

第六册

大青花鱼

目录

第一章 向量	5
1.1 点、向量和直线	5
1.2 角度与长度	9
1.3 直线的方程	14
1.4 圆的方程	19
第二章 同余	23
2.1 同余类	24
2.2 完全同余系和简化同余系	27
2.3 方余定理	30
第三章 用数据说话	33
3.1 样本和特征	33
3.2 描述和分析	33
3.3 数据的结构	33

第四章 运动和优化	35
4.1 函数、图像和运动	35
4.2 极值原理	35
4.3 优化	35
第五章 数学和社会	37
5.1 随时代变化的数学	37
5.2 数学和科学	37
5.3 数学和现代化	37

第一章 向量

第五册中，我们学习了用三角函数解三角形。三角函数是定量研究平面形的利器。不过，三角函数本身并不是简单的函数。我们目前只能通过查表的方式得到函数值。这让我们思考，能不能打造一种更方便定量研究的体系呢？

回顾我们对平面形的研究，我们从几条公理出发，得出点、直线、三角形、圆等形状之间的定性关系。公理体系的缺陷在于没有与数紧密结合。比如，“两点之间直线最短”，除了定性的“最短”，没有提供别的信息。我们需要一种根本上和数量结合的体系，来理解各种平面形状。

此外，公理体系中并没有强调运动的概念。我们说点运动形成了线，旋转形成角度和圆，但并没有相关的工具来描述具体的运动。我们需要一种根本上和运动结合的体系，来理解形状之间的关系。

1.1 点、向量和直线

学习有理数的时候，我们使用数轴上的点表示。每个点代表一个实数。两点重合，当且仅当它们代表同一个数。这种表示方法把数和直线上的点牢牢绑在一起。我们可以用数的关系表示直线上点的关系。数轴使我们可以定量理解直线。

至于平面中的点，我们用相互垂直的数轴定义了点的坐标。每个点代表一个有序数对。两个数按顺序排列，对应平面中一点。

能不能像数轴一样，用一个量代表平面中一点呢？数轴之所以能用一个数代表一个点，是因为直线只有两个方向，使用正负号就可以代表方向。平面中不止两个方向，我们无法用正负来表示方向了。为此，我们引入一个新的量来代表平面中的点：**向量**。

自然数、有理数、实数都有自己的运算法则。向量作为代表点的量，需要满足怎样的运算法则呢？我们从运动出发，给出以下的法则：

1. 向量的加法就是平移：两个向量相加得到另一个向量。向量的加法满足结合律和交换律。
2. 零向量表示静止不变：存在这样一个向量，任何向量与它相加，仍然是自己。这个向量叫做零向量。零向量不定义方向，也可以说它与任何向量同向或反向。它对应的点称为**原点**。
3. 从每个非零向量，引出一根数轴：任何实数乘以向量，得到方向相同或相反的向量。这个运算称为**数乘运算**。数乘运算对应图形的放缩。
4. 放缩和四则运算相容：数轴上可以做数的运算。
5. 平移和放缩相容：先平移再放缩，和先放缩再平移，结果一样。

按照定义，**向量就是点**，所以可以用大写字母来标记。比如零向量就是原点，记为 O 。此外，**向量就是平移**。点 A 就是把 O 对应到 A 的平移，也是 O 平移的结果，记为 \overrightarrow{OA} 。反过来， \overrightarrow{BA} 就是把 B 对应到 A 的平移。

让我们用数学语言把这些法则更具体地写出来。我们把平面看作集合，记为 \mathbb{V} ，其中的元素称为向量或点，用粗体小写字母表示，以便和代表数的量区分：

1. 加法结合律： $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ 。
2. 加法交换律： $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 。
3. 存在零向量： $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ 。

4. 放缩和四则运算相容: $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$. $\forall s, t \in \mathbb{R}, (s + t) \cdot \mathbf{a} = (s \cdot \mathbf{a}) + (t \cdot \mathbf{a}), (s \cdot t) \cdot \mathbf{a} = s \cdot (t \cdot \mathbf{a})$.
5. 放缩和平移相容: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \forall t \in \mathbb{R}, t \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$.

从以上法则出发, 我们可以定义直线:

定义 1.1.1. 过原点的直线是非零向量放缩得到的集合。不过原点的直线是过原点的直线按一点平移得到的集合。

给定非零向量 $A = \mathbf{a}$, $\{t\mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$ 是一条过原点 O 和 A 的直线 OA 。给定向量 $B = \mathbf{b}$, $\{t\mathbf{a} + \mathbf{b} | t \in \mathbb{R}\}$ 是一条过 B 的直线; 而 $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} | t \in \mathbb{R}\}$ 就是直线 AB 。

给定非零向量 \mathbf{a} , 如果向量 \mathbf{b} 可以通过 \mathbf{a} 放缩得到, 或者说 $\mathbf{b} \in \{t\mathbf{a} | t \in \mathbb{R}\}$, 就称两者**共线**。

类比可以定义线段和射线: 给定非零向量 $A = \mathbf{a}$ 和向量 $B = \mathbf{b}$, $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} | t \in [0, 1]\}$ 是端点为 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的线段 AB , $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} | t \geq 0\}$ 是以 B 为端点, 经过 A 的射线。

这样定义的线段和射线, 也具备了数轴的性质。比如, 在线段 $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} | t \in [0, 1]\}$ 中, t 的不同值就对应了不同的点: $t = 0$ 对应点 \mathbf{b} , $t = 1$ 对应点 \mathbf{a} 。对一般的 $t \in (0, 1)$, $t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$ 对应的点 $P(t)$ 满足: $|AP(t)| = (1-t)|AB|$, $|P(t)B| = t|AB|$ 。也就是说, $P(t)$ 是线段 AB 上使得 $\frac{|AP(t)|}{|P(t)B|} = \frac{1-t}{t}$ 的点。 $\overrightarrow{AP(t)}, \overrightarrow{P(t)B}$ 都和 \overrightarrow{AB} 共线。

反过来, 设 $\frac{|AP(t)|}{|P(t)B|}$ 等于定值 $k > 0$, 对应的点 $P(t)$ 是什么点呢? 这个问题实际上是求方程:

$$\frac{1-t}{t} = k$$

的解。容易解出这个方程的唯一解: $t = \frac{1}{k+1}$ 。因此我们得到结论:

定理 1.1.1. 定比分点定理 线段 AB 上到两端距离之比 $\frac{|AP|}{|PB|}$ 为定值 k 的点 P 恰有一个, 称为它的 k 分点。

正数 k 越小, k 分点距离 A 越近, k 越大, k 分点离 A 越远; $k = 1$ 时, 我们就得到线段的中点。

以上我们讨论了 $k > 0$ 的情况, 显然, $k = 0$ 对应 $P = A$ 。对于负数 k , 有没有对应的点呢? 我们用平移的思想考虑这个问题, 从 A 到 $P(t)$ 经历的平移是 $\overrightarrow{AP(t)} = (1-t)\overrightarrow{AB}$, 从 $P(t)$ 到 B 经历的平移是 $\overrightarrow{P(t)B} = t\overrightarrow{AB}$ 。它们的系数之比就是 $\frac{1-t}{t}$ 。于是, 我们可以对一般的 k 定义定比分点: 如果 k 能使得方程

$$\frac{1-t}{t} = k$$

有唯一解, 那么我们就把对应的点 $P(t)$ 称为 AB 的 k 分点。

如果 $k < -1$, 那么 k 分点对应的 $t = \frac{1}{k+1} < 0$, 也就是说, $P(t)$ 在线段 BA 沿 B 的延长线上。如果 $-1 < k < 0$, 那么 k 分点对应的 $t = \frac{1}{k+1} > 1$, 也就是说, $P(t)$ 在线段 BA 沿 A 的延长线上。如果 $k = -1$, 以上方程无解, 这说明 -1 分点不存在。

共线的向量, 通过数轴, 可以方便地讨论相互的位置关系。不共线的向量之间, 如何讨论位置关系呢? 为此, 我们要引入**平面的根本性质**:

1. 给定任何非零向量 A , 平面中总有另一个向量 B , 不在直线 OA 上。我们说两者**不共线**。
2. 从不共线的向量 A, B 出发, 经过放缩、平移, 可以得到平面中任何向量。具体来说, 任何向量都可以表示成 $sA + tB$ 的形式, 集合 $\{sA + tB | s, t, \in \mathbb{R}\}$ 就是整个平面。这样的 A, B 称为平面的一组**基**或**基底**。

举例来说, 在直角坐标系中, 我们选择了原点重合、互相垂直的两条数轴, 以每条数轴上数 1 对应的点 (记为 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$) 出发, 通过放缩和平移, 就得到平面所有的点。平面中任一点可以写成 $x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, 其中 x, y 就是点的坐标。直角坐标系其实是一种用向量描述平面的方法。 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 就是一组基。

思考 1.1.1.

1. 设平面上有两点 A, B , 以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $AOBC$ 。向量

\overrightarrow{OA} 和 \overrightarrow{BC} 是什么关系?

2. 设平面上有两点 A, B , 三角形 OAB 中, 连接边 OA, OB 的中点 M, N . 向量 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{MN} 是什么关系?

习题 1.1.1.

1. 证明: 零向量只有一个, 任何向量乘 0 得到零向量。
2. 证明: 零向量乘任何数得到零向量。
3. 证明: 任何向量 \mathbf{a} 都有唯一的反向量 \mathbf{b} , 满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ 。
4. 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 不共线, 如果 $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 证明: $s = t = 0$ 。

直角坐标系 xOy 中, 设 $\mathbf{a} = 4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y$, $\mathbf{c} = -\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$ 。

5. 在坐标轴上标出 \mathbf{a}, \mathbf{b} 和 \mathbf{c} 。
6. 用 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表示 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 和点 $(3, 0)$ 。
7. 用 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表示它们的中点、3 分点、-0.5 分点、-3 分点。写出这些点的坐标和直线的方程。
8. 用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示顶点为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的三角形三边和重心。

1.2 角度与长度

根据平面的根本性质, 任何向量都可以用两个不共线向量表示。如何讨论它们的位置关系呢? 下面我们定义一种关系, 把长度、距离和角度统一起来。

给定平面基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, 我们给出这样一个二元映射 f :

$$\forall \mathbf{a} = x_A\mathbf{e}_1 + y_A\mathbf{e}_2, \mathbf{b} = x_B\mathbf{e}_1 + y_B\mathbf{e}_2, \in \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_Ax_B + y_Ay_B.$$

f 把两个向量对应到一个实数。它满足以下五个性质:

1. 向量的顺序不影响关系大小:

$$\begin{aligned} & f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) \\ &= x_A x_B + y_A y_B = x_B x_A + y_B y_A \\ &= f(x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2, x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

2. 零向量和任意向量关系为 0:

$$f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, \mathbf{0}) = f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2) = x_A \cdot 0 + y_A \cdot 0 = 0.$$

3. 非零向量与自身的关系总是正的: x_A, y_A 不全为零时,

$$f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2) = x_A^2 + y_A^2 > 0.$$

4. 和向量的放缩相容:

$$\begin{aligned} & f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, t(x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2)) \\ &= x_A t x_B + y_A t y_B = t(x_A x_B + y_A y_B) \\ &= t f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

5. 和向量的平移相容:

$$\begin{aligned} & f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, (x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) + (x_C \mathbf{e}_1 + y_C \mathbf{e}_2)) \\ &= x_A(x_B + x_C) + y_A(y_B + y_C) = (x_A x_B + y_A y_B) + (x_A x_C + y_A y_C) \\ &= f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) + f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_C \mathbf{e}_1 + y_C \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

满足以上五个条件的映射 f 称为平面向量的**内积**。从第四个性质可知, 向量与自身的内积总是正数。我们把这个数的平方根叫做向量的长度, 记为:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{V}, \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{f(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

两个向量之差的长度, 称为向量之间的距离。

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}, \quad \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{f(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})}.$$

如果基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是直角坐标系的基, 那么

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{a} &= x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y, \\ \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{x_A^2 + y_A^2}, \\ \forall \mathbf{a} &= x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{b} = x_B \mathbf{e}_x + y_B \mathbf{e}_y, \\ \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.\end{aligned}$$

给定向量 $A = \mathbf{a}$ 、 $B = \mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|$ 就是 $|OA|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ 就是 $|AB|$ 。也就是说, 我们这样定义的映射 f , 分别与直观经验中长度和距离的概念相符合。

那么, f 本身有什么含义呢? 我们来计算 $\frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2}$ 。

$$\begin{aligned}\frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2} &= \frac{x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2}{2} \\ &= x_A x_B + y_A y_B = f(\mathbf{a}, \mathbf{b}).\end{aligned}$$

另一方面, 余弦定理告诉我们, $\frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2} = |OA||OB| \cos \angle AOB$ 。也就是说, $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle AOB$ 。内积 f 的本质是向量夹角的余弦与向量长度的乘积。通过内积, 我们把角度和长度统一起来了。

向量夹角的余弦值总在 -1 和 1 之间, 所以向量的内积的绝对值不大于向量长度的乘积:

$$|x_A x_B + y_A y_B| \leq \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}.$$

可以验证这个关系对任意 x_A, y_A, x_B, y_B 成立。从这个关系出发, 可以得到:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \leq \sqrt{x_A^2 + y_A^2} + \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = |OA| + |OB|.$$

这符合直观经验中“三角形两边之和大于第三边”或“两点之间线段距离最短”的性质。

内积为 0, 就表示向量夹角的余弦为 0, 即两个向量垂直。比如令 $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$, 那么 $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0$ 。在平面上画出对应的点 A, B , 可以验证 $\angle AOB = 90^\circ$ 。

内积映射并不是唯一的，我们看另一个映射 f_2 ：

$$\forall x_A, y_A, x_B, y_B \in \mathbb{R}, \quad f(x_A \mathbf{e}_1 + y_A \mathbf{e}_2, x_B \mathbf{e}_1 + y_B \mathbf{e}_2) = 2x_A x_B + y_A y_B.$$

可以验证， f_2 也满足 f 满足的五个性质。从 f_2 出发，我们也可以定义距离和长度：

$$\forall \mathbf{a} = x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y, \quad \|\mathbf{a}\|_2 = f_2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 2x_A^2 + y_A^2.$$

这样定义的距离和长度和我们直观经验中有些不一样，不过，我们可以验证，这样定义的距离也满足“两点之间线段最短”的性质。

$$|2x_A x_B + y_A y_B| \leq \sqrt{2x_A^2 + y_A^2} \sqrt{2x_B^2 + y_B^2}.$$

因此， f_2 也是内积。

我们把符合直观经验的内积 f 称为**经典内积**，一般称内积都默认指经典内积；把对应的长度称为向量的**模**。我们把 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的(经典)内积记为 $(\mathbf{a} | \mathbf{b})$ ，不至于混淆时，也常称为**点积**，记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ；把它们的模记为 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\mathbf{b}|$ 。

既然有余弦，自然有正弦。记 $\alpha = \angle AOB$ ，则 $(\mathbf{a} | \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$ ，于是，

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} | \mathbf{b})^2$$

记 $\mathbf{a} = x_A \mathbf{e}_x + y_A \mathbf{e}_y$ ， $\mathbf{b} = x_B \mathbf{e}_x + y_B \mathbf{e}_y$ ，则

$$\begin{aligned} (x_A^2 + y_A^2)(x_B^2 + y_B^2) \sin^2 \alpha &= (x_A^2 + y_A^2)(x_B^2 + y_B^2) - (x_A x_B + y_A y_B)^2 \\ &= (x_A y_B - x_B y_A)^2 \\ |\sin \alpha| &= \frac{|x_A y_B - x_B y_A|}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}} \end{aligned}$$

我们得出了夹角 $\angle AOB$ 正弦的绝对值。

观察向量夹角的正弦和余弦，我们注意到，它们的表达式与和差角公式有相似之处。 $x_A x_B + y_A y_B$ 与差角余弦公式形式相似， $x_A y_B - x_B y_A$ 与差角正弦公式形式相似。

让我们在直角坐标系中找几个例子，看看直观结果。设有点 $A(1, 0)$ 、 $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。不难得出 $\angle AOB = 60^\circ$ 。我们用以上公式计算 $\angle AOB$ 的正弦和余弦：

$$\frac{x_A y_B - x_B y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = \frac{1}{2}.$$

把 P 的坐标换成 $(0, 1)$ 、 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 等，我们发现，通过以上两个公式得到的值，就是 $\angle AOB$ 的正弦、余弦值。记 $\angle AOB = \alpha$ ，那么：

$$\sin \alpha = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}.$$

我们是通过面积定义正弦的。比如，邻边为 OA 和 OB 的平行四边形，面积是 $|OA||OB| \sin \angle AOB$ 。对照上面正弦的表达式，可以发现这个面积等于 $x_A y_B - x_B y_A$ 。于是，我们把对应的映射

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto x_A y_B - x_B y_A.$$

称为向量 A, B 的**面积**，记为 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 。

向量的面积和内积，分别对应正弦和余弦。两向量面积为零，当且仅当它们共线；两向量内积为零，当且仅当它们互相垂直。

习题 1.2.1.

1. 直角坐标系中，已知两向量，计算它们的内积和面积，讨论它们的关系。

1.1. $A(0, 2), B(1, 1)$

1.2. $A(2, 1), B(0.5, -1)$

1.3. $A(1.6, 0.2), B(-0.9, -3)$

1.4. $A(1, -0.28), B(-0.45, -0.6)$

2. 直角坐标系中，已知向量 B 的模为 2，根据以下条件，求向量 A, B 的内积：

2.1 $A = (-4, 2), \angle AOB = 60^\circ$

2.2 $A = (0, 5), \angle AOB = 135^\circ$

$$2.3.A = (3, -2.5), \angle AOB = 45^\circ$$

3. 直角坐标系中, 已知点 $P(2, 1)$, 求使得 P, Q 内积为 4 的点 Q 。

4. 直角坐标系中, 已知点 $P(2, 1)$, 求使得 P, Q 面积为 4 的点 Q 。

思考 1.2.1. 如果直角坐标系 xOy 的 x 轴和 y 轴沿逆时针排布, 而角度的正方向为顺时针方向, 角 α 的正弦和余弦是否还能写成

$$\sin \alpha = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \sqrt{x_B^2 + y_B^2}}$$

的形式?

1.3 直线的方程

直角坐标系中, 任意给定二元一次方程 $ax + by + c = 0$ (a, b 不全为 0), 它的解集都对应平面中一条直线。我们把这个二元一次方程称为直线的一般式方程。比如, $3x - 2y + 1 = 0$ 就是一条直线的一般式方程。不过, 从这个式子, 我们不容易看出相应的直线有什么性质。

下面我们用向量的语言, 给出有不同直观性质的直线的方程。

点向式: 已知直线过点 $A(x_A, y_A) = \mathbf{a}$, 方向为 $\mathbf{b} = (x_B, y_B)$ 。考虑直线上一点 $P(x, y) = \mathbf{p}$, $\mathbf{p} - \mathbf{a}$ 和 \mathbf{b} 共线, 所以面积为 0。于是 (x, y) 满足方程:

$$(x - x_A)y_B - (y - y_A)x_B = 0.$$

我们把这个二元一次方程称为直线的点向式方程。已知直线上一点和直线的方向, 可以写出直线的点向式方程。比如, 过 $(1, 2)$, 方向为 $(-1, 1)$ 的直线方程为: $1 \cdot (x - 1) - (-1) \cdot (y - 2) = 0$, 即 $x + y = 3$ 。

两点式: 已知直线过点 $A(x_A, y_A) = \mathbf{a}$ 和点 $B(x_B, y_B) = \mathbf{b}$ 。考虑直线上一点 $P(x, y) = \mathbf{p}$, 则 $\mathbf{p} - \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 共线。于是 (x, y) 满足方程:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0.$$

我们把以上方程称为直线的两点式方程。已知直线上不同的两点，可以写出直线的两点式方程。比如，过 $(1, 2)$ 、 $(-2, 1)$ 的直线方程为： $(x-1)(1-2) - (y-2)(-2-1) = 0$ ，即 $-x + 3y = 5$ 。

点斜式：已知直线过点 $A(x_A, y_A) = \mathbf{a}$ ，斜率为 k 。考虑直线上一点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ 。直线斜率为 k ，说明直线是某个一次函数 $x \mapsto kx + b$ 的图像。对比可知，直线方向和 $(1, k)$ 共线。我们用 $(1, k)$ 作为直线方向，于是直线方程为：

$$y - y_A = k(x - x_A).$$

我们把这个方程称为直线的点斜式方程。已知直线上一点和直线的斜率，可以写出直线的点斜式方程。比如，过 $(1, 2)$ ，斜率为 2 的直线方程为： $y - 2 = 2(x - 1)$ ，即 $y - 2x = 0$ 。

点法式：已知直线过点 $A(x_A, y_A) = \mathbf{a}$ ，并且和 $\mathbf{b} = (x_B, y_B)$ 垂直。考虑直线上一点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ ， $\mathbf{p} - \mathbf{a}$ 和 \mathbf{b} 垂直，所以内积为 0。于是 (x, y) 满足方程：

$$(x - x_A)x_B + (y - y_A)y_B = 0.$$

我们把 \mathbf{b} 称为直线的**法向量**，把以上方程称为直线的点法式方程。已知直线上一点和法向量，可以写出直线的点法式方程。比如，过 $(1, 2)$ ，法向量为 $(3, -1)$ 的直线方程为： $(x - 1) \cdot 3 + (y - 2) \cdot (-1) = 0$ ，即 $3x - y = 1$ 。

等高式：已知点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ 与 $B(x_B, y_B) = \mathbf{b}$ 的面积为 S ，则 (x, y) 满足方程：

$$xy_B - yx_B = S.$$

我们把这个二元一次方程称为直线的等高式方程。从直观上看，它表示所有以 OB 为底，面积相等（从而高相等）的三角形 OBP 的顶点 P 的集合，即一条平行于 OB 的直线。比如，与 $(1, -1)$ 的面积为 3 的点构成直线，方程为： $-x + y = 3$ 。

$S = 0$ 时，我们就得到直线 OB 。也就是说，已知 B 的坐标 (x_B, y_B) ，直线 OB 的方程是 $xy_B - yx_B = 0$ 。

等垂式: 已知点 $P(x, y) = \mathbf{p}$ 与 $B(x_B, y_B) = \mathbf{b}$ 的内积为 T , 则 (x, y) 满足方程:

$$xx_B + yy_B = T.$$

我们把这个二元一次方程称为直线的等垂式方程。

从直观上看, 作 P 到直线 OB 的垂线, 垂足为 H 。设 $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{OB}$,

$$T = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

$HP \perp OB$, 所以 $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 。于是 $T = t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = t|OB|^2$, 算得 $t = \frac{T}{|OB|^2}$, $\overrightarrow{OH} = \frac{T}{|OB|^2}\overrightarrow{OB}$ 。这说明 H 是定点。

反之, 过 H 点作垂直 OB 的直线。直线上任一点到 OB 的垂足是 H , 因此 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = T$ 。

这说明直线 $xx_B + yy_B = T$ 是一条垂直于 OB 的直线, 是所有到 OB 的垂足为定点 H 的点 P 的集合。比如, 与点 $B(1, -1)$ 的内积为 3 的点构成直线, 方程为: $x - y = 3$ 。它垂直于直线 $OB: x + y = 0$ 。

使用等高式和等垂式, 我们可以讨论直线平行和垂直的关系。我们来看两个典型问题:

例子 1.3.1. 求经过点 $P(x_P, y_P)$ 并平行于直线 $l: ax + by + c = 0$ 的直线 (如果存在) 的方程。

解答. 首先把直线方程转为等高式: $ax - (-b)y = -c$, 它表示平行于向量 $(a, -b)$, 与它的面积为 $-c$ 的直线。如果 P 在直线上, 那么 P 满足 $ax_P - (-b)y_P = -c$ 。这时符合要求的平行线不存在。如果 P 不在直线上, 我们可以构造直线 $l': ax - (-b)y = ax_P - (-b)y_P$ 。 l' 过 P , 且与向量 $(a, -b)$ 平行, 因此平行于 l 。

另一方面, 如果有直线过点 P 并平行于 l , 那么它与向量 $(a, -b)$ 平行。设它的方程为 $ax - (-b)y = S$ 。由于 P 在直线 $ax - (-b)y = S$ 上, P 满

足 $ax_P - (-b)y_P = S$, 即平行线方程为 $ax - (-b)y = ax_P - (-b)y_P$ 。显然, $ax_P - (-b)y_P = -c$ 时, 两直线重合, 不符合平行线定义。

因此, $ax_P - (-b)y_P = -c$ (P 在直线上) 时无平行线; 其他情况下, 恰有一条平行线: $ax - (-b)y = ax_P - (-b)y_P$ 。化简后的方程为: $ax + by = ax_P + y_P$ 。

另解: 首先把直线方程转为等垂式: $ax + by = -c$, 它表示与点 $M(a, b)$ 的内积为 $-c$ 的直线, 也就是垂直于 OM , 垂足 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \frac{-c}{|OM|^2} \overrightarrow{OM}$ 的直线。如果有直线过点 P 并平行于 l , 那么它也和 OM 垂直。把它写成等垂式: $ax + by = T$ 。由于 P 在 l' 上, 所以 $T = ax_P + y_P$ 。于是 l' 的方程为 $ax + by = ax_P + y_P$ 。显然, $ax_P + by_P = -c$ 时, 两直线重合, 不符合平行线定义。

另一方面, 考察 $l': ax + by = ax_P + y_P$, 它垂直于 OM , 所以与 l 平行或重合。容易验证, 两线重合当且仅当 $ax_P + by_P = -c$ 。

因此, $ax_P + by_P = -c$ (P 在直线上) 时无平行线; 其他情况下, 恰有一条平行线: $ax + by = ax_P + y_P$ 。

我们发现, 与 $ax + by + c = 0$ 平行的直线, 总可以写成 $ax + by + c' = 0$ 的形式。我们把 $ax + by$ 称为直线的头。头相同的直线相互平行或重合。

例子 1.3.2. 求经过点 $P(x_P, y_P)$ 并垂直于直线 $l: ax + by + c = 0$ 的直线 (如果存在) 的方程。

解答. 把直线方程写成点法式: $(x - x_Q)a + (y - y_Q)b = 0$, 其中 $Q(x_Q, y_Q)$ 是 l 上一点。这说明 (a, b) 是 l 的法向量。因此, 以 (a, b) 为方向的直线: $(x - x_P)b - (y - y_P)a = 0$ 就是过 P 且垂直于 l 的直线。

我们发现, 与 $ax + by + c = 0$ 垂直的直线, 总可以写成 $bx - ay + c' = 0$ 的形式。

例子 1.3.3. 给定一点 $P(x_P, y_P)$ 和一条直线 $l: ax + by + c = 0$, 如何计算 P 到直线 l 的距离 d ?

解答. 首先把直线方程转为等高式: $ax - (-b)y = -c$, 它表示与点 $M(a, -b)$ 的面积为 $-c$ 的直线。 P 与点 M 的面积为 $ax_P - (-b)y_P$ 。 如果 P 到 l 的垂足为 Q , P 到 OM 的垂足为 H , 那么 P 到 l 的距离 $d = |PQ|$ 是 $|HQ|$ 与 $|PH|$ 的差。 平行四边形的面积等于底乘以高, 所以, 考虑 P, Q 分别与 O, M 生成的平行四边形, 它们的面积之差等于高的差乘以底。 而两者对应的高分别是 $|HQ|$ 与 $|PH|$ 。 也就是说, P 到 l 的距离 d 是两个面积的差除以底的商:

$$d = \frac{|-c - (ax_P - (-b)y_P)|}{\sqrt{a^2 + (-b)^2}} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

另解: 首先把直线方程转为等垂式: $ax + by = -c$, 它表示与点 $M(a, b)$ 的内积为 $-c$ 的直线, 也就是垂直于 OM , 垂足 Q 满足 $\overrightarrow{OQ} = \frac{-c}{|OM|^2} \overrightarrow{OM}$ 的直线。 作 P 到 OM 的垂线 l' , 记垂足为 H , 则 P 到 l 的距离就是 $|HQ|$, 也就是 $|OQ|$ 和 $|OH|$ 的差。 l 与 l' 垂直于同一条直线 OM , 因此平行或重合。 于是 l' 的等垂式为 $ax + by = ax_P + by_P$, $\overrightarrow{OH} = \frac{T}{|OM|^2} \overrightarrow{OM} = \frac{ax_P + by_P}{|OM|^2} \overrightarrow{OM}$ 。 于是 P 到 l 的距离为:

$$d = |\overrightarrow{HQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OH}| = \frac{|-c - (ax_P + by_P)|}{|OM|^2} |OM| = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

除了用二元一次方程表示直线, 我们还可以用别的方式表示直线。 前面我们用集合 $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$ 表示经过 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的直线。 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的坐标分别是 $(x_A, y_A), (x_B, y_B)$, 则直线上 t 对应的点的坐标就是

$$(tx_A + (1-t)x_B, ty_A + (1-t)y_B)$$

AB 的 k 分点坐标是:

$$\left(\frac{x_A + kx_B}{k+1}, \frac{y_A + ky_B}{k+1} \right)$$

我们把这样表示直线上的点的方法称为直线的**参数表示**。

习题 1.3.1.

1. 根据已知条件，写出直线的方程：

1.1. 过点 $(1, -3)$ ，与 $(0.5, 2.1)$ 共线。

1.2. 过点 $(2, -0.8)$ 、 $(-2, 2.5)$ 。

1.3. 过点 $(-1, 1)$ ，与 $(-0.5, 1.5)$ 垂直。

1.4. 过点 $(-2.25, -6)$ ，斜率为 -1.7 。

1.5. 与 $(4.5, -5)$ 内积为 -1.2 。

1.6. 与 $(5.6, 1)$ 面积为 -8 。

1.7. 与直线 $2x - y + 4$ 平行，且过点 $(1, 1)$ 。

2. 求平行直线 $x - 3y + 1 = 0$ 和 $x - 3y - 4 = 0$ 的距离。

3. 两直线的方程分别为 $y = k_1x + b_1$ 、 $y = k_2x + b_2$ ，证明：两直线垂直，当且仅当 $k_1k_2 + 1 = 0$ 。

思考 1.3.1.

1. 直线 l 按向量 P 平移得到直线 l' ， l 和 l' 之间有什么关系？

2. 一次函数的线性部分与直线方程的头有什么关系？

1.4 圆的方程

圆是到一点距离相同的点的集合。用向量的语言，以 \mathbf{w} 为圆心、以正数 r 为半径的圆，是关于 \mathbf{p} 的方程：

$$|\mathbf{p} - \mathbf{w}| = r$$

的解集。直角坐标系中，设 \mathbf{p} 的坐标为 (x, y) ， \mathbf{w} 的坐标为 (x_W, y_W) ，则以上方程变为：

$$\sqrt{(x - x_W)^2 + (y - y_W)^2} = r$$

根号中的值总大于等于零，所以这个方程的解集就是方程

$$(x - x_W)^2 + (y - y_W)^2 = r^2$$

的解集。我们把这个方程称为圆的方程，它的解集就是以 (x_W, y_W) 为圆心、 r 为半径的圆。比如，

$$x^2 + y^2 = 4$$

表示圆心为 $(0, 0)$ 、半径为 2 的圆。

例子 1.4.1. 过点 $P(1, 2)$ 的直线与圆 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 相切，求直线方程。

解答. 设直线 l 过点 P ，且与圆 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 相切，那么圆心 $W(-1, 1)$ 到 l 的距离平方为 3。将直线 l 写成点斜式： $y-2 = k(x-1)$ ，其中斜率 k 是待定的未知数。将它写成等垂式：

$$kx + (-1)y = k - 2.$$

可以算出， W 到它的距离为 $\frac{|-k-1-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$ 。于是可以列出方程：

$$\frac{(-k-1-k+2)^2}{k^2+1} = 3.$$

方程两边乘以 k^2+1 ，并将所有项整理到等式左边，得到：

$$k^2 - 4k - 2 = 0.$$

这是一个一元二次方程。解得斜率 $k = 2 + \sqrt{6}$ 和 $k = 2 - \sqrt{6}$ ，分别对应方程： $y + (-2 + \sqrt{6})x - \sqrt{6} = 0$ 、 $y + (-2 - \sqrt{6})x + \sqrt{6} = 0$ 。经验证， W 到这两条直线的距离都是 $\sqrt{3}$ 。因此，过点 $P(1, 2)$ 且与圆 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3$ 相切的直线有两条，方程为： $y + (-2 + \sqrt{6})x - \sqrt{6} = 0$ 、 $y + (-2 - \sqrt{6})x + \sqrt{6} = 0$ 。

习题 1.4.1.

1. 写出以 $(-3, 2)$ 为圆心，半径为 5 的圆的方程。
2. 写出圆心为 $(-3, 2)$ ，过 $(1, 1.3)$ 的圆的方程。
3. 写出以 $(1, -1)$ 为圆心，过点 $(0, 4)$ 的圆的方程。
4. 直线过点 $(2, 5)$ ，且和点 $(0, 1)$ 的距离是 2.3，求直线的方程。
5. 直线 l 过点 $(4, 2)$ ，且和圆 $(x+1)^2 + (y-1.5)^2 = 4$ 相切。求直线 l 的方程和对应切点的坐标。

思考 1.4.1.

1. 给定实数 θ , 点 $(1 + 3\cos\theta, -2 + 3\sin\theta)$ 到 $(1, -2)$ 的距离是多少?
2. 如果点 $P(x_P, y_P)$ 到 $(1, -2)$ 的距离为 3, 是否总存在实数 θ , 使得 $x_P = 1 + 3\cos\theta$ 、 $y_P = -2 + 3\sin\theta$?

第二章 同余

例子 2.0.1. 7^{65} 的个位数是多少?

解答. 从 $7^0, 7^1, 7^2, 7^3 \dots$ 开始找规律. $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$. 7^4 和 7^0 的个位数都是 1, 7^5 和 7^1 的个位数都是 7. 我们可以总结出这样的规律: 个位数是 1 的, 乘以 7 得到 7; 个位数是 7 的, 乘以 7 得到 9; 个位数是 9 的, 乘以 7 得到 3; 个位数是 3 的, 乘以 7 得到 1。

也就是说, 如果把 $7^0, 7^1, 7^2, 7^3 \dots$ 的个位数写成一列, 应该是这个样子的:

$$1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, \dots$$

用归纳法不难证明, 这列数字以 4 为周期不断重复。所以, 要求 7^{65} 的个位数, 可以看 65 在相关的周期里处于哪个位置。换句话说, 只要看 65 除以 4 的余数。 $65 = 16 \times 4 + 1$, 所以 7^{65} 的个位数和 7^1 的个位数一样, 都是 7。

从这个例子可以看出, 两个整数除以同一个数得到相同的余数, 是一个重要的性质。我们把这种性质称为**同余**。比如, 65 和 1 除以 4 余数都是 1, 我们就说 65 和 1 模 4 同余。 7^{65} 和 7^1 除以 10 余数都是 7, 我们说 7^{65} 和 7^1 模 10 同余, 记为:

$$7^{65} \equiv_{10} 7^1$$

2.1 同余类

整数除以 3, 余数有 0, 1, 2 三种可能。整数除以 10, 余数有 0, 1, \dots , 9 十种可能。一般来说, 给定正整数 n , 整数除以 n , 余数有 0, 1, \dots , $n-1$ 这 n 种可能。因此, 按除以 n 的余数, 可以把整数集分成 n 类。同属一类的数, 模 n 同余, 所以这 n 类数叫作模 n **同余类**。所有模 n 同余类的集合, 叫作模 n **同余系**。

每个模 n 同余类, 可以写成 $\{kn + a \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 的形式。也就是说, 可以看成某个数 a 不断加上或减去 n 得到的所有数的集合。这个集合是无穷的。不同的模 n 同余类, 交集是空集, 并集是 \mathbb{Z} 。也就是说, 它们是 \mathbb{Z} 的分划。

为了方便, 我们从每个模 n 同余类中选一个元素, 代表这个同余类。一般来说, 可以选 0, 1, \dots , $n-1$ 个数。我们给它们加个上划线, 以和作为整数的 0, 1, \dots , $n-1$ 区分:

$$\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$$

如果要强调 n , 可以把 n 加在右上角:

$$\overline{0}^n, \overline{1}^n, \dots, \overline{n-1}^n$$

给定整数 m , 我们可以把它对应到某个模 n 同余类, 称为对 n **取模**。比如 $n = 5$ 时, $24 \equiv_5 4$, 我们把 24 对应到 $\overline{4}^5$, 或者说, 24 对 5 取模, 得 $\overline{4}^5$ 。

同余关系和相等关系很像, 它们是否有一样的性质呢? 我们可以验证, 同余关系满足以下的性质:

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, \quad a \equiv_n a$;
2. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, 如果 $a \equiv_n b$, 那么 $b \equiv_n a$;
3. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, 如果 $a \equiv_n b$, $b \equiv_n c$, 那么 $a \equiv_n c$ 。

满足以上三个性质的二元关系（两个元素之间的关系）称为**等价关系**。数与数的等于关系是等价关系，数与数的同余关系也是等价关系。因此，我们可以把同余关系用作同余类之间的等于关系。

整数之间有四则运算，模 n 同余类之间，也可以进行运算。以 $n = 5$ 为例子。我们分别计算 24 和 37 除以 5 的余数，以及它们的和 61 除以 5 的余数：

$$24 \equiv_5 4, 37 \equiv_5 2, 61 \equiv_5 1$$

可以发现： $4 + 2 \equiv_5 1$ ，也就是说，取模和加法可以交换顺序。可以验证，两个同余类中各取一个元素相加，和所在的同余类，就是两者模 n 余数的和所在的同余类。用集合的语言，可以写成：

$$\{kn + a + ln + b \mid k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}\} = \{kn + a + b \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

所以，可以定义同余类的加法：

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

其中的 $\overline{a + b}$ 指的是 $a + b$ 所在的同余类。为了方便，我们用 $a + b$ 作为代表。

可以验证，同余类的加法也满足结合律和交换律。这里我们只证明同余类的加法满足结合律，交换律的证明留做习题：

证明： 由上可知 $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ ，所以

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b} + \bar{c} = \overline{a + b + c}.$$

类似可得：

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \overline{b + c} = \overline{a + b + c}.$$

于是

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b + c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

□

类似可以定义同余类的减法和乘法：

$$\bar{a} - \bar{b} = \overline{a - b}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

可以验证，同余类的减法性质和整数减法一样，同余类的乘法也满足结合律、交换律和分配律。

能否定义同余类的除法呢？我们来看一个例子。设 $n = 6$ ，考虑等式 $12 \div 4 = 3$ 。12、4 和 3 对 6 取模，得到 0、4 和 3。考虑等式 $60 \div 10 = 6$ 。60、10 和 6 对 6 取模，得到 0、4 和 0。也就是说，两个模 6 同余类中各取元素相除，商所在的同余类不是唯一的。所以，我们没法定义模 6 同余类的除法。

再看另一个例子。设 $n = 5$ ，考虑以下的“乘法表”：

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

可以看出，任何模 5 同余类乘以 $\bar{0}$ 都得到 $\bar{0}$ ，非 $\bar{0}$ 同余类乘以不同的同余类，结果也不同。这说明每个同余类除以另一个同余类（非 $\bar{0}$ ），都必然有唯一的结果。这样我们就定义了模 5 同余系里的除法。

习题 2.1.1.

动手做一做：

1. 证明同余关系满足等价关系所要求的三个性质。
2. 证明同余类的加法满足交换律。
3. 证明同余类的减法是加法的逆运算。
4. 证明同余类的乘法满足结合律和交换律。
5. 证明同余类的乘法满足分配律。
6. 证明：如果某模 n 同余类的代表与 n 的最大公因数是 d ，则其中所有元素与 n 的最大公因数都是 d 。
7. 分别画出模 3 同余系和模 4 同余系的“乘法表”。它们和模 5 同余系的“乘法表”哪些地方相同，哪些地方不同？

2.2 完全同余系和简化同余系

上一节我们提到模 6 同余系无法定义除法，而模 5 同余系可以定义除法。两者有什么不同呢？我们画出模 6 同余系的“乘法表”：

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

可以看到，这个“乘法表”和模 5 同余系的大有不同。同一行或同一列常有重复。这说明不同的同余类乘同一个同余类得到同一个结果。比如

$$\bar{2} \times \bar{4} = \bar{5} \times \bar{4} = \bar{2}.$$

这就使我们没法定义除法。

如果我们把上面的等式稍作变化，会得到：

$$\bar{0} = (\bar{5} - \bar{2}) \times \bar{4} = \bar{3} \times \bar{4}.$$

也就是说，有非 $\bar{0}$ 的同余类相乘等于 $\bar{0}$ 。同余类乘法的这个性质和整数乘法完全不同。我们把这种非 $\bar{0}$ 同余类叫做**零因子**。整数中没有零因子：非 0 的整数相乘必然不是 0。而只要有这种零因子存在，同余系中就会发生“不同的同余类乘同一个同余类得到同一个结果”的现象，从而无法定义除法。

有什么办法在模 6 同余系中定义除法呢？我们可以选一部分同余类，在其中定义除法。如果同余类 \bar{a} 的代表 a 与 6 不互素，设最大公因数是 b ，那么

$$\frac{a}{b} \times 6 = a \times \frac{6}{b}$$

于是有 $\bar{a} \times \frac{\bar{6}}{b} = \bar{0}$ ，出现零因子。因此，为了避免零因子问题，我们只选和 6 互素的数所在的同余类，也就是 $\bar{1}$ 和 $\bar{5}$ 。我们发现 $\{\bar{1}, \bar{5}\}$ 中可以定义乘法和除法（但不再满足加减法）。

\times	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$

我们把模 6 同余系称为模 6 的**完全同余系**，把 $\{\bar{1}, \bar{5}\}$ 称为模 6 的**简化同余系**。

一般来说，我们把模 n 同余系称为模 n 的**完全同余系**，在其中可以定义加减法和乘法；把其中所有和 n 互素的同余类的集合称为模 n 的**简化同余系**¹。

定理 2.2.1. 给定正整数 n ，在模 n 的简化同余系中可以定义乘法和除法。

¹通常不把 $\bar{0}$ 计入简化剩余系，以省去讨论除以 $\bar{0}$ 的问题。

证明： 模 n 同余类的乘法已经定义好了。我们只需要说明：简化同余系中的同余类相乘，仍然在简化同余系中。这是因为与 n 互素的整数相乘，结果还是与 n 互素。

接下来定义除法。除法是乘法的逆运算。比照数的除法： $a \div b = a \times \frac{1}{b}$ 。因此，只要将简化同余系中每个同余类都对应一个“倒数”，就可以用“乘以倒数”来定义除法。

我们把模 n 简化同余系中的同余类用小于 n 且与 n 互素的正整数来代表，记为

$$1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{\varphi(n)} = n - 1.$$

其中 $\varphi(n)$ 是模 n 简化同余系的元素个数。考虑任一元素 b_i ，我们接下来会证明： $b_i b_1, b_i b_2, \cdots, b_i b_{\varphi(n)}$ 模 n 两两不同余。于是，它们中恰有一个模 n 余 1。设 $b_i b_j \equiv_n 1$ ，那么 b_j 就是 b_i 的“倒数”。

最后用反证法证明命题： $b_i b_1, b_i b_2, \cdots, b_i b_{\varphi(n)}$ 模 n 两两不同余。

反设命题不成立，即存在 b_j, b_k 使得 $b_i b_j \equiv_n b_i b_k$ 。这说明 $n | b_i(b_j - b_k)$ 。由于 b_i 和 n 互素，根据倍和析因定理，存在整数 p, q ，使得：

$$b_i p + n q = 1.$$

两边乘以 $b_j - b_k$ ，就得到：

$$b_i(b_j - b_k)p + nq(b_j - b_k) = b_j - b_k.$$

等式左边是 n 的倍数，因此 b_j 和 b_k 模 n 同余，这与它们的定义矛盾。

因此命题的否定为假，原命题为真。 \square

简化同余系的除法和整数不同，任何同余类都能整除另一个同余类，不需要余数、带余除法的概念。每个同余类都有自己的“倒数”，比如在模 6 简化同余系中， $\bar{5} \times \bar{5} = \bar{1}$ 。我们把同余类的“倒数”称为它的（乘法）逆。

习题 2.2.1.

1. 写出模 12 的简化同余系。写出 $\bar{7}^{12}$ 的逆。
2. 比较模 12 简化同余系中的乘除法和模 4 完全同余系中的加减法，

它们有何异同?

3. 写出模 10 的简化同余系。写出 $\bar{7}^{10}$ 的逆。

4. 比较模 10 简化同余系中的乘除法和模 4 完全同余系中的加减法, 它们有何异同?

5. 给定素数 n , 写出模 n 简化同余系。

2.3 方余定理

与模 n 简化同余系密切相关的一个定理是方余定理²。

定理 2.3.1. 方余定理 设 a 是模 n 简化同余系中某个同余类中的元素, 则:

$$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$$

其中 $\varphi(n)$ 是模 n 简化同余系中同余类的个数。

比如, 模 10 简化同余系有 4 个元素: $\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}$ 。7 属于同余类 $\bar{7}$, 则 $7^4 \equiv_{10} 1$ 。

证明: 我们把模 n 简化同余系中的同余类用小于 n 且与 n 互素的正整数来代表, 记为

$$1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{\varphi(n)} = n - 1.$$

它们两两不同余。把它们各自乘以 a , 得到 $\varphi(n)$ 个整数: $ab_1, ab_2, \cdots, ab_{\varphi(n)}$ 。前面我们已经证明了, 它们仍然两两不同余。

这说明这 $\varphi(n)$ 个整数也分别代表模 n 简化同余系中的各个同余类。

考虑乘积: $b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$ 。 $(ab_1)(ab_2) \cdots (ab_{\varphi(n)})$ 和它同余。也就是说:

$$b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)} \equiv_n (ab_1)(ab_2) \cdots (ab_{\varphi(n)}) \equiv_n a^{\varphi(n)} b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}.$$

²这个定理也称为欧拉定理。但以欧拉命名的定理太多了。为了避免混淆, 这里不采用。

由于 $b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$ 也与 n 互素, 我们把等式两边除以 $b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$, 就得到:

$$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1.$$

□

如果 n 是素数, 那么 $1, 2, \dots, n-1$ 都和它互素, 于是模 n 的简化同余系就是 $\{\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$, $\varphi(n) = n-1$ 。根据方余定理, 只要 a 不是 n 的倍数, 就有:

$$a^{n-1} \equiv_n 1.$$

这个结论也叫做费马小定理。

习题 2.3.1.

给定素数 n , 证明:

1. 除了 $\overline{1}$ 和 $\overline{n-1}$, 其它同余类的逆都不是自己。
2. $(n-1)! \equiv_n -1$.

设 a 与 n 互素, 称使得 $a^m \equiv_n 1$ 的最小正整数 m 为 a 模 n 的阶。

3. 证明 a 的阶整除 $\varphi(n)$ 。
4. 如果 a 的阶等于 $\varphi(n)$, 就说 a 是模 n 的原根。证明: 如果 a 是模 n 的原根, 那么模 n 简化同余系可以写成: $\{\overline{a^0}, \overline{a^1}, \dots, \overline{a^{\varphi(n)-1}}\}$ 。
5. 找出所有模 7 的原根。

第三章 用数据说话

数据是客观事物的定量记录。比如，以下列表中有某班级学生的身高数据。生产生活中，我们常常以数量等形式记录客观事物的特征和属性。以合理的方式组织、呈现的数据，能帮助我们了解事物的本质，成为我们讨论、判断、决策的依据。

3.1 样本和特征

3.2 描述和分析

3.3 数据的结构

第四章 运动和优化

4.1 函数、图像和运动

4.2 极值原理

4.3 优化

第五章 数学和社会

5.1 随时代变化的数学

5.2 数学和科学

5.3 数学和现代化