第五册

大青花鱼

2021 年 4 月 29 日

目录

第一章　圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

1.1　圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点 O 距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段 XY，到 O 的距离和 AB 等长的点构成一个圆。O 叫做**圆心**，XY 叫做圆的**半径**，长度一般记为 r，不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为 O、半径为 r 的圆，一般记为圆 (O,r) 或 $\odot(O,r)$。圆心 O 和另一点 P 确定的圆，一般记为圆 (O,P) 或 $\odot(O,P)$。如果不在意半径，不至于混淆的情况下，也可以简记为圆 O。

平面上的点到 O 的距离小于 r，就说它在圆内；如果等于 r，就说它在圆上；如果大于 r，就说它在圆外。

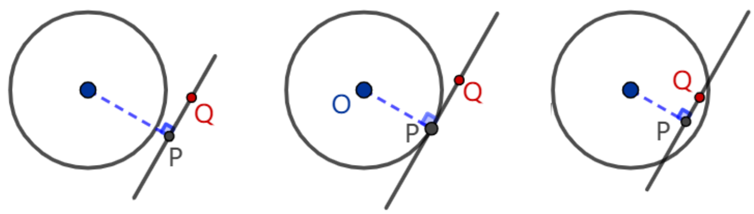
关于圆，我们有以下公理：

- 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

- 给定点 A、B 和线段 EF、GH,如果 $|EF|+|GH| > |AB| > ||EF|-|GH||$,那么总存在两点 P、Q,使得 $|AP| = |EF|$、$|PB| = |GH|$,$|AQ| = |EF|$、$|QB| = |GH|$。P、Q 分别在直线 AB 两侧。

第一个公理说明直线与圆相交的条件,第二个公理则说明圆与圆相交的条件。

考虑直线 l 和圆 $\odot(O,r)$。过 O 作直线 $m \perp l$,记垂足为 P,$|OP| = d$。



1. 如果 $d > r$,那么 P 在圆外。对 l 上任意其他点 Q,根据勾股定理,$|OQ|^2 = |OP|^2 + |PQ|^2 > |OP|^2$,因此 $|OQ| > |OP| > r$。这说明 l 上的点都在圆外。我们说直线 l 与圆 O **相离**。反之,如果直线与圆相离,那么 P 在圆外,因此 $d > r$。
2. 如果 $d = r$,那么 P 在圆上。对 l 上任意其他点 Q,根据勾股定理,$|OQ|^2 = |OP|^2 + |PQ|^2 > |OP|^2$,因此 $|OQ| > |OP| = r$。这说明 l 上其他点都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线 l 与圆 O **相切**,称 P 为**切点**。反之,如果直线与圆相切于点 Q,那么 $|OQ| = r$。反设 Q 不是 P,那么根据勾股定理,$|OP|^2 = |OQ|^2 - |PQ|^2 < |OQ|^2$,这说明 P 在圆内。根据第一个公理,圆 O 和 l 有两个交点,矛盾!因此 Q 就是 P,$d = r$。
3. 如果 $d < r$,那么 P 在圆内。根据第一个公理,直线和圆有两个交点 A、B。我们说直线与圆**相交**,或直线**割圆**于 A、B。反之,如果直线和圆有两个交点,那么根据第一个公理,直线有部分在圆内。设 Q 在圆内,那么根据勾股定理,$|OP|^2 = |OQ|^2 - |PQ|^2 < |OQ|^2$,这说明 P 在圆内,即 $d < r$。

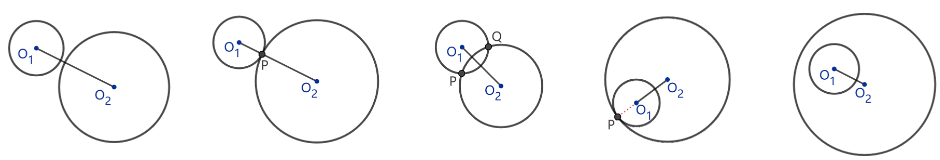
从以上的讨论可以看出,圆心到直线的垂足 P,以及 OP,是判断直线和圆

关系的重要依据。

设直线割圆于两点 A、B，根据第一个公理，线段 AB（除端点）在圆内。我们把线段 AB 称为圆的一条**弦**。连接圆上一点 A 和圆心 O，延长 AO，根据第一个公理，它和圆有另一个交点 B，称为点 A 的**对径点**。AB 称为圆的**直径**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

给定圆上两点 A、B，考虑弦 AB 的垂直平分线 l，圆心 O 显然在 l 上。也就是说，**恰有一条直径垂直平分每条弦**。

考虑两个圆: $\odot(O_1, r_1)$ 和 $\odot(O_2, r_2)$，设两个圆心的距离是: $|O_1O_2| = s$，那么，两个圆的关系可能有以下几种:



1. $s > r_1 + r_2$. 用反证法可以证明，两个圆没有公共点。我们说两圆**相离**。
2. $s = r_1 + r_2$. 考虑线段 O_1O_2，上面有一点 P 使得 $|O_1P| = r_1$，于是 $|PO_2| = |O_1O_2| - |O_1P| = r_2$。这说明两个圆有一个公共点。如果点 Q 不在线段 O_1O_2 上，则 $|O_1Q| + |QO_2| > |O_1O_2|$。于是 Q 不可能是公共点。也就是说，两个圆恰有一个共同点，在圆心连线上。我们说两圆**外切**。
3. $|r_1 - r_2| < s < r_1 + r_2$. 根据第二个公理，$\odot(O_1, r_1)$ 和 $\odot(O_2, r_2)$ 恰有两个公共点，分别在圆心连线两侧。我们说两圆**相交**。
4. $s = |r_1 - r_2|$. $r_1 > r_2$ 时，$s = r_1 - r_2$。考虑直线 O_1O_2，上面有一点 P，使得 $|O_1P| = r_1$，且和 O_2 在 O_1 同一边。于是 $|O_2P| = |O_1P| - |O_1O_2| = r_2$。这说明两个圆有一个公共点。如果点 Q 不在线段 O_1O_2 上，则 $|O_1O_2| + |QO_2| < |O_1Q|$。于是 Q 不可能是公共点。也就是说，两个圆恰有一个共同点，在圆心连线上。$r_1 > r_2$ 时，通过类似推理可以得到同样的结论。我们说两圆**内切**。

5. $s < |r_1 - r_2|$. 用反证法可以证明，两个圆没有公共点。如果 $r_1 > r_2$，我们说 $\odot(O_1, r_1)$ **内含** $\odot(O_2, r_2)$，$\odot(O_2, r_2)$ **容于** $\odot(O_1, r_1)$；反之亦然。

要注意的是，如果仅知道两圆恰有一个公共点，我们无法判断到底是第二还是第四种情形；如果仅知道两圆没有公共点，我们无法判断到底是第一还是第五种情形。第二和第四种情形可以统称为两圆**相切**，第一和第五种情形可以统称为两圆**相离**。

习题 1.1.1. 补充：

1. 设直线割圆于两点 A、B，证明线段 AB（除端点）在圆内。

2. 完成两圆关系的第一和第五种情形中的证明。

3. 阐明两圆关系的第四种情形中，$r_1 > r_2$ 情况下的推理过程。

1.2 圆和旋转

怎么画一个圆? 我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点，我们将圆规尖定在要画的圆心处，将笔头接触圆上的点，然后轻轻旋转，笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段，我们首先张开圆规，圆规尖和笔头分别对齐半径两端，然后保持圆规形状不变，将圆规尖定在要画的圆心处，让笔头接触纸面，轻轻旋转，笔头就画出一个圆。

可以看出，圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作，把平面中的点映射到另一点。给定角 AOB，可以这样定义**旋转**:

定义 1.2.1. 给定角 AOB，平面中一点 P 关于 $\angle AOB$ 旋转的结果，是唯一使得 $\angle POQ = \angle AOB$ 且 $|OP| = |OQ|$ 的点 Q。

O 称为旋转的**中心**。任何点 P 绕中心旋转，结果都在圆 (O, P) 上。

可以看到，给定一个圆 (O, P)，从点 P 出发，旋转不同的角度，就得到圆上其它的点。用圆规画圆时，从零角出发，随着角度不断增大，直到周

角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是 $0°$ 到 $369°$）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上 0 和 360 之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为 $\gamma_{(O,P)}$。

通过 $\gamma_{(O,P)}$，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然 $[0, 360)$ 对应整个圆，那么 $[0, 180]$ 就对应半个圆，$[0, 60]$ 就对应六分之一个圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应 $[a_1, a_1 + x]$ 和 $[a_2, a_2 + x]$，这两个圆弧有什么不同吗? 观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如 $[0, 60]$ 对应的圆弧，起点就是 P，终点是 60 度角 POQ 的终边和圆的交点 Q。如果圆弧对应的区间长度超过 180，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于 180，就说它是**劣弧**；如果等于 180，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点表示这两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。

同一个圆上，明确了起点 A 和终点 B，就唯一确定了圆弧 $\overset{\frown}{AB}$。如果只说了两点 A、B，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 一般指劣弧或起点为 A 终点为 B 的圆弧。如果要指优弧，一般会特别强调。

习题 1.2.1. 证明：

1. 同一个圆中，直径是最长的弦。

2. 任意线段经过旋转得到等长的线段。任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

1.3 圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为 A，终点为 B 的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和圆上一点 P，则角 APB 称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间，有什么关系呢? 如右图，连接 PO，延长交圆于对径点 Q。由于 $\triangle AOP$ 是等腰三角形，$\angle OAP + \angle OPA = 0$，同理，$\angle OBP + \angle OPB = 0$。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说，圆心角是圆周角的两倍大小，圆周角是圆心角的一半大小。由于每段圆弧只对应一个圆心角，无论 P 取圆上哪个点，只要不在弧上，圆周角 APB 都是圆心角的一半大小。

如果点 P 在弧上，$\angle APB$ 和 $\angle AOB$ 是什么关系呢? 如果点在弧上，它对应的就是构成圆的另一段弧，于是它是另一段弧对应的圆心角的一般大小。另一段弧对应的圆心角是周角减去 $\angle AOB$，所以

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AOB.$$

定理 1.3.1. 圆周角定理 给定圆 O 上的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 及圆上的点 P，如果 $P \notin \overset{\frown}{AB}$，那么:

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果 $P \in \overset{\frown}{AB}$，那么:

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角，因此，根据圆周角定理，对径点对应的圆周角是直角。或者说，半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是，讨论圆心角时，我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时，为了方便，我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里，圆上的点 A、B 对应的圆心角 $\angle AOB$ 和点 C、D 对应的圆心角 $\angle COD$ 相等，那么根据“边角边”，圆心 O 和它们构成的三角形满足：$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。弦 AB 和 CD 也等长。不仅如此，根据圆映射，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 也等长。事实上，$\overset{\frown}{CD}$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之，如果两个圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长，那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等，那么弦 AB 和 CD 也等长。更进一步，设 P 是圆上不属于两弧的点，那么圆周角 $\angle APB$ 和 $\angle CPD$ 一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来，如果圆 O 上两条弦 AB 和 CD 等长，那么根据“边边边”，$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。于是圆心角相等，所以劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说，在同一个圆里，两点对应的弦长相等当且仅当对应的（劣弧）弧长相等，当且仅当对应的圆心角相等，当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角，都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点 A、B，它们对应的垂直平分线 l 平分 $\angle AOB$，即把 $\angle AOB$ 分成两个相同大小的圆心角。因此，设 l 和圆交于 P、Q，则它们也分别平分所在的圆弧（称为弧的中点）。我们把这一系列结论总称为垂径定理：

定理 1.3.2. 垂径定理 给定圆上两点，则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦，同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成：过圆 O 的弦 AB 中点的直径与弦 AB 垂直，同

时平分 $\angle AOB$ 和弧 $\overset{\frown}{AB}$。

习题 1.3.1. 给定圆 O，弦 AB 中点记为 M，$|MO|$ 称为弦 AB 的**弦心距**。

1. 证明：圆心角相等，当且仅当对应的弦心距相等。

2. 设直线 MO 与圆 O 交于 P、Q 两点，证明：$|MP|\cdot|MQ| = |MA|\cdot|MB|$.

1.4　圆内接四边形

我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。首先来看三个点的情形。

设 A、B、C 是圆 (O,r) 上（相异的）三点，则线段 AB、BC、AC 的垂直平分线都过圆心 O。因此，O 是 $\triangle ABC$ 的外心（这里附带说明了圆上相异三点必然不共线），$|OA| = |OB| = |OC| = r$。反之，设有（非退化的）$\triangle ABC$，以它的外心 O 为圆心，以 $|OA|$ 为半径，就可以画出一个圆，过顶点 A、B、C。这说明，**不共线的三点恰好对应一个圆**。或者说，**不共线的三点确定一个圆**。我们把这个圆称为三角形的**外接圆**（“外心”即“外接圆圆心”简称），把三角形称为圆的**内接三角形**。

在三个点的基础上再加一个点 D，四个点 A、B、C、D 能否恰好对应一个圆呢？显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的外接圆未必是同一个圆。所以，四个点不总是在同一个圆上。换句话说，要让四个点共圆，这四个点必须满足一定的条件。

如右图上情形，设 A、B、C、D 圆 (O,r) 上（相异的）四点，考察它们对应的圆弧。我们发现，$\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 是整个圆的两部分，因此，它们对应的圆心角之和是周角。根据圆周角定理，$\angle ABC + \angle CDA = 180°$。同理，$\angle BCD + \angle DAB = 180°$。

我们还可以发现，圆周角 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 都对应 $\overset{\frown}{BC}$，因此根据“等弧

对等角”, $\angle BAC=\angle BDC$。同理可得: $\angle ACB=\angle ADB$, $\angle CAD=\angle CBD$, $\angle DBA=\angle DCA$。从这些等角关系出发，如果对角线 AC 和 BD 交于点 P，那么 $\triangle APB\backsim\triangle CPD$、$\triangle BPC\backsim\triangle DPA$。

如果 A、B、C、D 顺序改变，如右图下情形，那么 $\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 对应同一段圆弧 $\overset{\frown}{AC}$。这时 $\angle ABC+\angle CDA=0°$，或者说 $\angle ABC=\angle ADC$。同理，$\angle BAD=\angle BCD$。我们把这样的四边形 $ABCD$ 称为**凹四边形**，把前一种情况中的四边形 $ABCD$ 称为**凸四边形**。凸四边形包含我们学过的平行四边形、梯形和筝形，它的内角都是正的。凹四边形的内角总有负的。无论是凸四边形还是凹四边形，内角和总是零角。

综合两种情况，**圆内接凸四边形对角之和是平角**，**圆内接凹四边形对角相等**。

四边形 $ABCD$ 有一对边相交，像一只蝴蝶。我们把这样的四边形叫做**蝶形**。可以看到，如果把相交的对边 AB、CD 看作对角线，把对角线 AC、BD 看作对边，我们就得到一个凸四边形 $ACBD$。因此，观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现，我们仍然有 $\angle BAC=\angle BDC$、$\angle ACB=\angle ADB$，$\angle CAD=\angle CBD$，$\angle DBA=\angle DCA$。如果对角线 AC 和 BD 交于点 P，仍然有 $\triangle APB\backsim\triangle CPD$、$\triangle BPC\backsim\triangle DPA$。

以上是圆内接四边形边和角的性质，反过来，满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢?

1.5 圆内接多边形

从四边形的情况来看，顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点 A、B、C、D 按顺时针或逆时针顺序排列，那么四边形 $ABCD$ 是凸四边形，否则，四边形 $ABCD$ 可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形，我们只研究最简单的一类: 顶点按逆时针顺序

排列的多边形。具体来说，设圆 O 上有 n 个点：$A_1, A_2, \cdots, A_n$，从 A_1 出发构造圆映射 $\gamma_{(O,A_1)}$，把 $[0,360)$ 映射到圆周，那么 0 对应 A_1。设 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分别对应 n 个点，那么 $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n$。这样定义的圆内接多边形：$A_1A_2\cdots A_n$ 就是我们研究的对象。这样定义的多边形，每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数 n，凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。具体来说，每个顶点和相邻两个顶点的连线是 n 边形的边，和其余 $n-3$ 个顶点的连线是对角线。因此每个点是 $n-3$ 条对角线的端点。另一方面，每条对角线对应两个顶点，因此一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢？我们知道三角形的内角和是平角，凸四边形的内角和是两个平角（或者说周角，如果把角度约定在负平角和正平角之间，则减去一个周角变成零角）。边数继续增多时，我们定义凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的内角和为：

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n + \angle A_{n-1}A_nA_1 + \angle A_nA_1A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间，可以猜测：凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形，我们可以这样证明：n 个顶点把圆分为 n 段圆弧。每个顶点张成的内角，对应了其中 $n-2$ 段圆弧。如果考虑所有 n 个内角对应的圆弧，则每段圆弧计入 $n-2$ 次（圆弧两端是内角顶点的时候不计入，其它情况下都计入）。也就是说，n 个内角和对应 $n-2$ 个整圆。这些内角都是圆周角，因此它们的和是 $n-2$ 个整圆对应的圆周角，即 $n-2$ 个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况，我们可以通过不断“裁剪”三角形来证明。我们还记得，凸四边形可以裁成两个三角形，因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看，我们通过裁掉一个三角形，把凸四边形变成

了三角形。对一般的凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 来说，由于它的每个内角都介于零角和平角之间，我们可以考虑裁掉某个角，把它变成 $n-1$ 边形。比如，沿着线段 A_1A_3 剪一刀，就把 $A_1A_2\cdots A_n$ 分成了三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。

定理 1.5.1. 凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

证明. 用归纳法证明。命题 $P(n)$：凸 $n+2$ 边形的内角和是 n 个平角。我们要证明 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立。
$n=1$ 时，由于三角形内角和是平角，$P(1)$ 成立。
假设 $P(n)$ 成立，下面证明 $P(n+1)$ 成立。
设有凸 $n+3$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，将它裁成三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。前者的内角和是平角。根据 $P(n)$，后者的内角和是 n 个平角，因此，$A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的内角和是 $n+1$ 个平角。于是 $P(n+1)$ 成立。
因此对所有正整数 n，命题 $P(n)$ 成立。

满足什么条件时，凸多边形是圆内接多边形呢？最直接的条件，自然是平面上有一个圆，使多边形顶点都在圆上。或者说，能找到一点，到多边形各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点，可以查看多边形各边和各条对角线的垂直平分线。如果多边形是圆内接多边形，它的边和对角线都是圆的弦，垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说，可以考察两条边（或对角线）的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等，那么多边形内接于以它为圆心的圆，否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形：**正多边形**。正多边形是各边等长，各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形的内角角度是 $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$

习题 1.5.1.

1. 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形，哪些总是圆内接多边形？

哪些可以是圆内接多边形？要满足什么条件？

2. 设有整数 $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$，圆内接 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，$\angle A_iA_kA_j$ 和 $\angle A_iA_lA_j$ 有什么关系？

1.6 弧长和面积

第二章　圆和三角形

2.1　圆幂

2.2　切线和割线

2.3　垂心和外接圆

2.4　内切圆和旁切圆

2.5　九点圆

第三章　三角函数

3.1　锐角的三角函数

3.2　三角函数的图像和性质

3.3　三角函数和三角形

第四章　从或许到确定

4.1　事件和试验

4.2　计数和概率

4.3　组合和排列

第五章　三段论（上）

5.1　大前提、小前提和结论

5.2　直言三段论