相似三角形，是常见的思考方式。



按照这个说法，梯形平行的一对边长度不等。我们称它们为**上底**和**下底**。一般会把较短的一边称为上底，较长的称为下底。另外两条边一般称为梯形的**腰**。两腰等长的梯形，称为**等腰梯形**。等腰梯形对应一对相似的等腰三角形。

设梯形 $ABCD$ 中 $BC \parallel AD$，那么同旁内角 $\angle ABC + \angle DAB = 180°$，$\angle BCD + \angle CDA = 180°$。如果其中一个角是直角，这样的梯形叫作**直角梯形**。直角梯形对应一对相似的直角三角形。

梯形两腰的中点连线，称为梯形的**中位线**。

定理 1.3.1. 梯形中位线长度是两底长度之和的一半。

证明： 设梯形 $ABCD$ 中 $BC \parallel AD$，M 是边 AB 的中点，N 是边 CD 的中点，直线 AB、CD 交于点 O。由于 $BC \parallel AD$，$\triangle OBC \sim \triangle OAD$。因此：

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|BC|}{|AD|} = k.$$

其中 k 是比例系数，即：

$$|OB| = k|OA|, \quad |OC| = k|OD|.$$

于是

$$|OM| = |OB| + \frac{|AB|}{2} = \frac{|OA| + |OB|}{2} = \frac{k+1}{2} \cdot |OA|.$$

同理，

$$|ON| = |OC| + \frac{|CD|}{2} = \frac{k+1}{2} \cdot |OD|.$$

这说明

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|ON|}{|OD|} = \frac{k+1}{2}.$$

而 $\angle MON = \angle AOD$，所以 $\triangle OAD \sim \triangle OMN$。于是中位线 MN 的长度为

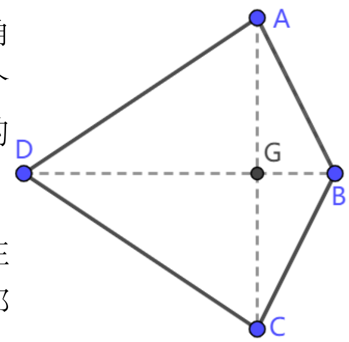
$$|MN| = |AD| \cdot \frac{|OM|}{|OA|} = \frac{k+1}{2} \cdot |AD|.$$

将 $k = \frac{|BC|}{|AD|}$ 代入，就得到

$$|MN| = \frac{|BC| + |AD|}{2}.$$

□

1.4 筝形



平行四边形可以“裁成”两个同角全等的三角形。或者说，一对同角全等的三角形可以拼出一个平行四边形。那么，一对反角全等的三角形拼出的图形是什么呢?

这个图形叫作**筝形**。我们对筝形并不陌生，在证明“角边角”的时候已经见过。四边形的两对邻边分别等长，就叫作筝形。

如果筝形的对边也等长，就成了菱形。所以，一般说筝形时，都指非菱形的筝形。

筝形的最大特点，就是一条对角线是另一条的垂直平分线。我们把它叫作**脊线**，把另一条（被它平分的）对角线叫作**肩线**。我们已经证明过，脊线和肩线相互垂直。它们把筝形分为两对全等直角三角形。

直角坐标系中，把 $(0,0)$、$(0,a)$、(a,a)、$(a,0)$ 四点依次连起来，就围成一个边长为 a 的正方形。如果把 $(0,0)$、$(0,b)$、(a,b)、$(a,0)$ 四点依次连起来，就围成一个长宽为 a 和 b 的矩形。如果把 $(-a,0)$、$(0,b)$、$(a,0)$、$(0,-b)$ 四点依次连起来，就围成一个菱形。如果把 $(0,0)$、(a,b)、$(a+u,b+v)$、(u,v) 四点依次连起来，就围成一个平行四边形。这些形状可以看作是实心的点集。比如以上正方形对应点集:

$$\{(x,y)\,|\,0\leqslant x,y\leqslant a\}.$$

从 $(0,0)$、$(0,a)$、(a,a)、$(a,0)$ 连成的正方形出发，关于点 $(0,a)$ 平移，就得到一个新的正方形，它是 $(0,a)$、$(0,2a)$、$(a,2a)$、(a,a) 连成的正方形。

思考 1.4.1.

1. 从一个（实心）正方形出发，通过平移，能否填满整个平面，不留空隙也不互相重叠?

2. 从一个（实心的）矩形、菱形、平行四边形出发，通过平移，能否填满整个平面，不留空隙也不互相重叠?

3. 如果从一个（实心）图形出发，用和它全等的图形可以填满整个平面，不留空隙也不互相重叠，就说它是**密铺图形**，可以密铺平面。正方形、矩形、菱形、平行四边形、等腰梯形、直角梯形、筝形，哪些是密铺图形?

4. 如果一个图形关于某条直线的轴对称图形是它自己，就说它是**轴对称图形**，该直线是它的对称轴。同样，如果一个图形关于某点的中心对称图形是它自己，就说它是**中心对称图形**，该点是它的对称中心。正方形、矩形、菱形、平行四边形、等腰梯形、直角梯形、筝形，哪些是轴对称图形，哪些是中心对称图形? 它们分别有哪些对称轴和对称中心?

1.5　剪形和蝶形

比较以下的四边形，它们相应的角度有什么不同?

给定四个点 A、B、C、D，我们把线段 AB、BC、CD、DA 连起来的图形叫做四边形 $ABCD$。这四个顶点和四条边也组成了四个角：$\angle ABC$、$\angle BCD$、$\angle CDA$、$\angle DAB$。我们称其为四边形 $ABCD$ 的四个内角。

我们已经学习了平行四边形、梯形、筝形等四边形。如果把角的范围限定在负平角和正平角之间，平行四边形的内角要么总是正的，要么总是负的。但也有一些四边形，它们的内角总是有正有负。比如上图中间的四边形，内角 $\angle BCD$ 是负的；上图右边的四边形，内角 $\angle ABC$ 和 $\angle DAB$ 是负的。

如果把这些四边形作轴对称，得到的四边形内角恰好与原本相反。上图中间的四边形会变成有三个内角为负的四边形；右边的四边形仍旧是两个内角为负的四边形。

我们把类似上图中间的四边形，内角中有一个或三个为负的，称为**剪形**；把类似上图右边的四边形，内角中有两个为负的，称为**蝶形**。

蝶形和剪形合称为凹四边形，其余内角总为正或总为负的四边形，称

为凸四边形。平行四边形总是凸四边形。梯形也可以是蝶形，筝形也可以是剪形。

思考 1.5.1.

1. 梯形在什么情况下是蝶形？画一个例子。

2. 筝形在什么情况下是剪形？画一个例子。

3. 考虑四边形内角的正负。凸四边形的内角是“正-正-正-正”或“负-负-负-负”；剪形的内角是“正-正-正-负”或“正-负-负-负”；蝶形的内角是“正-正-负-负”。是否有其他的可能组合？哪些正负组合是不可能的？为什么？

第二章　数的分解

自然数是我们最早认识的数。我们已经熟悉了自然数的四则运算，并且学习了因数和倍数。了解一个数的因数，无论对于理论研究，还是在实际生活中，都很有用处。

2.1　初识素数

我们已经学习过因数的概念。我们把因数只有自己和 1 的正整数叫做**素数**，除了 1 和自己还有别的因数的正整数叫做**合数**。约定 1 既不是素数也不是合数。

举例来说，2、3、5、7 是素数，而 4、6、8 是合数。偶素数只有一个：2，其余素数都是奇数。

定理 2.1.1. 设 p 是素数。任何正整数要么是 p 的倍数，要么与 p 互素。

证明： 设 n 是正整数。记 n 和 p 的最大公因数为 d。d 是 p 的因数。因此按 p 的定义，要么 $d = p$，要么 $d = 1$。如果 $d = p$，那么 n 是 p 的倍数。如果 $d = 1$，那么 n 与 p 互素。 □

素数与合数有什么关系呢?

定理 2.1.2. 合数总有素因数。

证明： 按照定义，合数总有真因数。给定合数 n，它的真因数大于 1、小于 n，至少有一个，至多有 $n-2$ 个。其中总有一个最小的真因数，我们把它记为 p。
p 的因数也是 n 的因数，所以要么是 1，要么大于等于 p。也就是说，p 没有真因数。所以 p 是素数。 □

定理 2.1.3. 每个大于 1 的整数都可以表示成素数或其乘积。

证明： 使用归纳法。命题 $P(n)$：整数 n 可以表示成素数或其乘积。下面证明 P 对每个大于 1 的整数成立。
$n=2$ 时，由于 $2=2$，$P(2)$ 成立。
假设对某个大于 1 的整数 n，$P(2),\cdots,P(n)$ 都成立，下面证明 $P(n+1)$ 也成立。
如果 $n+1$ 是素数，那么 $n+1=n+1$ 就是素数，于是 $P(n+1)$ 成立。
如果 $n+1$ 是合数，那么它至少有一个素因数 p。设 $n+1=mp, m\in\mathbb{Z}^+$，由于 $1<p<n+1$，所以 $1<m<n+1$。根据假设，$P(m)$ 成立，也就是说，m 可以表示成素数或其乘积：

$$m=p_1p_2\cdots p_k,\ \ l\in\mathbb{Z}^+$$

于是，$n+1=mp=pp_1p_2\cdots p_k$ 也是素数的乘积。于是 $P(n+1)$ 成立。
综上所述，$P(n)$ 对每个大于 1 的整数成立。 □

我们把这种表示正整数的方式称为**素因数分解**。如果把自然数比作一座座房屋，那么素数就是砖瓦，构建起一个个合数。

素数与合数，谁比较多呢？一位数中，有 4 个素数，4 个合数；二位数中，有 21 个素数，69 个合数；三位数中，有 143 个素数，757 个合数；四位数中有 1061 个素数，7939 个合数。

越大的素数，越是罕见。

会不会从某个数开始，所有比它大的都是合数？也许，素数只有有限个？我们有这样一个定理：

定理 2.1.4. 素数的个数是无穷的。

证明： 使用反证法证明。反设素数的个数不是无穷的，即只有有限多个素数。把素数的个数记为 N，把它们从小到大分别记为 $p_1, p_2, \cdots, p_N$。
考察这样的正整数：

$$m = p_1 p_2 \cdots p_N + 1.$$

m 与所有素数互素。所以，m 的因数要么是 1，要么是它自己，要么是某个与 p_1、p_2、……、p_N 都不一样的数。这就说明，要么 m 自己是素数，要么它的因数中有和 $p_1, p_2, \cdots, p_N$ 都不一样的素数。这就和“素数一共有 N 个”矛盾了。
因此，原命题的否定“素数的个数不是无穷的”是假的，原命题成立。 $\square$

素数作为“砖瓦”的性质，还体现在以下定理中：

定理 2.1.5. 存因定理 如果素数 p 整除两个自然数 a 和 b 的乘积：$p|ab$，那么 p 整除 a 或 p 整除 b。

证明： 给定符合条件的素数 p 和自然数 a, b。如果 p 整除 a，那么命题得证。
如果 p 不整除 a，那么由于两者的最大公因数是 p 的因数，因此只能是 1。两者互素。根据倍和析因定理，存在整数 m, n 使得

$$mp + na = 1.$$

两边乘以 b，就得到：

$$mp + nab = b.$$

根据已知条件，存在整数 k 使得 $ab = kp$，于是

$$b = mp + nkp = (m + nk)p,$$

即 p 整除 b。 □

存因定理告诉我们，如果某个正整数 n 有素因数 p，把 n“拆成”两个数的乘积，那么总有一个有素因数 p。反复运用存因定理，我们可以把这个结论加强：无论把 n“拆成”几个数的乘积，总有一个有素因数 p。这反映了素数作为自然数中的“砖瓦”的性质。

习题 2.1.1. 证明:

1. 两个素数要么相等，要么互素。

2. 如果素数 p 整除完全平方数 n，那么 p^2 也整除 n。

3. 设 p, q 是素数，i, j 是正整数，那么要么 p^i 和 q^j 互素，要么 p^i 整除 q^j，要么 q^j 整除 p^i。

4. 对任何正整数 n，都存在 n 个连续合数 $a, a+1, \cdots, a+n-1$。

2.2 算数基本定理

从存因定理出发，可以得到一个很重要的结论:

定理 2.2.1. 算术基本定理 如果不考虑素因数的排列顺序，素因数分解的方式是唯一的。

证明: 如果某个大于 1 的整数 n 有两种素因数分解。把每种分解的素因数从小到大排列:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_l,\ \ k, l \in \mathbb{Z}^+.$$

我们要证明这两种分解是一样的。

考虑 p_1，p_1 整除 $n = q_1 q_2 \cdots q_l$。根据存因定理，存在某个 j 使得 p_1 整除 q_j。q_j 也是素数，所以 p_1 不可能是它的真因数。于是 $p_1 = q_j \geqslant q_1$。

考虑 q_1，按照相同的推理，存在某个 i 使得 q_1 整除 p_i。于是 $q_1 = p_i \geqslant p_1$。

因此，$p_1 = q_1$。
我们把 n 除以 p_1，得到正整数 n_1。如果 $n_1 = 1$，那么我们有 $n_1 = p_1$，分解方式是唯一的。如果 $n_1 = p_2 \cdots p_k = q_2 \cdots q_l > 1$，我们可以再次运用以上的推理，得到：$p_2 = q_2$。
以此类推，经过有限步后，我们可以得到：$k = l$，且

$$p_1 = q_1,\ p_2 = q_2, \cdots, p_k = q_k.$$

也就是说，n 的素因数分解只有一种方式。 □

这个结论非常重要，我们把它称为算术基本定理。算术基本定理告诉我们，不考虑排列顺序的话，每个大于 1 的正整数都可以用唯一的方式写成素数或其乘积。这种唯一的方式可以看作每个正整数的“身份证”。为了方便讨论，素因数分解中，一般素因数从小到大排列，并用乘方的形式合并相同的素因数。比如，252 的素因数分解写成；

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1.$$

这种写法称为数的**标准分解**。以上就是 252 的标准分解。有时候，为了便于讨论，我们会把不是 n 的因数的素数也写进分解表达式里，用它的 0 次方“占位”. 比如 210 就可以写成:

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1.$$

这样的写法，在规定了涉及的素数集合后，仍然是唯一的。

习题 2.2.1. 写出以下数的标准分解:

1. $256, 243, 125.$
2. $60, 780, 1296.$
3. $1001, 5929, 8801.$

把正整数 n 分解，得到：$n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}$。我们把 u_1 称为 p_1 在 n 中的重数。它是让 p_1^i 整除 n 的最大自然数 i。

定理 2.2.2. 如果 n 整除 m，那么任何素数在 n 中的重数小于等于它在 m 中的重数。

证明： 设素数 p 在 n 和 m 中的重数分别是 u 和 v。于是 p^u 整除 n，因而整除 m。另一方面，v 是让 p^i 整除 m 的最大自然数 i。所以，$u \leqslant v$。 □

上面的结论也可以换个方式说成：如果 n 是 m 的因数，那么任何素数在 n 中的重数小于等于它在 m 中的重数；如果 n 是 m 的倍数，那么任何素数在 n 中的重数大于等于它在 m 中的重数。

定理 2.2.3. 正整数 n, m 的乘积，等于它们的最大公因数和最小公倍数的乘积。

证明： 设 n, m 的最大公因数是 d，最小公倍数是 q，下面证明 $nm = dq$。把 n, m, d, q 分解，设涉及的素数为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$。把四个数分别记为：

$$\begin{aligned} n &= p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}, \quad m = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_k^{v_k}, \\ d &= p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}, \quad q = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}. \end{aligned}$$

d 既是 n 的因数也是 m 的因数，所以对每个素因数 p_i，它在 d 中的重数 s_i 都小于等于 u_i 和 v_i。同时，由于 d 是最大公因数，所以 s_i 是 u_i 和 v_i 中较小的数。
q 既是 n 的倍数也是 m 的倍数，所以对每个素因数 p_i，它在 q 中的重数 t_i 都大于等于 u_i 和 v_i。同时，由于 q 是最小公倍数，所以 t_i 是 u_i 和 v_i 中较大的数。
因此，对每个素因数 p_i，$s_i + t_i = u_i + v_i$。于是，

$$\begin{aligned} nm &= (p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}) \cdot (p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_k^{v_k}) \\ &= p_1^{u_1+v_1} p_2^{u_2+v_2} \cdots p_k^{u_k+v_k} \\ &= p_1^{s_1+t_1} p_2^{s_2+t_2} \cdots p_k^{s_k+t_k} \\ &= (p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}) \cdot \left(p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}\right) \\ &= dq \end{aligned}$$

□

习题 2.2.2.

1. 设 i 是素数 p 在正整数 n 中的重数。

1. 1. 如果 p 不整除 n，证明 $i = 0$。

1. 2. 如果自然数 $j < i$，证明：p^j 整除 n。

1. 3. 如果自然数 $j > i$，证明：p^j 不整除 n。

2. 设正整数 n, m 的最大公因数是 d，素数 p 在 d, n, m 中的重数分别是 s, u, v。

2. 1. 设 v 是 u, v 中较小的数，证明：$s \leqslant v$。

2. 2. 假设 $s < v$，考虑 pd，证明 pd 是 n, m 的公因数。

2. 3. 证明 s 等于 u, v 中较小的数。

2. 4. 设正整数 n, m 的最小公倍数是 q，素数 p 在 q, n, m 中的重数分别是 t, u, v，证明：t 等于 u, v 中较大的数。

给定一个正整数，如何将它分解呢？这个问题一直困扰着人类。将非常大的整数分解，是一项非常困难的任务。即便在现代，电子计算机计算能力有极大发展，可以轻易做到每秒百亿乃至万亿次运算，分解大整数仍然需要非常多的时间。一些常用的密码技术，就依赖于分解大整数非常困难这个事实。

如今，量子计算理论不断发展。人们将希望寄于量子计算机，认为将来使用量子计算机及相应的算法，可以在合理时间内分解大整数。

第三章　因式分解

整式是变量和数量作加减法和乘法得到的代数式。它的性质和整数很相似。整数可以分解成因数的乘积，整式也可以分解为整式的乘积。把整式的乘积写成若干项的和，叫做整式的展开；反过来，把一个整式写成多个整式的乘积，称为整式的**因式分解**。乘积中每个整式称为原整式的**因式**。

整式的因式分解是一个非常庞大的问题。我们只从最简单的情况出发，归纳一些特殊情况下的简单方法。

3.1　一元整式

一种简单的情况是一元整式的因式分解。给定变量为 x 的一元整式 p，合并同类项后按照次数从高到低排列，可以写成：

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

其中 $a_0, a_1, \cdot, a_n$ 都是有理数，称为 p 的系数。其中 a_n 不等于 0，而其它数可能等于 0。$a_n x^n$ 称为 p 的**最高次项**，a_n 就是最高次项的系数，n 称为 p 的次数。比如 $n=1$ 时，p 就是我们见过的一元一次式。$n=0$ 时，p 只有常数项，称为常式。为了强调 p 是关于 x 的一元式，我们也将 p 记为 $p(x)$。

给定一元整式 $n(x)$ 和 $m(x)$，如果 $n(x)$ 可以写成 $m(x)$ 和另一个一元整式 $q(x)$ 的乘积，就说 $n(x)$ 是 $m(x)$ 的**倍式**，$m(x)$ 是 $n(x)$ 的**因式**。

和整数一样，一元整式也有带余除法。整式的带余除法可以和整数除法一样，用竖式计算。比如 $8x^5+2x^4-9x^3+4x-5$ 除以 $2x^2+x-1$：

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 4x^3 & -x^2 & -2x & +\frac{1}{2} \\ \cline{2-7}
2x^2+x-1\big) & 8x^5 & +2x^4 & -9x^3 & & +4x & -5 \\
 & -8x^5 & -4x^4 & +4x^3 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^4 & -5x^3 & & & \\
 & & 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -4x^3 & -x^2 & +4x & \\
 & & & 4x^3 & +2x^2 & -2x & \\ \cline{4-6}
 & & & & x^2 & +2x & -5 \\
 & & & & -x^2 & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2} \\ \cline{5-7}
 & & & & & \frac{3}{2}x & -\frac{9}{2}
\end{array}
$$

可以看到，**被除式** $8x^5+2x^4-9x^3+4x-5$ 除以**除式** $2x^2+x-1$，得到**商式** $4x^3-x^2-2x+\frac{1}{2}$ 和**余式** $\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$。竖式除法中，不同次数的项就好像整数的个十百千等数位。不同的是相减的时候没有借位，而且由于系数可以是分数，所以只要剩下的式子的次数不少于除式，就可以继续相减。最后得到的余式，次数一定严格小于除式。

思考 3.1.1. 整式 $p(x)$ 除以一次式，余式是怎样的？除以常式呢？

习题 3.1.1. 计算带余除法：
1. x^3-3x^2+2x-5 除以 x^2+x+2。
2. $x^6-x^5-4x^3+11x^2-9x+19$ 除以 x^3-2x^2+x+4。

3.2 试根法

怎么样找到一元整式的因式呢？我们来看上面的整式除法。

当 $x = 1$ 的时候，$2x^2 + x - 1 = 2$，$8x^5 + 2x^4 - 9x^3 + 4x - 5 = 0$，$4x^3 - x^2 - 2x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = -3$。带余除法变成：$0 = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3$。

用特定的数值代替 x，整式的带余除法就变成整数的带余除法。如果 x 取某个值使得除式 $2x^2 + x - 1 = 0$，比如 $x = -1$，那么带余除法变成：$-6 = 0 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) - 6$。

如果 $2x^2 + x - 1$ 是某个一元整式 $p(x)$ 的因式，

$$p(x) = (2x^2 + x - 1)q(x)$$

那么，某个 x 的取值（比如 -1）使得 $2x^2 + x - 1 = 0$ 的时候，上式变成：

$$p(-1) = 0 \cdot q(-1) = 0$$

如果某个数 a 使整式的因式等于 0，那么它也使得整式为 0。

使整式为 0 的数叫做整式的**根**。

如果某个数 a 使除式为 0，被除式也为 0，除式是否就是被除式的因式呢？考虑带余除法：

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & & & 4x^3 & -x^2 & -2x & +\frac{1}{2} \\ \hline
2x^2+x-1 & 8x^5 & +2x^4 & -9x^3 & & +4x & +1 \\
 & -8x^5 & -4x^4 & +4x^3 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -2x^4 & -5x^3 & & & \\
 & & 2x^4 & +x^3 & -x^2 & & \\ \cline{3-5}
 & & & -4x^3 & -x^2 & +4x & \\
 & & & 4x^3 & +2x^2 & -2x & \\ \cline{4-6}
 & & & & x^2 & +2x & +1 \\
 & & & & -x^2 & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2} \\ \cline{5-7}
 & & & & & \frac{3}{2}x & +\frac{3}{2}
\end{array}$$

$x = -1$ 的时候，除式和被除式都是 0，但这是由于 $x = -1$ 时余式也是 0。除式并不是被除式的因式。

不过，如果余式是常式，那么它是不是 0，就和 x 的取值无关了。一种特殊情况是：除式是一次式：$x-a$。它只在 x 取值为 a 的时候为 0。这时，如果被除式也是 0，那么余式肯定是 0。于是除式是被除式的因式。

定理 3.2.1. 余式定理 如果 a 是一元整式 $p(x)$ 的根，那么 $x-a$ 是它的因式。

习题 3.2.1.

设有整式 $p=6x^3-3x^2+2x-1$：

1. 试着分解 p。

2. 如果既约分数 $\frac{a}{b}$ 是 p 的根，证明：$|b|$ 整除 6。

设有整式 $p=x^3-4x^2-x-20$：

1. 试着分解 p。

2. 如果既约分数 $\frac{a}{b}$ 是 p 的根，证明：$|a|$ 整除 20。

如果既约分数 $\frac{a}{b}$ 是整式 $p=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的根，a 和 b 应该满足什么条件?

3.3　一般整式的分解

对一般的整式来说，也有一些普遍适用的方法。

提公因式法

如果要分解的整式中有显然的公因式，那么可以将它提取出来。比如：

$$x^6-2x^4+19x^3-3x$$

以上这个式子中，每一项显然都有 x 作为因式。因此，可以分解为：

$$x(x^5-2x^3+19x^2-3).$$

提公因式法是分配律的逆应用。

公式法

如果可以注意到要分解的整式是某个公式的展开形式，那么应用公式，就可以把展开的形式还原成因式的成绩形式。比如：

$$x^4+4$$

这个式子可以看成两个平方的差：

$$x^4+4=x^4-4x^2+4-4x^2=(x^2-2)^2-(2x)^2.$$

于是，使用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 这个公式，就可以得到：

$$x^4+4=(x^2-2+2x)(x^2-2-2x).$$

应用公式法，取决于要分解的整式是否符合某个特定公式的展开形式。

分组分解法

分组分解的思想是从提公因式法出发。如果不能发现显然的公因式，就分组考察整式的项，看看是不是有哪些项可以先提取公因式。比如：

$$ab+abc-a^2-b^2c$$

可以先把上式的项分为两组：

$$ab+abc-a^2-b^2c=(ab-a^2)+(abc-b^2c)$$

然后分别对每一组做因式分解：

$$ab+abc-a^2-b^2c=(ab-a^2)+(abc-b^2c)=a(b-a)+bc(a-b)$$

然后再提取公因式 $a-b$：

$$ab+abc-a^2-b^2c=a(b-a)+bc(a-b)=(a-b)(-a+bc).$$

可以看到，分组分解的关键在于：各组各自分解的结果，应该有共同的因式。比如上式分成两组，每组都分解出了 $a-b$ 这个因式。

待定系数法

如果对因式分解的结果有一定的猜测，可以先用变量代替暂时不知道的系数，写出因式乘积。展开后，通过对比各项，得到系数。比如：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2$$

上式中，让 $a = b$，则式子变为：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = 3b^2 + bc - b^2 - bc - 2b^2 = 0$$

所以，猜测 $a - b$ 是因式。由于式子最高次项次数是 2，猜测因式分解结果为：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = (a - b)(ua + vb + wc).$$

展开后得到：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = ua^2 + vb^2 + (v - u)ab + wac - wbc.$$

对比左右各项，得到 $u = -1$、$v = 2$、$w = 1$。即：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = (a - b)(-a + 2b + c).$$

待定系数法建立在对因式分解结果的合理猜测上。如果猜测出现错误，后面对比各项时就会发现矛盾。

第四章　二次方根和二次根式

分式开平方得到的代数式，叫做**二次根式**。二次根式可以看成用代数式代替二次方根 $\sqrt{q}$ 中的数量 q 得到的结果。$\sqrt{c}$、$\sqrt{1-a+a^2}$、$\sqrt{x^3-x^2-2}$ 等都是二次根式。通过二次根式，我们可以更好地理解二次方根的性质。

4.1　二次方根的化简

思考 4.1.1. 以下二次方根有什么联系?

1. $\sqrt{2}$、$\sqrt{8}$、$\sqrt{72}$.

2. $\sqrt{3}$、$\sqrt{45}$、$\sqrt{147}$.

3. $\sqrt{5}$、$\sqrt{\frac{5}{4}}$、$\sqrt{\frac{20}{49}}$.

如果正整数 n 有完全平方数 a^2 作为因数：$n = ma^2$，那么

$$\sqrt{n} = \sqrt{m}\sqrt{a^2} = a\sqrt{m}.$$

用这个方法，可以把正整数 n 的二次方根 $\sqrt{n}$ 写成一个整数 a 和一个无理数 $\sqrt{m}$ 的乘积。其中 m 没有完全平方数作为因数，所以 $\sqrt{m}$ 是无理数。我们把这样的形式称为 $\sqrt{n}$ 的**最简形式**，把找到最简形式的过程称为（整数）二次方根的化简。

要化简整数的二次方根，可以先把整数分解成素因数的乘积。给定（大

于 1 的）正整数 n，写出它的标准分解：

$$n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}$$

如果某个素因数 p_i 在 n 中的指数 u_i 是偶数，那么 $p_i^{u_i}$ 是一个完全平方数；如果 u_i 是奇数，那么 $p_i^{u_i-1}$ 是一个完全平方数。于是，我们可以把 n 的素因数分为两类，一类是指数为偶数的，另一类是指数为奇数的。我们可以把前一类中的 $p_i^{u_i}$ 和后一类的 $p_i^{u_i-1}$ 提出来，相乘得到一个完全平方数。剩下的就是指数为奇数的素因数的乘积。如果我们定义这样的函数：

$$\varsigma : n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k} \mapsto p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}.$$

其中的 $r_1, r_2, \cdots r_k$ 分别是 $u_1, u_2, \cdots u_k$ 除以 2 的余数。那么 $\varsigma(n)$ 就是剩下的指数为奇数的素因数的乘积。而 $\frac{n}{\varsigma(n)}$ 是一个完全平方数。

$\varsigma(n)$ 已经没有完全平方数的因子了，我们把它叫做 n 的**二次方余**。n 可以写成：

$$\sqrt{n} = a\sqrt{\varsigma(n)}.$$

其中正整数 a 是 $\frac{n}{\varsigma(n)}$ 的平方根。

举例来说，要化简 $\sqrt{2520}$，可以先把正整数 2520 分解：

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

然后提出完全平方的部分，计算方余：

$$2520 = \left(2^2 \cdot 3^2\right) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7)$$

因此 $\varsigma(n) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$，

$$\sqrt{2520} = 6\sqrt{70}.$$

对一般的正有理数 r，我们也希望将 $\sqrt{r}$ 表示成 $a\sqrt{m}$ 的形式，其中 a 是有理数，而 m 是没有完全平方数因子的正整数。我们把这样的形式称为有理数二次方根的最简形式。

把 r 写成既约分数：$r=\frac{p}{q}$，不难发现，可以把 $\sqrt{r}$ 写成：

$$\sqrt{r}=\sqrt{\frac{p}{q}}=\sqrt{\frac{pq}{q^2}}=\frac{\sqrt{pq}}{q}.$$

这样，只需要把正整数 pq 的二次方根化简，就能得到 $\sqrt{r}$ 的最简形式。

对整式和分式来说，它们开平方得到的二次根式也可以用类似的方式化简。

习题 4.1.1. 化简以下的二次方根：

1. $\sqrt{5480}$、$\sqrt{1240}$、$\sqrt{5760}$.

2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{1744}{85}}$、$\sqrt{\frac{576}{132}}$、$\sqrt{\frac{2240}{6897}}$.

3. $\sqrt{48}-1.8\sqrt{6}+5\sqrt{3}$、$7\sqrt{18}+1.5\sqrt{108}+10\sqrt{242}$.

化简以下的代数式：

1. $\sqrt{(1-a^2)(1+a)}$、$\sqrt{(b^3-a^3)(a-b)}$.

2. $\sqrt{\frac{1-a^4}{(1+a)^3}}$、$\sqrt{\frac{1-a^4}{a(a+1)}}+\sqrt{a^2+1}$.

4.2 二次域

考虑这样一个集合：$\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$。有理数集 $\mathbb{Q}$ 是它的子集，它是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集。我们把它记为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。

举例来说，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素有：$1+\sqrt{2}$、$3-2\sqrt{2}$、0、7 等等。

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素有什么性质呢？

$1+\sqrt{2}$ 和 $3-2\sqrt{2}$ 是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素，它们的和是 $4-\sqrt{2}$，差是 $-2+3\sqrt{2}$，乘积是 $-1+\sqrt{2}$，商是 $7+5\sqrt{2}$。

一般来说，如果 x 和 y 是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素，它们进行四则运算的结果仍然是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素。具有这种性质的数集叫做**数域**。有理数、实数都是数域，自然数、整数、正数不是数域。$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$、$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 这样的数域叫做**二次域**。

如果 n 是正整数，$\sqrt{n}$ 在不在 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 里呢？

定理 4.2.1. $\sqrt{3}$ 不属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。

证明： 用反证法。反设 $\sqrt{3}$ 属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。于是存在有理数 a, b 使得

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}.$$

两边平方，得到：

$$3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}.$$

如果 $ab \neq 0$，那么 $\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab}$ 是有理数。矛盾！
如果 $a = 0$，那么 $2b^2 = 3$，于是 $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 是无理数。矛盾！
如果 $b = 0$，那么 $a^2 = 3$，于是 $a = \sqrt{3}$ 是无理数。矛盾！
综上所述，原命题的否定"$\sqrt{3}$ 属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$"是假的，因此原命题是真的。
□

用同样的方法，可以证明 $\sqrt{2}$ 不属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$。也就是说，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 不是 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 的子集，$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 也不是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的子集。

习题 4.2.1. 想一想：
1. 对哪些正整数 n，$\sqrt{n}$ 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 里？
2. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 的交集是什么集合？是不是数域？
3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 的并集是什么集合？是不是数域？

第五章　一元二次方程

我们已经学习过一元一次方程。解一元一次方程可以看作找出一元一次式 $ax+b=0$ 时变量 x 的取值。找出一元二次式 $ax^2+bx+c=0$ 时 x 的取值，叫做解一元二次方程。

例子 5.0.1. 根据以下问题，设未知数并列出方程：
(1). 一座方城，南北正中有城门。北门出城直走 100 步有树，南门出城直走 100 步转西，走 1200 步后恰能望到。问方城长度是多少?
(2). 氢气和碘蒸气产生化学反应：$H_2+I_2=2HI$。50 摄氏度时，正反应的平衡常数 $k_c=5.25$。现在将 1 摩尔氢气和 2 摩尔碘蒸气放置于 1 升的容器中，将温度调节到 50 摄氏度。反应达到平衡时，有多少摩尔的 HI 产生?

解答.
(1) 解：设方城长 x 步，北门位置为 M 点，外树的位置为 A 点，南门外转向的位置为 B 点，西行恰好望见树的位置为 C 点，城西北角为 N 点。直角三角形 AMN 和 ABC 相似。因此：

$$\frac{|AM|}{|MN|}=\frac{|AB|}{|BC|}$$

根据已知条件，$|AM|=100$，$|MN|=0.5x$，$|AB|=x+200$，$|BC|=1200$。于是可以列出方程：

$$\frac{100}{0.5x}=\frac{x+200}{1200},$$

即：

$$0.5x(x+200) = 100 \cdot 1200$$
$$x^2 + 200x - 240000 = 0$$

(2) 解：设平衡时产生了 x 摩尔的 HI。根据反应方程式，这时 H_2 和 I_2 分别消耗了 $0.5x$ 摩尔。因此平衡时三者浓度分别为 $1-0.5x$ 摩尔/升、$2-0.5x$ 摩尔/升和 x 摩尔/升。根据条件，反应平衡常数为 5.25，即浓度比：

$$\frac{(1-0.5x)(2-0.5x)}{x^2} = 5.25,$$

也即：

$$5.25x^2 = (1-0.5x)(2-0.5x)$$
$$10x^2 + 3x - 4 = 0$$

5.1 解一元二次方程

怎么求一元二次方程的解呢？我们其实已经解决过一种简单的情形。考虑等腰直角三角形，如果直角边长度为 1，那么斜边长 x 满足：

$$x^2 = 2.$$

这就是个一元二次方程。解这个一元二次方程的方法是对右边的 2 开平方，得到解：

$$x = \sqrt{2}.$$

当然，另一个解：$x = -\sqrt{2}$ 也满足方程。只是我们要求的斜边长度是正数，所以这个解不是我们要找的。不过，仅就方程 $x^2 = 2$ 来说，它有两个解，分别是 $x_1 = \sqrt{2}$ 和 $x_2 = -\sqrt{2}$。为了方便，有时我们也写成 $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$。

$x^2=2$ 和一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有什么不同呢？我们注意到，二次项 x^2 的系数不再是 1，而且多了一次项 bx。二次项系数的问题不难解决，我们把方程两边同时除以 a，就可以让二次项系数等于 1：

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

至于一次项，我们希望通过一些手段把它"去掉"。这样，问题就转化为类似 $x^2=2$ 的简单情形了。

第一种手段叫作配方法。我们希望把 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ 表示与 x 相关的平方形式。观察平方和公式：

$$\begin{aligned}(x+1)^2&=x^2+2\cdot 1\cdot x+1^2\\(x+2)^2&=x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2\\(x+3)^2&=x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2\\&\cdots\end{aligned}$$

对任何数 t，根据平方和公式，$(x+t)^2=x^2+2tx+t^2$，如果让 $2t=\frac{b}{a}$，那么 $(x+t)^2$ 就和 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ 有相同的一次项了。这时，$t=\frac{b}{2a}$，$(x+\frac{b}{2a})^2$ 展开得到 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$，和 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ 还相差：$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$。于是，原方程变成：

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

现在方程和 $x^2=2$ 已经很像了。最后需要讨论等号右边常数项是否小于 0。实数 $x+\frac{b}{2a}$ 的平方总大于等于 0，所以，如果等号右边的常数项小于 0，那么方程无解。如果常数项恰好等于 0，那么方程恰有一个解：$x=-\frac{b}{2a}$。如果常数项大于 0，那么方程和 $x^2=2$ 一样有两个解。

第二种手段是待定系数法。我们可以直接猜测：$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 能够写成 $(x-\lambda)^2=\mu$ 的形式。把后者展开，通过对比各项系数，可以得到：$\lambda=-\frac{b}{2a}$，$\mu=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$。

无论哪一种方法，我们都发现，常数项 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 的正负性质和方程解的个数有直接关系。它的分母 $4a^2$ 总是正数，所以关键在于分子：b^2-4ac。我

们把这个式子叫作一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**判别式**，记作 Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$\Delta<0$ 时，方程无解；$\Delta=0$ 时，方程有唯一解：$x=-\frac{b}{2a}$；$\Delta>0$ 时，方程有两个解:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

对二次整式 ax^2+bx+c 来说，使得它等于 0 的 x 的值叫作它的根。$\Delta<0$ 时，整式无根；$\Delta>0$ 时，整式有两个根。$\Delta=0$ 时，整式变为 $(x+\frac{b}{2a})^2$，我们说整式有二重根，或者说根的重数是 2。为了方便，对整式对应的方程，我们也使用“方程的根”的说法。这时，方程的根就是对应整式的根。

于是，我们可以给出上面两个例题中方程的解:

解答. 1. 解：方程 $x^2+200x-240000=0$ 的判别式是：$\Delta=200^2-4\cdot1\cdot(-240000)=1000000>0$，所以方程有两个根:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-200 \pm \sqrt{1000000}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-200 \pm 1000}{2} \end{aligned}$$

即 $x_1=400$ 和 $x_2=-600$。根据题目条件，$x>0$，所以解为 $x=400$。
答：方城长 400 步。
2. 解：方程 $10x^2+3x-4=0$ 的判别式是：$\Delta=3^2-4\cdot10\cdot(-4)=169>0$，所以方程有两个根:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2\cdot 10} \\ &= \frac{-3 \pm 13}{20} \end{aligned}$$

即 $x_1=0.5$ 和 $x_2=-0.8$。根据题目条件，$x\geqslant 0$，所以解为 $x=0.5$。
答：生成了 0.5 摩尔的 HI。

5.2 根和系数的关系

上一节我们给出了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解。从根的角度，ax^2+bx+c 要么无根，要么有两个根。这两个根和变量的系数有什么关系呢?

写出两个根的表达式:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

要注意的是，从根的角度，$\Delta=0$ 时，这个式子也成立。把两个根相加，得到:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}.$$

把它们相乘，得到:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

于是，

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=ax^2+bx+c.$$

我们把 $a(x-x_1)(x-x_2)$ 称为整式 ax^2+bx+c 的根形式。

从另一个角度，可以这么理解：整式 ax^2+bx+c 有两个根 x_1 和 x_2，说明 $x-x_1$ 和 $x-x_2$ 都是它的因式。$x_1\neq x_2$ 时，$x-x_1$ 和 $x-x_2$ 互素，于是 $ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)q$，其中 q 是整式。显然，如果 q 的次数大于 0，$(x-x_1)(x-x_2)q$ 的次数就大于 2 了，因此 q 是常式。对比系数可知，$q=a$，于是可以得出 ax^2+bx+c 的根形式。

$x_1=x_2$ 的时候，就无法直接得出 $ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)q$ 了，所以需要特别指出根的重数是 2，它表示 $ax^2+bx+c=(x-x_1)^2q$。这就是根的重数的用处。

设一元二次方程 ax^2+bx+c 的系数是有理数。它的解 x_1 和 x_2 都是开方得到的，可能不是有理数，而属于某个二次域。但它们的和与积是方程

系数的商，所以必然是有理数。除此之外，如果计算其他关于 x_1 和 x_2 的式子，结果可能就不是有理数了。比如，计算 $x_1 - x_2$，可以得到：

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$

$\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ 中有开方运算，不一定是有理数。

$x_1 - x_2$ 和 $x_1 + x_2$、x_1x_2 有什么区别呢？如果交换 x_1 和 x_2 的位置，$x_1 - x_2$ 会变成 $x_2 - x_1$，而 $x_1 + x_2$、x_1x_2 和原来一样。我们把交换 x_1 和 x_2 的位置而不变的二元整式叫作二元对称式。二元对称式除了 $x_1 + x_2$、x_1x_2 还有很多，比如 $x_1^2 + x_2^2$、$x_1x_2^2 + x_2x_1^2$ 等等。

一元二次方程的根是无理数的时候，有什么性质呢？先来看一个具体的例子。设有方程：$x^2 - 2x - 1 = 0$。它的根是：

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

两个根都能写成 $u + v\sqrt{2}$ 的形式（u, v 是有理数）。也就是说，它们都是二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素。一般情况：一元二次方程 $ax^2 + bx + c$ 的系数是有理数，如果它有两个无理数解：

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

设二次方根 $\sqrt{\Delta}$ 化简的结果是：$\sqrt{\Delta} = r\sqrt{m}$，那么两个根都是 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ 的元素。

如果直接把两个解放在数轴上看，它们也关于点 $-\frac{b}{2a}$ 对称。如果把数轴看做 x 轴，建立直角坐标系，那么两个解分别对应 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$，它们关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称。

第六章　函数初步（下）

我们已经学习了正比例函数和一次函数。直角坐标系中，它们的图像是直线。现在我们来看另外几种函数。

6.1　反比例函数

正比例函数是从正面描述比例关系的函数。除了正比例关系，我们还可以从另一个方面描述比例关系。比如，两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似，那么对应的边长成比例：

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k.$$

如果已知 $|AB|$ 为定值，那么比例系数和 $|A'B'|$ 的关系叫做反比例关系，对应的映射叫**反比例函数**。一般来说，反比例函数是这样的：

$$x \mapsto \frac{k}{x}$$

比如，$x \mapsto \frac{3}{x}$ 就是一个反比例函数。

反比例函数有什么性质呢？以 $x \mapsto \frac{3}{x}$ 为例。下表是 x 取不同值时函数的值：

x	-30	-6	-3	-0.3	0.3	1	3	6	60
$f(x)$	-0.1	-0.5	-1	-10	10	3	1	0.5	0.05

对比 $f(-0.3)$ 和 $f(0.3)$、$f(-3)$ 和 $f(3)$、$f(-6)$ 和 $f(6)$，可以注意到：如果 a 和 b 是相反数，那么 $f(a)$ 和 $f(b)$ 也是相反数。这个性质也可以写成：

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ f(-x) = -f(x).$$

这个性质可以用反比例函数的定义证明：

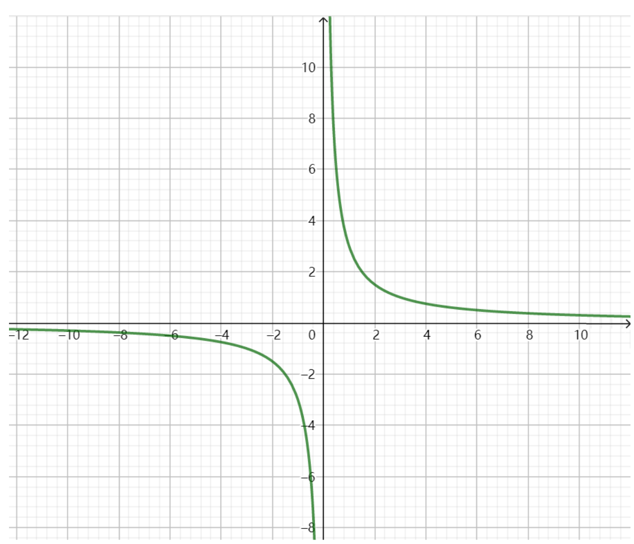
$$f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x).$$

另外可以发现，$x < 0$ 时，$f(x)$ 也小于 0。x 越小，$f(x)$ 越大。$x > 0$ 时，$f(x)$ 也大于 0。x 越小，$f(x)$ 越大。要注意的是，x 不能等于 0。反比例函数的定义域是不为零的实数的集合，记作 $\mathbb{R}^*$ 或 $\mathbb{R}^\times$。

把 3 换成其它的数，你有什么发现？

设有反比例函数 $f : x \mapsto \frac{k}{x}$。当 $k > 0$ 的时候，x 和 $f(x)$ 同号。$x < 0$ 时，x 的值越接近 0，$f(x)$ 越小；$x > 0$ 时，x 的值越接近 0，$f(x)$ 越大。当 $k < 0$ 的时候，x 和 $f(x)$ 异号。$x < 0$ 时，x 的值越接近 0，$f(x)$ 越大；$x > 0$ 时，x 的值越接近 0，$f(x)$ 越小。k 的正负对函数的性质有本质影响。

反比例函数的图像是怎样的呢？我们可以用描点法得到大致的模样，但目前我们掌握的知识，还不足以严谨地勾画出反比例函数的图像。借助计算机作图软件，我们可以得到反比例函数的图像：

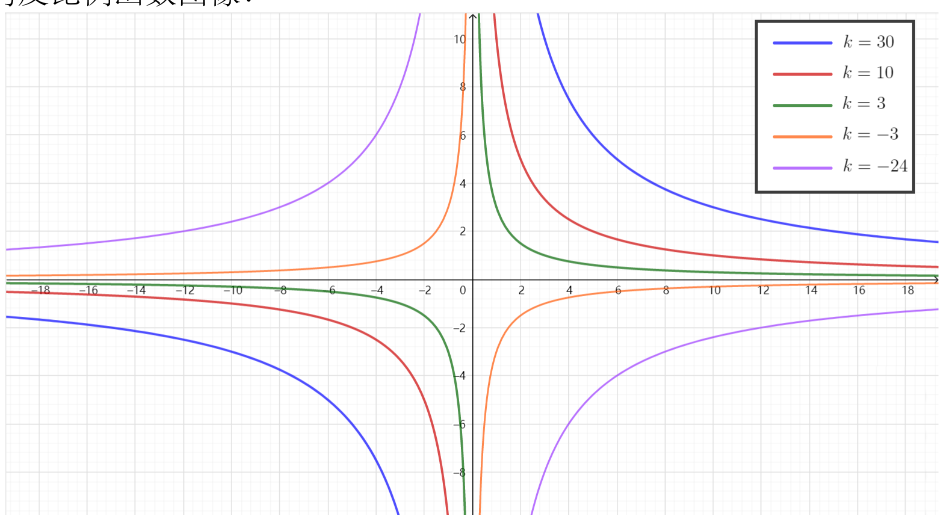


我们说反比例函数的图像是一条曲线。右图中，第一象限中的部分叫做反比例函数的**正支**，它是函数在 $x > 0$ 时的图像；第三象限中的部分叫做反比例函数的**负支**；它是函数在 $x < 0$ 时的图像。$k > 0$ 时，

正支在第一象限，负支在第三象限；$k < 0$ 时，正支在第四象限，负支在第二象限。

另外，反比例函数的图像关于原点中心对称。这可以通过性质：$f(-x) = -f(x)$ 得到。对图像中每一点 $(x, f(x))$，$(-x, -f(x)) = (-x, f(-x))$，因此它关于原点的对称点也在函数图像上。

对不同的 k，反比例函数的图像有什么不一样呢？我们画出不同的 k 对应的反比例函数图像：



首先，$k = 3$ 的图像和 $k = -3$ 的函数图像恰好关于 y 轴对称，也关于 x 轴对称。一般来说，$k < 0$ 时，函数图像和 $-k$ 时的函数图像关于 y 轴和 x 轴对称。由对称性，我们可以只研究 $k > 0$ 情况下函数图像的正支。

对比上图第一象限中三种颜色的曲线，我们可以发现，每条曲线都随着 x 变大而越来越平缓，x 越靠近 0，曲线就越陡峭。观察不同曲线之间的区别，可以发现，k 越大，曲线越"靠右上方"。这并不难理解。比如，对横坐标 $x = 4$ 来说，正数 k 越大，纵坐标 $\frac{k}{4}$ 就越大，在图像中越"靠上"。同样，要让纵坐标 $f(x) = 4$，那么对应的横坐标 $x = \frac{k}{4}$，于是正数 k 越大，$\frac{k}{4}$ 就越大，在图像中越"靠右"。

反比例函数的图像还有一个基本性质：如果点 (a, b) 在图像上，那么

(b, a) 也在图像上。这是因为 $a = \frac{k}{b}$，当且仅当 $b = \frac{k}{a}$。

习题 6.1.1. 证明:

1. 只要 (a, b) 在函数 $x \mapsto \frac{k}{x}$ 的图像上，那么 (b, a)、$(-a, -b)$、$(-b, -a)$ 都在图像上。

2. 如果斜率为 -1 的直线 $x \mapsto -x + c$ 和函数 $x \mapsto \frac{k}{x}$ 的图像有交点，那么 $c^2 \geqslant 4k$。

6.2 二次函数

一元一次式对应一次函数，而一元二次式对应着二次函数。一般来说，一元二次式可以写成 $ax^2 + bx + c$ 的形式，其中 $a \neq 0$。我们把形如

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

的函数叫做二次函数。

我们从最简单的情形：$x \mapsto x^2$ 开始研究。下表是 x 取不同值时函数的值:

x	-10	-5	-2	-1	0	1	2	5	10
$f(x)$	100	25	4	1	0	1	4	25	100

首先可以发现，如果 a 和 b 是相反数，那么 $f(a) = f(b)$。比如，$f(-5) = f(5)$、$f(-2) = f(2)$、$f(-1) = f(1)$。这个性质可以写成:

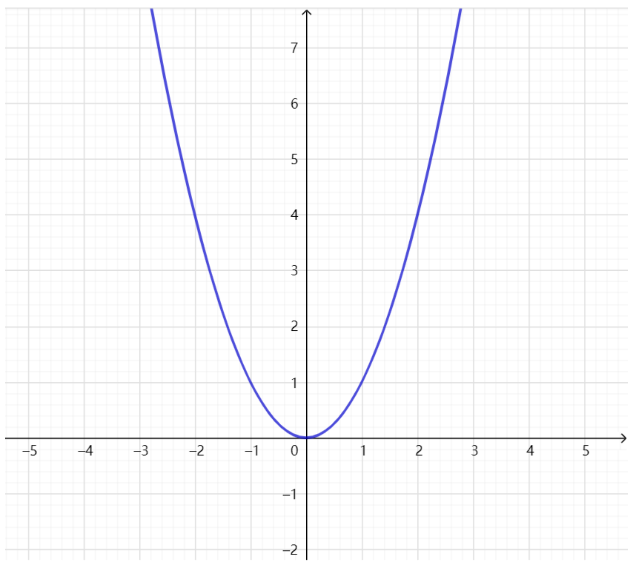
$$f(-x) = f(x).$$

这个性质可以用函数的定义证明:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

另外可以看到，$x<0$ 时，$f(x)$ 大于 0，且 x 越大，$f(x)$ 越小，最终在 $x=0$ 时函数值取 0。$x>0$ 是，$f(x)$ 大于 0，且 x 越大，$f(x)$ 越大。

函数 $x\mapsto x^2$ 的图像是怎样的呢？和反比例函数情形一样：我们可以用描点法得到大致的模样，但目前我们掌握的知识，还不足以严谨地勾画出它的图像。借助计算机作图软件，我们可以得到函数 $x\mapsto x^2$ 的图像：

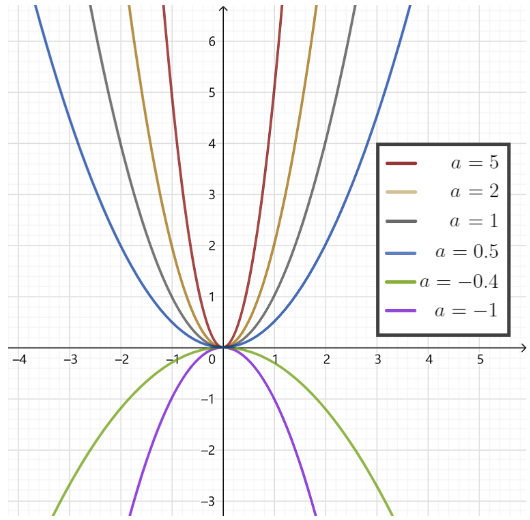


观察图像，这是一条曲线。首先可以注意到，它关于 y 轴对称。这一点可以用前面得到的性质证明。给定图像上一点：(x,x^2)，$(-x,x^2)$ 也在图像上，所以图像关于 y 轴对称。由对称性，我们可以先研究曲线在 $x\geqslant 0$ 部分的性质。

可以发现，从 $x=0$ 开始，随着 x 逐渐增大，函数值也逐渐增大，而且增长速度逐渐加快。在 $x=0$ 附近，曲线比较平缓，x 增大后，曲线越来越陡峭。

如果把函数乘以系数 a，得到 $x\mapsto ax^2$，函数的性质会发生什么变化？我们可以验证：$a>0$ 时，以上提到的性质保持不变。$a<0$ 时，函数的正负和增减性质颠倒了。首先，ax^2 总小于等于 0。$x<0$ 时，x 越大，函数值越大，$x>0$ 时，x 越大，函数值越小。从 $x=0$ 开始，随着 x 逐渐增大，

函数值逐渐减小，而且减小速度逐渐加快。与 $a>0$ 时相同的是：在 $x=0$ 附近，曲线比较平缓，x 增大后，曲线越来越陡峭。



对于一般的一元二次式 ax^2+bx+c，二次函数 $x\mapsto ax^2+bx+c$ 的图像是怎样的呢？上一章中，我们使用配方法解一元二次方程。用同样的方法，我们可以把 ax^2+bx+c 写成：

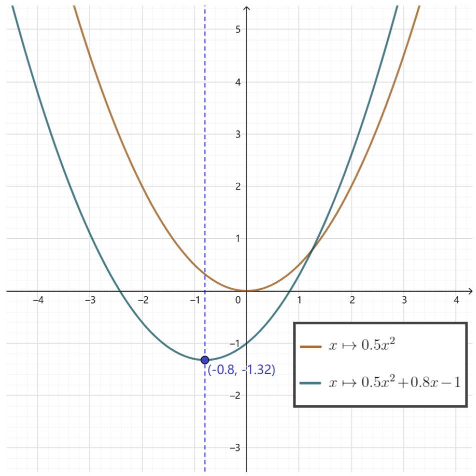
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

因此，如果我们把 $x\mapsto ax^2$ 的图像按 $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ 平移，就得到 $x\mapsto ax^2+bx+c$ 的图像。比如，要得到 $x\mapsto 0.5x^2+0.8x-1$ 的图像，我们从 $x\mapsto 0.5x^2$ 出发。将 $0.5x^2+0.8x-1$ 配方得到

$$0.5x^2+0.8x-1=0.5\left(x+0.8\right)^2-1.32$$

于是将 $x\mapsto 0.5x^2$ 按 $(-0.8,-1.32)$ 平移，就得到 $x\mapsto 0.5x^2+0.8x-1$ 的图像。

用 $x\mapsto 0.5x^2+0.8x-1$ 作例子，可以看到，原来 $x\mapsto ax^2$ 的图像关于 y 轴对称。平移之后，图像关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称。$a>0$ 时，$x\mapsto ax^2$ 的



图像最低点是 $(0,0)$，平移之后，最低点是 $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$。$a<0$ 时，$x \mapsto ax^2$ 的图像最高点是 $(0,0)$，平移之后，最高点是 $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$。直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 叫做二次函数图像的对称轴，点 $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ 叫做二次函数图像的顶点。

习题 6.2.1.

1. 二次函数 $x \mapsto x^2$ 的图像和 $x \mapsto ax+b$ 恰有一个交点，那么 a、b 满足怎样的关系？交点的坐标是多少？

2. 二次函数 $x \mapsto ax^2+bx+c$ 的图像和它关于点 (x_0,y_0) 平移后的图像有交点，则 (x_0,y_0) 应满足什么条件？交点个数可以是多少？

6.3 一元二次不等式

通过研究二次函数的图像，我们可以直观地理解一元二次不等式。

一元二次不等式是类似 $ax^2+bx+c>0$ 的不等式。其中的大于号也可以是小于号、大于等于号或小于等于号。以不等式 $ax^2+bx+c>0$ 来说，x 是不等式的一个解，当且仅当点 (x,ax^2+bx+c) 在 x 轴上方。也就是说，$ax^2+bx+c>0$ 的解集，就是二次函数 $x \mapsto ax^2+bx+c$ 在 x 轴上方的点的横坐标的集合。

观察 $x \mapsto ax^2 + bx + c$ 的图像可知，如果 $\Delta > 0$，那么二次函数有两个零点。$a > 0$ 时，不等式的解集对应两个零点两侧的部分，是两个开区间的并集：

$$(-\infty, \frac{-b-\Delta}{2a}) \cup (\frac{-b+\Delta}{2a}, \infty)$$

$a < 0$ 时，不等式的解集对应两个零点之间的部分，即开区间：

$$(\frac{-b-\Delta}{2a}, \frac{-b+\Delta}{2a})$$

如果 $\Delta < 0$，那么二次函数没有零点。$a > 0$ 时，二次函数的图像总在 x 轴上方，于是不等式的解集是全体实数。$a < 0$ 时，二次函数的图像总在 x 轴下方，于是不等式的解集是空集。

如果 $\Delta = 0$，那么二次函数恰有一个零点。$a > 0$ 时，不等式的解集对应零点两侧的部分，是两个开区间的并集：

$$(-\infty, \frac{-b}{2a}) \cup (\frac{-b}{2a}, \infty)$$

$a < 0$ 时，二次函数的值不大于零，于是不等式的解集是空集。

要是不等式的大于号换成大于等于号，则相关的“开”的部分也换成“闭”。如果 $\Delta > 0$，二次函数有两个零点。$a > 0$ 时，不等式 $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ 的解集是：

$$(-\infty, \frac{-b-\Delta}{2a}] \cup [\frac{-b+\Delta}{2a}, \infty)$$

$a < 0$ 时，不等式的解集是：

$$[\frac{-b-\Delta}{2a}, \frac{-b+\Delta}{2a}]$$

如果 $\Delta < 0$，那么二次函数没有零点。$a > 0$ 时，二次函数的图像总在 x 轴上方，于是不等式的解集是全体实数。$a < 0$ 时，二次函数的图像总在 x 轴下方，于是不等式的解集是空集。

如果 $\Delta = 0$，那么二次函数恰有一个零点。$a > 0$ 时，不等式的解集包括了零点，因此是全体实数。$a < 0$ 时，二次函数的值不大于零，于是不等式的解集是单元集：$\{\frac{-b}{2a}\}$。

要是不等式的大于号（大于等于号）换成小于号（小于等于号），只需要把左边的项移到右边，就转化成大于号（大于等于号）的情况。

例子 6.3.1.

1. 求不等式 $2x^2 - 5x + 2 > 0$ 的解集。

2. 求不等式 $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$ 的解集。

解答.

1. 首先求一元二次方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 的解。依公式可得：

$$x_1 = 0.5, \quad x_2 = 2.$$

因此，不等式的解集是 $(-\infty, 0.5) \cup (2, \infty)$。

2. 首先求一元二次方程 $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的解。依公式可得：

$$x = 3.$$

因此，不等式的解集是全体实数。

一元二次不等式还可以用来解反比例函数和一次函数的不等式。

例子 6.3.2. 求不等式 $\frac{8}{x} > x + 2$ 的解集。

可以把这个不等式理解为反比例函数 $x \mapsto \frac{8}{x}$ 和一次函数 $x \mapsto x + 2$ 的图像的关系。x 是不等式 $\frac{8}{x} > x + 2$ 的一个解，当且仅当点 $(x, \frac{8}{x})$ 在点 $(x, x+2)$ 上方。如果我们画出两个函数的图像，并找到反比例函数在 $x \mapsto \frac{8}{x}$ 在一次函数 $x \mapsto x + 2$ 图像上方的部分，那么这部分的点的横坐标，就是不等式的解。

观察两者图像可知，解集大致对应第三象限中曲线和直线交点左侧的部分，以及第一象限中曲线和直线交点左侧的部分。具体交点的位置，我们可以通过解方程 $\frac{8}{x} = x + 2$ 得到。而这个方程可以转化为一元二次方程。

把 $\frac{8}{x} = x + 2$ 两边乘以 x，再把常数项 8 移到右边，就得到方程:

$$0 = x^2 + 2x - 8.$$

这是一个一元二次方程，解为:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2$$

它们分别对应点 $(-4, -2)$ 和 $(2, 4)$（注意不是 $(-4, 0)$ 和 $(2, 0)$）。这两个点就是第三、第一象限中曲线和直线交点的位置。因此，我们可以得出结论：不等式的解集是 $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$。

习题 6.3.1. 解以下不等式:

1. $3x^2 - 8x + 4 < 0$

2. $2x^2 + 8x + 9 \geqslant 7x + 10$

3. $\frac{2}{x} < 6x - 7$