第六册

大青花鱼

目录

第一章　向量

第五册中，我们学习了用三角函数解三角形。三角函数是定量研究平面形的利器。不过，三角函数本身并不是简单的函数。我们目前只能通过查表的方式得到函数值。这让我们思考，能不能打造一种更方便定量研究的体系呢？

回顾我们对平面形的研究，我们从几条公理出发，得出点、直线、三角形、圆等形状之间的定性关系。公理体系的缺陷在于没有与数紧密结合。比如，“两点之间直线最短”，除了定性的“最短”，没有提供别的信息。我们需要一种根本上和数量结合的体系，来理解各种平面形状。

此外，公理体系中并没有强调运动的概念。我们说点运动形成了线，旋转形成角度和圆，但并没有相关的工具来描述具体的运动。我们需要一种根本上和运动结合的体系，来理解形状之间的关系。

1.1　点、向量和直线

学习有理数的时候，我们使用数轴上的点表示。每个点代表一个实数。两点重合，当且仅当它们代表同一个数。这种表示方法把数和直线上的点牢牢绑在一起。我们可以用数的关系表示直线上点的关系。数轴使我们可以定量理解直线。

至于平面中的点，我们用相互垂直的数轴定义了点的坐标。每个点代表一个有序数对。两个数按顺序排列，对应平面中一点。

能不能像数轴一样，用一个量代表平面中一点呢？数轴之所以能用一个数代表一个点，是因为直线只有两个方向，使用正负号就可以代表方向。平面中不止两个方向，我们无法用正负来表示方向了。为此，我们引入一个新的量来代表平面中的点：**向量**。

自然数、有理数、实数都有自己的运算法则。向量作为代表点的量，需要满足怎样的运算法则呢？我们从运动出发，给出以下的法则：

1. 向量的加法就是平移：两个向量相加得到另一个向量。向量的加法满足结合律和交换律。
2. 零向量表示静止不变：存在这样一个向量，任何向量与它相加，仍然是自己。这个向量叫做零向量。零向量不定义方向，也可以说它与任何向量同向或反向。它对应的点称为**原点**。
3. 从每个非零向量，引出一根数轴：任何实数乘以向量，得到方向相同或相反的向量。这个运算称为**数乘运算**。数乘运算对应图形的放缩。
4. 放缩和四则运算相容：数轴上可以做数的运算。
5. 平移和放缩相容：先平移再放缩，和先放缩再平移，结果一样。

按照定义，**向量就是点**，所以可以用大写字母来表记。比如零向量就是原点，记为 O。此外，**向量就是平移**。点 A 就是把 O 对应到 A 的平移，也是 O 平移的结果，记为 $\overrightarrow{OA}$。反过来，$\overrightarrow{BA}$ 就是把 B 对应到 A 的平移。

让我们用数学语言把这些法则更具体地写出来。我们把平面看作集合，记为 $\mathbb{V}$，其中的元素称为向量或点，用粗体小写字母表示，以便和代表数的量区分：

1. 加法结合律：$\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{V}$，$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$。
2. 加法交换律：$\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{V}$，$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$。
3. 存在零向量：$\forall\ \mathbf{a}\in\mathbb{V}$，$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$。

4. 放缩和四则运算相容：$\forall\ \mathbf{a} \in \mathbb{V}$，$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$。$\forall s, t \in \mathbb{R}$，$(s+t) \cdot \mathbf{a} = (s \cdot \mathbf{a}) + (t \cdot \mathbf{a})$，$(s \cdot t) \cdot \mathbf{a} = s \cdot (t \cdot \mathbf{a})$。
5. 放缩和平移相容：$\forall\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$，$\forall\ t \in \mathbb{R}$，$t \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}$。

从以上法则出发，我们可以定义直线：

定义 1.1.1. 过原点的直线是非零向量放缩得到的集合。不过原点的直线是过原点的直线按一点平移得到的集合。

给定非零向量 $A = \mathbf{a}$, $\{t\mathbf{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ 是一条过原点 O 和 A 的直线 OA。给定向量 $B = \mathbf{b}$, $\{t\mathbf{a} + \mathbf{b} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ 是一条过 B 的直线; 而 $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ 就是直线 AB；要注意的是，这样定义的直线是一条数轴，自然带有正方向和单位长度。

给定非零向量 $\mathbf{a}$, 如果向量 $\mathbf{b}$ 可以通过 $\mathbf{a}$ 放缩得到, 或者说 $\mathbf{b} \in \{t\mathbf{a} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$，就称两者**共线**。

类比可以定义线段和射线：给定非零向量 $A = \mathbf{a}$ 和向量 $B = \mathbf{b}$，$\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \,|\, t \in [0, 1]\}$ 是端点为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的线段 AB，$\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \,|\, t \geqslant 0\}$ 是以 B 为端点，经过 A 的射线。

这样定义的线段和射线，也具备了数轴的性质。比如，在线段 $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \,|\, t \in [0, 1]\}$ 中，t 的不同值就对应了不同的点：$t = 0$ 对应点 $\mathbf{b}$，$t = 1$ 对应点 $\mathbf{a}$。对一般的 $t \in (0, 1)$，$t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$ 对应的点 $P(t)$ 满足：$|AP(t)| = (1-t)|AB|$，$|P(t)B| = t|AB|$。也就是说，$P(t)$ 是线段 AB 上使得 $\frac{|AP(t)|}{|P(t)B|} = \frac{1-t}{t}$ 的点。$\overrightarrow{AP(t)}, \overrightarrow{P(t)B}$ 都和 $\overrightarrow{AB}$ 共线。

反过来，设 $\frac{|AP(t)|}{|P(t)B|}$ 等于定值 $k > 0$，对应的点 $P(t)$ 是什么点呢？这个问题实际上是求方程：

$$\frac{1-t}{t} = k$$

的解。容易解出这个方程的唯一解：$t = \frac{1}{k+1}$。因此我们得到结论：

定理 1.1.1. 定比分点定理 线段 AB 上到两端距离之比 $\frac{|AP|}{|PB|}$ 为定值 k 的点 P 恰有一个，称为它的 k **分点**。

正数 k 越小，k 分点距离 A 越近，k 越大，k 分点离 A 越远；$k=1$ 时，我们就得到线段的中点。

以上我们讨论了 $k>0$ 的情况，显然，$k=0$ 对应 $P=A$。对于负数 k，有没有对应的点呢？我们用平移的思想考虑这个问题，从 A 到 $P(t)$ 经历的平移是 $\overrightarrow{AP(t)}=(1-t)\overrightarrow{AB}$，从 $P(t)$ 到 B 经历的平移是 $\overrightarrow{P(t)B}=t\overrightarrow{AB}$。它们的系数之比就是 $\frac{1-t}{t}$。于是，我们可以对一般的 k 定义定比分点：如果 k 能使得方程

$$\frac{1-t}{t}=k$$

有唯一解，那么我们就把对应的点 $P(t)$ 称为 AB 的 k 分点。

如果 $k<-1$，那么 k 分点对应的 $t=\frac{1}{k+1}<0$，也就是说，$P(t)$ 在线段 BA 沿 B 的延长线上。如果 $-1<k<0$，那么 k 分点对应的 $t=\frac{1}{k+1}>1$，也就是说，$P(t)$ 在线段 BA 沿 A 的延长线上。如果 $k=-1$，以上方程无解，这说明 -1 分点不存在。

共线的向量，通过数轴，可以方便地讨论相互的位置关系。不共线的向量之间，如何讨论位置关系呢？为此，我们要引入**平面的根本性质**：

1. 给定任何非零向量 A，平面中总有另一个向量 B，不在直线 OA 上。我们说两者**不共线**。
2. 从不共线的向量 A,B 出发，经过放缩、平移，可以得到平面中任何向量。具体来说，任何向量都可以表示成 $sA+tB$ 的形式，集合 $\{sA+tB|s,t,\in\mathbb{R}\}$ 就是整个平面。这样的 A,B 称为平面的一组**基**或**基底**。

举例来说，在直角坐标系中，我们选择了原点重合、互相垂直的两条数轴，以每条数轴上数 1 对应的点（记为 $\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y$）出发，通过放缩和平移，就得到平面所有的点。平面中任一点可以写成 $x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y$，其中 x,y 就是点的坐标。直角坐标系其实是一种用向量描述平面的方法。$\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y$ 就是一组基。

思考 1.1.1.

1. 设平面上有两点 A,B，以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $AOBC$。向量

$\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 是什么关系?

2. 设平面上有两点 A, B，三角形 OAB 中，连接边 OA, OB 的中点 M, N。向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{MN}$ 是什么关系?

习题 1.1.1.

1. 证明：零向量只有一个，任何向量乘 0 得到零向量。

2. 证明：零向量乘任何数得到零向量。

3. 证明：任何向量 $\mathbf{a}$ 都有唯一的反向量 $\mathbf{b}$，满足 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$。

4. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不共线，如果 $s\mathbf{a}+t\mathbf{b}=\mathbf{0}$，证明：$s=t=0$。

直角坐标系 xOy 中，设 $\mathbf{a}=4\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y$，$\mathbf{b}=\mathbf{e}_x-2\mathbf{e}_y$ ，$\mathbf{b}=-\mathbf{e}_x+2\mathbf{e}_y$。

5. 在坐标轴上标出 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$。

6. 用 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示 $\mathbf{e}_x$、$\mathbf{e}_y$ 和点 $(3,0)$。

7. 用 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示它们的中点、3 分点、-0.5 分点、-3 分点。写出这些点的坐标和直线的方程。

8. 用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示顶点为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的三角形三边和重心。

1.2 角度与长度

根据平面的根本性质，任何向量都可以用两个不共线向量表示。接下来，我们仿照角度，给出两个向量之间的一种关系。给定平面基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$，我们给出这样一个映射 f：

$$\forall\ s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \quad f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2, t_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2)=s_1t_1+s_2t_2.$$

f 把两个向量对应到一个实数。它满足以下五个性质：

1. 顺序不影响关系大小：

$$\begin{aligned}
&f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2, t_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2)\\
=&s_1t_1+s_2t_2=t_1s_1+t_2s_2\\
=&f(t_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2, s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2).
\end{aligned}$$

2. 零向量和任意向量关系为 0：

$$f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2,\mathbf{0})=f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2,0\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2)=s_1\cdot 0+s_2\cdot 0=0.$$

3. 非零向量与自身的关系总是正的：s_1,s_2 不全为零时，

$$f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2,s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2)=s_1^2+s_2^2>0.$$

4. 和向量放缩相容：

$$\begin{aligned}&f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2,t(t_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2))\\=&s_1tt_1+s_2tt_2=t(s_1t_1+s_2t_2)\\=&tf(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2,t_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

5. 和向量平移相容：

$$\begin{aligned}&f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2,(t_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2)+(r_1\mathbf{e}_1+r_2\mathbf{e}_2))\\&=s_1(t_1+r_1)+s_2(t_2+r_2)=(s_1t_1+s_2t_2)+(s_1r_1+s_2r_2)\\&=f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2,t_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2)+f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2,r_1\mathbf{e}_1+r_2\mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

满足以上五个条件的映射 f 称为平面向量的**内积**。从第四个性质可知，向量与自身的内积总是正数。我们把这个数的平方根叫做向量的长度，记为：

$$\forall\ \mathbf{a}\in\mathbb{V},\quad \|\mathbf{a}\|=\sqrt{f(\mathbf{a},\mathbf{a})}.$$

两个向量之差的长度，称为向量之间的距离。

$$\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{V},\quad \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|=\sqrt{f(\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b})}.$$

如果基底 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是直角坐标系的基，那么

$$\begin{aligned}&\forall\ \mathbf{a}=x_A\mathbf{e}_x+y_A\mathbf{e}_y,\\&\qquad\|\mathbf{a}\|=\sqrt{x_A^2+y_A^2},\\&\forall\ \mathbf{a}=x_A\mathbf{e}_x+y_A\mathbf{e}_y,\ \ \mathbf{b}=x_B\mathbf{e}_x+y_B\mathbf{e}_y,\\&\qquad\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}.\end{aligned}$$

给定向量 $A=\mathbf{a}$、$B=\mathbf{b}$，$\|\mathbf{a}\|$ 就是 $|OA|$，$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$ 就是 $|AB|$。也就是说，我们这样定义的 f，分别与直观经验中长度和距离的概念相符合。

那么，f 本身有什么含义呢？我们来计算 $\frac{|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2}{2} &= \frac{x_A^2+y_A^2+x_B^2+y_B^2-(x_A-x_B)^2-(y_A-y_B)^2}{2}\\ &= x_Ax_B+y_Ay_B=f(\mathbf{a},\mathbf{b}).\end{aligned}$$

另一方面，余弦定理告诉我们，$\frac{|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2}{2}=|OA||OB|\cos\angle AOB$。也就是说，$f(\mathbf{a},\mathbf{b})=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\angle AOB$。内积 f 的本质是向量夹角的余弦与向量长度的乘积。通过内积，我们把角度和长度统一起来了。

向量夹角的余弦值总在 -1 和 1 之间，所以向量的内积的绝对值不大于向量长度的乘积：

$$|x_Ax_B+y_Ay_B|\leqslant\sqrt{x_A^2+y_A^2}\sqrt{x_A^2+y_A^2}.$$

可以验证这个关系对任意 x_A,y_A,x_B,y_B 成立。从这个关系出发，可以得到：

$$|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}\leqslant\sqrt{x_A^2+y_A^2}+\sqrt{x_A^2+y_A^2}=|OA|+|OB|.$$

可以直观理解为“三角形两边之和大于第三边”或“两点之间线段距离最短”。

内积为 0，就表示向量夹角的余弦为 0，这时，我们说两个向量垂直。比如令 $\mathbf{a}=2\mathbf{e}_x-\mathbf{e}_y$，$\mathbf{b}=\mathbf{e}_x+2\mathbf{e}_y$，那么 $f(\mathbf{a},\mathbf{b})=2\cdot1-1\cdot2=0$。在平面上画出对应的点 A,B，可以验证 $\angle AOB=90°$。

再来看另一个映射 f_2：

$$\forall\ s_1,s_2,t_1,t_2\in\mathbb{R},\quad f(s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2,t_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2)=2s_1t_1+s_2t_2.$$

可以验证，f_2 也满足 f 满足的五个性质。从 f_2 出发，我们也可以定义距离和长度：

$$\forall\ \mathbf{a}=x_A\mathbf{e}_x+y_A\mathbf{e}_y,\quad \|\mathbf{a}\|_2=f_2(\mathbf{a},\mathbf{a})=2x_A^2+y_A^2.$$

这样定义的距离和长度和我们直观经验中有些不一样，不过，我们可以验证，这样定义的距离也满足“两点之间线段最短”的性质。

$$|2x_Ax_B + y_Ay_B| \leqslant \sqrt{2x_A^2 + y_A^2}\sqrt{2x_A^2 + y_A^2}.$$

因此，f_2 也是内积。我们把符合直观经验的内积 f 称为**经典内积**，一般称内积都默认指经典内积；把对应的长度称为向量的**模**或**范**。$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的经典内积记为 $(\mathbf{a} \,|\, \mathbf{b})$[1]，模记为 $|\mathbf{a}|$、$|\mathbf{b}|$。

既然有余弦，自然有正弦。记 $\alpha = \angle AOB$，则 $(\mathbf{a} \,|\, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\alpha$，于是，

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2\alpha = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \,|\, \mathbf{b})^2$$

记 $\mathbf{a} = x_A\mathbf{e}_x + y_A\mathbf{e}_y$，$\mathbf{b} = x_B\mathbf{e}_x + y_B\mathbf{e}_y$，则

$$\begin{aligned} (x_A^2 + y_A^2)(x_A^2 + y_A^2)\sin^2\alpha &= (x_A^2 + y_A^2)(x_A^2 + y_A^2) - (x_Ax_B + y_Ay_B)^2 \\ &= (x_Ay_B - x_By_A)^2 \\ |\sin\alpha| &= \frac{|x_Ay_B - x_By_A|}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} \end{aligned}$$

我们得出了夹角 $\angle AOB$ 正弦的绝对值。

观察向量夹角的正弦和余弦，我们注意到，它们的表达式与和差角公式有相似之处。$x_Ax_B + y_Ay_B$ 与差角余弦公式形式相似，$x_Ay_B - x_By_A$ 与差角正弦公式形式相似。

让我们在直角坐标系中找几个例子，看看直观结果。设有点 $A(1, 0)$、$B(\frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2})$。不难得出 $\angle AOB = 60°$。我们用以上公式计算 $\angle AOB$ 的正弦和余弦：

$$\frac{x_Ay_B - x_By_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}\sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{x_Ax_B + y_Ay_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}\sqrt{x_B^2 + y_B^2}} = \frac{1}{2}.$$

[1]不至于混淆时，也常称为点积，记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

把 P 的坐标换成 $(0,1)$、$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$、$(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ 等，可以验证，通过以上两个公式得到的值，就是直观角度的正弦、余弦值。如果我们定义向量 $A(x_A,y_A)$、$B(x_B,y_B)$，记 $\angle AOB=\alpha$，那么：

$$\sin\alpha=\frac{x_Ay_B-x_By_A}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}\sqrt{x_B^2+y_B^2}},\quad \cos\alpha=\frac{x_Ax_B+y_Ay_B}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}\sqrt{x_B^2+y_B^2}}.$$

要注意的是，以上公式成立，是因为直角坐标系 xOy 的 x 轴和 y 轴沿逆时针顺序摆放，同时规定逆时针方向为角度的正方向。如果直角坐标系的坐标轴摆放顺序和角度的正方向相反，以上的公式就要改为：

$$\sin\alpha=\frac{x_By_A-x_Ay_B}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}\sqrt{x_B^2+y_B^2}},\quad \cos\alpha=\frac{x_Ax_B+y_Ay_B}{\sqrt{x_A^2+y_A^2}\sqrt{x_B^2+y_B^2}}.$$

正弦对应着平行四边形的面积。比如，邻边为 OA 和 OB 的平行四边形，面积是 $|OA||OB|\sin\angle AOB$。对照上面正弦的表达式，可以发现这个面积等于 $x_By_A-x_Ay_B$。我们就把对应的映射称

$$(A,B)\mapsto x_By_A-x_Ay_B.$$

为向量 A B 的面积。向量的面积和内积，分别对应正弦和余弦。

第二章　从平面到立体

我们已经初步了解了简单的平面图形的性质。现在我们来认识立体形状。

我们生活的世界是立体空间。人类自身和自然万物，都是立体的。立体形状是我们最常接触的形状。不过，我们的眼睛和大脑并不能直接处理立体形状，只能感知立体事物的平面图像，在大脑中还原事物的形状。因此，人类总是通过立体事物的平面图像来了解事物。

2.1　透视与投影

让我们在平面上还原我们看到的立体事物。为什么图中的 A 显得远，B 显得近？

大脑还原事物的形状时，遵循“近大远小”的规律。

同一个物体，离眼睛越远，就显得越小；离眼睛越近，就显得越大。物体在人眼中的大小，大致和它到眼睛的距离成正比。

在平面中，可以使用“近大远小”的方法，表现立体事物的远近。这种表现方法称为透视法。

我们把到眼睛距离相等的位置的集合称为等距面。图形在等距面上移

动，大小不变。然而，等距面并不是平面。为了方便理解，我们把与视线垂直的平面称为视垂面，可以想象正对面的一张白纸。

单一的图像往往无法反映立体事物的全部情况。我们通常从多个不同位置观察事物，得出结论。

第三章　同余

例子 3.0.1. 7^{65} 的个位数是多少?

解答. 从 $7^0, 7^1, 7^2, 7^3 \cdots$ 开始找规律。$7^0 = 1$，$7^1 = 7$，$7^2 = 49$，$7^3 = 343$，$7^4 = 2401$，$7^5 = 16807$。7^4 和 7^0 的个位数都是 1，7^5 和 7^1 的个位数都是 7。我们可以总结出这样的规律：个位数是 1 的，乘以 7 得到 7；个位数是 7 的，乘以 7 得到 9；个位数是 9 的，乘以 7 得到 3；个位数是 3 的，乘以 7 得到 1。

也就是说，如果把 $7^0, 7^1, 7^2, 7^3 \cdots$ 的个位数写成一列，应该是这个样子的:

$$1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, \cdots$$

用归纳法不难证明，这列数字以 4 为周期不断重复。所以，要求 7^{65} 的个位数，可以看 65 在相关的周期里处于哪个位置。换句话说，只要看 65 除以 4 的余数。$65 = 16 \times 4 + 1$，所以 7^{65} 的个位数和 7^1 的个位数一样，都是 7。

从这个例子可以看出，两个整数除以同一个数得到相同的余数，是一个重要的性质。我们把这种性质称为**同余**。比如，65 和 1 除以 4 余数都是 1，我们就说 65 和 1 模 4 同余。7^{65} 和 7^1 除以 10 余数都是 7，我们说 7^{65} 和 7^1 模 10 同余，记为:

$$7^{65} \equiv_{10} 7^1$$

3.1 同余类

整数除以 3，余数有 $0,1,2$ 三种可能。整数除以 10，余数有 $0,1,\cdots,9$ 十种可能。一般来说，给定正整数 n，整数除以 n，余数有 $0,1,\cdots,n-1$ 这 n 种可能。因此，按除以 n 的余数，可以把整数集分成 n 类。同属一类的数，模 n 同余，所以这 n 类数叫作模 n **同余类**。所有模 n 同余类的集合，叫作模 n **同余系**。

每个模 n 同余类，可以写成 $\{kn+a\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ 的形式。也就是说，可以看成某个数 a 不断加上或减去 n 得到的所有数的集合。这个集合是无穷的。不同的模 n 同余类，交集是空集，并集是 $\mathbb{Z}$。也就是说，它们是 $\mathbb{Z}$ 的分划。

为了方便，我们从每个模 n 同余类中选一个元素，代表这个同余类。一般来说，可以选 $0,1,\cdots,n-1$ 个数。我们给它们加个上划线，以和作为整数的 $0,1,\cdots,n-1$ 区分：

$$\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{n-1}$$

如果要强调 n，可以把 n 加在右上角：

$$\overline{0}^n,\overline{1}^n,\cdots,\overline{n-1}^n$$

给定整数 m，我们可以把它对应到某个模 n 同余类，称为对 n **取模**。比如 $n=5$ 时，$24\equiv_5 4$，我们把 24 对应到 $\overline{4}^5$，或者说，24 对 5 取模，得 $\overline{4}^5$。

同余关系和相等关系很像，它们是否有一样的性质呢？我们可以验证，同余关系满足以下的性质：

1. $\forall\, a\in\mathbb{Z},\quad a\equiv_n a$；
2. $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$，如果 $a\equiv_n b$，那么 $b\equiv_n a$；
3. $\forall\, a,b\in\mathbb{Z}$，如果 $a\equiv_n b$，$b\equiv_n c$，那么 $a\equiv_n c$。

满足以上三个性质的二元关系（两个元素之间的关系）称为**等价关系**。数与数的等于关系是等价关系，数与数的同余关系也是等价关系。因此，我们可以把同余关系用作同余类之间的等于关系。

整数之间有四则运算，模 n 同余类之间，也可以进行运算。以 $n=5$ 为例子。我们分别计算 24 和 37 除以 5 的余数，以及它们的和 61 除以 5 的余数：

$$24 \equiv_5 4,\ \ 37 \equiv_5 2,\ \ 61 \equiv_5 1$$

可以发现：$4+2 \equiv_5 1$，也就是说，取模和加法可以交换顺序。可以验证，两个同余类中各取一个元素相加，和所在的同余类，就是两者模 n 余数的和所在的同余类。用集合的语言，可以写成：

$$\{kn+a+ln+b \,|\, k\in\mathbb{Z},\, l\in\mathbb{Z}\} = \{kn+a+b \,|\, k\in\mathbb{Z}\}$$

所以，可以定义同余类的加法：

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$$

其中的 $\overline{a+b}$ 指的是 $a+b$ 所在的同余类。为了方便，我们用 $a+b$ 作为代表。

可以验证，同余类的加法也满足结合律和交换律。这里我们只证明同余类的加法满足结合律，交换律的证明留做习题：

证明： 由上可知 $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$，所以

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a+b}+\overline{c}=\overline{a+b+c}.$$

类似可得：

$$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}+\overline{b+c}=\overline{a+b+c}.$$

于是

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a+b+c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c}).$$

□

类似可以定义同余类的减法和乘法：

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{a-b},\ \ \overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{a\cdot b}$$

可以验证，同余类的减法性质和整数减法一样，同余类的乘法也满足结合律、交换律和分配律。

能否定义同余类的除法呢？我们来看一个例子。设 $n=6$，考虑等式 $12\div 4=3$。12、4 和 3 对 6 取模，得到 0、4 和 3。考虑等式 $60\div 10=6$。60、10 和 6 对 6 取模，得到 0、4 和 0。也就是说，两个模 6 同余类中各取元素相除，商所在的同余类不是唯一的。所以，我们没法定义模 6 同余类的除法。

再看另一个例子。设 $n=5$，考虑以下的“乘法表”：

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

可以看出，任何模 5 同余类乘以 $\overline{0}$ 都得到 $\overline{0}$，非 $\overline{0}$ 同余类乘以不同的同余类，结果也不同。这说明每个同余类除以另一个同余类（非 $\overline{0}$），都必然有唯一的结果。这样我们就定义了模 5 同余系里的除法。

习题 3.1.1.
动手做一做：

1. 证明同余关系满足等价关系所要求的三个性质。

2. 证明同余类的加法满足交换律。

3. 证明同余类的减法是加法的逆运算。

4. 证明同余类的乘法满足结合律和交换律。

5. 证明同余类的乘法满足分配律。

6. 证明：如果某模 n 同余类的代表与 n 的最大公因数是 d，则其中所有元素与 n 的最大公因数都是 d。

7. 分别画出模 3 同余系和模 4 同余系的“乘法表”。它们和模 5 同余系的“乘法表”哪些地方相同，哪些地方不同？

3.2 完全同余系和简化同余系

上一节我们提到模 6 同余系无法定义除法，而模 5 同余系可以定义除法。两者有什么不同呢？我们画出模 6 同余系的“乘法表”：

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

可以看到，这个“乘法表”和模 5 同余系的大有不同。同一行或同一列常有重复。这说明不同的同余类乘同一个同余类得到同一个结果。比如

$$\overline{2} \times \overline{4} = \overline{5} \times \overline{4} = \overline{2}.$$

这就使我们没法定义除法。

如果我们把上面的等式稍作变化，会得到：

$$\overline{0} = (\overline{5} - \overline{2}) \times \overline{4} = \overline{3} \times \overline{4}.$$

也就是说，有非 $\overline{0}$ 的同余类相乘等于 $\overline{0}$。同余类乘法的这个性质和整数乘法完全不同。我们把这种非 $\overline{0}$ 同余类叫做**零因子**。整数中没有零因子：非 0 的整数相乘必然不是 0。而只要有这种零因子存在，同余系中就会发生“不同的同余类乘同一个同余类得到同一个结果”的现象，从而无法定义除法。

有什么办法在模 6 同余系中定义除法呢? 我们可以选一部分同余类，在其中定义除法。如果同余类 $\overline{a}$ 的代表 a 与 6 不互素，设最大公因数是 b，那么

$$\frac{a}{b} \times 6 = a \times \frac{6}{b}$$

于是有 $\overline{a} \times \overline{\frac{6}{b}} = \overline{0}$，出现零因子。因此，为了避免零因子问题，我们只选和 6 互素的数所在的同余类，也就是 $\overline{1}$ 和 $\overline{5}$。我们发现 $\{\overline{1}, \overline{5}\}$ 中可以定义乘法和除法（但不再满足加减法）。

$\times$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$

我们把模 6 同余系称为模 6 的**完全同余系**，把 $\{\overline{1}, \overline{5}\}$ 称为模 6 的**简化同余系**。

一般来说，我们把模 n 同余系称为模 n 的完全同余系，在其中可以定义加减法和乘法；把其中所有和 n 互素的同余类的集合称为模 n 的简化同余系 [1]。

定理 3.2.1. 给定正整数 n，在模 n 的简化同余系中可以定义乘法和除法。

[1]通常不把 $\overline{0}$ 计入简化剩余系，以省去讨论除以 $\overline{0}$ 的问题。

证明： 模 n 同余类的乘法已经定义好了。我们只需要说明：简化同余系中的同余类相乘，仍然在简化同余系中。这是因为与 n 互素的整数相乘，结果还是与 n 互素。

接下来定义除法。除法是乘法的逆运算。比照数的除法：$a \div b = a \times \frac{1}{b}$。因此，只要将简化同余系中每个同余类都对应一个“倒数”，就可以用“乘以倒数”来定义除法。

我们把模 n 简化同余系中的同余类用小于 n 且与 n 互素的正整数来代表，记为

$$1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{\varphi(n)} = n - 1.$$

其中 $\varphi(n)$ 是模 n 简化同余系的元素个数。考虑任一元素 b_i，我们接下来会证明：$b_ib_1, b_ib_2, \cdots, b_ib_{\varphi(n)}$ 模 n 两两不同余。于是，它们中恰有一个模 n 余 1。设 $b_ib_j \equiv_n 1$，那么 b_j 就是 b_i 的“倒数”。

最后用反证法证明命题：$b_ib_1, b_ib_2, \cdots, b_ib_{\varphi(n)}$ 模 n 两两不同余。

反设命题不成立，即存在 b_j, b_k 使得 $b_ib_j \equiv_n b_ib_k$。这说明 $n|b_i(b_j - b_k)$。由于 b_i 和 n 互素，根据倍和析因定理，存在整数 p, q，使得：

$$b_ip + nq = 1.$$

两边乘以 $b_j - b_k$，就得到：

$$b_i(b_j - b_k)p + nq(b_j - b_k) = b_j - b_k.$$

等式左边是 n 的倍数，因此 b_j 和 b_k 模 n 同余，这与它们的定义矛盾。

因此命题的否定为假，原命题为真。 □

简化同余系的除法和整数不同，任何同余类都能整除另一个同余类，不需要余数、带余除法的概念。每个同余类都有自己的“倒数”，比如在模 6 简化同余系中，$\overline{5} \times \overline{5} = \overline{1}$。我们把同余类的“倒数”称为它的（乘法）**逆**。

习题 3.2.1.

1. 写出模 12 的简化同余系。写出 $\overline{7}^{12}$ 的逆。

2. 比较模 12 简化同余系中的乘除法和模 4 完全同余系中的加减法，

它们有何异同?

3. 写出模 10 的简化同余系。写出 $\overline{7}^{10}$ 的逆。

4. 比较模 10 简化同余系中的乘除法和模 4 完全同余系中的加减法，它们有何异同?

5. 给定素数 n，写出模 n 简化同余系。

3.3　方余定理

与模 n 简化同余系密切相关的一个定理是方余定理[2]。

定理 3.3.1. 方余定理 设 a 是模 n 简化同余系中某个同余类中的元素，则:

$$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$$

其中 $\varphi(n)$ 是模 n 简化同余系中同余类的个数。

比如，模 10 简化同余系有 4 个元素：$\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}$。7 属于同余类 $\overline{7}$，则 $7^4 \equiv_{10} 1$。

证明： 我们把模 n 简化同余系中的同余类用小于 n 且与 n 互素的正整数来代表，记为

$$1 = b_1 < b_2 < \cdots < b_{\varphi(n)} = n - 1.$$

它们两两不同余。把它们各自乘以 a，得到 $\varphi(n)$ 个整数：$ab_1, ab_2, \cdots, ab_{\varphi(n)}$。
前面我们已经证明了，它们仍然两两不同余。
这说明这 $\varphi(n)$ 个整数也分别代表模 n 简化同余系中的各个同余类。
考虑乘积：$b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}$。$(ab_1)(ab_2)\cdots(ab_{\varphi(n)})$ 和它同余。也就是说:

$$b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)} \equiv_n (ab_1)(ab_2)\cdots(ab_{\varphi(n)}) \equiv_n a^{\varphi(n)} b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(n)}.$$

[2]这个定理也称为欧拉定理。但以欧拉命名的定理太多了。为了避免混淆，这里不采用。

由于 $b_1b_2\cdots b_{\varphi(n)}$ 也与 n 互素，我们把等式两边除以 $b_1b_2\cdots b_{\varphi(n)}$，就得到：

$$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1.$$

□

如果 n 是素数，那么 $1,2,\cdots,n-1$ 都和它互素，于是模 n 的简化同余系就是 $\{\overline{1},\overline{2},\cdots,\overline{n-1}\}$，$\varphi(n)=n-1$。根据方余定理，只要 a 不是 n 的倍数，就有：

$$a^{n-1} \equiv_n 1.$$

这个结论也叫做费马小定理。

习题 3.3.1.

给定素数 n，证明：

1. 除了 $\overline{1}$ 和 $\overline{n-1}$，其它同余类的逆都不是自己。

2. $(n-1)! \equiv_n -1.$

设 a 与 n 互素，称使得 $a^m \equiv_n 1$ 的最小正整数 m 为 a 模 n 的**阶**。

3. 证明 a 的阶整除 $\varphi(n)$。

4. 如果 a 的阶等于 $\varphi(n)$，就说 a 是模 n 的**原根**。证明：如果 a 是模 n 的原根，那么模 n 简化同余系可以写成：$\{\overline{a^0},\overline{a^1},\cdots,\overline{a^{\varphi(n)-1}}\}$。

5. 找出所有模 7 的原根。

第四章　用数据说话

4.1　样本和特征

4.2　描述和分析

4.3　数据的结构

第五章　数学和社会

5.1　随时代变化的数学

5.2　数学和科学

5.3　数学和现代化