

第六册

大青花鱼

目录

第一章 向量	5
1.1 点、向量和直线	5
1.2 角度与长度	9
1.3 直线的方程	14
1.4 圆的方程	19
第二章 同余	23
2.1 同余类	24
2.2 完全同余系和简化同余系	27
2.3 方余定理	30
第三章 用数据说话	33
3.1 样本和特征	34
3.2 描述和分析	37
3.3 数据的结构	42

第四章 数据和概率	47
4.1 实验和样本	47
4.2 随机变量	48
4.3 条件概率和独立事件	53
4.4 大数定律	56
第五章 运动和优化	59
5.1 函数、图像和运动	59
5.2 极值原理	59
5.3 优化	59
第六章 数学和社会	61
6.1 随时代变化的数学	61
6.2 数学和科学	61
6.3 数学和现代化	61

第一章 向量

第五册中，我们学习了用三角函数解三角形。三角函数是定量研究平面形的利器。不过，三角函数本身并不是简单的函数。我们目前只能通过查表的方式得到函数值。这让我们思考，能不能打造一种更方便定量研究的体系呢？

回顾我们对平面形的研究，我们从几条公理出发，得出点、直线、三角形、圆等形状之间的定性关系。公理体系的缺陷在于没有与数紧密结合。比如，“两点之间直线最短”，除了定性的“最短”，没有提供别的信息。我们需要一种根本上和数量结合的体系，来理解各种平面形状。

此外，公理体系中并没有强调运动的概念。我们说点运动形成了线，旋转形成角度和圆，但并没有相关的工具来描述具体的运动。我们需要一种根本上和运动结合的体系，来理解形状之间的关系。

1.1 点、向量和直线

学习有理数的时候，我们使用数轴上的点表示。每个点代表一个实数。两点重合，当且仅当它们代表同一个数。这种表示方法把数和直线上的点牢牢绑在一起。我们可以用数的关系表示直线上点的关系。数轴使我们可以定量理解直线。

至于平面中的点，我们用相互垂直的数轴定义了点的坐标。每个点代表一个有序数对。两个数按顺序排列，对应平面中一点。

能不能像数轴一样，用一个量代表平面中一点呢？数轴之所以能用一个数代表一个点，是因为直线只有两个方向，使用正负号就可以代表方向。平面中不止两个方向，我们无法用正负来表示方向了。为此，我们引入一个新的量来代表平面中的点：**向量**。

自然数、有理数、实数都有自己的运算法则。向量作为代表点的量，需要满足怎样的运算法则呢？我们从运动出发，给出以下的法则：

1. 向量的加法就是平移：两个向量相加得到另一个向量。向量的加法满足结合律和交换律。
2. 零向量表示静止不变：存在这样一个向量，任何向量与它相加，仍然是自己。这个向量叫做零向量。零向量不定义方向，也可以说它与任何向量同向或反向。它对应的点称为**原点**。
3. 从每个非零向量，引出一根数轴：任何实数乘以向量，得到方向相同或相反的向量。这个运算称为**数乘运算**。数乘运算对应图形的放缩。
4. 放缩和四则运算相容：数轴上可以做数的运算。
5. 平移和放缩相容：先平移再放缩，和先放缩再平移，结果一样。

按照定义，**向量就是点**，所以可以用大写字母来标记。比如零向量就是原点，记为 O 。此外，**向量就是平移**。点 A 就是把 O 对应到 A 的平移，也是 O 平移的结果，记为 \overrightarrow{OA} 。反过来， \overrightarrow{BA} 就是把 B 对应到 A 的平移。

让我们用数学语言把这些法则更具体地写出来。我们把平面看作集合，记为 \mathbb{V} ，其中的元素称为向量或点，用粗体小写字母表示，以便和代表数的量区分：

1. 加法结合律： $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ 。
2. 加法交换律： $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 。
3. 存在零向量： $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ 。

4. 放缩和四则运算相容: $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$. $\forall s, t \in \mathbb{R}, (s + t) \cdot \mathbf{a} = (s \cdot \mathbf{a}) + (t \cdot \mathbf{a}), (s \cdot t) \cdot \mathbf{a} = s \cdot (t \cdot \mathbf{a})$.
5. 放缩和平移相容: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \forall t \in \mathbb{R}, t \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$.

从以上法则出发, 我们可以定义直线:

定义 1.1.1. 过原点的直线是非零向量放缩得到的集合。不过原点的直线是过原点的直线按一点平移得到的集合。

给定非零向量 $A = \mathbf{a}$, $\{t\mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$ 是一条过原点 O 和 A 的直线 OA , 称为 A 引出的直线, 记为 $\mathbb{R}\mathbf{a}$. 给定向量 $B = \mathbf{b}$, $\{t\mathbf{a} + \mathbf{b} | t \in \mathbb{R}\}$ 是一条过 B 的直线, 记为 $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 其中 $\mathbb{R}\mathbf{a}$ 称为它的线性部分; 而 $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} | t \in \mathbb{R}\}$ 就是直线 AB .

给定非零向量 \mathbf{a} , 如果向量 \mathbf{b} 可以通过 \mathbf{a} 放缩得到, 或者说 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}\mathbf{a}$, 就称两者共线。

类比可以定义线段和射线: 给定非零向量 $A = \mathbf{a}$ 和向量 $B = \mathbf{b}$, $\{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} | t \in [0, 1]\}$ 是线段 AB , $\{(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} | t \geq 0\}$ 是射线 AB .

这样定义的线段和射线, 也具备了数轴的性质。比如, 在线段 $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} | t \in [0, 1]\}$ 中, t 的不同值就对应了不同的点: $t = 0$ 对应点 \mathbf{b} , $t = 1$ 对应点 \mathbf{a} . 对一般的 $t \in (0, 1)$, $t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$ 对应的点 $P(t)$ 满足: $|AP(t)| = (1-t)|AB|$, $|P(t)B| = t|AB|$. 也就是说, $P(t)$ 是线段 AB 上使得 $\frac{|AP(t)|}{|P(t)B|} = \frac{1-t}{t}$ 的点。 $\overrightarrow{AP(t)}, \overrightarrow{P(t)B}$ 都和 \overrightarrow{AB} 共线。

反过来, 设 $\frac{|AP(t)|}{|P(t)B|}$ 等于定值 $k > 0$, 对应的点 $P(t)$ 是什么点呢? 这个问题实际上是求方程:

$$\frac{1-t}{t} = k$$

的解。容易解出这个方程的唯一解: $t = \frac{1}{k+1}$. 因此我们得到结论:

定理 1.1.1. 定比分点定理 线段 AB 上到两端距离之比 $\frac{|AP|}{|PB|}$ 为定值 k 的点 P 恰有一个, 称为它的 k 分点。

正数 k 越小, k 分点距离 A 越近, k 越大, k 分点离 A 越远; $k = 1$ 时, 我们就得到线段的中点。

以上我们讨论了 $k > 0$ 的情况, 显然, $k = 0$ 对应 $P = A$ 。对于负数 k , 有没有对应的点呢? 我们用平移的思想考虑这个问题, 从 A 到 $P(t)$ 经历的平移是 $\overrightarrow{AP(t)} = (1-t)\overrightarrow{AB}$, 从 $P(t)$ 到 B 经历的平移是 $\overrightarrow{P(t)B} = t\overrightarrow{AB}$ 。它们的系数之比就是 $\frac{1-t}{t}$ 。于是, 我们可以对一般的 k 定义定比分点: 如果 k 能使得方程

$$\frac{1-t}{t} = k$$

有唯一解, 那么我们就把对应的点 $P(t)$ 称为 AB 的 k 分点。

如果 $k < -1$, 那么 k 分点对应的 $t = \frac{1}{k+1} < 0$, 也就是说, $P(t)$ 在线段 BA 沿 B 的延长线上。如果 $-1 < k < 0$, 那么 k 分点对应的 $t = \frac{1}{k+1} > 1$, 也就是说, $P(t)$ 在线段 BA 沿 A 的延长线上。如果 $k = -1$, 以上方程无解, 这说明 -1 分点不存在。

共线的向量, 通过数轴, 可以方便地讨论相互的位置关系。不共线的向量之间, 如何讨论位置关系呢? 为此, 我们要引入**平面的根本性质**:

1. 给定任何非零向量 A , 平面中总有另一个向量 B , 不在直线 OA 上。我们说两者**不共线**。
2. 从不共线的向量 A, B 出发, 经过放缩、平移, 可以得到平面中任何向量。具体来说, 任何向量都可以表示成 $sA + tB$ 的形式, 集合 $\{sA + tB \mid s, t, \in \mathbb{R}\}$ 就是整个平面。这样的 A, B 称为平面的一组**基**或**基底**。

举例来说, 在直角坐标系中, 我们选择了原点重合、互相垂直的两条数轴, 以每条数轴上数 1 对应的点 (记为 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$) 出发, 通过放缩和平移, 就得到平面所有的点。平面中任一点可以写成 $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, 其中 x, y 就是点的坐标。直角坐标系其实是一种用向量描述平面的方法。 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 就是一组基。

思考 1.1.1.

1. 设平面上有两点 A, B , 以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $AOBC$ 。向量

\overrightarrow{OA} 和 \overrightarrow{BC} 是什么关系?

2. 设平面上有两点 A, B , 三角形 OAB 中, 连接边 OA, OB 的中点 M, N . 向量 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{MN} 是什么关系?

习题 1.1.1.

1. 证明: 零向量只有一个, 任何向量乘 0 得到零向量。
2. 证明: 零向量乘任何数得到零向量。
3. 证明: 任何向量 \mathbf{a} 都有唯一的反向量 \mathbf{b} , 满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 。
4. 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线, 如果 $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 证明: $s = t = 0$ 。

直角坐标系 xOy 中, 设 $\mathbf{a} = 4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y$, $\mathbf{c} = -\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$ 。

5. 在坐标轴上标出 \mathbf{a}, \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 。
6. 用 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表示 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 和点 $(3, 0)$ 。
7. 用 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表示它们的中点、3 分点、-0.5 分点、-3 分点。写出这些点的坐标和直线的方程。
8. 用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示顶点为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的三角形三边和重心。

1.2 角度与长度

根据平面的根本性质, 任何向量都可以用两个不共线向量表示。如何讨论它们的位置关系呢? 下面我们定义一种关系, 把长度、距离和角度统一起来。

给定平面基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, 我们给出这样一个二元映射 f :

$$\forall \mathbf{a} = x_A\mathbf{e}_1 + y_A\mathbf{e}_2, \mathbf{b} = x_B\mathbf{e}_1 + y_B\mathbf{e}_2, \in \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_Ax_B + y_Ay_B.$$

f 把两个向量对应到一个实数。它满足以下五个性质:

1. 向量的顺序不影响关系大小:

$$\begin{aligned} & f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) \\ &= x_A x_B + y_A y_B = x_B x_A + y_B y_A \\ &= f(x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2, x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

2. 零向量和任意向量关系为 0:

$$f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, \mathbf{0}) = f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2) = x_A \cdot 0 + y_A \cdot 0 = 0.$$

3. 非零向量与自身的关系总是正的: x_A, y_A 不全为零时,

$$f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2) = x_A^2 + y_A^2 > 0.$$

4. 和向量的放缩相容:

$$\begin{aligned} & f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, t(x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2)) \\ &= x_A t x_B + y_A t y_B = t(x_A x_B + y_A y_B) \\ &= t f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

5. 和向量的平移相容:

$$\begin{aligned} & f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, (x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) + (x_C \mathbf{e}_1 + y_C \mathbf{e}_2)) \\ &= x_A(x_B + x_C) + y_A(y_B + y_C) = (x_A x_B + y_A y_B) + (x_A x_C + y_A y_C) \\ &= f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) + f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_C \mathbf{e}_1 + y_C \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

满足以上五个条件的映射 f 称为平面向量的**内积**。从第四个性质可知, 向量与自身的内积总是正数。我们把这个数的平方根叫做向量的长度, 记为:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{f(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

两个向量之差的长度, 称为向量之间的距离。

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \quad \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{f(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})}.$$

如果基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是直角坐标系的基, 那么

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{a} &= x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y, \\ \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{x_A^2 + y_A^2}, \\ \forall \mathbf{a} &= x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{b} = x_B \mathbf{e}_x + y_B \mathbf{e}_y, \\ \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.\end{aligned}$$

给定向量 $A = \mathbf{a}$ 、 $B = \mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|$ 就是 $|OA|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ 就是 $|AB|$ 。也就是说, 我们这样定义的映射 f , 分别与直观经验中长度和距离的概念相符合。

那么, f 本身有什么含义呢? 我们来计算 $\frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2}$ 。

$$\begin{aligned}\frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2} &= \frac{x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2}{2} \\ &= x_A x_B + y_A y_B = f(\mathbf{a}, \mathbf{b}).\end{aligned}$$

另一方面, 余弦定理告诉我们, $\frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2} = |OA||OB| \cos \angle AOB$ 。也就是说, $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle AOB$ 。内积 f 的本质是向量夹角的余弦与向量长度的乘积。通过内积, 我们把角度和长度统一起来了。

向量夹角的余弦值总在 -1 和 1 之间, 所以向量的内积的绝对值不大于向量长度的乘积:

$$|x_A x_B + y_A y_B| \leq \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}.$$

可以验证这个关系对任意 x_A, y_A, x_B, y_B 成立。从这个关系出发, 可以得到:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \leq \sqrt{x_A^2 + y_A^2} + \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = |OA| + |OB|.$$

这符合直观经验中“三角形两边之和大于第三边”或“两点之间线段距离最短”的性质。

内积为 0, 就表示向量夹角的余弦为 0, 即两个向量垂直。比如令 $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$, 那么 $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0$ 。在平面上画出对应的点 A, B , 可以验证 $\angle AOB = 90^\circ$ 。

内积映射并不是唯一的，我们看另一个映射 f_2 ：

$$\forall x_A, y_A, x_B, y_B \in \mathbb{R}, \quad f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) = 2x_A x_B + y_A y_B.$$

可以验证， f_2 也满足 f 满足的五个性质。从 f_2 出发，我们也可以定义距离和长度：

$$\forall \mathbf{a} = x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y, \quad \|\mathbf{a}\|_2 = f_2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 2x_A^2 + y_A^2.$$

这样定义的距离和长度和我们直观经验中有些不一样，不过，我们可以验证，这样定义的距离也满足“两点之间线段最短”的性质。

$$|2x_A x_B + y_A y_B| \leq \sqrt{2x_A^2 + y_A^2} \sqrt{2x_B^2 + y_B^2}.$$

因此， f_2 也是内积。

我们把符合直观经验的内积 f 称为**经典内积**，一般称内积都默认指经典内积；把对应的长度称为向量的**模**。我们把 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的(经典)内积记为 $(\mathbf{a} | \mathbf{b})$ ，不至于混淆时，也常称为**点积**，记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ；把它们的模记为 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\mathbf{b}|$ 。

既然有余弦，自然有正弦。记 $\alpha = \angle AOB$ ，则 $(\mathbf{a} | \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ ，于是，

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} | \mathbf{b})^2$$

记 $\mathbf{a} = x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y$ ， $\mathbf{b} = x_B \mathbf{e}_x + y_B \mathbf{e}_y$ ，则

$$\begin{aligned} (x_A^2 + y_A^2)(x_B^2 + y_B^2) \sin^2 \alpha &= (x_A^2 + y_A^2)(x_B^2 + y_B^2) - (x_A x_B + y_A y_B)^2 \\ &= (x_A y_B - x_B y_A)^2 \\ |\sin \alpha| &= \frac{|x_A y_B - x_B y_A|}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}} \end{aligned}$$

我们得出了夹角 $\angle AOB$ 正弦的绝对值。

观察向量夹角的正弦和余弦，我们注意到，它们的表达式与和差角公式有相似之处。 $x_A x_B + y_A y_B$ 与差角余弦公式形式相似， $x_A y_B - x_B y_A$ 与差角正弦公式形式相似。

让我们在直角坐标系中找几个例子，看看直观结果。设有点 $A(1, 0)$ 、 $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。不难得出 $\angle AOB = 60^\circ$ 。我们用以上公式计算 $\angle AOB$ 的正弦和余弦：

$$\frac{x_A y_B - x_B y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = \frac{1}{2}.$$

把 P 的坐标换成 $(0, 1)$ 、 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 等，我们发现，通过以上两个公式得到的值，就是 $\angle AOB$ 的正弦、余弦值。记 $\angle AOB = \alpha$ ，那么：

$$\sin \alpha = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}.$$

我们是通过面积定义正弦的。比如，邻边为 OA 和 OB 的平行四边形，面积是 $|OA||OB| \sin \angle AOB$ 。对照上面正弦的表达式，可以发现这个面积等于 $x_A y_B - x_B y_A$ 。于是，我们把对应的映射

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto x_A y_B - x_B y_A.$$

称为向量 A, B 的**面积**，记为 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 。

向量的面积和内积，分别对应正弦和余弦。两向量面积为零，当且仅当它们共线；两向量内积为零，当且仅当它们互相垂直。

习题 1.2.1.

1. 直角坐标系中，已知两向量，计算它们的内积和面积，讨论它们的关系。

1.1. $A(0, 2), B(1, 1)$

1.2. $A(2, 1), B(0.5, -1)$

1.3. $A(1.6, 0.2), B(-0.9, -3)$

1.4. $A(1, -0.28), B(-0.45, -0.6)$

2. 直角坐标系中，已知向量 B 的模为 2，根据以下条件，求向量 A, B 的内积：

2.1 $A = (-4, 2), \angle AOB = 60^\circ$

2.2 $A = (0, 5), \angle AOB = 135^\circ$

$$2.3.A = (3, -2.5), \angle AOB = 45^\circ$$

3. 直角坐标系中, 已知点 $P(2, 1)$, 求使得 P, Q 内积为 4 的点 Q 。

4. 直角坐标系中, 已知点 $P(2, 1)$, 求使得 P, Q 面积为 4 的点 Q 。

思考 1.2.1. 如果直角坐标系 xOy 的 x 轴和 y 轴沿逆时针排布, 而角度的正方向为顺时针方向, 角 α 的正弦和余弦是否还能写成

$$\sin \alpha = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}$$

的形式?

1.3 直线的方程

直角坐标系中, 任意给定二元一次方程 $ax + by + c = 0$ (a, b 不全为 0), 它的解集都对应平面中一条直线。我们把这个二元一次方程称为直线的一般式方程。比如, $3x - 2y + 1 = 0$ 就是一条直线的一般式方程。不过, 从这个式子, 我们不容易看出相应的直线有什么性质。

下面我们用向量的语言, 给出有不同直观性质的直线的方程。

点向式: 已知直线过点 $A(x_A, y_A) = \mathbf{a}$, 方向为 $\mathbf{b} = (x_B, y_B)$ 。考虑直线上一点 $P(x, y) = \mathbf{p}$, $\mathbf{p} - \mathbf{a}$ 和 \mathbf{b} 共线, 所以面积为 0。于是 (x, y) 满足方程:

$$(x - x_A)y_B - (y - y_A)x_B = 0.$$

我们把这个二元一次方程称为直线的点向式方程。已知直线上一点和直线的方向, 可以写出直线的点向式方程。比如, 过 $(1, 2)$, 方向为 $(-1, 1)$ 的直线方程为: $1 \cdot (x - 1) - (-1) \cdot (y - 2) = 0$, 即 $x + y = 3$ 。

两点式: 已知直线过点 $A(x_A, y_A) = \mathbf{a}$ 和点 $B(x_B, y_B) = \mathbf{b}$ 。考虑直线上一点 $P(x, y) = \mathbf{p}$, 则 $\mathbf{p} - \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 共线。于是 (x, y) 满足方程:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0.$$

我们把以上方程称为直线的两点式方程。已知直线上不同的两点，可以写出直线的两点式方程。比如，过 $(1, 2)$ 、 $(-2, 1)$ 的直线方程为： $(x-1)(1-2) - (y-2)(-2-1) = 0$ ，即 $-x + 3y = 5$ 。

点斜式：已知直线过点 $A(x_A, y_A) = \mathbf{a}$ ，斜率为 k 。考虑直线上一点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ 。直线斜率为 k ，说明直线是某个一次函数 $x \mapsto kx + b$ 的图像。对比可知，直线方向和 $(1, k)$ 共线。我们用 $(1, k)$ 作为直线方向，于是直线方程为：

$$y - y_A = k(x - x_A).$$

我们把这个方程称为直线的点斜式方程。已知直线上一点和直线的斜率，可以写出直线的点斜式方程。比如，过 $(1, 2)$ ，斜率为 2 的直线方程为： $y - 2 = 2(x - 1)$ ，即 $y - 2x = 0$ 。

点法式：已知直线过点 $A(x_A, y_A) = \mathbf{a}$ ，并且和 $\mathbf{b} = (x_B, y_B)$ 垂直。考虑直线上一点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ ， $\mathbf{p} - \mathbf{a}$ 和 \mathbf{b} 垂直，所以内积为 0。于是 (x, y) 满足方程：

$$(x - x_A)x_B + (y - y_A)y_B = 0.$$

我们把 \mathbf{b} 称为直线的**法向量**，把以上方程称为直线的点法式方程。已知直线上一点和法向量，可以写出直线的点法式方程。比如，过 $(1, 2)$ ，法向量为 $(3, -1)$ 的直线方程为： $(x-1) \cdot 3 + (y-2) \cdot (-1) = 0$ ，即 $3x - y = 1$ 。

等高式：已知点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ 与 $B(x_B, y_B) = \mathbf{b}$ 的面积为 S ，则 (x, y) 满足方程：

$$xy_B - yx_B = S.$$

我们把这个二元一次方程称为直线的等高式方程。从直观上看，它表示所有以 OB 为底，面积相等（从而高相等）的三角形 OBP 的顶点 P 的集合，即一条平行于 OB 的直线。比如，与 $(1, -1)$ 的面积为 3 的点构成直线，方程为： $-x + y = 3$ 。

$S = 0$ 时，我们就得到直线 OB 。也就是说，已知 B 的坐标 (x_B, y_B) ，直线 OB 的方程是 $xy_B - yx_B = 0$ 。

等垂式: 已知点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ 与 $B(x_B, y_B) = \mathbf{b}$ 的内积为 T , 则 (x, y) 满足方程:

$$xx_B + yy_B = T.$$

我们把这个二元一次方程称为直线的等垂式方程。

从直观上看, 作 P 到直线 OB 的垂线, 垂足为 H 。设 $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OB}$,

$$T = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

$HP \perp OB$, 所以 $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 。于是 $T = t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = t|OB|^2$, 算得 $t = \frac{T}{|OB|^2}$, $\overrightarrow{OH} = \frac{T}{|OB|^2}\overrightarrow{OB}$ 。这说明 H 是定点。

反之, 过 H 点作垂直 OB 的直线。直线上任一点到 OB 的垂足是 H , 因此 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = T$ 。

这说明直线 $xx_B + yy_B = T$ 是一条垂直于 OB 的直线, 是所有到 OB 的垂足为定点 H 的点 P 的集合。比如, 与点 $B(1, -1)$ 的内积为 3 的点构成直线, 方程为: $x - y = 3$ 。它垂直于直线 $OB: x + y = 0$ 。

使用等高式和等垂式, 我们可以讨论直线平行和垂直的关系。我们来看两个典型问题:

例子 1.3.1. 求经过点 $P(x_P, y_P)$ 并平行于直线 $l: ax + by + c = 0$ 的直线 (如果存在) 的方程。

解答. 首先把直线方程转为等高式: $ax - (-b)y = -c$, 它表示平行于向量 $(a, -b)$, 与它的面积为 $-c$ 的直线。如果 P 在直线上, 那么 P 满足 $ax_P - (-b)y_P = -c$ 。这时符合要求的平行线不存在。如果 P 不在直线上, 我们可以构造直线 $l': ax - (-b)y = ax_P - (-b)y_P$ 。 l' 过 P , 且与向量 $(a, -b)$ 平行, 因此平行于 l 。

另一方面, 如果有直线过点 P 并平行于 l , 那么它与向量 $(a, -b)$ 平行。设它的方程为 $ax - (-b)y = S$ 。由于 P 在直线 $ax - (-b)y = S$ 上, P 满

足 $ax_P - (-b)y_P = S$, 即平行线方程为 $ax - (-b)y = ax_P - (-b)y_P$ 。显然, $ax_P - (-b)y_P = -c$ 时, 两直线重合, 不符合平行线定义。

因此, $ax_P - (-b)y_P = -c$ (P 在直线上) 时无平行线; 其他情况下, 恰有一条平行线: $ax - (-b)y = ax_P - (-b)y_P$ 。化简后的方程为: $ax + by = ax_P + y_P$ 。

另解: 首先把直线方程转为等垂式: $ax + by = -c$, 它表示与点 $M(a, b)$ 的内积为 $-c$ 的直线, 也就是垂直于 OM , 垂足 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \frac{-c}{|OM|^2} \overrightarrow{OM}$ 的直线。如果有直线过点 P 并平行于 l , 那么它也和 OM 垂直。把它写成等垂式: $ax + by = T$ 。由于 P 在 l' 上, 所以 $T = ax_P + y_P$ 。于是 l' 的方程为 $ax + by = ax_P + y_P$ 。显然, $ax_P + by_P = -c$ 时, 两直线重合, 不符合平行线定义。

另一方面, 考察 $l': ax + by = ax_P + y_P$, 它垂直于 OM , 所以与 l 平行或重合。容易验证, 两线重合当且仅当 $ax_P + by_P = -c$ 。

因此, $ax_P + by_P = -c$ (P 在直线上) 时无平行线; 其他情况下, 恰有一条平行线: $ax + by = ax_P + y_P$ 。

我们发现, 与 $ax + by + c = 0$ 平行的直线, 总可以写成 $ax + by + c' = 0$ 的形式。我们把 $ax + by$ 称为直线的头。头相同的直线相互平行或重合。

例子 1.3.2. 求经过点 $P(x_P, y_P)$ 并垂直于直线 $l: ax + by + c = 0$ 的直线 (如果存在) 的方程。

解答. 把直线方程写成点法式: $(x - x_Q)a + (y - y_Q)b = 0$, 其中 $Q(x_Q, y_Q)$ 是 l 上一点。这说明 (a, b) 是 l 的法向量。因此, 以 (a, b) 为方向的直线: $(x - x_P)b - (y - y_P)a = 0$ 就是过 P 且垂直于 l 的直线。

我们发现, 与 $ax + by + c = 0$ 垂直的直线, 总可以写成 $bx - ay + c' = 0$ 的形式。

例子 1.3.3. 给定一点 $P(x_P, y_P)$ 和一条直线 $l: ax + by + c = 0$, 如何计算 P 到直线 l 的距离 d ?

解答. 首先把直线方程转为等高式: $ax - (-b)y = -c$, 它表示与点 $M(a, -b)$ 的面积为 $-c$ 的直线。 P 与点 M 的面积为 $ax_P - (-b)y_P$ 。 如果 P 到 l 的垂足为 Q , P 到 OM 的垂足为 H , 那么 P 到 l 的距离 $d = |PQ|$ 是 $|HQ|$ 与 $|PH|$ 的差。 平行四边形的面积等于底乘以高, 所以, 考虑 P, Q 分别与 O, M 生成的平行四边形, 它们的面积之差等于高的差乘以底。 而两者对应的高分别是 $|HQ|$ 与 $|PH|$ 。 也就是说, P 到 l 的距离 d 是两个面积的差除以底的商:

$$d = \frac{|-c - (ax_P - (-b)y_P)|}{\sqrt{a^2 + (-b)^2}} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

另解: 首先把直线方程转为等垂式: $ax + by = -c$, 它表示与点 $M(a, b)$ 的内积为 $-c$ 的直线, 也就是垂直于 OM , 垂足 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \frac{-c}{|OM|^2} \overrightarrow{OM}$ 的直线。 作 P 到 OM 的垂线 l' , 记垂足为 H , 则 P 到 l 的距离就是 $|HQ|$, 也就是 $|OQ|$ 和 $|OH|$ 的差。 l 与 l' 垂直于同一条直线 OM , 因此平行或重合。 于是 l' 的等垂式为 $ax + by = ax_P + by_P$, $\overrightarrow{OH} = \frac{T}{|OM|^2} \overrightarrow{OM} = \frac{ax_P + by_P}{|OM|^2} \overrightarrow{OM}$ 。 于是 P 到 l 的距离为:

$$d = |\overrightarrow{HQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OH}| = \frac{|-c - (ax_P + by_P)|}{|OM|^2} |OM| = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

除了用二元一次方程表示直线, 我们还可以用别的方式表示直线。 前面我们用集合 $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$ 表示经过 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的直线。 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的坐标分别是 $(x_A, y_A), (x_B, y_B)$, 则直线上 t 对应的点的坐标就是

$$(tx_A + (1-t)x_B, ty_A + (1-t)y_B)$$

AB 的 k 分点坐标是:

$$\left(\frac{x_A + kx_B}{k+1}, \frac{y_A + ky_B}{k+1} \right)$$

我们把这样表示直线上的点的方法称为直线的**参数表示**。

习题 1.3.1.

1. 根据已知条件，写出直线的方程：

1.1. 过点 $(1, -3)$ ，与 $(0.5, 2.1)$ 共线。

1.2. 过点 $(2, -0.8)$ 、 $(-2, 2.5)$ 。

1.3. 过点 $(-1, 1)$ ，与 $(-0.5, 1.5)$ 垂直。

1.4. 过点 $(-2.25, -6)$ ，斜率为 -1.7 。

1.5. 与 $(4.5, -5)$ 内积为 -1.2 。

1.6. 与 $(5.6, 1)$ 面积为 -8 。

1.7. 与直线 $2x - y + 4$ 平行，且过点 $(1, 1)$ 。

2. 求平行直线 $x - 3y + 1 = 0$ 和 $x - 3y - 4 = 0$ 的距离。

3. 两直线的方程分别为 $y = k_1x + b_1$ 、 $y = k_2x + b_2$ ，证明：两直线垂直，当且仅当 $k_1k_2 + 1 = 0$ 。

思考 1.3.1.

1. 直线 l 按向量 P 平移得到直线 l' ， l 和 l' 之间有什么关系？

2. 一次函数的线性部分与直线方程的头有什么关系？

1.4 圆的方程

圆是到一点距离相同的点的集合。用向量的语言，以 \mathbf{w} 为圆心、以正数 r 为半径的圆，是关于 \mathbf{p} 的方程：

$$|\mathbf{p} - \mathbf{w}| = r$$

的解集。直角坐标系中，设 \mathbf{p} 的坐标为 (x, y) ， \mathbf{w} 的坐标为 (x_W, y_W) ，则以上方程变为：

$$\sqrt{(x - x_W)^2 + (y - y_W)^2} = r$$

根号中的值总大于等于零，所以这个方程的解集就是方程

$$(x - x_W)^2 + (y - y_W)^2 = r^2$$

的解集。我们把这个方程称为圆的方程，它的解集就是以 (x_W, y_W) 为圆心、 r 为半径的圆。比如，

$$x^2 + y^2 = 4$$

表示圆心为 $(0, 0)$ 、半径为 2 的圆。

例子 1.4.1. 过点 $P(1, 2)$ 的直线与圆 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 相切，求直线方程。

解答. 设直线 l 过点 P ，且与圆 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 相切，那么圆心 $W(-1, 1)$ 到 l 的距离平方为 3。将直线 l 写成点斜式： $y-2 = k(x-1)$ ，其中斜率 k 是待定的未知数。将它写成等垂式：

$$kx + (-1)y = k - 2.$$

可以算出， W 到它的距离为 $\frac{|-k-1-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$ 。于是可以列出方程：

$$\frac{(-k-1-k+2)^2}{k^2+1} = 3.$$

方程两边乘以 k^2+1 ，并将所有项整理到等式左边，得到：

$$k^2 - 4k - 2 = 0.$$

这是一个一元二次方程。解得斜率 $k = 2 + \sqrt{6}$ 和 $k = 2 - \sqrt{6}$ ，分别对应方程： $y + (-2 + \sqrt{6})x - \sqrt{6} = 0$ 、 $y + (-2 - \sqrt{6})x + \sqrt{6} = 0$ 。经验证， W 到这两条直线的距离都是 $\sqrt{3}$ 。因此，过点 $P(1, 2)$ 且与圆 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 相切的直线有两条，方程为： $y + (-2 + \sqrt{6})x - \sqrt{6} = 0$ 、 $y + (-2 - \sqrt{6})x + \sqrt{6} = 0$ 。

习题 1.4.1.

1. 写出以 $(-3, 2)$ 为圆心，半径为 5 的圆的方程。
2. 写出圆心为 $(-3, 2)$ ，过 $(1, 1.3)$ 的圆的方程。
3. 写出以 $(1, -1)$ 为圆心，过点 $(0, 4)$ 的圆的方程。
4. 直线过点 $(2, 5)$ ，且和点 $(0, 1)$ 的距离是 2.3，求直线的方程。
5. 直线 l 过点 $(4, 2)$ ，且和圆 $(x+1)^2 + (y-1.5)^2 = 4$ 相切。求直线 l 的方程和对应切点的坐标。

思考 1.4.1.

1. 给定实数 θ , 点 $(1 + 3\cos\theta, -2 + 3\sin\theta)$ 到 $(1, -2)$ 的距离是多少?
2. 如果点 $P(x_P, y_P)$ 到 $(1, -2)$ 的距离为 3, 是否总存在实数 θ , 使得 $x_P = 1 + 3\cos\theta$ 、 $y_P = -2 + 3\sin\theta$?

第二章 同余

例子 2.0.1. 7^{65} 的个位数是多少?

解答. 从 $7^0, 7^1, 7^2, 7^3 \dots$ 开始找规律. $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$. 7^4 和 7^0 的个位数都是 1, 7^5 和 7^1 的个位数都是 7. 我们可以总结出这样的规律: 个位数是 1 的, 乘以 7 得到 7; 个位数是 7 的, 乘以 7 得到 9; 个位数是 9 的, 乘以 7 得到 3; 个位数是 3 的, 乘以 7 得到 1。

也就是说, 如果把 $7^0, 7^1, 7^2, 7^3 \dots$ 的个位数写成一列, 应该是这个样子的:

$$1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, \dots$$

用归纳法不难证明, 这列数字以 4 为周期不断重复。所以, 要求 7^{65} 的个位数, 可以看 65 在相关的周期里处于哪个位置。换句话说, 只要看 65 除以 4 的余数。 $65 = 16 \times 4 + 1$, 所以 7^{65} 的个位数和 7^1 的个位数一样, 都是 7。

从这个例子可以看出, 两个整数除以同一个数得到相同的余数, 是一个重要的性质。我们把这种性质称为**同余**。比如, 65 和 1 除以 4 余数都是 1, 我们就说 65 和 1 模 4 同余。 7^{65} 和 7^1 除以 10 余数都是 7, 我们说 7^{65} 和 7^1 模 10 同余, 记为:

$$7^{65} \equiv_{10} 7^1$$

2.1 同余类

整数除以 3, 余数有 0, 1, 2 三种可能。整数除以 10, 余数有 0, 1, \dots , 9 十种可能。一般来说, 给定正整数 n , 整数除以 n , 余数有 0, 1, \dots , $n-1$ 这 n 种可能。因此, 按除以 n 的余数, 可以把整数集分成 n 类。同属一类的数, 模 n 同余, 所以这 n 类数叫作模 n **同余类**。所有模 n 同余类的集合, 叫作模 n **同余系**。

每个模 n 同余类, 可以写成 $\{kn + a \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 的形式。也就是说, 可以看成某个数 a 不断加上或减去 n 得到的所有数的集合。这个集合是无穷的。不同的模 n 同余类, 交集是空集, 并集是 \mathbb{Z} 。也就是说, 它们是 \mathbb{Z} 的分划。

为了方便, 我们从每个模 n 同余类中选一个元素, 代表这个同余类。一般来说, 可以选 0, 1, \dots , $n-1$ 个数。我们给它们加个上划线, 以和作为整数的 0, 1, \dots , $n-1$ 区分:

$$\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$$

如果要强调 n , 可以把 n 加在右上角:

$$\overline{0}^n, \overline{1}^n, \dots, \overline{n-1}^n$$

给定整数 m , 我们可以把它对应到某个模 n 同余类, 称为对 n **取模**。比如 $n = 5$ 时, $24 \equiv_5 4$, 我们把 24 对应到 $\overline{4}^5$, 或者说, 24 对 5 取模, 得 $\overline{4}^5$ 。

同余关系和相等关系很像, 它们是否有一样的性质呢? 我们可以验证, 同余关系满足以下的性质:

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, \quad a \equiv_n a$;
2. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, 如果 $a \equiv_n b$, 那么 $b \equiv_n a$;
3. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, 如果 $a \equiv_n b$, $b \equiv_n c$, 那么 $a \equiv_n c$ 。

满足以上三个性质的二元关系（两个元素之间的关系）称为**等价关系**。数与数的等于关系是等价关系，数与数的同余关系也是等价关系。因此，我们可以把同余关系用作同余类之间的等于关系。

整数之间有四则运算，模 n 同余类之间，也可以进行运算。以 $n = 5$ 为例子。我们分别计算 24 和 37 除以 5 的余数，以及它们的和 61 除以 5 的余数：

$$24 \equiv_5 4, 37 \equiv_5 2, 61 \equiv_5 1$$

可以发现： $4 + 2 \equiv_5 1$ ，也就是说，取模和加法可以交换顺序。可以验证，两个同余类中各取一个元素相加，和所在的同余类，就是两者模 n 余数的和所在的同余类。用集合的语言，可以写成：

$$\{kn + a + ln + b \mid k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\} = \{kn + a + b \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

所以，可以定义同余类的加法：

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

其中的 $\overline{a + b}$ 指的是 $a + b$ 所在的同余类。为了方便，我们用 $a + b$ 作为代表。

可以验证，同余类的加法也满足结合律和交换律。这里我们只证明同余类的加法满足结合律，交换律的证明留做习题：

证明： 由上可知 $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ ，所以

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b} + \bar{c} = \overline{a + b + c}.$$

类似可得：

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \overline{b + c} = \overline{a + b + c}.$$

于是

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b + c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

□

类似可以定义同余类的减法和乘法：

$$\bar{a} - \bar{b} = \overline{a - b}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

可以验证，同余类的减法性质和整数减法一样，同余类的乘法也满足结合律、交换律和分配律。

能否定义同余类的除法呢？我们来看一个例子。设 $n = 6$ ，考虑等式 $12 \div 4 = 3$ 。12、4 和 3 对 6 取模，得到 0、4 和 3。考虑等式 $60 \div 10 = 6$ 。60、10 和 6 对 6 取模，得到 0、4 和 0。也就是说，两个模 6 同余类中各取元素相除，商所在的同余类不是唯一的。所以，我们没法定义模 6 同余类的除法。

再看另一个例子。设 $n = 5$ ，考虑以下的“乘法表”：

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

可以看出，任何模 5 同余类乘以 $\bar{0}$ 都得到 $\bar{0}$ ，非 $\bar{0}$ 同余类乘以不同的同余类，结果也不同。这说明每个同余类除以另一个同余类（非 $\bar{0}$ ），都必然有唯一的结果。这样我们就定义了模 5 同余系里的除法。

习题 2.1.1.

动手做一做：

1. 证明同余关系满足等价关系所要求的三个性质。
2. 证明同余类的加法满足交换律。
3. 证明同余类的减法是加法的逆运算。
4. 证明同余类的乘法满足结合律和交换律。
5. 证明同余类的乘法满足分配律。
6. 证明：如果某模 n 同余类的代表与 n 的最大公因数是 d ，则其中所有元素与 n 的最大公因数都是 d 。
7. 分别画出模 3 同余系和模 4 同余系的“乘法表”。它们和模 5 同余系的“乘法表”哪些地方相同，哪些地方不同？

2.2 完全同余系和简化同余系

上一节我们提到模 6 同余系无法定义除法，而模 5 同余系可以定义除法。两者有什么不同呢？我们画出模 6 同余系的“乘法表”：

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

可以看到，这个“乘法表”和模 5 同余系的大有不同。同一行或同一列常有重复。这说明不同的同余类乘同一个同余类得到同一个结果。比如

$$\bar{2} \times \bar{4} = \bar{5} \times \bar{4} = \bar{2}.$$

这就使我们没法定义除法。

如果我们把上面的等式稍作变化，会得到：

$$\bar{0} = (\bar{5} - \bar{2}) \times \bar{4} = \bar{3} \times \bar{4}.$$

也就是说，有非 $\bar{0}$ 的同余类相乘等于 $\bar{0}$ 。同余类乘法的这个性质和整数乘法完全不同。我们把这种非 $\bar{0}$ 同余类叫做**零因子**。整数中没有零因子：非 0 的整数相乘必然不是 0。而只要有这种零因子存在，同余系中就会发生“不同的同余类乘同一个同余类得到同一个结果”的现象，从而无法定义除法。

有什么办法在模 6 同余系中定义除法呢？我们可以选一部分同余类，在其中定义除法。如果同余类 \bar{a} 的代表 a 与 6 不互素，设最大公因数是 b ，那么

$$\frac{a}{b} \times 6 = a \times \frac{6}{b}$$

于是有 $\bar{a} \times \frac{\bar{6}}{b} = \bar{0}$ ，出现零因子。因此，为了避免零因子问题，我们只选和 6 互素的数所在的同余类，也就是 $\bar{1}$ 和 $\bar{5}$ 。我们发现 $\{\bar{1}, \bar{5}\}$ 中可以定义乘法和除法（但不再满足加减法）。

\times	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$

我们把模 6 同余系称为模 6 的**完全同余系**，把 $\{\bar{1}, \bar{5}\}$ 称为模 6 的**简化同余系**。

一般来说，我们把模 n 同余系称为模 n 的完全同余系，在其中可以定义加减法和乘法；把其中所有和 n 互素的同余类的集合称为模 n 的简化同余系¹。

定理 2.2.1. 给定正整数 n ，在模 n 的简化同余系中可以定义乘法和除法。

¹通常不把 $\bar{0}$ 计入简化剩余系，以省去讨论除以 $\bar{0}$ 的问题。

证明： 模 n 同余类的乘法已经定义好了。我们只需要说明：简化同余系中的同余类相乘，仍然在简化同余系中。这是因为与 n 互素的整数相乘，结果还是与 n 互素。

接下来定义除法。除法是乘法的逆运算。比照数的除法： $a \div b = a \times \frac{1}{b}$ 。因此，只要将简化同余系中每个同余类都对应一个“倒数”，就可以用“乘以倒数”来定义除法。

我们把模 n 简化同余系中的同余类用小于 n 且与 n 互素的正整数来代表，记为

$$1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{\varphi(n)} = n - 1.$$

其中 $\varphi(n)$ 是模 n 简化同余系的元素个数。考虑任一元素 b_i ，我们接下来会证明： $b_i b_1, b_i b_2, \cdots, b_i b_{\varphi(n)}$ 模 n 两两不同余。于是，它们中恰有一个模 n 余 1。设 $b_i b_j \equiv_n 1$ ，那么 b_j 就是 b_i 的“倒数”。

最后用反证法证明命题： $b_i b_1, b_i b_2, \cdots, b_i b_{\varphi(n)}$ 模 n 两两不同余。

反设命题不成立，即存在 b_j, b_k 使得 $b_i b_j \equiv_n b_i b_k$ 。这说明 $n | b_i(b_j - b_k)$ 。由于 b_i 和 n 互素，根据倍和析因定理，存在整数 p, q ，使得：

$$b_i p + n q = 1.$$

两边乘以 $b_j - b_k$ ，就得到：

$$b_i(b_j - b_k)p + nq(b_j - b_k) = b_j - b_k.$$

等式左边是 n 的倍数，因此 b_j 和 b_k 模 n 同余，这与它们的定义矛盾。

因此命题的否定为假，原命题为真。 \square

简化同余系的除法和整数不同，任何同余类都能整除另一个同余类，不需要余数、带余除法的概念。每个同余类都有自己的“倒数”，比如在模 6 简化同余系中， $\bar{5} \times \bar{5} = \bar{1}$ 。我们把同余类的“倒数”称为它的（乘法）逆。

习题 2.2.1.

1. 写出模 12 的简化同余系。写出 $\bar{7}^{12}$ 的逆。
2. 比较模 12 简化同余系中的乘除法和模 4 完全同余系中的加减法，

它们有何异同?

3. 写出模 10 的简化同余系。写出 $\bar{7}^{10}$ 的逆。

4. 比较模 10 简化同余系中的乘除法和模 4 完全同余系中的加减法, 它们有何异同?

5. 给定素数 n , 写出模 n 简化同余系。

2.3 方余定理

与模 n 简化同余系密切相关的一个定理是方余定理²。

定理 2.3.1. 方余定理 设 a 是模 n 简化同余系中某个同余类中的元素, 则:

$$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$$

其中 $\varphi(n)$ 是模 n 简化同余系中同余类的个数。

比如, 模 10 简化同余系有 4 个元素: $\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}$ 。7 属于同余类 $\bar{7}$, 则 $7^4 \equiv_{10} 1$ 。

证明: 我们把模 n 简化同余系中的同余类用小于 n 且与 n 互素的正整数来代表, 记为

$$1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{\varphi(n)} = n - 1.$$

它们两两不同余。把它们各自乘以 a , 得到 $\varphi(n)$ 个整数: $ab_1, ab_2, \cdots, ab_{\varphi(n)}$ 。前面我们已经证明了, 它们仍然两两不同余。

这说明这 $\varphi(n)$ 个整数也分别代表模 n 简化同余系中的各个同余类。

考虑乘积: $b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$ 。 $(ab_1)(ab_2) \cdots (ab_{\varphi(n)})$ 和它同余。也就是说:

$$b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)} \equiv_n (ab_1)(ab_2) \cdots (ab_{\varphi(n)}) \equiv_n a^{\varphi(n)} b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}.$$

²这个定理也称为欧拉定理。但以欧拉命名的定理太多了。为了避免混淆, 这里不采用。

由于 $b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$ 也与 n 互素, 我们把等式两边除以 $b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$, 就得到:

$$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1.$$

□

如果 n 是素数, 那么 $1, 2, \dots, n-1$ 都和它互素, 于是模 n 的简化同余系就是 $\{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$, $\varphi(n) = n-1$ 。根据方余定理, 只要 a 不是 n 的倍数, 就有:

$$a^{n-1} \equiv_n 1.$$

这个结论也叫做费马小定理。

习题 2.3.1.

给定素数 n , 证明:

1. 除了 $\overline{1}$ 和 $\overline{n-1}$, 其它同余类的逆都不是自己。
2. $(n-1)! \equiv_n -1$.

设 a 与 n 互素, 称使得 $a^m \equiv_n 1$ 的最小正整数 m 为 a 模 n 的阶。

3. 证明 a 的阶整除 $\varphi(n)$ 。
4. 如果 a 的阶等于 $\varphi(n)$, 就说 a 是模 n 的原根。证明: 如果 a 是模 n 的原根, 那么模 n 简化同余系可以写成: $\{\overline{a^0}, \overline{a^1}, \dots, \overline{a^{\varphi(n)-1}}\}$ 。
5. 找出所有模 7 的原根。

第三章 用数据说话

数据是客观事物的定量记录。比如，以下列表中有某班级学生的身高数据。

姓名	学号	身高（厘米）
张三	214092	166.4
李四	214033	171.5
王五	210819	164.8
⋮	⋮	⋮

生产生活中，我们常常以数量等形式记录客观事物的特征和属性。以合理的方式组织、呈现的数据，能帮助我们了解事物的本质，成为我们讨论、判断、决策的依据。

数据一般由**义**和**值**两部分构成。比如，我国 2020 年国民生产总值为 101 兆 5986 亿元人民币。这个数据的义是“我国 2020 年国民生产总值”，值是“101 兆 5986 亿元人民币”。数据的义和值缺一不可。没有义，就无法理解数据代表什么、与什么事物有关；没有值，就无法使用数据来了解相关事物。

3.1 样本和特征

要了解事物的某种性质，我们需要收集数据。比如，要了解学生的身体素质，我们可以通过体检收集学生的身高、体重、肺活量、血压等相关数据。如果我们要了解学生的身高，就要从每个学生的身高数据出发进行研究。这里每个学生的身高称为一份**样本**。对学生的各项数据来说，和某种性质相关的某一项，称为一个**特征**。比如，我们收集了 100 名学生的身高、体重、肺活量和血压数据。从总体来说，每个学生的数据是一个样本，共有 100 份样本。每个学生的数据都包括身高、体重、肺活量、血压。因此，这 100 份样本涉及 4 个特征。如果我们只研究学生的身高状况，那么可以把每个学生的身高数据看作一份样本。

实际生活中，收集数据样本的方式多种多样。一种常见的方式是通过调查问卷获得数据。右图是一份关于电视剧的调查问卷（部分）。

利用调查问卷，可以收集人们的主观想法、喜好。如果要收集事物的客观性质，更多是通过科技手段。

直接收集到的数据，也许无法直接反映事物的本质，难以让我们总结事物的规律。为此，我们对收集到的数据进行整理加工，得到新的数据。为了区别直接收集到的数据和经过人为整理加工的数据，我们一般把前者称为**原始数据**，把后者称为**生成数据**。

通常来说，整理加工数据的手段主要有以下几种：提高数据质量、转化数据形态、变换数据结构、新造特征。

为了提高数据质量而加工数据，称为数据清洗。我们收集到的数据，往往并不是我们理想中的样子。比如，我们收集 100 名学生的身高、体重、肺活量、血压数据，结果中可能有 3 名学生的血压数据缺失，6 名学生的肺活

欢迎参加本次答题

Q1: 你的性别是?

☐ 男

☐ 女

Q2: 你对电视剧的关注情况?

☐ 每天看

☐ 经常看

☐ 偶尔看

☐ 从不看

Q3: 你一般挑选何时看电视剧?

☐ 白天抽空

☐ 晚上休息

☐ 节假日期间

☐ 不定时

量明显错误，4 名学生的数据重复记录，7 名学生的身高与上次体检结果严重不一致等情况。这些问题会影响我们研究数据，作出结论。因此，需要清洗数据，提高数据质量，以便接下来进行研究。

检查数据质量，通常从以下几个方向入手：**完整性、唯一性、一致性、正确性**。

- 完整性检查，就是检查数据是否有缺失的。比如，收集 20 个城市的就业率做研究，结果缺了某城市的数据，则数据不完整。
- 唯一性检查，就是检查不同途径、时间收集的数据是否有重复的。比如，收集学生对新游泳馆的评价，出现同一名学生的两份样本，说明数据重复了。
- 一致性检查，就是检查有关系的数据是否一致、是否合理。比如，收集市场的交易数据，各账户买入和卖出的数量分别相加，得到的总买入量应该等于总卖出量。如果总买入量和总卖出量不相等，则数据不一致。
- 正确性检查，就是核实数据是否正确无误。比如，收集学生的身高数据，出现某学生身高 173 米，说明数据有误。

不同的研究中，出于实际需要和综合考虑，会使用不同的手段清洗数据，处理数据的完整性、一致性、唯一性、正确性问题。

转化数据形态，就是把数据的值用另一种形式呈现。转化数据形态往往是为了从另一个角度看待数据的值。比如，收集 100 名学生的肺活量：

姓名	肺活量（毫升）
张三	2800
李四	3200
王五	4100
⋮	⋮
钱六	3850

我们可以把数据转为：

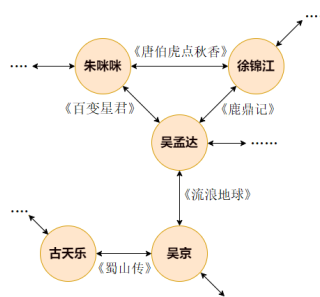
姓名	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	> 5
张三	0	0	1	0	0	0
李四	0	0	0	1	0	0
王五	0	0	0	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
钱六	0	0	0	1	0	0

我们以升为单位，把肺活量的范围分划为几个区间，每个人的肺活量的值落在哪个区间，就在对应的列记 1，其他列记 0。这让我们用另一种角度来观察肺活量数据。

变换数据结构，是指用另一种方式组织数据。原始数据不容易理解，可能是因为数据组织的方式不合其义。组织数据的方式越符合其义，我们就越容易通过数据理解事物的本质。比如，我们收集某些影视演员的出演影视作品的数据，研究演员之间的关系。原始数据是各个演员的作品列表：

姓名	作品
周比利	《少年陈真》、《精武英雄》、《鼠胆龙威》、……
斯琴高娃	《北京爱情故事》、《骆驼祥子》、《香魂女》、……
朱咪咪	《百变星君》、《审死官》、《唐伯虎点秋香》、……
⋮	⋮
李绮虹	《西贡的童话》、《爱未央》、《圣诞玫瑰》、……
张涵予	《风声》、《智取威虎山》、《红海行动》、……

我们可以根据共演关系，把数据结构改为下图。每个圆点代表一个演员。曾经共演的演员之间连线，否则不连线。



从图中我们能够看出不同演员之间的合作关系。我们也可以把共演关系用数表的方式呈现。曾经共演的演员，相应的格子中填入共演作品数目，否则填 0：

	朱咪咪	吴孟达	古天乐	吴京	...
朱咪咪	-	3	0	0	...
吴孟达	3	-	3	1	...
古天乐	0	3	-	4	...
吴京	0	1	4	-	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

新造特征，就是从原始数据的某些特征出发，构造新的数据。比如，从身高和体重数据出发，用体重除以身高的平方，就得到新特征：体质指数。

3.2 描述和分析

上一节的例子中，我们收集了 100 名学生的身高、体重、肺活量、血压数据。如何通过这些数据，了解这些学生的身体素质情况呢？我们可以查看每个学生的数据。然而，人的认知和理解能力是有限的。我们无法直接把这 400 个数值直接反映在头脑中。为此，我们希望用更少的信息来描述这些数据，让我们对这些数据有大概的认识。这种手段叫作**描述统计**。描述统

计中最基本的方式，是从数据出发算得一个数量，来描述数据。我们把这样的数量称为**统计量**。以下是一些常见的统计量。

极值：某特征所有样本值中最大的，称为该特征的**极大值**；所有样本值中最小的，称为该特征的**极小值**。比如，我们可以查看所有学生的体重，找出其中最大的值和最小的值。

平均数：某特征所有样本值之和，除以样本的个数，称为该特征的平均数或均值。比如，我们把所有学生的身高值加起来，除以 100，就得到学生平均身高。

中位数：如果某个数值比某特征一半样本的值大，比另一半样本的值小，就说它是该特征的中位数。显然，这个定义是不严谨的，实际计算时需要严谨的定义。最简单也是最常用的定义是：将该特征所有样本的值从小到大排列。如果样本个数 N 是奇数： $N = 2n + 1$ ，那么取第 $n + 1$ 大的数为中位数；如果样本个数是偶数： $N = 2n$ ，那么取第 n 大和第 $n + 1$ 大的数的均值为中位数。比如，把 100 名学生的肺活量值从小到大排列，第 50 大的值和第 51 大的值之和除以 2，就是中位数。

根据极值、平均数和中位数，我们可以大致描述数据的总体情况。比如，知道了学生的身高极小值是 144 厘米，极大值是 191 厘米，平均值是 165.7 厘米，中位数是 163.8 厘米，我们就对这 100 名学生的身高有了基本的认识。

要更进一步分析数据，可以通过**分位数**和**直方图**。

分位数是中位数概念的推广。可以想象把所有样本的值标记在数轴上，用手指从左边第一个值起，往右划过去，数过一个又一个值。数过一半样本时的值，大致就是中位数。类似地，设有 $0 < q < 1$ ，数过的样本数量和总数量之比为 q 的时候，指向的值就可以称为样本的 q **分位数**。 q 称为分位，一般用百分数表示。中位数就是 50% 分位数。

显然，从右往左数也可以定义一种分位数。我们把从左往右数得到的

称为左 q 分位数或下 q 分位数, 把从右往左数得到的称为右 q 分位数或上 q 分位数。

分位数和中位数一样, 是一种模糊的说法。实际计算中, 我们要采用更严谨的定义。

给定 N 个样本值 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N$ 和某个值 a , 定义 n^- 为小于等于 a 的样本个数。数轴上, a 从 $x_1 - 1$ 向 $x_N + 1$ 运动时, n^- 从 0 增大到 N 。 a 从某个 x_i 离开, 运动到 x_{i+1} 期间, n^- 是不变的。 a 到达 x_{i+1} 时, n^- 增大。

分位数的自然定义: 如果 a 到达某个 x_i 前, $n^- < qN$, 而到达 x_i 时 $n^- \geq qN$, 就定义 x_i 为左 q 分位数。如果在某段 x_i 到 x_{i+1} 期间 $n^- = qN$, 就定义 $(1 - q)x_i + qx_{i+1}$ 为左 q 分位数。

此外还可以定义顺分位数。区别在于, 如果在某段 x_i 到 x_{i+1} 期间 $n^- = qN$, 顺分位数仍定义左端 x_i 为左 q 分位数。

自然定义的分位数和之前中位数的定义相洽, 顺分位数则更方便计算。

分位数按照样本的数量来划分样本, 划分越细, 越有利于我们了解样本的分布情况。比如, 根据 100 个学生的身高, 求得分位数如下:

q	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
分位数 (cm)	149.7	154.3	158.0	161.2	163.8	167.5	171.7	175.6	180.2

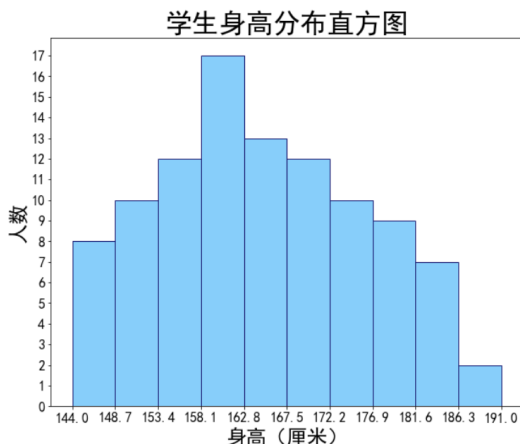
可以看出, 学生身高在 40% 到 50% 阶段较为集中, 在 80% 到 90% 阶段较为稀疏。

直方图是另一种展示样本分布情况的方法。我们取定某个包含了所有样本值的区间, 然后将其均匀分划为若干份。比如, 我们取学生身高的极小值和极大值构建区间 $[144, 191]$, 将其均匀划分成 10 份, 每份长为 $\frac{191-144}{10} = 4.7$ 。数轴上, 左起第一个区间是 $[144, 148.7)$, 第二个区间是 $[148.7, 153.4)$, 等等。最右边的区间是 $[186.3, 191]$ 。把这 10 个区间从左到右编号, 每个样

本的身高值恰好属于其中一个。我们可以把这 10 个区间想象成 10 个“抽屉”，把 100 个学生的身高值“放进”这些“盒子”里，然后统计每个“盒子”里的样本数。最终我们可以得到一个以下样子的表格：

区间序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
样本数	8	10	12	17	13	12	10	9	7	2

我们还可以把这个结果用图表形式画出来：



直方图比分位数表格更直观、更容易理解。我们可以直接看出，学生身高在 $[158.1, 162.8)$ 区间最为集中，共有 17 人的身高落在这个区间里；在 $[186.3, 191]$ 区间最为稀疏，只有 2 人的身高落在这个区间里。

比直方图更简单的描述方法是**平均数和方差**。平均数是所有样本值之和除以样本数的商。如果所有样本值相差不多，那么平均数可以告诉我们样本值大致分布在哪里。比如，算得 100 个学生的身高值之和为 16426.5 厘米，则他们身高的平均值为 164.265 厘米。如果所有学生身高相差不多，就可以说他们的身高大致是 164 厘米。

当然，我们从直方图可以看出，学生的身高差距并非“不多”。因此，我们引入**方差**的概念，描述样本值的集中程度。方差和平均数一起，可以粗略呈现样本分布的情况。样本的方差定义为样本值与均值之差的平方的均值。

给定 N 个样本值: x_1, x_2, \dots, x_N , 记它们的均值为 u , 方差为 v , 则:

$$v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - u)^2.$$

由于 $u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, 可以推出:

$$v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - u^2.$$

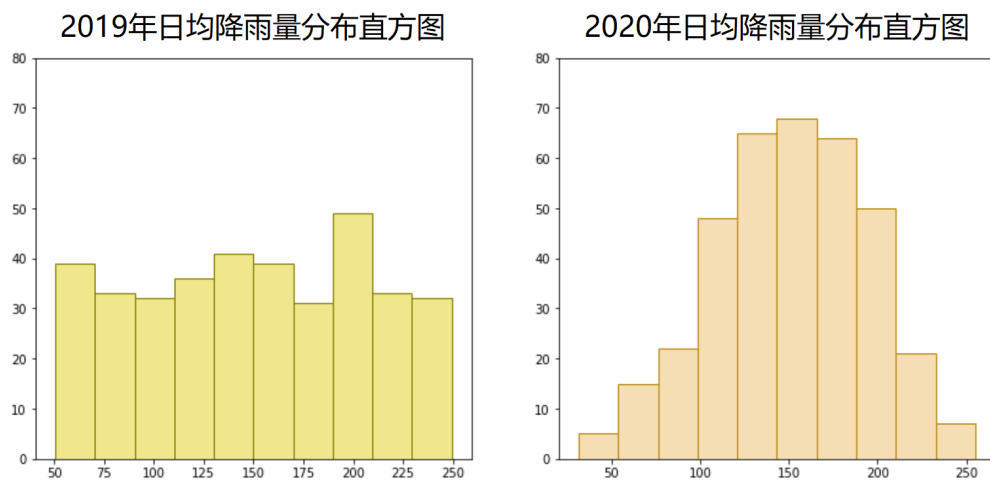
比如, 1, 2, 3, 4, 5 的平均数为:

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3,$$

方差为:

$$\frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = 2.$$

方差的概念在单批样本中比较难理解, 但如果用于比较两批样本, 就容易理解了。举例来说, 考察某地连续两年的日均降雨量, 绘制直方图:



可以看出, 虽然两年平均降水量差不多, 但相比 2019 年, 2020 年的日均降雨量分布较为集中。计算得到的方差也说明这一点: 2019 年日均降雨量的方差为 3147.87, 而 2020 年日均降雨量的方差只有 1872.21。

思考 3.2.1.

1. 能否把分位数表格的信息用图表形式展示?
2. 绘制直方图时, 是否有别的方式划分区间?
3. 分位数表格和直方图有什么联系?
4. 直方图划分的区间个数是否越多越好? 你认为应该如何确定划分的区间数?
5. 除了方差, 你还能想到什么方法来描述数据的集中程度? 它们和方差相比有什么好处?

习题 3.2.1.

1. 写出右分位数的自然定义。
2. 写出顺右分位数的定义。

3.3 数据的结构

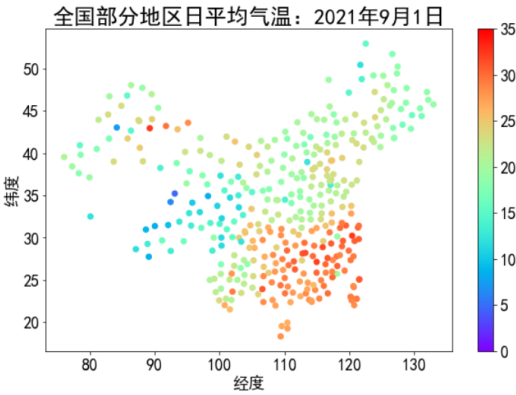
上一节中我们描述、分析数据的时候, 并未考虑数据本身的结构。什么是数据的结构? 数据结构是不同数据样本之间因数据自身含义产生的联系的总和。用适合的方式展现数据的结构, 有助于我们理解数据包含的信息, 描述并分析数据。

一种常见的数据结构是时空结构: 不同的数据样本代表了不同时间不同地点的信息。用合适的方式展现这种时空结构, 对我们研究相关事物大有帮助。

举例来说, 下表中有我国部分地区的日均气温数据。

地区编号	日期	经度	纬度	气温 (°C)
291027	2021-01-01	121.101681	22.754986	15.9
291027	2021-01-02	121.101681	22.754986	18.9
291027	2021-01-03	121.101681	22.754986	19.3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

从列表中难以看出数据之间的联系。如果把相关的数据展示在对应的地理位置上，形成下图：



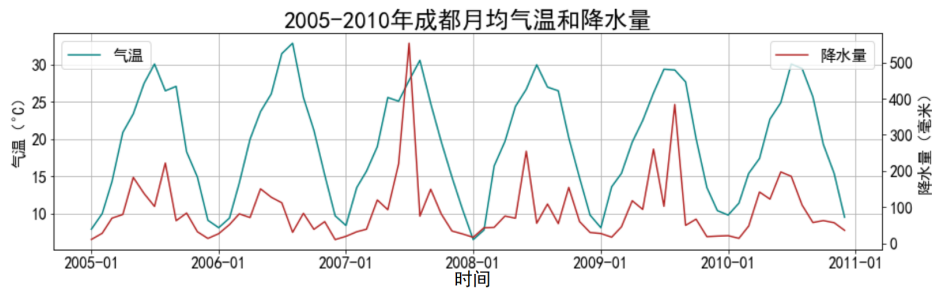
我们就能比较直观地看出各地气温之间的关系。

以上是空间地域结构的展示。再来看时间结构的展示。下表是 2005 年至 2010 年成都市月均降水量和气温数据。

时间	气温 (°C)	降水量 (毫米)
2005-03	14.3	69.3
2005-01	7.9	10.3
2005-02	10.0	27.5
⋮	⋮	⋮
2010-12	9.5	35.5

从列表中难以看出数据之间的联系。可以把数据按时间先后顺序排列，

这样得到的数据称为**时间序列**。以时间轴为 x 轴，以降水量和气温为 y 轴，按照时间先后顺序，把每个时刻的降水量和气温值对应的点用线段连起来，就形成下图：

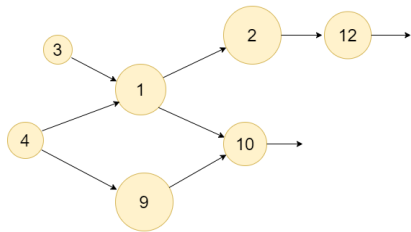


从图中，我们容易看出当地降水量和气温数据随时间变化的方式。这种呈现数据的方式称为**折线图**。

另一个例子涉及更复杂的关系。下表中有某工厂完成一个项目所需的任务和各项任务预计所需的时间：

任务编号	预计用时	前置任务	后继任务
1	7	3, 4	2, 10
2	8	1	12
3	4	-	1
4	5	-	1, 9
⋮	⋮	⋮	⋮

从列表中难以判断应该如何组织工作。如果把各项任务的关系连接起来，形成下图：



这个展示数据的方法称为**流程图**。图中将任务用圆盘表示，圆盘直径和任务预计用时成正比。用箭头把每个任务指向它的后继任务（必须完成前者才能开始后者的）。据此，我们就能更好地理解完成任务的必要次序，更合理地安排工作。

第四章 数据和概率

之前，我们学习了用概率来讨论不确定的事件。如何判断某件事情将来会不会发生？我们需要通过已有的知识和经验来分析。数据就是我们对已有知识和经验的总结、提炼。通过分析数据，我们可以讨论不确定的事件发生的概率。

4.1 实验和样本

为了研究我们关心的问题中某些随机事件发生的规律，我们会特意设计**实验**，布置相关条件，并观察发生的事件，记录结果。每次实验，我们得到的结果就是一个数据样本。比如，为了研究投骰子各面朝上的规律，我们设定骰子的大小、材料和形制，设计投掷的高度，并观察投掷结果。这就是一个实验。

实际中，很多问题并不是人类有能力设计、布置必要条件的，但我们仍然关心其中随机事件发生的规律，比如台风、地震、火山爆发等等。因此，我们假设大自然设计了相关的实验，框定一些假设条件，并观察发生的事件，记录结果。我们称之为广义的实验。比如，为了研究我们所在地区的降雨情况，我们观察每天是否降雨，记录降雨量，就是一次广义的实验。为了研究方便，我们会假设记录地点代表了所在地区（比如全市）的平均降雨情况，或者设定每天降雨量为早上 8 点到次日早上 8 之间的记录量等等，但

我们无法完全控制实验的条件。

一次大实验可以包含几个小实验。比如，我们可以把连续记录一周的日降雨量称为一次实验，也可以把每天的记录称为一次实验。为了好说话，我们会区分**单一实验**和**复合实验**。如何区分，取决于我们关心的问题的性质和我们的研究方法。比如，体检中，我们可以把测量每个学生身高、体重、血压和肺活量合称为一个单一实验，这样，测量 100 个学生就是复合实验。如果我们关心的是这些学生的整体状况，我们可以认为这是 1 次复合实验，其中每个学生的测量称为单一实验。如果我们关心的是某个学生的状况，那么我们可以重复测量这个学生 100 次，称为复合实验，其中每次测量称为单一实验。

实验中，我们观察某些事件发生的情况，把我们关心的部分用数据记录下来，这样就得到一个数据样本。这样记录的叫做实验的**终态**或**结果**。

4.2 随机变量

一般来说，我们把实验的每个结果关联到某个方便理解的数值，作为数据记录。这样的映射，称为**随机映射**或**随机变量**。比如，设计抛掷硬币的实验，每次投掷如果正面向上，就规定结果是 1，否则规定结果是 0。那么我们可以把投掷结果用随机变量表示：

$$h : \{\text{正面}, \text{反面}\} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$h(\text{正面}) = 1$$

$$h(\text{反面}) = 0$$

随机变量 h 把终态“正面”映射到 1，把终态“反面”映射到 0。

又比如，为了研究投骰子各面朝上的规律，我们设计投掷骰子的实验，每次投掷的结果是朝上的数字，我们约定，每次投掷骰子，得到的收益是这个数值的 10 倍。如果数字 2 朝上，就获得 20 元；数字 5 朝上，就获得 50

元，等等。则我们可以把每次投掷骰子的收益用随机变量表示：

$$\begin{aligned} f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} &\rightarrow \{10, 20, 30, 40, 50, 60\} \\ i &\rightarrow 10 \times i \end{aligned}$$

随机变量 f 把终态 1 映射到 10，把终态 2 映射到 20，把终态 3 映射到 30，等等。

一般来说，设试验的终集为 S ，如果某个映射把终集里的每个终态映射到另一个集合 X 里，就说这个映射是 S 上的 X -随机映射或随机变量。如果集合 X 是有限集或有理数集的子集，就说随机映射是**离散**的；如果集合 X 是实数集或区间，就说随机映射是**连续**的。

我们把随机变量背后随机事件的概率分布，称为**随机变量的分布**或随机变量遵循的分布。可以看出，随机变量的性质与其分布有关。随机变量的分布如何具体影响随机变量呢？我们来看两个例子。

例子 4.2.1. 考虑这样的映射 \mathbb{E} ：它将离散随机变量 f 映射为

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{s \in S} f(s) \mathbb{P}(\{s\}).$$

这个映射称为随机变量的期望。比如，对以上掷骰子试验的随机变量 f ，它的期望为：

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{i=1}^6 10 \cdot i \mathbb{P}(\{i\}).$$

如果投骰子的分布是均匀分布，那么对任何 i ， $\mathbb{P}(\{i\})$ 总是 $\frac{1}{6}$ ，于是：

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{i=1}^6 \frac{10 \cdot i}{6} = 35.$$

如果 1 朝上的概率是 50%，其他数字朝上的概率都是 10%，那么：

$$\mathbb{E}(f) = 10 \cdot 1 \cdot 50\% + \sum_{i=2}^6 \frac{10 \cdot i}{10} = 25.$$

随机变量分布改变，它的期望也可能改变。

例子 4.2.2. 考虑这样的映射 Var : 它将离散随机变量 f 映射为

$$\text{Var}(f) = \sum_{s \in S} (f(s) - \mathbb{E}(f))^2 \mathbb{P}(\{s\}).$$

这个映射称为随机变量的变差。比如, 对以上掷骰子试验的随机变量 f , 它的期望为:

$$\text{Var}(f) = \sum_{i=1}^6 (10i - \mathbb{E}(f))^2 \mathbb{P}(\{i\}).$$

如果投骰子的分布是均匀分布, 那么对任何 i , $\mathbb{P}(\{i\})$ 总是 $\frac{1}{6}$, 于是 $\mathbb{E}(f) = 35$, 因此:

$$\text{Var}(f) = \sum_{i=1}^6 \frac{(10i - 35)^2}{6} = \frac{875}{3} \approx 291.67$$

如果 1 朝上的概率是 50%, 其他数字朝上的概率都是 10%, 那么 $\mathbb{E}(f) = 25$, 因此:

$$\mathbb{E}(f) = (10 \cdot 1 - 25)^2 \cdot 50\% + \sum_{i=2}^6 \frac{(10 \cdot i - 25)^2}{10} = 325$$

随机变量分布改变, 它的变差也可能改变。

另一种表示随机变量分布的方法, 是**概率密度函数**。概率密度函数从随机变量的值出发描述它遵循的分布, 把 X 中元素值映射到“随机变量等于该值”这一事件的概率。比如, 投掷骰子的随机变量 f 的分布, 可以用以下的概率密度函数表示:

$$\begin{aligned} p_f : \{10, 20, 30, 40, 50, 60\} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(\{s \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \mid f(s) = x\}) \end{aligned}$$

概率分布不同, 随机变量 f 的概率密度函数也不同。例如, 投骰子的分布是均匀分布时, $p_f(10) = \frac{1}{6}$; 如果 1 朝上的概率是 50%, 那么 $p_f(10) = \frac{1}{2}$ 。

使用概率密度函数，也可以表示随机变量的期望和变差。对 X 中每个元素 x ，考虑使 $f(s) = x$ 的 s 。我们发现：

$$\begin{aligned}\sum_{f(s)=x} f(s)\mathbb{P}(\{s\}) &= \sum_{f(s)=x} x\mathbb{P}(\{s\}) \\ &= x \sum_{f(s)=x} \mathbb{P}(\{s\}) \\ &= x\mathbb{P}(\{s \in S \mid f(s) = x\}) \\ &= xp_f(x)\end{aligned}$$

因此，随机变量 f 的期望

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{s \in S} f(s)\mathbb{P}(\{s\}) = \sum_{x \in X} xp_f(x).$$

这是因为当 x 遍历 X 时，使 $f(s) = x$ 的 s 也遍历了 S ，没有重复也没有遗漏。

同理可以推出，随机变量 f 的变差可以写成：

$$\text{Var}(f) = \sum_{x \in X} (x - \mathbb{E}(f))^2 p_f(x).$$

如何理解随机变量的期望和变差呢？

首先来看期望。随机变量的期望可以看作一种对实验结果预期的描述。举例来说，考虑以上掷硬币的实验的随机变量 h 。假设硬币正面朝上的概率是 p ，那么 h 的期望是：

$$\mathbb{E}(h) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

于是，期望越大，表示 p 越大，说明掷硬币越可能正面朝上；反之说明掷硬币更可能反面朝上。又比如，考虑以上掷骰子的实验的随机变量 f 。假设各面朝上的概率分别是 p_1, p_2, \dots, p_6 ，那么 f 的期望是：

$$\mathbb{E}(h) = 10p_1 + 20p_2 + \dots + 60p_6.$$

如果 p_1 接近于 1, 其它概率接近 0, 那么 $E(h)$ 接近于 10, 即预期收益和 1 点向上的收益相近。如果 p_1 接近于 5, 其它概率接近 0, 那么 $E(h)$ 接近于 50, 即预期收益和 5 点向上的收益相近。

一般来说, 随机变量的期望是一种方便的描述预期结果的方法。概率越大的终态, 对期望的影响越大, 反之亦然。

再来看变差的作用。在投骰子的例子里, 考虑以下两种概率分布:

1. $p_1 = p_6 = 40\%$, $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 5\%$ 。
2. $p_3 = p_4 = 40\%$, $p_1 = p_2 = p_5 = p_6 = 5\%$ 。

两种情况下, 随机变量的期望相同, 都是 35, 但显然这两种分布有很大区别。而变差可以描述这两种分布的区别。计算两种情况的变差, 分别得到 525 和 85。可以观察到, 期望相同的情况下, 分布的变差越大, 结果远离期望值的概率越大, 变差越小, 结果远离期望值的概率越小。通过期望和变差, 我们可以对概率分布有粗略的了解。

思考 4.2.1.

1. 概率映射和随机变量有什么不同?
2. 比较随机变量的期望和样本数据的平均数。它们有什么相似之处? 有什么不同?
3. 比较随机变量的变差和样本数据的方差。它们有什么相似之处? 有什么不同?
4. 随机变量的分布改变, 它的期望一定改变吗?
5. 随机变量的分布改变, 它的变差一定改变吗?
6. 随机变量的期望和变差的不同写法有哪些要注意的地方? 你觉得每种写法好在哪里?

习题 4.2.1.

1. 小李投掷一枚 1 元硬币, 约定正面向上则小王给小李 10 元钱, 否则小王给小李 1 元钱。
 - 1.1. 假设硬币正面向上的概率是 47%, 试将小王给小李的钱数用相关

的随机变量表示。

1.2. 该随机变量的分布是什么分布？

1.3. 写出该随机变量的概率密度函数。

1.4. 写出该随机变量的期望和变差。

2. 投掷一枚骰子，假设 1 点向上和 5 点向上的概率分别是 40%，其余点数向上的概率是 5%，如果以点数的 3 倍为随机变量，求它的期望和变差。

3. X 是 \mathbb{Q} 的子集。证明 S 上的 X -随机变量 f 的变差也可以写成：

$$\text{Var}(f) = \mathbb{E}(f^2) - \mathbb{E}(f)^2.$$

其中 f^2 表示把每个终态 s 映射到 $f(s)^2$ 的随机变量。

4.3 条件概率和独立事件

讨论随机事件，总要知道前提条件。只有明确了前提条件，才能讨论事件的概率。为了研究不同的前提条件对事件的影响，我们引入**条件概率**的概念。

仍以“明天杭州是否下雨”为例。我们讨论台风“凤凰”动向对下雨概率的影响，可以说：“如果台风靠近，那么下雨的概率有 90%”、“如果台风转向，那么不下雨的概率为 40%”。这里我们把台风靠近与否作为明天杭州下雨的前提条件。以上两句话可以记作：

$$\mathbb{P}(\{\text{下雨}\} | \{\text{台风靠近}\}) = 0.9, \quad \mathbb{P}(\{\text{不下雨}\} | \{\text{台风转向}\}) = 0.4$$

从中可以推出，如果台风靠近，那么不下雨的概率是 10%；如果台风转向，那么下雨的概率是 60%。我们可以把这些概率用表格的形式表示：

条件	下雨	不下雨
台风靠近	90%	10%
台风转向	60%	40%

可以看到，台风靠近与否，会影响明天杭州下雨的概率。如果把台风“凤凰”的动向视为一个实验，把“明天杭州是否下雨”视为另一个实验，我们也可以说，前一个实验影响了后一个实验的结果。

条件概率和概率之间的联系是怎样的呢？观察下图，可以发现，在假定事件 B 发生的条件下，发生事件 A 的条件概率，就是 A, B 同时发生的概率，除以事件 B 的概率。用公式表达出来，就是：

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

我们称 $\mathbb{P}(A|B)$ 为“ B 时 A 的概率”。要注意的是，这个公式没有考虑 $\mathbb{P}(B) = 0$ 的情况。如果 B 的概率是 0，那么讨论 B 发生时 A 有多大可能发生没有意义。这时候我们不定义条件概率 $\mathbb{P}(A|B)$ 。

从映射的角度来看，从事件 A 到 B 时 A 的概率形成这样一个映射：

$$A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$$

可以验证，这个映射也是一个概率映射，叫作关于 B 的条件概率映射。我们一般把这个映射记为 \mathbb{P}_B 或 $\mathbb{P}(\cdot|B)$ （其中的 \cdot 表示自变量的位置）。

再来看另一个例子：有面值为 5 角和 1 元的硬币各一枚。首先抛出 1 元硬币，再抛出 5 角硬币，把 1 元硬币抛掷结果看作 5 角硬币抛掷结果的前提条件。假设 1 元硬币正面朝上时，5 角硬币正面朝上的概率是 60%，反面朝上的概率是 40%；1 元硬币反面朝上时，5 角硬币正面朝上的概率是 60%，反面朝上的概率是 40%。可以用表格表示条件概率：

条件	5 角正面朝上	5 角反面朝上
1 元正面朝上	60%	40%
1 元反面朝上	60%	40%

可以看到, 1 元硬币抛掷结果, 不影响 5 角硬币各面朝上的概率。“抛掷 1 元硬币”这个实验的结果, 不影响“抛掷 5 角硬币”实验的结果。

如果两个实验的结果互不影响, 就说两者**相互独立**。一般来说, 当我们讨论实验中发生的事件时, 也说两个事件相互独立。

如果事件 A, B 相互独立, 那么 B 时 A 的概率应该和 A 的概率一样。也就是说,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

即:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

同样地,

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B).$$

多个事件之间也可能相互独立。给定 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 如果它们的交集的概率等于各自概率的乘积:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n),$$

就说它们相互独立。

习题 4.3.1.

1. 证明: $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A^c|B) = 1$ 。
2. 证明: 如果事件 A_1, A_2 互斥, 那么 $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$ 。
3. 证明: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$ 。
4. 证明全概率公式: 如果 B_1, B_2, \dots, B_k 两两互斥, 且并集为全集, 那

么 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \cdots + \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)$ 。

5. 证明: $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}$ 。

6. 证明反条件概率公式: 如果 B_1, B_2, \dots, B_k 两两互斥, 且并集为全集, 那么 $\forall i \in [1..k], \mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \cdots + \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}$ 。

7. 抛掷两枚硬币, 假设两次抛掷互不影响, 每枚硬币抛出正反的概率相同。定义 A 为事件“第一枚抛出正面”, B 为“第二枚抛出正面”, C 为“两枚硬币抛掷结果相同”。

7.1. 求 A, B, C 的概率。

7.2. 求 $A \cap B, A \cap C, B \cap C$ 的概率。

7.3. A, B 是否相互独立? B, C 是否相互独立? A, C 是否相互独立?
 A, B, C 是否相互独立?

4.4 大数定律

我们做这样一个复合实验: 取同一个骰子, 投掷 100 次, 每次为一次单一实验。记录每次朝上的点数作, 按其 10 倍给出收益, 作为结果。我们假定投掷结果是两两相互独立的事件, 即前面投掷的结果不影响后面投掷的结果, 反之亦然。我们还假定每次投掷的实验条件都是相同的, 忽略投掷姿势、高度等差别。在这样的假定下, 我们说, 这 100 次投掷是 100 次**独立重复实验**。

独立重复实验是寻找随机事件规律的常用手段。比如, 我们对投掷这枚骰子时各面朝上的概率一无所知, 只有一份 100 次独立重复的投掷实验的结果。这时, 如果要讨论下一次投掷的结果, 我们如何给出合理的预测呢?

对于这 100 次独立重复实验, 我们可以定义随机变量 f_1, f_2, \dots, f_{100} , 来表示每次实验的结果。由于我们假设这些随机变量相互独立, 而且遵循相同的分布, 我们说这 100 个随机变量是**独立同分布**的。

对于独立同分布的一组随机变量，我们有以下的定理：

定理 4.4.1. 大数定律 设一组随机变量 f_1, f_2, \dots, f_N 相互独立，且都遵循同一个分布，它们的期望同为实数 u ，那么 N 越大，它们的平均数：

$$\frac{1}{N} (f_1 + f_2 + \dots + f_N)$$

就几乎总会越来越接近 u 。

大数定律是长久以来人们观察得出的一系列结论的总称，表示事情重复发生的数量足够多的时候，就会呈现一定的规律。后来人们找到了合适的数学语言来描述这些定律，发现大数定律是一类数学定理。大数定律的证明较为复杂，这里我们不作证明，只给出其中一个结论。

运用大数定律，我们可以为独立重复实验的结果给出什么结论呢？

大数定律建立了沟通实验结果平均数和随机变量期望的桥梁。已知独立重复实验的结果，那么对结果求平均数，就能估计出随机变量的期望。而随机变量的期望，可以用来估计下一次实验的结果。

以上面投掷骰子的实验为例。设 100 次投掷实验的结果为 Y_1, Y_2, \dots, Y_{100} 。它们分别是 100 个独立同分布的随机变量 f_1, f_2, \dots, f_N 的值。设下一次投掷实验的收益用独立同分布的随机变量 f 表示。根据大数定律，平均数

$$\bar{Y}_{100} = \frac{1}{100} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100})$$

接近 f 的期望。因此，我们可以用 \bar{Y}_{100} 代表 f 的期望。比如，如果算得 $\bar{Y}_{100} = 34.4$ ，那么可以估计下一次投掷实验的预期收益是 34.4。

再来看掷硬币实验，它对应的随机变量 h 将正面朝上映射到 1，反面朝上映射到 0。已知正反面朝上的概率 $p_{\text{正}}$ 和 $p_{\text{反}}$ ，可以算得 h 的期望为：

$$\mathbb{E}(h) = 1 \cdot p_{\text{正}} + 0 \cdot p_{\text{反}} = p_{\text{正}}.$$

所以， h 的期望就是 $p_{\text{正}}$ 。因此，如果投掷 1000 次硬币，其中 447 次正面朝上，那么 h 的期望就接近于 $\frac{447}{1000} = 0.447$ 。于是我们可以估计 $p_{\text{正}} = 0.447$ 。再掷一次硬币，正面朝上的概率是 44.7%。

从掷硬币实验的例子，还可以得到估计某事件概率的方法。如果能够作独立重复实验来观察事件 A 是否发生，那么我们把 n 次独立重复实验中事件 A 的次数与试验次数 n 的比值称为该实验中 A 的频率，记为 q_A 。考虑把“事件 A 发生”映射到 1，把“ A 不发生”映射到 0 的示性随机变量 f_A ，那么频率 q_A 就是 n 个与 f_A 同分布的独立随机变量的平均数。根据大数定律， n 很大的时候， q_A 就接近 f_A 的期望，也就是 $\mathbb{P}(A)$ 。于是，通过记录多次实验中事件的频率，我们就可以估计事件发生的概率。

思考 4.4.1.

1. 投掷一枚骰子，如果朝上的点数为 i ，则将 $(2i - 7)^2$ 作为结果。如果某骰子 1 向上的概率为 50%，其余点数朝上概率为 10%；另一枚骰子 6 向上的概率为 50%，其余点数朝上概率为 10%。设第一枚骰子的结果为随机变量 g_1 ，第二枚为 g_2 ，这两个随机变量是否同分布？

2. 大数定律说明，独立重复实验次数足够多时，随机变量的期望可以用结果的平均数来估计。那么，独立重复实验次数足够多时，随机变量的方差能否用结果来估计呢？你有什么想法？

习题 4.4.1.

1. 将一枚硬币重复抛掷 200 次，其中 104 次正面向上。如何估计下一次抛掷时正面向上的概率？

2. 将一枚骰子重复抛掷 1000 次，统计每次正面朝上的点数为结果。统计发现有 169 次 1 点、142 次 2 点、182 次 3 点、163 次 4 点、170 次 5 点、174 次 6 点。

2.1. 试估计下一次抛掷时得到 5 点的概率是多少？

2.2. 试估计下一次抛掷时得到偶数点的概率是多少？

2.3. 试估计下一次抛掷时点数不超过 3 的概率是多少？

2.4. 试估计单次掷骰子结果的分布。

第五章 运动和优化

5.1 函数、图像和运动

5.2 极值原理

5.3 优化

第六章 数学和社会

6.1 随时代变化的数学

6.2 数学和科学

6.3 数学和现代化