

# 第四册

大青花鱼



# 目录



# 第一章 四边形

四边形是生活中常见的形状。下面来看几种常见的四边形。

## 1.1 平行四边形

**平行四边形**是一种重要的四边形。它由两组平行线确定。

设直线  $l_1 \parallel l_2$ ,  $m_1 \parallel m_2$ , 且  $l_1$  和  $m_1$  有交点  $A$ , 那么  $l_2$  和  $m_1$ 、 $l_2$  和  $m_2$ 、 $l_1$  和  $m_2$  各有交点  $B$ 、 $C$ 、 $D$ , 四边形  $ABCD$  叫做平行四边形, 记作  $\square ABCD$ 。

设有四边形  $ABCD$ , 我们说  $AB$ 、 $CD$  互为对边,  $BC$ 、 $DA$  互为对边;  $\angle ABC$  和  $\angle CDA$  互为对角,  $\angle BCD$  和  $\angle DAB$  互为对角。线段  $AC$  和  $BD$  称为四边形的对角线。

**定理 1.1.1.** 平行四边形对边平行且等长, 对角相等。

**证明:** 给定  $\square ABCD$ , 按定义可知对边平行。

接着证明  $\square ABCD$  的对角相等。

$\angle ABC$  和  $\angle DAB$  是同旁内角, 所以和为平角。类似地,  $\angle ABC$  和  $\angle BCD$  是同旁内角, 所以和为平角。于是,  $\angle DAB = \angle BCD$ 。同理,  $\angle ABC$  和



$\angle DAB$  是同旁内角, 所以和为平角。类似地,  $\angle CDA$  和  $\angle DAB$  是同旁内角, 所以和为平角。于是,  $\angle ABC = \angle CDA$ 。

最后证明  $\square ABCD$  的对边等长。

连接对角线  $AC$ 。 $AB \parallel CD$ , 所以内错角  $\angle CAB = \angle ACD$ ; 同理,  $BC \parallel DA$ , 所以内错角  $\angle BCA = \angle DAC$ 。另外  $|AC| = |AC|$ 。所以, 根据“角边角”,  $\triangle ABC \simeq \triangle CDA$ 。因此,  $|AB| = |CD|$ ,  $|BC| = |DA|$ 。  $\square$

从证明中可以看出, 平行四边形和三角形有密切的关系。把平行四边形沿对角线“裁开”, 就得到一对同角全等的三角形。一般来说, 任何四边形沿对角线裁开, 都会得到两个三角形。因此, 在约定角的范围是负平角到正平角时, **四边形的内角和是零角**。对平行四边形来说, 为了方便, 也说它的内角和是周角。

除了对边分别平行, 还有什么办法, 判断一个四边形是不是平行四边形呢? 我们可以从这对全等三角形入手。以上证明中用到了“角边角”, 是否可以换成“边角边”或“边边边”呢?

**定理 1.1.2.** 对边等长的四边形是平行四边形。

**证明:** 设四边形  $ABCD$  中  $|AB| = |CD|$ ,  $|BC| = |DA|$ 。连接  $AC$ , 根据“边边边”,  $\triangle ABC \simeq \triangle CDA$ , 因此,  $\angle CAB = \angle ACD$ , 于是  $AB \parallel CD$ 。同理, 由于  $\angle BCA = \angle DAC$ ,  $BC \parallel DA$ 。于是四边形  $ABCD$  是平行四边形。  $\square$

**定理 1.1.3.** 一对边平行且等长的四边形是平行四边形。

**证明:** 设四边形  $ABCD$  中  $AB \parallel CD$  且  $|AB| = |CD|$ 。连接  $AC$ 。 $|AC| = |AC|$ 。由于  $AB \parallel CD$ , 内错角  $\angle CAB = \angle ACD$ 。根据“边角边”,  $\triangle ABC \simeq \triangle CDA$ , 因此, 由于  $\angle BCA = \angle DAC$ ,  $BC \parallel DA$ 。于是四边形  $ABCD$  是平行四边形。  $\square$

**定理 1.1.4.** 对角相等的四边形是平行四边形。

**证明：** 设四边形  $ABCD$  中  $\angle ABC = \angle CDA$ ,  $\angle BCD = \angle DAB$ 。四边形的内角和是两个平角，所以同旁内角  $\angle ABC$  和  $\angle BCD$  满足  $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ ，这说明  $AB \parallel CD$ 。同理，同旁内角  $\angle ABC$  和  $\angle DAB$  满足  $\angle ABC + \angle DAB = 180^\circ$ ，因此  $BC \parallel DA$ 。  $\square$

**思考 1.1.1.** 一对边等长，一对角相等的四边形，是否是平行四边形？

给定  $\square ABCD$ ，设对角线  $AC$  和  $BD$  的交点为  $G$ ，我们把  $G$  叫做平行四边形的**中心**。可以用“角边角”证明： $\triangle ABG \simeq \triangle CDG$ ,  $\triangle BCG \simeq \triangle DAG$ 。因此， $|AG| = |CG|$ 、 $|BG| = |DG|$ 。 $G$  同时是两条对角线的中点。换句话说，**平行四边形的两条对角线相互平分**。用对称的说法， $A$  和  $C$  关于  $G$  对称， $B$  和  $D$  关于  $G$  对称。

在直角坐标系中，如果  $A$  的坐标是  $(x_A, y_A)$ ， $B$  的坐标是  $(x_B, y_B)$ ， $C$  的坐标是  $(x_C, y_C)$ ， $D$  的坐标是  $(x_D, y_D)$ ，那么  $G$  的坐标  $(x_G, y_G)$  满足：

$$x_A + x_C = 2x_G = x_B + x_D, \quad y_A + y_C = 2y_G = y_B + y_D.$$

平行四边形还可以用来定义平移变换。直角坐标系中，我们已经定义过平移。使用平行四边形的概念，设  $A$  是原点，那么关于另一点  $B$  的平移可以这样定义：对平面上任一点  $D$ ，作平行四边形  $ABCD$ ，则  $C$  就是  $D$  平移后得到的点。用坐标来表示的话，这个平移就是：

$$(x_D, y_D) \mapsto (x_D + x_B, y_D + y_B).$$

**习题 1.1.1.** 证明：

1. 对角线相互平分的四边形是平行四边形。

## 1.2 特殊平行四边形

平行四边形是对边平行、对角相等的四边形。下面我们来看几种特殊的平行四边形。

如果四边形四边等长，就说它是**菱形**。菱形肯定是平行四边形。由于平行四边形对边等长，所以也可以这样判定菱形：

**定理 1.2.1.** 邻边等长的平行四边形是菱形。

把菱形沿对角线“裁开”，得到的一对三角形都是等腰三角形。由于对角线平分，菱形的中心是等腰三角形底边中点，对角线也是中线。而等腰三角形三线合一，中线就是高线。所以菱形的对角线不仅相互平分，而且相互垂直。

反过来，如果四边形的对角线相互平分，而且相互垂直，那么它是菱形。菱形的两条对角线把它分为四个全等的直角三角形。

如果四边形四角相等，就说它是**矩形或长方形**。由于四边形内角和是周角，平行四边形对角相等，所以也可以这样判定矩形：

**定理 1.2.2.** 有一个角是直角的平行四边形是矩形。

把矩形  $ABCD$  沿对角线  $AC$  “裁开”，得到  $\triangle ABC$  和  $\triangle CDA$ ，由于  $\angle ABC$  和  $\angle CDA$  都是直角， $\triangle ABC$  和  $\triangle CDA$  是直角三角形。根据勾股定理。 $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ 。另一方面，把矩形  $ABCD$  沿对角线  $BD$  “裁开”，通过类似推理可以得到： $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$ 。而  $|BC| = |AD|$ ，所以  $|AC| = |BD|$ 。即：

**定理 1.2.3.** 矩形的对角线相互平分，而且等长。

反过来，如果四边形的对角线相互平分而且等长，那么它是矩形。矩形的两条把它分为两对全等的等腰三角形。

如果一个四边形既是菱形，又是矩形，就称它为**正方形**。正方形是我们很熟悉的图形。正方形的四边等长，四个内角都是直角。它的对角线长度是





边长的  $\sqrt{2}$  倍。把正方形沿对角线“裁开”，得到一对等腰直角三角形。正方形的两条对角线把它分为四个更小而全等的等腰直角三角形。

## 1.3 梯形

除了平行四边形，还有其他类型的四边形。

如果四边形有一对边平行，就说它是**梯形**。如果梯形另一对边也平行，就是平行四边形。我们已经研究过平行四边形了，所以，一般说梯形时，都指非平行四边形的梯形。

研究相似三角形的时候，我们已经接触过梯形。如右图，大的三角形里去掉小的三角形，就是梯形。把梯形补全为一对相似三角形，是常见的思考方式。



按照这个说法，梯形平行的一对边长度不等。我们称它们为**上底**和**下底**。一般会把较短的一边称为上底，较长的称为下底。另外两条边一般称为梯形的**腰**。两腰等长的梯形，称为**等腰梯形**。等腰梯形对应一对相似的等腰三角形。

设梯形  $ABCD$  中  $BC \parallel AD$ ，那么同旁内角  $\angle ABC + \angle DAB = 180^\circ$ ， $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$ 。如果其中一个角是直角，这样的梯形叫作**直角梯形**。直角梯形对应一对相似的直角三角形。

梯形两腰的中点连线，称为梯形的**中位线**。

**定理 1.3.1.** 梯形中位线长度是两底长度之和的一半。

**证明：** 设梯形  $ABCD$  中  $BC \parallel AD$ ,  $M$  是边  $AB$  的中点,  $N$  是边  $CD$  的中点, 直线  $AB$ 、 $CD$  交于点  $O$ 。由于  $BC \parallel AD$ ,  $\triangle OBC \sim \triangle OAD$ 。因此:

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|BC|}{|AD|} = k.$$

其中  $k$  是比例系数, 即:

$$|OB| = k|OA|, \quad |OC| = k|OD|.$$

于是

$$|OM| = |OB| + \frac{|AB|}{2} = \frac{|OA| + |OB|}{2} = \frac{k+1}{2} \cdot |OA|.$$

同理,

$$|ON| = |OC| + \frac{|CD|}{2} = \frac{k+1}{2} \cdot |OD|.$$

这说明

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|ON|}{|OD|} = \frac{k+1}{2}.$$

而  $\angle MON = \angle AOD$ , 所以  $\triangle OAD \sim \triangle OMN$ 。于是中位线  $MN$  的长度为

$$|MN| = |AD| \cdot \frac{|OM|}{|OA|} = \frac{k+1}{2} \cdot |AD|.$$

将  $k = \frac{|BC|}{|AD|}$  代入, 就得到

$$|MN| = \frac{|BC| + |AD|}{2}.$$

□

## 1.4 筝形

平行四边形可以“裁成”两个同角全等的三角形。或者说，一对同角全等的三角形可以拼出一个平行四边形。那么，一对反角全等的三角形拼出的图形是什么呢？



这个图形叫作**筝形**。我们对筝形并不陌生，在证明“角边角”的时候已经见过。四边形的两对邻边分别等长，就叫作筝形。

如果筝形的对边也等长，就成了菱形。所以，一般说筝形时，都指非菱形的筝形。

筝形的最大特点，就是一条对角线是另一条的垂直平分线。我们把它叫作**脊线**，把另一条（被它平分的）对角线叫作**肩线**。我们已经证明过，脊线和肩线相互垂直。它们把筝形分为两对全等直角三角形。

直角坐标系中，把  $(0,0)$ 、 $(0,a)$ 、 $(a,a)$ 、 $(a,0)$  四点依次连起来，就围成一个边长为  $a$  的正方形。如果把  $(0,0)$ 、 $(0,b)$ 、 $(a,b)$ 、 $(a,0)$  四点依次连起来，就围成一个长宽为  $a$  和  $b$  的矩形。如果把  $(-a,0)$ 、 $(0,b)$ 、 $(a,0)$ 、 $(0,-b)$  四点依次连起来，就围成一个菱形。如果把  $(0,0)$ 、 $(a,b)$ 、 $(a+u,b+v)$ 、 $(u,v)$  四点依次连起来，就围成一个平行四边形。这些形状可以看作是实心的点集。比如以上正方形对应点集：

$$\{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq a\}.$$

从  $(0,0)$ 、 $(0,a)$ 、 $(a,a)$ 、 $(a,0)$  连成的正方形出发，关于点  $(0,a)$  平移，就得到一个新的正方形，它是  $(0,a)$ 、 $(0,2a)$ 、 $(a,2a)$ 、 $(a,a)$  连成的正方形。

#### 思考 1.4.1.

1. 从一个（实心）正方形出发，通过平移，能否填满整个平面，不留空隙也不互相重叠？

2. 从一个（实心的）矩形、菱形、平行四边形出发，通过平移，能否填满整个平面，不留空隙也不互相重叠？

3. 如果从一个(实心)图形出发,用和它全等的图形可以填满整个平面,不留空隙也不互相重叠,就说它是**密铺图形**,可以密铺平面。正方形、矩形、菱形、平行四边形、等腰梯形、直角梯形、筝形,哪些是密铺图形?

4. 如果一个图形关于某条直线的轴对称图形是它自己,就说它是**轴对称图形**,该直线是它的对称轴。同样,如果一个图形关于某点的中心对称图形是它自己,就说它是**中心对称图形**,该点是它的对称中心。正方形、矩形、菱形、平行四边形、等腰梯形、直角梯形、筝形,哪些是轴对称图形,哪些是中心对称图形?它们分别有哪些对称轴和对称中心?

## 1.5 剪形和蝶形

比较以下的四边形,它们相应的角度有什么不同?

给定四个点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ ,我们把线段  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  连起来的图形叫做四边形  $ABCD$ 。这四个顶点和四条边也组成了四个角:  $\angle ABC$ 、 $\angle BCD$ 、 $\angle CDA$ 、 $\angle DAB$ 。我们称其为四边形  $ABCD$  的四个内角。

我们已经学习了平行四边形、梯形、筝形等四边形。如果把角的范围限定在负平角和正平角之间,平行四边形的内角要么总是正的,要么总是负的。但也有一些四边形,它们的内角总是有正有负。比如上图中间的四边形,内角  $\angle BCD$  是负的;上图右边的四边形,内角  $\angle ABC$  和  $\angle DAB$  是负的。

如果把这些四边形作轴对称,得到的四边形内角恰好与原本相反。上图中间的四边形会变成有三个内角为负的四边形;右边的四边形仍旧是两个内角为负的四边形。

我们把类似上图中间的四边形,内角中有一个或三个为负的,称为**剪形**;把类似上图右边的四边形,内角中有两个为负的,称为**蝶形**。

蝶形和剪形合称为凹四边形,其余内角总为正或总为负的四边形,称

为凸四边形。平行四边形总是凸四边形。梯形也可以是蝶形，筝形也可以是剪形。

**思考 1.5.1.**

1. 梯形在什么情况下是蝶形？画一个例子。
2. 筝形在什么情况下是剪形？画一个例子。
3. 考虑四边形内角的正负。凸四边形的内角是“正-正-正-正”或“负-负-负-负”；剪形的内角是“正-正-正-负”或“正-负-负-负”；蝶形的内角是“正-正-负-负”。是否有其他的可能组合？哪些正负组合是不可能的？为什么？



## 第二章 数的分解

自然数是我们最早认识的数。我们已经熟悉了自然数的四则运算，并且学习了因数和倍数。了解一个数的因数，无论对于理论研究，还是在实际生活中，都很有用处。

### 2.1 初识素数

我们已经学习过因数的概念。我们把因数只有自己和 1 的正整数叫做**素数**，除了 1 和自己还有别的因数的正整数叫做**合数**。约定 1 既不是素数也不是合数。

举例来说，2、3、5、7 是素数，而 4、6、8 是合数。偶素数只有一个：2，其余素数都是奇数。

**定理 2.1.1.** 设  $p$  是素数。任何正整数要么是  $p$  的倍数，要么与  $p$  互素。

**证明：** 设  $n$  是正整数。记  $n$  和  $p$  的最大公因数为  $d$ 。 $d$  是  $p$  的因数。因此按  $p$  的定义，要么  $d = p$ ，要么  $d = 1$ 。如果  $d = p$ ，那么  $n$  是  $p$  的倍数。如果  $d = 1$ ，那么  $n$  与  $p$  互素。  $\square$

素数与合数有什么关系呢？

**定理 2.1.2.** 合数总有素因数。

**证明：** 按照定义，合数总有真因数。给定合数  $n$ ，它的真因数大于 1、小于  $n$ ，至少有一个，至多有  $n-2$  个。其中总有一个最小的真因数，我们把它记为  $p$ 。

$p$  的因数也是  $n$  的因数，所以要么是 1，要么大于等于  $p$ 。也就是说， $p$  没有真因数。所以  $p$  是素数。  $\square$

**定理 2.1.3.** 每个大于 1 的整数都可以表示成素数或其乘积。

**证明：** 使用归纳法。命题  $P(n)$ ：整数  $n$  可以表示成素数或其乘积。下面证明  $P$  对每个大于 1 的整数成立。

$n = 2$  时，由于  $2 = 2$ ， $P(2)$  成立。

假设对某个大于 1 的整数  $n$ ， $P(2), \dots, P(n)$  都成立，下面证明  $P(n+1)$  也成立。

如果  $n+1$  是素数，那么  $n+1 = n+1$  就是素数，于是  $P(n+1)$  成立。

如果  $n+1$  是合数，那么它至少有一个素因数  $p$ 。设  $n+1 = mp$ ， $m \in \mathbb{Z}^+$ ，由于  $1 < p < n+1$ ，所以  $1 < m < n+1$ 。根据假设， $P(m)$  成立，也就是说， $m$  可以表示成素数或其乘积：

$$m = p_1 p_2 \cdots p_k, \quad l \in \mathbb{Z}^+$$

于是， $n+1 = mp = p p_1 p_2 \cdots p_k$  也是素数的乘积。于是  $P(n+1)$  成立。

综上所述， $P(n)$  对每个大于 1 的整数成立。  $\square$

我们把这种表示正整数的方式称为**素因数分解**。如果把自然数比作一座座房屋，那么素数就是砖瓦，构建起一个个合数。

素数与合数，谁比较多呢？一位数中，有 4 个素数，4 个合数；二位数中，有 21 个素数，69 个合数；三位数中，有 143 个素数，757 个合数；四位数中有 1061 个素数，7939 个合数。

越大的素数，越是罕见。



会不会从某个数开始，所有比它大的都是合数？也许，素数只有有限个？我们有这样一个定理：

**定理 2.1.4.** 素数的个数是无穷的。

**证明：** 使用反证法证明。反设素数的个数不是无穷的，即只有有限多个素数。把素数的个数记为  $N$ ，把它们从小到大分别记为  $p_1, p_2, \dots, p_N$ 。

考察这样的正整数：

$$m = p_1 p_2 \cdots p_N + 1.$$

$m$  与所有素数互素。所以， $m$  的因数要么是 1，要么是它自己，要么是某个与  $p_1, p_2, \dots, p_N$  都不一样的数。这就说明，要么  $m$  自己是素数，要么它的因数中有和  $p_1, p_2, \dots, p_N$  都不一样的素数。这就和“素数一共有  $N$  个”矛盾了。

因此，原命题的否定“素数的个数不是无穷的”是假的，原命题成立。  $\square$

素数作为“砖瓦”的性质，还体现在以下定理中：

**定理 2.1.5. 存因定理** 如果素数  $p$  整除两个自然数  $a$  和  $b$  的乘积： $p|ab$ ，那么  $p$  整除  $a$  或  $p$  整除  $b$ 。

**证明：** 给定符合条件的素数  $p$  和自然数  $a, b$ 。如果  $p$  整除  $a$ ，那么命题得证。

如果  $p$  不整除  $a$ ，那么由于两者的最大公因数是  $p$  的因数，因此只能是 1。两者互素。根据倍和析因定理，存在整数  $m, n$  使得

$$mp + na = 1.$$

两边乘以  $b$ ，就得到：

$$mp + nab = b.$$

根据已知条件，存在整数  $k$  使得  $ab = kp$ ，于是

$$b = mp + nkp = (m + nk)p,$$

即  $p$  整除  $b$ 。  $\square$

存因定理告诉我们，如果某个正整数  $n$  有素因数  $p$ ，把  $n$  “拆成” 两个数的乘积，那么总有一个有素因数  $p$ 。反复运用存因定理，我们可以把这个结论加强：无论把  $n$  “拆成” 几个数的乘积，总有一个有素因数  $p$ 。这反映了素数作为自然数中的“砖瓦”的性质。

**习题 2.1.1.** 证明：

1. 两个素数要么相等，要么互素。
2. 如果素数  $p$  整除完全平方数  $n$ ，那么  $p^2$  也整除  $n$ 。
3. 设  $p, q$  是素数， $i, j$  是正整数，那么要么  $p^i$  和  $q^j$  互素，要么  $p^i$  整除  $q^j$ ，要么  $q^j$  整除  $p^i$ 。
4. 对任何正整数  $n$ ，都存在  $n$  个连续合数  $a, a+1, \dots, a+n-1$ 。

## 2.2 算数基本定理

从存因定理出发，可以得到一个很重要的结论：

**定理 2.2.1. 算术基本定理** 如果不考虑素因数的排列顺序，素因数分解的方式是唯一的。

**证明：** 如果某个大于 1 的整数  $n$  有两种素因数分解。把每种分解的素因数从小到大排列：

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_l, \quad k, l \in \mathbb{Z}^+.$$

我们要证明这两种分解是一样的。

考虑  $p_1$ ， $p_1$  整除  $n = q_1 q_2 \cdots q_l$ 。根据存因定理，存在某个  $j$  使得  $p_1$  整除  $q_j$ 。 $q_j$  也是素数，所以  $p_1$  不可能是它的真因数。于是  $p_1 = q_j \geq q_1$ 。

考虑  $q_1$ ，按照相同的推理，存在某个  $i$  使得  $q_1$  整除  $p_i$ 。于是  $q_1 = p_i \geq p_1$ 。

因此,  $p_1 = q_1$ 。

我们把  $n$  除以  $p_1$ , 得到正整数  $n_1$ 。如果  $n_1 = 1$ , 那么我们有  $n_1 = p_1$ , 分解方式是唯一的。如果  $n_1 = p_2 \cdots p_k = q_2 \cdots q_l > 1$ , 我们可以再次运用以上的推理, 得到:  $p_2 = q_2$ 。

以此类推, 经过有限步后, 我们可以得到:  $k = l$ , 且

$$p_1 = q_1, p_2 = q_2, \cdots, p_k = q_k.$$

也就是说,  $n$  的素因数分解只有一种方式。  $\square$

这个结论非常重要, 我们把它称为算术基本定理。算术基本定理告诉我们, 不考虑排列顺序的话, 每个大于 1 的正整数都可以用唯一的方式写成素数或其乘积。这种唯一的方式可以看作每个正整数的“身份证”。为了方便讨论, 素因数分解中, 一般素因数从小到大排列, 并用乘方的形式合并相同的素因数。比如, 252 的素因数分解写成;

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1.$$

这种写法称为数的**标准分解**。以上就是 252 的标准分解。有时候, 为了便于讨论, 我们会把不是  $n$  的因数的素数也写进分解表达式里, 用它的 0 次方“占位”。比如 210 就可以写成:

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1.$$

这样的写法, 在规定了涉及的素数集合后, 仍然是唯一的。

**习题 2.2.1.** 写出以下数的标准分解:

1. 256, 243, 125.
2. 60, 780, 1296.
3. 1001, 5929, 8801.

把正整数  $n$  分解, 得到:  $n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}$ 。我们把  $u_i$  称为  $p_i$  在  $n$  中的重数。它是让  $p_i^i$  整除  $n$  的最大自然数  $i$ 。

**定理 2.2.2.** 如果  $n$  整除  $m$ , 那么任何素数在  $n$  中的重数小于等于它在  $m$  中的重数。

**证明：** 设素数  $p$  在  $n$  和  $m$  中的重数分别是  $u$  和  $v$ 。于是  $p^u$  整除  $n$ ，因而整除  $m$ 。另一方面， $v$  是让  $p^i$  整除  $m$  的最大自然数  $i$ 。所以， $u \leq v$ 。  $\square$

上面的结论也可以换个方式说成：如果  $n$  是  $m$  的因数，那么任何素数在  $n$  中的重数小于等于它在  $m$  中的重数；如果  $n$  是  $m$  的倍数，那么任何素数在  $n$  中的重数大于等于它在  $m$  中的重数。

**定理 2.2.3.** 正整数  $n, m$  的乘积，等于它们的最大公因数和最小公倍数的乘积。

**证明：** 设  $n, m$  的最大公因数是  $d$ ，最小公倍数是  $q$ ，下面证明  $nm = dq$ 。把  $n, m, d, q$  分解，设涉及的素数为  $p_1, p_2, \dots, p_k$ 。把四个数分别记为：

$$\begin{aligned} n &= p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}, & m &= p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_k^{v_k}, \\ d &= p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}, & q &= p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}. \end{aligned}$$

$d$  既是  $n$  的因数也是  $m$  的因数，所以对每个素因数  $p_i$ ，它在  $d$  中的重数  $s_i$  都小于等于  $u_i$  和  $v_i$ 。同时，由于  $d$  是最大公因数，所以  $s_i$  是  $u_i$  和  $v_i$  中较小的数。

$q$  既是  $n$  的倍数也是  $m$  的倍数，所以对每个素因数  $p_i$ ，它在  $q$  中的重数  $t_i$  都大于等于  $u_i$  和  $v_i$ 。同时，由于  $q$  是最小公倍数，所以  $t_i$  是  $u_i$  和  $v_i$  中较大的数。

因此，对每个素因数  $p_i$ ， $s_i + t_i = u_i + v_i$ 。于是，

$$\begin{aligned} nm &= (p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}) \cdot (p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_k^{v_k}) \\ &= p_1^{u_1+v_1} p_2^{u_2+v_2} \cdots p_k^{u_k+v_k} \\ &= p_1^{s_1+t_1} p_2^{s_2+t_2} \cdots p_k^{s_k+t_k} \\ &= (p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}) \cdot (p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}) \\ &= dq \end{aligned}$$

$\square$

## 习题 2.2.2.

1. 设  $i$  是素数  $p$  在正整数  $n$  中的重数。
  1. 1. 如果  $p$  不整除  $n$ , 证明  $i = 0$ 。
  1. 2. 如果自然数  $j < i$ , 证明:  $p^j$  整除  $n$ 。
  1. 3. 如果自然数  $j > i$ , 证明:  $p^j$  不整除  $n$ 。
2. 设正整数  $n, m$  的最大公因数是  $d$ , 素数  $p$  在  $d, n, m$  中的重数分别是  $s, u, v$ 。
  2. 1. 设  $v$  是  $u, v$  中较小的数, 证明:  $s \leq v$ 。
  2. 2. 假设  $s < v$ , 考虑  $pd$ , 证明  $pd$  是  $n, m$  的公因数。
  2. 3. 证明  $s$  等于  $u, v$  中较小的数。
  2. 4. 设正整数  $n, m$  的最小公倍数是  $q$ , 素数  $p$  在  $q, n, m$  中的重数分别是  $t, u, v$ , 证明:  $t$  等于  $u, v$  中较大的数。

给定一个正整数, 如何将它分解呢? 这个问题一直困扰着人类。将非常大的整数分解, 是一项非常困难的任务。即便在现代, 电子计算机计算能力有极大发展, 可以轻易做到每秒百亿乃至万亿次运算, 分解大整数仍然需要非常多的时间。一些常用的密码技术, 就依赖于分解大整数非常困难这个事实。

如今, 量子计算理论不断发展。人们将希望寄于量子计算机, 认为将来使用量子计算机及相应的算法, 可以在合理时间内分解大整数。



## 第三章 因式分解

整式是变量和数量作加减法和乘法得到的代数式。它的性质和整数很相似。整数可以分解成因数的乘积，整式也可以分解为整式的乘积。把整式的乘积写成若干项的和，叫做整式的展开；反过来，把一个整式写成多个整式的乘积，称为整式的**因式分解**。乘积中每个整式称为原整式的**因式**。

整式的因式分解是一个非常庞大的问题。我们只从最简单的情况出发，归纳一些特殊情况下的简单方法。

### 3.1 一元整式

一种简单的情况是一元整式的因式分解。给定变量为  $x$  的一元整式  $p$ ，合并同类项后按照次数从高到低排列，可以写成：

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

其中  $a_0, a_1, \dots, a_n$  都是有理数，称为  $p$  的系数。其中  $a_n$  不等于 0，而其它数可能等于 0。 $a_n x^n$  称为  $p$  的**最高次项**， $a_n$  就是最高次项的系数， $n$  称为  $p$  的次数。比如  $n = 1$  时， $p$  就是我们见过的一元一次式。 $n = 0$  时， $p$  只有常数项，称为常式。为了强调  $p$  是关于  $x$  的一元式，我们也将  $p$  记为  $p(x)$ 。

给定一元整式  $n(x)$  和  $m(x)$ ，如果  $n(x)$  可以写成  $m(x)$  和另一个一元整式  $q(x)$  的乘积，就说  $n(x)$  是  $m(x)$  的**倍式**， $m(x)$  是  $n(x)$  的**因式**。

和整数一样，一元整式也有带余除法。整式的带余除法可以和整数除法一样，用竖式计算。比如  $8x^5 + 2x^4 - 9x^3 + 4x - 5$  除以  $2x^2 + x - 1$ ：

$$\begin{array}{r}
 4x^3 - x^2 - 2x + \frac{1}{2} \\
 2x^2 + x - 1 \overline{) 8x^5 + 2x^4 - 9x^3 + 4x - 5} \\
 \underline{- 8x^5 - 4x^4 + 4x^3} \phantom{- 5} \\
 - 2x^4 - 5x^3 \phantom{+ 4x - 5} \\
 \underline{2x^4 + x^3 - x^2} \phantom{- 5} \\
 - 4x^3 - x^2 + 4x \phantom{- 5} \\
 \underline{4x^3 + 2x^2 - 2x} \phantom{- 5} \\
 x^2 + 2x - 5 \\
 \underline{- x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \\
 \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}
 \end{array}$$

可以看到，**被除式**  $8x^5 + 2x^4 - 9x^3 + 4x - 5$  除以**除式**  $2x^2 + x - 1$ ，得到**商式**  $4x^3 - x^2 - 2x + \frac{1}{2}$  和**余式**  $\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ 。竖式除法中，不同次数的项就好像整数的个十百千等数位。不同的是相减的时候没有借位，而且由于系数可以是分数，所以只要剩下的式子的次数不少于除式，就可以继续相减。最后得到的余式，次数一定严格小于除式。

**思考 3.1.1.** 整式  $p(x)$  除以一次式，余式是怎样的？除以常式呢？

**习题 3.1.1.** 计算带余除法：

1.  $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$  除以  $x^2 + x + 2$ 。
2.  $x^6 - x^5 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 19$  除以  $x^3 - 2x^2 + x + 4$ 。

## 3.2 试根法

怎么样找到一元整式的因式呢？我们来看上面的整式除法。





不过,如果余式是常式,那么它是不是 0,就和  $x$  的取值无关了。一种特殊情况是:除式是一次式:  $x - a$ 。它只在  $x$  取值为  $a$  的时候为 0。这时,如果被除式也是 0,那么余式肯定是 0。于是除式是被除式的因式。

**定理 3.2.1. 余式定理** 如果  $a$  是一元整式  $p(x)$  的根,那么  $x - a$  是它的因式。

### 习题 3.2.1.

设有整式  $p = 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ :

1. 试着分解  $p$ 。
2. 如果既约分数  $\frac{a}{b}$  是  $p$  的根,证明:  $|b|$  整除 6。

设有整式  $p = x^3 - 4x^2 - x - 20$ :

1. 试着分解  $p$ 。
2. 如果既约分数  $\frac{a}{b}$  是  $p$  的根,证明:  $|a|$  整除 20。

如果既约分数  $\frac{a}{b}$  是整式  $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  的根,  $a$  和  $b$  应该满足什么条件?

## 3.3 一般整式的分解

对一般的整式来说,也有一些普遍适用的方法。

### 提公因式法

如果要分解的整式中有显然的公因式,那么可以将它提取出来。比如:

$$x^6 - 2x^4 + 19x^3 - 3x$$

以上这个式子中,每一项显然都有  $x$  作为因式。因此,可以分解为:

$$x(x^5 - 2x^3 + 19x^2 - 3).$$

提公因式法是分配律的逆应用。

### 公式法

如果可以注意到要分解的整式是某个公式的展开形式，那么应用公式，就可以把展开的形式还原成因式的乘积形式。比如：

$$x^4 + 4$$

这个式子可以看成两个平方的差：

$$x^4 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 - 2)^2 - (2x)^2.$$

于是，使用  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  这个公式，就可以得到：

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2 + 2x)(x^2 - 2 - 2x).$$

应用公式法，取决于要分解的整式是否符合某个特定公式的展开形式。

### 分组分解法

分组分解的思想是从提公因式法出发。如果不能发现显然的公因式，就分组考察整式的项，看看是不是有哪些项可以先提取公因式。比如：

$$ab + abc - a^2 - b^2c$$

可以先把上式的项分为两组：

$$ab + abc - a^2 - b^2c = (ab - a^2) + (abc - b^2c)$$

然后分别对每一组做因式分解：

$$ab + abc - a^2 - b^2c = (ab - a^2) + (abc - b^2c) = a(b - a) + bc(a - b)$$

然后再提取公因式  $a - b$ ：

$$ab + abc - a^2 - b^2c = a(b - a) + bc(a - b) = (a - b)(-a + bc).$$

可以看到，分组分解的关键在于：各组各自分解的结果，应该有共同的因式。比如上式分成两组，每组都分解出了  $a - b$  这个因式。

### 待定系数法

如果对因式分解的结果有一定的猜测，可以先用变量代替暂时不知道的系数，写出因式乘积。展开后，通过对比各项，得到系数。比如：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2$$

上式中，让  $a = b$ ，则式子变为：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = 3b^2 + bc - b^2 - bc - 2b^2 = 0$$

所以，猜测  $a - b$  是因式。由于式子最高次项次数是 2，猜测因式分解结果为：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = (a - b)(ua + vb + wc).$$

展开后得到：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = ua^2 + vb^2 + (v - u)ab + wac - wbc.$$

对比左右各项，得到  $u = -1$ 、 $v = 2$ 、 $w = 1$ 。即：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = (a - b)(-a + 2b + c).$$

待定系数法建立在对因式分解结果的合理猜测上。如果猜测出现错误，后面对比各项时就会发现矛盾。

## 第四章 二次方根和二次根式

分式开平方得到的代数式,叫做**二次根式**。二次根式可以看成用代数式代替二次方根  $\sqrt{q}$  中的数量  $q$  得到的结果。 $\sqrt{c}$ 、 $\sqrt{1-a+a^2}$ 、 $\sqrt{x^3-x^2-2}$  等都是二次根式。通过二次根式,我们可以更好地理解二次方根的性质。

### 4.1 二次方根的化简

**思考 4.1.1.** 以下二次方根有什么联系?

1.  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{8}$ 、 $\sqrt{72}$ .
2.  $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{45}$ 、 $\sqrt{147}$ .
3.  $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{\frac{5}{4}}$ 、 $\sqrt{\frac{20}{49}}$ .

如果正整数  $n$  有完全平方数  $a^2$  作为因数:  $n = ma^2$ , 那么

$$\sqrt{n} = \sqrt{m}\sqrt{a^2} = a\sqrt{m}.$$

用这个方法,可以把正整数  $n$  的二次方根  $\sqrt{n}$  写成一个整数  $a$  和一个无理数  $\sqrt{m}$  的乘积。其中  $m$  没有完全平方数作为因数,所以  $\sqrt{m}$  是无理数。我们把这样的形式称为  $\sqrt{n}$  的**最简形式**,把找到最简形式的过程称为(整数)二次方根的化简。

要化简整数的二次方根,可以先把整数分解成素因数的乘积。给定(大

于 1 的) 正整数  $n$ , 写出它的标准分解:

$$n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}$$

如果某个素因数  $p_i$  在  $n$  中的指数  $u_i$  是偶数, 那么  $p_i^{u_i}$  是一个完全平方数; 如果  $u_i$  是奇数, 那么  $p_i^{u_i-1}$  是一个完全平方数。于是, 我们可以把  $n$  的素因数分为两类, 一类是指数为偶数的, 另一类是指数为奇数的。我们可以把前一类中的  $p_i^{u_i}$  和后一类的  $p_i^{u_i-1}$  提出来, 相乘得到一个完全平方数。剩下的就是指数为奇数的素因数的乘积。如果我们定义这样的函数:

$$\varsigma : n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k} \mapsto p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}.$$

其中的  $r_1, r_2, \cdots, r_k$  分别是  $u_1, u_2, \cdots, u_k$  除以 2 的余数。那么  $\varsigma(n)$  就是剩下的指数为奇数的素因数的乘积。而  $\frac{n}{\varsigma(n)}$  是一个完全平方数。

$\varsigma(n)$  已经没有完全平方数的因子了, 我们把它叫做  $n$  的**二次方余**。 $n$  可以写成:

$$\sqrt{n} = a\sqrt{\varsigma(n)}.$$

其中正整数  $a$  是  $\frac{n}{\varsigma(n)}$  的平方根。

举例来说, 要化简  $\sqrt{2520}$ , 可以先把正整数 2520 分解:

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

然后提出完全平方的部分, 计算方余:

$$2520 = (2^2 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7)$$

因此  $\varsigma(n) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ ,

$$\sqrt{2520} = 6\sqrt{70}.$$

对一般的正有理数  $r$ , 我们也希望将  $\sqrt{r}$  表示成  $a\sqrt{m}$  的形式, 其中  $a$  是有理数, 而  $m$  是没有完全平方数因子的正整数。我们把这样的形式称为有理数二次方根的最简形式。

把  $r$  写成既约分数:  $r = \frac{p}{q}$ , 不难发现, 可以把  $\sqrt{r}$  写成:

$$\sqrt{r} = \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{pq}{q^2}} = \frac{\sqrt{pq}}{q}.$$

这样, 只需要把正整数  $pq$  的二次方根化简, 就能得到  $\sqrt{r}$  的最简形式。

对整式和分式来说, 它们开平方得到的二次根式也可以用类似的方式化简。

**习题 4.1.1.** 化简以下的二次方根:

1.  $\sqrt{5480}, \sqrt{1240}, \sqrt{5760}.$
2.  $\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{1744}{85}}, \sqrt{\frac{576}{132}}, \sqrt{\frac{2240}{6897}}.$
3.  $\sqrt{48} - 1.8\sqrt{6} + 5\sqrt{3}, 7\sqrt{18} + 1.5\sqrt{108} + 10\sqrt{242}.$

化简以下的代数式:

1.  $\sqrt{(1-a^2)(1+a)}, \sqrt{(b^3-a^3)(a-b)}.$
2.  $\sqrt{\frac{1-a^4}{(1+a)^3}}, \sqrt{\frac{1-a^4}{a(a+1)}} + \sqrt{a^2+1}.$

## 4.2 二次域

考虑这样一个集合:  $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 。有理数集  $\mathbb{Q}$  是它的子集, 它是实数集  $\mathbb{R}$  的子集。我们把它记为  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 。

举例来说,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  的元素有:  $1 + \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, 0, 7$  等等。

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  的元素有什么性质呢?

$1 + \sqrt{2}$  和  $3 - 2\sqrt{2}$  是  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  的元素, 它们的和是  $4 - \sqrt{2}$ , 差是  $-2 + 3\sqrt{2}$ , 乘积是  $-1 + \sqrt{2}$ , 商是  $7 + 5\sqrt{2}$ 。

一般来说, 如果  $x$  和  $y$  是  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  的元素, 它们进行四则运算的结果仍然是  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  的元素。具有这种性质的数集叫做**数域**。有理数、实数都是数域, 自然数、整数、正数不是数域。 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3})$  这样的数域叫做**二次域**。

如果  $n$  是正整数,  $\sqrt{n}$  在不在  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  里呢?

**定理 4.2.1.**  $\sqrt{3}$  不属于  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 。

**证明:** 用反证法。反设  $\sqrt{3}$  属于  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 。于是存在有理数  $a, b$  使得

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}.$$

两边平方, 得到:

$$3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}.$$

如果  $ab \neq 0$ , 那么  $\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab}$  是有理数。矛盾!

如果  $a = 0$ , 那么  $2b^2 = 3$ , 于是  $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$  是无理数。矛盾!

如果  $b = 0$ , 那么  $a^2 = 3$ , 于是  $a = \sqrt{3}$  是无理数。矛盾!

综上所述, 原命题的否定 “ $\sqrt{3}$  属于  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ” 是假的, 因此原命题是真的。

□

用同样的方法, 可以证明  $\sqrt{2}$  不属于  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 。也就是说,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  不是  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  的子集,  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  也不是  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  的子集。

**习题 4.2.1.** 想一想:

1. 对哪些正整数  $n$ ,  $\sqrt{n}$  在  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  里?
2.  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  和  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  的交集是什么集合? 是不是数域?
3.  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  和  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  的并集是什么集合? 是不是数域?



## 第五章 一元二次方程

我们已经学习过一元一次方程。解一元一次方程可以看作找出一元一次式  $ax + b = 0$  时变量  $x$  的取值。找出一元二次式  $ax^2 + bx + c = 0$  时  $x$  的取值，叫做解一元二次方程。

**例子 5.0.1.** 根据以下问题，设未知数并列方程：

- (1). 一座方城，南北正中有城门。北门出城直走 100 步有树，南门出城直走 100 步转西，走 1200 步后恰能望到。问方城长度是多少？
- (2). 氢气和碘蒸气产生化学反应： $H_2 + I_2 = 2HI$ 。50 摄氏度时，正反应的平衡常数  $k_c = 5.25$ 。现在将 1 摩尔氢气和 2 摩尔碘蒸气放置于 1 升的容器中，将温度调节到 50 摄氏度。反应达到平衡时，有多少摩尔的  $HI$  产生？

**解答.**

(1) 解：设方城长  $x$  步，北门位置为  $M$  点，外树的位置为  $A$  点，南门外转向的位置为  $B$  点，西行恰好望见树的位置为  $C$  点，城西北角为  $N$  点。直角三角形  $AMN$  和  $ABC$  相似。因此：

$$\frac{|AM|}{|MN|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

根据已知条件， $|AM| = 100$ ， $|MN| = 0.5x$ ， $|AB| = x + 200$ ， $|BC| = 1200$ 。于是可以列出方程：

$$\frac{100}{0.5x} = \frac{x + 200}{1200},$$

即:

$$\begin{aligned} 0.5x(x + 200) &= 100 \cdot 1200 \\ x^2 + 200x - 240000 &= 0 \end{aligned}$$

(2) 解: 设平衡时产生了  $x$  摩尔的  $HI$ 。根据反应方程式, 这时  $H_2$  和  $I_2$  分别消耗了  $0.5x$  摩尔。因此平衡时三者浓度分别为  $1 - 0.5x$  摩尔/升、 $2 - 0.5x$  摩尔/升和  $x$  摩尔/升。根据条件, 反应平衡常数为 5.25, 即浓度比:

$$\frac{(1 - 0.5x)(2 - 0.5x)}{x^2} = 5.25,$$

也即:

$$\begin{aligned} 5.25x^2 &= (1 - 0.5x)(2 - 0.5x) \\ 10x^2 + 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

## 5.1 解一元二次方程

怎么求一元二次方程的解呢? 我们其实已经解决过一种简单的情形。考虑等腰直角三角形, 如果直角边长度为 1, 那么斜边长  $x$  满足:

$$x^2 = 2.$$

这就是个一元二次方程。解这个一元二次方程的方法是对右边的 2 开平方, 得到解:

$$x = \sqrt{2}.$$

当然, 另一个解:  $x = -\sqrt{2}$  也满足方程。只是我们要求的斜边长度是正数, 所以这个解不是我们要找的。不过, 仅就方程  $x^2 = 2$  来说, 它有两个解, 分别是  $x_1 = \sqrt{2}$  和  $x_2 = -\sqrt{2}$ 。为了方便, 有时我们也写成  $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ 。

$x^2 = 2$  和一般的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有什么不同呢？我们注意到，二次项  $x^2$  的系数不再是 1，而且多了一次项  $bx$ 。二次项系数的问题不难解决，我们把方程两边同时除以  $a$ ，就可以让二次项系数等于 1：

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

至于一次项，我们希望通过一些手段把它“去掉”。这样，问题就转化为类似  $x^2 = 2$  的简单情形了。

第一种手段叫作配方法。我们希望把  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$  表示与  $x$  相关的平方形式。观察平方和公式：

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2$$

$$(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$$

...

对任何数  $t$ ，根据平方和公式， $(x + t)^2 = x^2 + 2tx + t^2$ ，如果让  $2t = \frac{b}{a}$ ，那么  $(x + t)^2$  就和  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$  有相同的一次项了。这时， $t = \frac{b}{2a}$ ， $(x + \frac{b}{2a})^2$  展开得到  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ ，和  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$  还相差： $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ 。于是，原方程变成：

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

现在方程和  $x^2 = 2$  已经很像了。最后需要讨论等号右边常数项是否小于 0。实数  $x + \frac{b}{2a}$  的平方总大于等于 0，所以，如果等号右边的常数项小于 0，那么方程无解。如果常数项恰好等于 0，那么方程恰有一个解： $x = -\frac{b}{2a}$ 。如果常数项大于 0，那么方程和  $x^2 = 2$  一样有两个解。

第二种手段是待定系数法。我们可以直接猜测： $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$  能够写成  $(x - \lambda)^2 = \mu$  的形式。把后者展开，通过对比各项系数，可以得到： $\lambda = -\frac{b}{2a}$ ， $\mu = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 。

无论哪一种方法，我们都发现，常数项  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  的正负性质和方程解的个数有直接关系。它的分母  $4a^2$  总是正数，所以关键在于分子： $b^2 - 4ac$ 。我

们把这个式子叫作一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的**判别式**，记作  $\Delta$ ：

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$\Delta < 0$  时，方程无解； $\Delta = 0$  时，方程有唯一解： $x = -\frac{b}{2a}$ ； $\Delta > 0$  时，方程有两个解：

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

对二次整式  $ax^2 + bx + c$  来说，使得它等于 0 的  $x$  的值叫作它的根。 $\Delta < 0$  时，整式无根； $\Delta > 0$  时，整式有两个根。 $\Delta = 0$  时，整式变为  $(x + \frac{b}{2a})^2$ ，我们说整式有二重根，或者说根的重数是 2。为了方便，对整式对应的方程，我们也使用“方程的根”的说法。这时，方程的根就是对应整式的根。

于是，我们可以给出上面两个例题中方程的解：

**解答.** 1. 解：方程  $x^2 + 200x - 240000 = 0$  的判别式是： $\Delta = 200^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240000) = 1000000 > 0$ ，所以方程有两个根：

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-200 \pm \sqrt{1000000}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-200 \pm 1000}{2} \end{aligned}$$

即  $x_1 = 400$  和  $x_2 = -600$ 。根据题目条件， $x > 0$ ，所以解为  $x = 400$ 。  
答：方城长 400 步。

2. 解：方程  $10x^2 + 3x - 4 = 0$  的判别式是： $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-4) = 169 > 0$ ，所以方程有两个根：

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 10} \\ &= \frac{-3 \pm 13}{20} \end{aligned}$$

即  $x_1 = 0.5$  和  $x_2 = -0.8$ 。根据题目条件， $x \geq 0$ ，所以解为  $x = 0.5$ 。  
答：生成了 0.5 摩尔的  $HI$ 。

## 5.2 根和系数的关系

上一节我们给出了一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的解。从根的角度,  $ax^2 + bx + c$  要么无根, 要么有两个根。这两个根和变量的系数有什么关系呢?

写出两个根的表达式:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

要注意的是, 从根的角度,  $\Delta = 0$  时, 这个式子也成立。把两个根相加, 得到:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

把它们相乘, 得到:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

于是,

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c.$$

我们把  $a(x - x_1)(x - x_2)$  称为整式  $ax^2 + bx + c$  的根形式。

从另一个角度, 可以这么理解: 整式  $ax^2 + bx + c$  有两个根  $x_1$  和  $x_2$ , 说明  $x - x_1$  和  $x - x_2$  都是它的因式。 $x_1 \neq x_2$  时,  $x - x_1$  和  $x - x_2$  互素, 于是  $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)q$ , 其中  $q$  是整式。显然, 如果  $q$  的次数大于 0,  $(x - x_1)(x - x_2)q$  的次数就大于 2 了, 因此  $q$  是常式。对比系数可知,  $q = a$ , 于是可以得出  $ax^2 + bx + c$  的根形式。

$x_1 = x_2$  的时候, 就无法直接得出  $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)q$  了, 所以需要特别指出根的重数是 2, 它表示  $ax^2 + bx + c = (x - x_1)^2q$ 。这就是根的重数的用处。

设一元二次方程  $ax^2 + bx + c$  的系数是有理数。它的解  $x_1$  和  $x_2$  都是开方得到的, 可能不是有理数, 而属于某个二次域。但它们的和与积是方程

系数的商,所以必然是有理数。除此之外,如果计算其他关于  $x_1$  和  $x_2$  的式子,结果可能就不是有理数了。比如,计算  $x_1 - x_2$ ,可以得到:

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$

$\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$  中有开方运算,不一定是有理数。

$x_1 - x_2$  和  $x_1 + x_2$ 、 $x_1x_2$  有什么区别呢? 如果交换  $x_1$  和  $x_2$  的位置,  $x_1 - x_2$  会变成  $x_2 - x_1$ , 而  $x_1 + x_2$ 、 $x_1x_2$  和原来一样。我们把交换  $x_1$  和  $x_2$  的位置而不变的二元整式叫作二元对称式。二元对称式除了  $x_1 + x_2$ 、 $x_1x_2$  还有很多, 比如  $x_1^2 + x_2^2$ 、 $x_1x_2^2 + x_2x_1^2$  等等。

一元二次方程的根是无理数的时候,有什么性质呢? 先来看一个具体的例子。设有方程:  $x^2 - 2x - 1 = 0$ 。它的根是:

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

两个根都能写成  $u + v\sqrt{2}$  的形式 ( $u, v$  是有理数)。也就是说,它们都是二次域  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  的元素。一般情况: 一元二次方程  $ax^2 + bx + c$  的系数是有理数, 如果它有两个无理数解:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

设二次方根  $\sqrt{\Delta}$  化简的结果是:  $\sqrt{\Delta} = r\sqrt{m}$ , 那么两个根都是  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$  的元素。

如果直接把两个解放在数轴上看, 它们也关于点  $-\frac{b}{2a}$  对称。如果把数轴看做  $x$  轴, 建立直角坐标系, 那么两个解分别对应  $(x_1, 0)$  和  $(x_2, 0)$ , 它们关于直线  $x = -\frac{b}{2a}$  对称。

## 第六章 函数初步（下）

我们已经学习了正比例函数和一次函数。直角坐标系中，它们的图像是直线。现在我们来看另外几种函数。

### 6.1 反比例函数

正比例函数是从正面描述比例关系的函数。除了正比例关系，我们还可以从另一个方面描述比例关系。比如，两个三角形  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$  相似，那么对应的边长成比例：

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k.$$

如果已知  $|AB|$  为定值，那么比例系数和  $|A'B'|$  的关系叫做反比例关系，对应的映射叫**反比例函数**。一般来说，反比例函数是这样的：

$$x \mapsto \frac{k}{x}$$

比如， $x \mapsto \frac{3}{x}$  就是一个反比例函数。

反比例函数有什么性质呢？以  $x \mapsto \frac{3}{x}$  为例。下表是  $x$  取不同值时函数的值：

$x$	-30	-6	-3	-0.3	0.3	1	3	6	60
$f(x)$	-0.1	-0.5	-1	-10	10	3	1	0.5	0.05

对比  $f(-0.3)$  和  $f(0.3)$ 、 $f(-3)$  和  $f(3)$ 、 $f(-6)$  和  $f(6)$ ，可以注意到：如果  $a$  和  $b$  是相反数，那么  $f(a)$  和  $f(b)$  也是相反数。这个性质也可以写成：

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = -f(x).$$

这个性质可以用反比例函数的定义证明：

$$f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x).$$

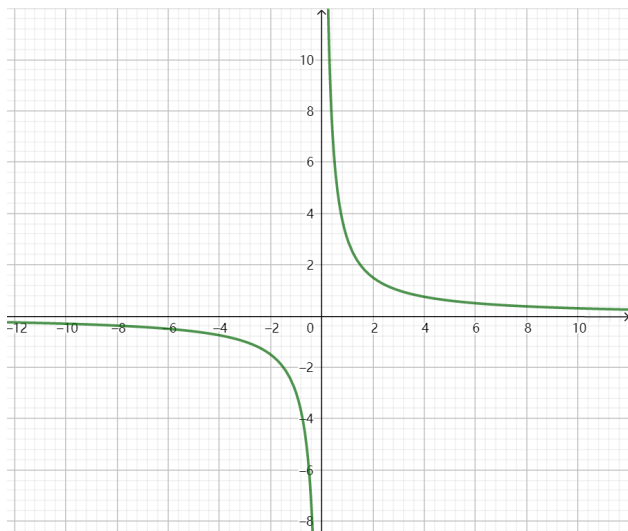
另外可以发现， $x < 0$  时， $f(x)$  也小于 0。 $x$  越小， $f(x)$  越大。 $x > 0$  时， $f(x)$  也大于 0。 $x$  越小， $f(x)$  越大。要注意的是， $x$  不能等于 0。反比例函数的定义域是不为零的实数的集合，记作  $\mathbb{R}^*$  或  $\mathbb{R}^\times$ 。

把 3 换成其它的数，你有什么发现？

设有反比例函数  $f: x \mapsto \frac{k}{x}$ 。当  $k > 0$  的时候， $x$  和  $f(x)$  同号。 $x < 0$  时， $x$  的值越接近 0， $f(x)$  越小； $x > 0$  时， $x$  的值越接近 0， $f(x)$  越大。当  $k < 0$  的时候， $x$  和  $f(x)$  异号。 $x < 0$  时， $x$  的值越接近 0， $f(x)$  越大； $x > 0$  时， $x$  的值越接近 0， $f(x)$  越小。 $k$  的正负对函数的性质有本质影响。

反比例函数的图像是怎样的呢？我们可以用描点法得到大致的模样，但目前我们掌握的知识，还不足以严谨地勾画出反比例函数的图像。借助计算机作图软件，我们可以得到反比例函数的图像：

我们说反比例函数的图像是一条曲线。右图中，第一象限中的部分叫做反比例函数的**正支**，它是函数在  $x > 0$  时的图像；第三象限中的部分叫做反比例函数的**负支**；它是函数在  $x < 0$  时的图像。 $k > 0$  时，

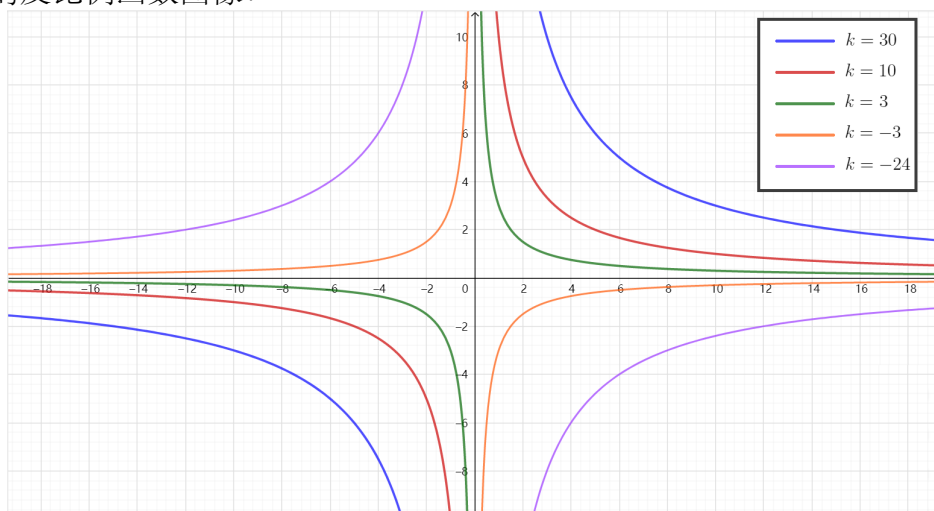




正支在第一象限，负支在第三象限； $k < 0$  时，正支在第四象限，负支在第二象限。

另外，反比例函数的图像关于原点中心对称。这可以通过性质： $f(-x) = -f(x)$  得到。对图像中每一点  $(x, f(x))$ ， $(-x, -f(x)) = (-x, f(-x))$ ，因此它关于原点的对称点也在函数图像上。

对不同的  $k$ ，反比例函数的图像有什么不一样呢？我们画出不同的  $k$  对应的反比例函数图像：



首先， $k = 3$  的图像和  $k = -3$  的函数图像恰好关于  $y$  轴对称，也关于  $x$  轴对称。一般来说， $k < 0$  时，函数图像和  $-k$  时的函数图像关于  $y$  轴和  $x$  轴对称。由对称性，我们可以只研究  $k > 0$  情况下函数图像的正支。

对比上图第一象限中三种颜色的曲线，我们可以发现，每条曲线都随着  $x$  变大而越来越平缓， $x$  越靠近 0，曲线就越陡峭。观察不同曲线之间的区别，可以发现， $k$  越大，曲线越“靠右上方”。这并不难理解。比如，对横坐标  $x = 4$  来说，正数  $k$  越大，纵坐标  $\frac{k}{4}$  就越大，在图像中越“靠上”。同样，要让纵坐标  $f(x) = 4$ ，那么对应的横坐标  $x = \frac{k}{4}$ ，于是正数  $k$  越大， $\frac{k}{4}$  就越大，在图像中越“靠右”。

反比例函数的图像还有一个基本性质：如果点  $(a, b)$  在图像上，那么

$(b, a)$  也在图像上。这是因为  $a = \frac{k}{b}$ ，当且仅当  $b = \frac{k}{a}$ 。

**习题 6.1.1.** 证明：

1. 只要  $(a, b)$  在函数  $x \mapsto \frac{k}{x}$  的图像上，那么  $(b, a)$ 、 $(-a, -b)$ 、 $(-b, -a)$  都在图像上。

2. 如果斜率为  $-1$  的直线  $x \mapsto -x + c$  和函数  $x \mapsto \frac{k}{x}$  的图像有交点，那么  $c^2 \geq 4k$ 。

## 6.2 二次函数

一元一次式对应一次函数，而一元二次式对应着二次函数。一般来说，一元二次式可以写成  $ax^2 + bx + c$  的形式，其中  $a \neq 0$ 。我们把形如

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

的函数叫做二次函数。

我们从最简单的情形： $x \mapsto x^2$  开始研究。下表是  $x$  取不同值时函数的值：

$x$	-10	-5	-2	-1	0	1	2	5	10
$f(x)$	100	25	4	1	0	1	4	25	100

首先可以发现，如果  $a$  和  $b$  是相反数，那么  $f(a) = f(b)$ 。比如， $f(-5) = f(5)$ 、 $f(-2) = f(2)$ 、 $f(-1) = f(1)$ 。这个性质可以写成：

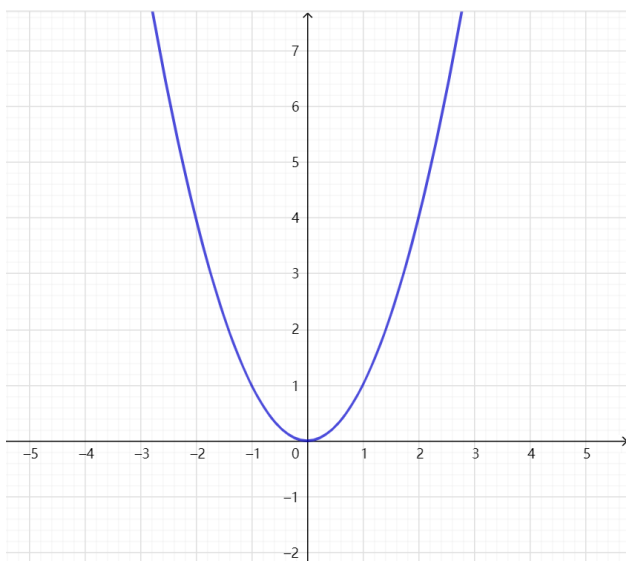
$$f(-x) = f(x).$$

这个性质可以用函数的定义证明：

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

另外可以看到,  $x < 0$  时,  $f(x)$  大于 0, 且  $x$  越大,  $f(x)$  越小, 最终在  $x = 0$  时函数值取 0。  $x > 0$  是,  $f(x)$  大于 0, 且  $x$  越大,  $f(x)$  越大。

函数  $x \mapsto x^2$  的图像是怎样的呢? 和反比例函数情形一样: 我们可以用描点法得到大致的模样, 但目前我们掌握的知识, 还不足以严谨地勾画出它的图像。借助计算机作图软件, 我们可以得到函数  $x \mapsto x^2$  的图像:

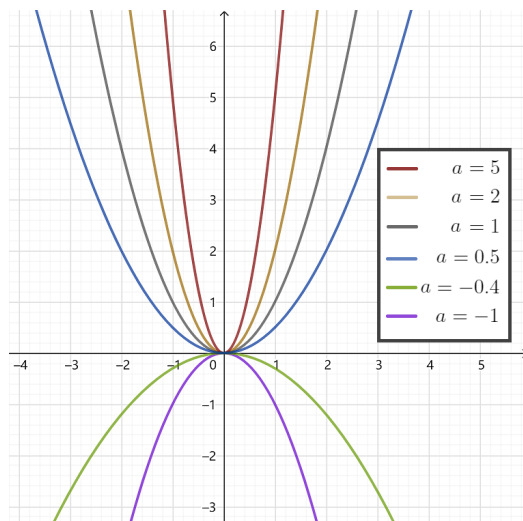


观察图像, 这是一条曲线。首先可以注意到, 它关于  $y$  轴对称。这一点可以用前面得到的性质证明。给定图像上一点:  $(x, x^2)$ ,  $(-x, x^2)$  也在图像上, 所以图像关于  $y$  轴对称。由对称性, 我们可以先研究曲线在  $x \geq 0$  部分的性质。

可以发现, 从  $x = 0$  开始, 随着  $x$  逐渐增大, 函数值也逐渐增大, 而且增长速度逐渐加快。在  $x = 0$  附近, 曲线比较平缓,  $x$  增大后, 曲线越来越陡峭。

如果把函数乘以系数  $a$ , 得到  $x \mapsto ax^2$ , 函数的性质会发生什么变化? 我们可以验证:  $a > 0$  时, 以上提到的性质保持不变。  $a < 0$  时, 函数的正负和增减性质颠倒了。首先,  $ax^2$  总小于等于 0。  $x < 0$  时,  $x$  越大, 函数值越大,  $x > 0$  时,  $x$  越大, 函数值越小。从  $x = 0$  开始, 随着  $x$  逐渐增大,

函数值逐渐减小, 而且减小速度逐渐加快。与  $a > 0$  时相同的是: 在  $x = 0$  附近, 曲线比较平缓,  $x$  增大后, 曲线越来越陡峭。



对于一般的一元二次式  $ax^2 + bx + c$ , 二次函数  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  的图像是怎样的呢? 上一章中, 我们使用配方法解一元二次方程。用同样的方法, 我们可以把  $ax^2 + bx + c$  写成:

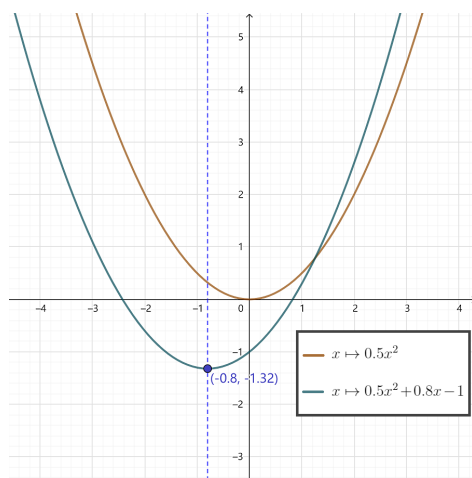
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

因此, 如果我们把  $x \mapsto ax^2$  的图像按  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  平移, 就得到  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  的图像。比如, 要得到  $x \mapsto 0.5x^2 + 0.8x - 1$  的图像, 我们从  $x \mapsto 0.5x^2$  出发。将  $0.5x^2 + 0.8x - 1$  配方得到

$$0.5x^2 + 0.8x - 1 = 0.5(x + 0.8)^2 - 1.32$$

于是将  $x \mapsto 0.5x^2$  按  $(-0.8, -1.32)$  平移, 就得到  $x \mapsto 0.5x^2 + 0.8x - 1$  的图像。

用  $x \mapsto 0.5x^2 + 0.8x - 1$  作例子, 可以看到, 原来  $x \mapsto ax^2$  的图像关于  $y$  轴对称。平移之后, 图像关于直线  $x = -\frac{b}{2a}$  对称。 $a > 0$  时,  $x \mapsto ax^2$  的



图像最低点是  $(0, 0)$ ，平移之后，最低点是  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ 。  $a < 0$  时，  $x \mapsto ax^2$  的图像最高点是  $(0, 0)$ ，平移之后，最高点是  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ 。直线  $x = -\frac{b}{2a}$  叫做二次函数图像的对称轴，点  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  叫做二次函数图像的顶点。

### 习题 6.2.1.

1. 二次函数  $x \mapsto x^2$  的图像和  $x \mapsto ax + b$  恰有一个交点，那么  $a$ 、 $b$  满足怎样的关系？交点的坐标是多少？

2. 二次函数  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  的图像和它关于点  $(x_0, y_0)$  平移后的图像有交点，则  $(x_0, y_0)$  应满足什么条件？交点个数可以是多少？

## 6.3 一元二次不等式

通过研究二次函数的图像，我们可以直观地理解一元二次不等式。

一元二次不等式是类似  $ax^2 + bx + c > 0$  的不等式。其中的大于号也可以是小于号、大于等于号或小于等于号。以不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  来说， $x$  是不等式的一个解，当且仅当点  $(x, ax^2 + bx + c)$  在  $x$  轴上方。也就是说， $ax^2 + bx + c > 0$  的解集，就是二次函数  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  在  $x$  轴上方的点的横坐标的集合。

观察  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  的图像可知, 如果  $\Delta > 0$ , 那么二次函数有两个零点。 $a > 0$  时, 不等式的解集对应两个零点两侧的部分, 是两个开区间的并集:

$$(-\infty, \frac{-b - \Delta}{2a}) \cup (\frac{-b + \Delta}{2a}, \infty)$$

$a < 0$  时, 不等式的解集对应两个零点之间的部分, 即开区间:

$$(\frac{-b - \Delta}{2a}, \frac{-b + \Delta}{2a})$$

如果  $\Delta < 0$ , 那么二次函数没有零点。 $a > 0$  时, 二次函数的图像总在  $x$  轴上方, 于是不等式的解集是全体实数。 $a < 0$  时, 二次函数的图像总在  $x$  轴下方, 于是不等式的解集是空集。

如果  $\Delta = 0$ , 那么二次函数恰有一个零点。 $a > 0$  时, 不等式的解集对应零点两侧的部分, 是两个开区间的并集:

$$(-\infty, \frac{-b}{2a}) \cup (\frac{-b}{2a}, \infty)$$

$a < 0$  时, 二次函数的值不大于零, 于是不等式的解集是空集。

要是不等式的大于号换成大于等于号, 则相关的“开”的部分也换成“闭”。如果  $\Delta > 0$ , 二次函数有两个零点。 $a > 0$  时, 不等式  $ax^2 + bx + c \geq 0$  的解集是:

$$(-\infty, \frac{-b - \Delta}{2a}] \cup [\frac{-b + \Delta}{2a}, \infty)$$

$a < 0$  时, 不等式的解集是:

$$[\frac{-b - \Delta}{2a}, \frac{-b + \Delta}{2a}]$$

如果  $\Delta < 0$ , 那么二次函数没有零点。 $a > 0$  时, 二次函数的图像总在  $x$  轴上方, 于是不等式的解集是全体实数。 $a < 0$  时, 二次函数的图像总在  $x$  轴下方, 于是不等式的解集是空集。

如果  $\Delta = 0$ , 那么二次函数恰有一个零点。 $a > 0$  时, 不等式的解集包括了零点, 因此是全体实数。 $a < 0$  时, 二次函数的值不大于零, 于是不等式的解集是单元集:  $\{\frac{-b}{2a}\}$ 。

要是不等式的大于号（大于等于号）换成小于号（小于等于号），只需要把左边的项移到右边，就转化成大于号（大于等于号）的情况。

**例子 6.3.1.**

1. 求不等式  $2x^2 - 5x + 2 > 0$  的解集。
2. 求不等式  $x^2 - 6x + 9 \geq 0$  的解集。

**解答.**

1. 首先求一元二次方程  $2x^2 - 5x + 2 = 0$  的解。依公式可得：

$$x_1 = 0.5, \quad x_2 = 2.$$

因此，不等式的解集是  $(-\infty, 0.5) \cup (2, \infty)$ 。

2. 首先求一元二次方程  $x^2 - 6x + 9 = 0$  的解。依公式可得：

$$x = 3.$$

因此，不等式的解集是全体实数。

一元二次不等式还可以用来解反比例函数和一次函数的不等式。

**例子 6.3.2.** 求不等式  $\frac{8}{x} > x + 2$  的解集。

可以把这个不等式理解为反比例函数  $x \mapsto \frac{8}{x}$  和一次函数  $x \mapsto x + 2$  的图像的关系。 $x$  是不等式  $\frac{8}{x} > x + 2$  的一个解，当且仅当点  $(x, \frac{8}{x})$  在点  $(x, x + 2)$  上方。如果我们画出两个函数的图像，并找到反比例函数在  $x \mapsto \frac{8}{x}$  在一次函数  $x \mapsto x + 2$  图像上方的部分，那么这部分的点的横坐标，就是不等式的解。

观察两者图像可知，解集大致对应第三象限中曲线和直线交点左侧的部分，以及第一象限中曲线和直线交点左侧的部分。具体交点的位置，我们可以通过解方程  $\frac{8}{x} = x + 2$  得到。而这个方程可以转化为一元二次方程。

把  $\frac{8}{x} = x + 2$  两边乘以  $x$ ，再把常数项 8 移到右边，就得到方程：

$$0 = x^2 + 2x - 8.$$

这是一个一元二次方程，解为：

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2$$

它们分别对应点  $(-4, -2)$  和  $(2, 4)$ （注意不是  $(-4, 0)$  和  $(2, 0)$ ）。这两个点就是第三、第一象限中曲线和直线交点的位置。因此，我们可以得出结论：不等式的解集是  $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$ 。

**习题 6.3.1.** 解以下不等式：

1.  $3x^2 - 8x + 4 < 0$

2.  $2x^2 + 8x + 9 \geq 7x + 10$

3.  $\frac{2}{x} < 6x - 7$