

极简数学·中学篇

第一册

大青花鱼

目录

第一章 从自然数到有理数	5
1.1 分数、整数、有理数	5
1.2 有理数的大小	7
1.3 数轴	8
1.4 乘方	8
第二章 从变量到方程（上）	11
2.1 数和代数	11
2.2 代数式	12
2.3 等式和方程	14
第三章 集合和映射	17
3.1 集合	17
3.2 映射	21
第四章 有理数的运算	23

4.1	有理数的加减法	23
4.2	有理数的乘除法	25
第五章	从变量到方程 (下)	29
5.1	一元一次方程	29
5.2	一元一次不等式	31
第六章	代数式的运算	37
6.1	整式的运算	37
6.2	分式的运算	39

第一章 从自然数到有理数

1.1 分数、整数、有理数

我们已经学过自然数： $0, 1, 2, 3, \dots$ 。自然数是 0 和 1 相加得到的数。从 0 开始，不断加 1，就能得到任何自然数。自然数之间做加法和乘法，得到的还是自然数。

加法和乘法都满足结合律和交换律，乘法满足对加法的分配律。

自然数是最自然产生的数。当人们发现两头牛和两天有共同之处时，自然数的概念就诞生了。

为了回答类似“三个人分七只鸡”的问题，人们发明了除法。除法是乘法的逆运算。除法产生了分数。自然数可以看作分母是 1 的分数。分数之间可以做加法、乘法和除法，得到的还是分数。

为了回答类似“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的问题，人们发明了减法。减法是加法的逆运算。比如， $3 + 2 = 5$ ，于是 $3 = 5 - 2$ 。

既然可以写出 $5 - 2$ ，那么可不可以写 $0 - 2$ 呢？ $0 - 2$ 有什么含义呢？

借用“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的思路， $0 - 2$ 可以表示“本没有鸡蛋，借来两个鸡蛋吃了两个还剩几个”。这里剩下的，是“欠两个鸡蛋”，是一种负债状态。因此，这样的数称为**负数**。

我们一般把 $0 - 2$ 中的 0 去掉, 只记为 -2 。 -2 满足 $-2 + 2 = 0$ 。对某个数, 比如 73 来说, $73 + (-2) = 73 + (0 - 2) = 73 - 2$ 。也就是说, 一个数加上 -2 , 就和减去 2 一样。以此类推, 可以得到:

$$-1, -2, -3, \dots$$

这些负数。它们由 $1, 2, 3, \dots$ 前加上减号得到, 表示 0 减去 $1, 2, 3, \dots$ 的结果, 读作“负一”、“负二”、“负三”等等。我们把负数带的减号称为**负号**(读作“负”), 和一般减法区别开来。

一般来说, 在任何分数前加上负号, 也可以得到一个负数, 表示 0 减去它的结果。

有没有 -0 呢? -0 就是 $0 - 0$, 也就是 0 自己, 所以就没有必要加负号了。

自然数和它们的负数合称**整数**。我们把 $-1, -2, -3, \dots$ 这些负数称为**负整数**, 把原来 $1, 2, 3, \dots$ 这些数称为**正整数**, 和负整数相对。由于 -0 就是 0 , 约定 0 既不是正数, 也不是负数。于是整数分为正整数、负整数和 0 。

分数和它们的负数合称**有理数**, 我们把带负号的分数称为**负有理数**或**负分数**, 把原来的分数(除了 0)称为**正有理数**或**正分数**。正有理数包括正整数, 负有理数也包括负整数, 有理数包括整数。

自然数或分数前面加负号得到的负数, 叫做它的**相反数**。反过来, 一个负整数或负数去掉负号得到的数, 也叫做这个它的相反数。约定 0 的相反数就是 0 。于是, 每个有理数都有唯一的相反数。除了 0 以外, 相反数总是成对的。一个有理数的相反数的相反数, 就是它自己。

思考 1.1.1. 在一个有理数前面加上负号, 一定会得到一个负数吗?

加上一个负数, 就和减去它的相反数一样。所以, 现实问题中遇到和加法对应的具体概念, 都可以用减法和负数表示相反或相对的概念。比如, 如果把“往东走三步”视作“ $+3$ ”, 那么“往西走两步”就可以视作“ -2 ”。“原

地往东走三步，再往西走两步”，就可以视作“ $0 + 3 - 2$ ”。计算得到 1，就表示最终和原来比，往东走了一步。

1.2 有理数的大小

加法不仅可以表达累加的概念，还可以用于比较大小。比如，5 比 3 大，可以理解为 5 是 3 再加自然数 2 得到的，而 3 却没法通过 5 加上一个自然数得到。一般来说，两个不同的自然数或分数，如果其中一个加上某个自然数或分数等于另一个，那么它比另一个数小，另一个数比它大。

用这个方法，我们可以比较有理数的大小。首先，任何负有理数加上它的相反数都得到 0，所以 0 大于任何负有理数。而任何正有理数都大于 0，所以任何正有理数大于任何负有理数。

我们约定大于 0 的数叫做**正数**，小于 0 的数叫做**负数**。正整数、正有理数都是正数，负整数、负有理数都是负数。这样的约定和前面负数的定义是一致的。

负有理数之间如何比较大小呢？举例来说， $0 = -3 + 3 = -3 + 1 + 2$ ，所以 $-3 + 1 = 0 - 2 = -2$ 。 -2 由 -3 加上自然数 1 得到，所以 -3 小于 -2 。进一步分析，我们发现，自然数 1 来源于“3 可以写成 $1 + 2$ ”。所以我们可以总结出两个负有理数比较大小的方法：看它们的相反数。相反数中较大的，可以写成较小数加上一个分数，于是，相反数较大的负有理数加上这个分数，就等于相反数较小的负有理数。因此，相反数较大的负有理数比较小，相反数较小的负有理数比较大。

正数和负数可以比较大小。所以，现实问题中涉及到相反或相对的概念比较大小时，可以用有理数表示。比如，今天延安的气温是 3.4 摄氏度，长春的气温是 -8.2 摄氏度，哈尔滨的气温是 -15.1 摄氏度，那么延安气温最高，长春气温比延安低，而哈尔滨气温又比长春低。

1.3 数轴

为了直观表示有理数，我们引入**数轴**的概念。

从左往右画一条直线，在中间取一点表示 0，称为**原点**。选择适当长度作为单位长度，规定右边是**正方向**，往右移动一个单位长度就是“+1”，那么，从原点出发，每隔单位长度取一个点，就可以表示出 $1, 2, 3 \cdots$ 。相对的，往左移动一个单位长度就是“-1”，类似可以表示出 $-1, -2, -3 \cdots$ 。这就是数轴。

数轴上的点，越往右就越大，越往左就越小。正数都在 0 右边，负数都在 0 左边。两个数比较大小，可以在数轴上找到对应的点：靠右的比较大，靠左的比较小。

数轴上的数还可以做加减法。在数轴上找到一个数 a 的位置，然后往右移动 b 个单位长度，就得到了 $a + b$ 。反之，往左移动 b 个单位长度，就得到了 $a - b$ 。

数轴上的相反数：3 是从原点往右移动 3 个单位长度到达的点，而 -3 是从原点往左移动 3 个单位长度到达的点。如果先往右移动 3 个单位长度，再往左移动 3 个单位长度，就会回到原点。一般来说，在数轴上先往右再往左（或先往左再往右）走一样多的单位长度，最终自然就回到原点。这说明任何数加上自己的相反数，都得到 0。

思考 1.3.1. 有理数在数轴上吗？怎么在数轴上找到一个有理数？

1.4 乘方

乘法可以更方便地表示若干个相同的数相加。比如，我们用 3×4 表示 $3 + 3 + 3 + 3$ 。那么，能不能方便地表示若干个相同的数相乘呢？

我们把 3×3 称为 3 乘 2 次方，把 $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ 称为 7 乘 5 次方。

同一个数连乘几次，叫做它乘几次方。连乘的结果，叫做它的几次方或几次幂。这种运算叫做乘方或乘幂。

我们把 7 的 5 次方记作 7^5 ，把 7 称为底数，把 5 称为指数。这样记法，比 $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ 更方便。

一个数的 1 次方就是它自己。一个数的 2 次方也叫做它的平方。一个数的 3 次方也叫做它的立方。

约定任何数的 0 次方是 1。

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7)$ 。用乘方表示这个关系，就是： $7^5 = 7^3 \times 7^2$ 。注意到 $5 = 3 + 2$ 。用日常的话来说，5 个 7 相乘，等于 3 个 7 相乘，再和 2 个 7 相乘。

同底数乘方的积，等于指数之和的乘方。乘方的乘法，可以转化为指数的加法。因此，乘方的除法，也可以转化为指数的减法。

比如， $7^{5-2} = 7^3 = 7^5 \div 7^2$ 。

既然乘方的乘除可以转化为指数的加减，那么是否有负指数？能否定义一个数的负数次方？

如果定义 7^{-3} 为： $7^{-3} \times 7^3 = 7^0 = 1$ ，那么 $7^{(-3)}$ 就等于 $\frac{1}{7^3}$ 。一个数的负几次方，就是 1 除以它的几次方。

显然，0 没有负数次方。

思考 1.4.1.

1. 约定任何数的 0 次方是 1，有什么好处？
2. 负数次方和前面负数的定义矛盾吗？

第二章 从变量到方程（上）

2.1 数和代数

讨论数的性质时，我们常常发现，总结一些普遍的规律，需要用很多话来说清楚。比如：

例子 2.1.1.

$$4 = 3 + 1, \quad 4^2 - 3^2 = 4 + 3.$$

$$5 = 4 + 1, \quad 5^2 - 4^2 = 5 + 4.$$

$$(2 \times 4 + 1)^2 = 8 \times 10 + 1.$$

$$(2 \times 5 + 1)^2 = 8 \times 15 + 1.$$

我们想总结两个对所有数都适用的规律，但只举了几个例子。这种方法不好。

有没有更好的方法呢？

对于第一个规律，我们可以说：如果天元比地元大 1，那么天元的平方减去地元的平方等于天元加地元。对于第二个规律，我们可以说，每个自然数两倍加 1 的平方除以 8 余 1。

我们用“天元”、“地元”、“每个自然数”代替了具体的 4 和 5，以说明这是更普遍的规律，而不是只对 4 和 5 成立的等式。这种思想叫做代数的

思想。代数可以让我们暂时忽略具体的数，把重点放在数与数之间的关系上。我们能轻松看出这些关系是普遍的，不依赖特定的数。我们把这样的关系叫做**代数关系**。

为了和数区别，“天元”、“地元”、“每个自然数”等称为**量**。量是对可以运算的概念的称呼。量可以有现实意义，比如物理学里会讨论物理量，也可以没有现实意义，比如数学中代替数的量可以称为数量。

在讨论问题的时候，如果我们认为一个量代替的数不会变化，就说这个量是**常量**；如果会变化，就说它是**变量**。

我们可以变量描述上面两个规律：

$$\text{如果天} = \text{地} + 1, \text{那么天}^2 - \text{地}^2 = \text{天} + \text{地}.$$

$$(2 \times \text{甲} + 1)^2 \text{除以} 8 \text{余} 1.$$

为了方便，我们一般用字母命名的变量来指代数。

$$\text{如果} a = b + 1, \text{那么} a^2 - b^2 = a + b.$$

$$(2 \times x + 1)^2 \text{除以} 8 \text{余} 1.$$

其中变量 a, b, x 可以变成 3, 4, 5 或任何一个自然数。

用变量代替数，可以用简明的语言揭示更复杂、更普遍的规律。

思考 2.1.1.

1. 用代数的方法，说一说怎样比较两个负有理数的大小。
2. 用代数的方法，定义一个数的负数次方。

2.2 代数式

含有变量的算式叫做**代数式**。为了区别，我们把只有数的算式叫做**数式**。

$a + 2$, $1.84 \times x - 3$, $0.79j^2 - \frac{h+1}{n} + 5$ 等等都是代数式。

数式既表示计算过程，也表示计算的结果：一个数。把数式中的数用变量代替，我们不再计算结果，只关心计算过程本身。这对我们找出并解释计算过程中的规律很有帮助。掌握了计算的规律后，我们再用具体的数代替变量（称为**取值或代入**），就能更快更好地算出结果。

乘号 \times 和 x 或 X 很像，为了避免混淆，一般省略乘号，或用 \cdot 代替乘号。 $1.84 \times x - 3$ 可以写成 $1.84x - 3$ 或 $1.84 \cdot x - 3$

代数式中不同的变量称为**元**。只与一个变量有关的式子叫做**一元式**，和多个变量有关的式子叫做**多元式**。

变量和数通过四则运算得到的代数式，叫做**有理式**。变量和数通过加法、减法和乘法得到的代数式，叫做**整式**。如果除法中涉及了变量，就叫**分式**。有理式中除了整式，就是分式。

例子 2.2.1.

整式： $x^3 + 5x - 3.32$, $a + b^2 - 2C$, $(b - 4)^9$.

分式： $\frac{1-0.9r+v^2}{3B-k}$, $n^2 - 7 + \frac{0.88}{(H-6)^3}$, $t - (t + 0.382g)^{-3}$.

我们知道，数的乘法比加减法优先。比如，计算 $4 + 3 \times 6$ 时，我们要先计算 $3 \times 6 = 18$ ，再计算 $4 + 18 = 22$ 。先计算加法是不对的。代数式特别是整式中，我们也更关心乘法。我们把变量和数相乘的部分称为**项**。 $0.54xba$, $-1.24 \cdot gb \cdot 1.19 \cdot g^2$, $u \cdot 98K$ 各是一项， $10b - V$ 是两项的差。

项是变量和数的乘积。变量之间不一定能运算，但数与数之间可以运算。我们可以把项中所有的数相乘，放在最前面，叫做项的**系数**。其次，同一个变量多次相乘，可以放在一起，作为连乘，用乘方表示。这样得到更简洁清晰的项，称为代数式**化简**。代数式某一项化简后，总是一个数乘以若干个变量的乘幂。

如果某一项是另一项乘以某个（不是零的）数，就说它们是同类项。同

类项的变量部分相同, 因此根据乘法分配律, 可以合并, 规则是把系数相加。比如, $3.52x^2y$ 可以和 $0.19x^2y$ 合并, 得到 $3.71x^2y$ 。合并同类项也是代数式化简的一部分。

一项中所有变量的指数的和, 叫做它的**次数**。比如 $3.71x^2y$ 的次数是 3, 它可以叫 3 次项。不含变量部分的项叫**常数项**。常数项次数为 0。

整式是变量和数通过加减法和乘法得到的代数式。由于乘法优先计算, 可以认为整式是一些项做加减法得到的。合并同类项后, 如果只剩下一项, 就说它是**单项式**。一般来说剩下不止一项, 称为**多项式**。多项式的每一项都是单项式。多项式次数最高的项叫做最高次项。最高次项的次数就叫多项式的次数。如果多项式每一项次数都相等, 就称它为**齐次多项式**。

习题 2.2.1.

1. 合并同类项:

- $3 + 9x^3 + 5x - 7x^3 - 3.32 - 1.05x$
- $ab^2 + (c - b)a^2 - ba(b - c) + c(b + a)c + (a - c)b(c + a) - (b + c)bc.$

2. 判断是否是齐次多项式:

- $\frac{(a+b)^3}{a-b}$
- $a^4 - bx^3$
- $a^4b^4 \left(\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{a} \right)^4$

2.3 等式和方程

等式就是把两个式子或多个式子用等号连起来。**不等式**就是把两个式子或多个式子用不等号连起来。一般情况, 默认是两个式子。

等式可以是真的, 也可以是假的。前者也叫等式成立, 后者也叫等式不成立。

按大小关系，**不等号**分为两类：大于类和小于类。按是否包含相等关系，不等号分为两类：严格类和可等于类。一共有四个不等号：“ $<$ ”（严格小于），“ \leq ”（小于等于），“ $>$ ”（严格大于），“ \geq ”（大于等于）。

等式的基本性质：两边同时加、减、乘、除同一个量，成立的等式仍然成立。

为了解决生活中的问题，我们学过简单的方程。把未知的数，用变量表示。问题中的相等关系，就变成了含变量的等式，称为**方程**。解决这个问题，求出变量的值，称为**解方程**。变量的值称为**方程的解**。

如果问题中的条件是不等关系，我们就得到了含变量的**不等式**。解决这个问题，求出变量的值，称为**解不等式**。变量的值称为**不等式的解**。

第三章 集合和映射

3.1 集合

我们用集合表示一类事物。把不同性质的事物聚集在一起，合起来考虑，就是**集合**，简称**集**。构成集合的事物称为集合的**元素**。

1. 集合的元素互不相同。
2. 集合的元素没有顺序。
3. 集合的元素是确定的：一个事物要么属于该集合，要么不属于。

某个事物 a 属于集合 A ，记作 $a \in A$ 。某个事物 a 不属于集合 A ，记作 $a \notin A$ 。

例子 3.1.1.

可以在大括号中列出集合的元素，比如： $\{1, 2, 3\}$ 是一个集合， $\{1, 2, 2, 3\}$ 不是集合。

也可以在大括号中用条件描述集合。集合的元素是满足条件的元素，比如： $\{a|a \text{ 是偶数}\}$ 。竖线左边是元素的样子，右边是它满足的条件。

还可以直接用文字描述集合，比如：一年的十二个月份是一个集合。

除了以上方式，也可以用示意图、图表、列表等方式表示集合。

没有元素的集合称为**空集**，记为 \emptyset 。

自然数、整数、分数、有理数都是集合。自然数一般简记为 \mathbb{N} ，分数一

一般简记为 \mathbb{F} ，整数一般简记为 \mathbb{Z} ，有理数一般简记为 \mathbb{Q} 。“ a 是自然数”可以记为 $a \in \mathbb{N}$ 。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，就说 A 是 B 的**子集**，记为 $A \subseteq B$ ， B 是 A 的**母集**，记为 $B \supseteq A$ 。如果两者不相同，就说 A 是 B 的**真子集**，记为 $A \subset B$ ， B 是 A 的**真母集**，记为 $B \supset A$ 。

如果 A 是 B 的子集，那么 B 中不属于 A 的元素也构成一个集合，称为 A 在 B 中的**补集**，记为 $B \setminus A$ 。讨论问题的时候，我们可能会默认某个集合是问题涉及的所有事物的集合，其他集合都是它的子集。这样的集合一般称为**全集**。全集存在的时候，集合 A 在全集中的补集可以简称为 A 的补集，记为 \bar{A} 或 A^c 。

自然数集、整数集、分数集和有理数集有以下关系：

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{Q}$$

以上每个集合中的正数与负数，构成它的子集，一般用上标 $+$ 和 $-$ 标示。比如， \mathbb{Z}^+ 就表示正整数集合， \mathbb{Q}^- 就表示负有理数集合。

考虑若干个集合。由属于其中至少一个集合的元素构成的集合，称为这些集合的**并集**；由属于所有集合的元素构成的集合，称为这些集合的**交集**。两个集合 A, B 的并集记为 $A \cup B$ ，交集记为 $A \cap B$ 。

几个集合交集为空集，就说它们**不相交**。几个集合中任取两个，都不相交，就说它们两两不相交。如果集合 A 的一些子集两两不相交，而且它们的并集是 A ，就说这些集合是 A 的**分划**。

判断和集合有密切的关系。把一个判断涉及的个体看作全集，使判断为真的个体就是全集的一个子集，使判断为假的个体就是它的补集。比如“自然数 n 能被 3 整除”这个判断，涉及了自然数这个全集。使它为真的自然数构成自然数集的子集，使它为假的自然数的集合是前者的补集。

全判断和有判断，也包含了集合的概念。比如，“所有兔子的眼睛都是红的”这个判断中，“所有兔子”可能指世界上所有的兔子，也可能指说话的人面前的几只兔子，因此是含混不清的。只有当我们把兔子的集合确定下来，比如“贵州毕节市黔西县境内的兔子”，这个判断才是清楚无疑的。同样地，“至少有一个学生得了满分”这个判断，也要在明确了学生的集合，比如“黎阳小学 2020 级三班的全体学生”，才是有意义的。

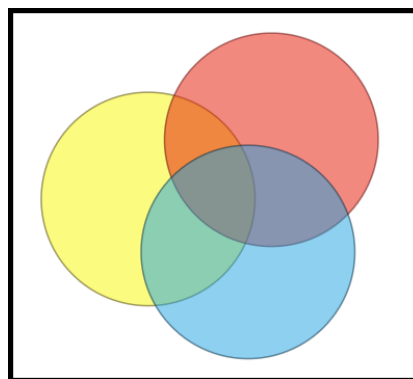
数学中，也有各种判断。为了方便，我们引进两个符号： \forall 和 \exists 。 \forall 表示“任一”、“每个”， \exists 表示“存在”、“至少有一个”。对某个集合 A 中元素的全判断，可以写成 $\forall x \in A, P(x)$ ；对某个集合 A 中元素的有判断，可以写成 $\exists x \in A, P(x)$ 。其中 $P(x)$ 表示一个包含变量 x 的判断。

比如，“所有 10 的倍数，个位数都是 0”可以写成： $\forall x \in \mathbb{N}, 10x$ 的个位数是 0。“至少有一个一位数比 5 大”可以写成： $\exists x \in [0, \dots, 9], x > 5$ 。

复合判断也可以用集合的方式表达。

为了更好理解，我们可以用**叠圈图**直观理解集合的关系。

如右图，每个圈表示一个集合，圈内的区域表示属于该集合的元素，圈外的区域表示不属于该集合的元素，也就是该集合（关于全集的）补集。两个圈重叠的部分就表示同时属于两者的元素的集合，也就是两个集合的交集。而两个圈各自的部分加上重叠的部分，就是至少属于其中之一的元素的集合，也就是两个集合的并集。



叠圈图可以让我们直接看到集合之间的关系。

联言判断是多个判断的全判断。使各个判断为真的个体都构成一个集合 S_i ，因此，通过这些集合的集合 I ，可以给出使联言判断为真的个体对

应的集合：

$$\{x \mid \forall i \in I, x \in S_i\}$$

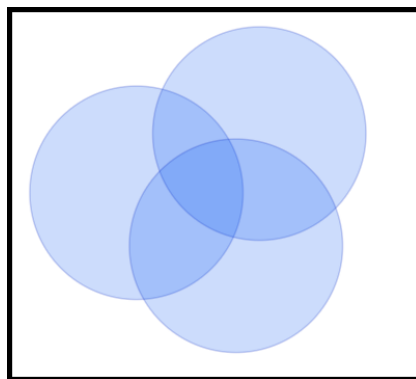
这个集合是各个集合 S_i 的交集，我们将它记为： $\bigcap_{i \in I} S_i$.

或言判断是多个判断的有判断。因此，使或言判断为真的个体对应的集合：

$$\{x \mid \exists i \in I, x \in S_i\}$$

这个集合是各个集合 S_i 的并集，我们将它记为： $\bigcup_{i \in I} S_i$.

右图中，联言判断对应着所有圈交叠的区域（颜色最深的部分），而或言判断对应着所有蓝色的区域的总和。



习题 3.1.1. 验证集合满足以下性质：

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup A = A \cap A = A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 如果 $A \subseteq B$, 那么 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

思考 3.1.1. 有个理发师，坚持只给那些不给自己理发的人理发。那么，他是否该给自己理发呢？

3.2 映射

我们用**映射**表示事物之间的对应关系。把一个事物对应到另一个事物，可以理解为事物的变换或对事物进行操作。因此映射也叫做**变换**或**操作**。**函数**是把数量对应到数量的映射。

我们把映射涉及的事物用两个集合记录：**出发集**和**到达集**。映射把出发集的一个元素对应到到达集的一个元素。用变量 x 指代出发集的元素， x 的取值在出发集里变化时，映射对应的元素也在到达集里变化，可以用变量 y 表示。一般称 x 为**自变量**， y 为**应变量**。

如果把映射记作 f ，那么可以用 $y = f(x)$ 或 $f: x \mapsto y$ 表达“映射把出发集的元素和到达集的元素对应起来”这件事。

出发集中，某个映射涉及的元素集合称为映射的**定义域**；到达集里，某个映射涉及的元素集合则称为映射的**值域**。定义域是出发集的子集，值域是到达集的子集。

需要强调的是，映射可以把多个元素对应到同一个元素，但不会把一个元素对应到多个元素。

确定了定义域后，每个一元式都可以定义一个映射。比如，设定定义域是自然数集 \mathbb{N} 后，代数式 $4 - 0.3x + 9x^2 + \frac{(1-x+2.69x^4)}{0.5x-1.385}$ 就可以定义映射：

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto 4 - 0.3x + 9x^2 + \frac{(1 - x + 2.69x^4)}{0.5x - 1.385}.$$

这里我们把映射的定义域设为自然数集： \mathbb{N} 。如果把定义域设成另一个集合，比如 $\{1, 2, 3\}$ 或全体偶数，就定义了另一个映射。

确定了定义域后，每个含有变量的判断也可以定义一个映射。比如，设定定义域是 $\{1, 2, 5, 6\}$ 后，“ $3n + 1$ 能被 5 整除”就可以定义映射：

$$\forall n \in \{1, 2, 5, 6\}, \quad n \mapsto 3n + 1 \text{ 能被 5 整除}.$$

思考 3.2.1. 全判断 $\forall x \in A, P(x)$ 和映射 $\forall x \in A, x \mapsto P(x)$ 之间存在什么关系?

第四章 有理数的运算

我们已经学过自然数和分数的运算。两个自然数可以做加法、减法和乘法，任两个分数可以做加法、减法、乘法和（不为零的）除法。把自然数、分数扩展到有理数后，两个有理数可以做加法、减法、乘法和不为零的除法。

有理数的运算和自然数、分数相比，多了与负数有关的运算。为了讨论方便，我们首先介绍一个表示负数的方法：每个负数都能表示成 $-a$ 的形式，其中 a 是它的相反数，是一个正数。

4.1 有理数的加减法

我们先来看与负数有关的加减法。按照负数的定义，任何负数 $-a = 0 - a$ 。所以，一个数加上一个负数，就等于减去它的相反数：

$$b + (-a) = b + (0 - a) = b - a$$

换句话说，一个数减去一个正数，就等于加上它的相反数。另一方面，一个数减去一个负数，也等于加上它的相反数：

$$b - (-a) = b - (0 - a) = b + a$$

两者可以用同一句话描述：减去一个数，等于加上它的相反数。

于是，有理数的减法总可以转化为有理数的加法。

再来看两个有理数的加法。如果两者都是正数，就是我们熟悉的分数加法。如果被加数是正数，加数是负数，那么和等于被加数减加数的相反数：

$$b + (-a) = b - a$$

式子中 a 和 b 都是正数。如果 $b > a$ ，那么和是正数。如果 $b < a$ ，和是负数，它的相反数是：

$$-(b - a) = 0 - (b - a) = a - b$$

因此和是 $a - b$ 的相反数。

如果被加数是负数，加数是正数，那么和等于加数减被加数的相反数：

$$(-a) + b = 0 - a + b = b - a$$

式子中 a 和 b 都是正数。类似地，如果 $b > a$ ，那么和是正数。如果 $b < a$ ，和是负数，相反数是 $a - b$ 。如果两者都是负数，和也是负数：

$$(-a) + (-b) = 0 - a + (0 - b) = 0 - a - b$$

这个和加上 $a + b$ 等于 0，因此，和是 $a + b$ 的相反数。

看得出，上面讨论中 a 和 b 以及它们的大小关系很重要。为了方便总结，我们引进**绝对值**的概念：

定义 4.1.1. 正数的**绝对值**是它自身，负数的绝对值是它的相反数。0 的绝对值是 0。

按照这个定义，可以把前面讨论的结果简化：

如果两个有理数同为正数（负数），那么它们的和也是正数（负数），绝对值是它们绝对值的和。如果两个有理数一正一负，那么它们的和的正负

与两者绝对值较大者的正负一致，和的绝对值是绝对值较大者减去绝对值较小者的差。

总结两个有理数的加减法：

1. 将减法改为加法。
2. 任何数与 0 相加都得到自身。
3. 计算两个数的绝对值。
4. 如果两个数同正负，取绝对值的和，加上对应的正负号。
5. 如果两个数一正一负，用较大的绝对值减去较小的绝对值，加上绝对值较大的数的正负号。

习题 4.1.1. 计算：

$$2.56 - (-1.9), (-4) + 3.29, 10.8 + (-42.15).$$

$$-59.76 + 40.3, -2.8 - 6.6, -5.09 - (-2.9).$$

$$-1.76 - (-5.21) - 1.874, 3.202 - (-1.94) - 1.57, 2 + (-9.18) - (20.354).$$

$$3 - 2 - (-8) + (-2.2), -8.1 - ((-1.6) - 1.96 + (-3.9 + 1.203)).$$

4.2 有理数的乘除法

讨论有理数的乘除法，可以从最简单的情况开始： $(-1) \times 1$ 和 $(-1) \times (-1)$ 。按照定义，

$$(-1) \times 1 = (0 - 1) \times 1 = 0 \times 1 - 1 \times 1 = 0 - 1 = -1.$$

同理， $(-1) \times 0 = 0$ ，于是：

$$\begin{aligned} (-1) \times (-1) &= (-1) \times (0 - 1) \\ &= (-1) \times 0 - (-1) \times 1 \\ &= 0 - (-1) = 1. \end{aligned}$$

类似的还有 $1 \times (-1) = 1$ 以及 $0 \times (-1) = 0$ 。所以， -1 的乘法性质可以归纳为“负零得零，负正得负，负负得正”。

同理，把乘数换成一般的数，也有：

$$(-1) \times a = 0 - a = -a, \quad (-1) \times (-a) = (-1) \times (0 - a) = a.$$

也就是说，一个数乘以 -1 ，总得到它的相反数。任何负数都等于它的绝对值乘以 -1 。

因此，两个有理数相乘，乘积的绝对值总是两者绝对值的乘积，只需把 -1 作为因子提出来，然后看 -1 的个数确定乘积的正负就可以了。如果两个数都是正数，那么不需要考虑 -1 的问题。如果两者一正一负，那么有一个 -1 ，乘积是负数，如果两个数都是负数，有两个 -1 ，“负负得正”，于是乘积是正数。

如果乘数或被乘数是 0 ，结果是 0 。

除法是乘法的逆运算，我们只需要把涉及负数的除法转为乘法即可。

除数是正有理数 a 的时候，除以 a 等于乘以它的倒数： $\frac{1}{a}$ 。

除数是负有理数 $-a$ 的时候，我们要找到 $b \div (-a)$ ，也就是使得 $c \times (-a) = b$ 的数 c 。根据前面对乘法的推导， $b \times (-1) \times \frac{1}{a} = c \times a \times \frac{1}{a} = c$ ，或者说

$$c = b \times \left((-1) \times \frac{1}{a} \right)$$

其中的关键是说明 $(-a)$ 存在倒数： $-\frac{1}{a}$ 。

$$(-a) \times \left(-\frac{1}{a} \right) = (-a) \times \left((-1) \times \frac{1}{a} \right) = a \times \frac{1}{a} = 1.$$

所以无论除数是正有理数还是负有理数，除以一个数，等于乘以它的倒数。

综上所述，可以这样总结有理数的乘除法：

1. 将除法改为乘法。
2. 任何数与 0 相乘都得到 0。
3. 计算两个数的绝对值。
4. 如果两个数同正负，取绝对值的乘积。
5. 如果两个数一正一负，取绝对值乘积的相反数。

习题 4.2.1.

计算：

$$4.51 \times (-2.2), (-1.2) \times (-3.9), (-1.8) \times 0.8.$$

$$1.98 \div (-0.3), -2.8 \div (-0.7), 5.2 \div (3 \div (-1.5)), (-3) \div (0.5 \times (-2.4)).$$

补充：

1. 说明“任何数与 0 相加都得到自身”。
2. 说明“任何数与 0 相乘都得到 0”。
3. 说明“涉及负数的乘法也满足交换律和分配律”。

第五章 从变量到方程（下）

5.1 一元一次方程

例子 5.1.1. 根据以下问题，设未知数并列出方程：

- (1). 用一条 50 厘米长的丝带给一个正方形的盒子包装，捆好一周后，还有 26 厘米可以用于打结。盒子的边长是多少？
- (2). 把一箱书分给某组学生阅读。如果每人分 3 本，则剩余 20 本；如果每人分 4 本，则还差 16 本。这个班有多少学生？

解答.

- (1) 解：设盒子的边长是 x 厘米，列方程：

$$4x + 26 = 50.$$

- (2) 解：设这个班有 x 个学生，列方程：

$$3x + 20 = 4x - 16.$$

以上的方程叫做一元一次方程。一元一次方程是由关于变量的一元一次式构成的方程，它的一般形式是： $ax + b = cx + d$ 。其中 a, b, c, d 称为方程的系数。

系数 a, b, c, d 取定值的时候，根据等式的基本性质，我们可以求出等式成立时变量 x 的值。首先，我们把含有变量的项移到等式一边，把常数项

移到等式另一边。利用等式的基本性质，我们将等式两边同时减去 b ，再同时减去 cx ，得到 $ax - cx = d - b$ 。

ax 和 cx 都是只含有 x 的一次项，它们之间只差一个系数，所以可以合并同类项： $ax - cx = (a - c)x$ 。

如果 $a \neq c$ ，那么可以把等式两边同除以 $a - c$ ，得到 $x = \frac{d-b}{a-c}$ 。这就是方程的解。

如果 $a = c$ ，那么我们得到 $0 = d - b$ 。如果 $b \neq d$ ，那么这个等式总是不成立的。任何 x 的值都不能使等式成立。我们说方程无解。如果 $b = d$ ，那么我们得到 $0 = 0$ 。这个等式总是成立的。任何 x 的值都能使等式成立。我们说方程有任意解。

使方程的等式成立的值是一个集合，称为它的解集，所以，我们把上面的说法用集合的说法再表述一次：方程无解，就是说方程的解集是空集。方程有任意解，就是说方程的解集是全集。方程有唯一解 $x = \frac{d-b}{a-c}$ ，就是说方程的解集就是 $\{\frac{d-b}{a-c}\}$ ，我们把这种只含有一个元素的集合称为**单元集**。

解答. 按这个方法，我们可以解以上两个问题中的方程：

(1) 解：设盒子的边长是 x 厘米，列方程：

$$4x + 26 = 50.$$

等式右边没有含变量的项，我们将等式两边同时减去 26，得到：

$$4x = 50 - 26.$$

即：

$$4x = 24.$$

再将等式两边同时除以 4，就得到解： $x = 6$ 。

答：盒子的边长是 6 厘米。

(2) 解：设这个班有 x 个学生，列方程：

$$3x + 20 = 4x - 16.$$

将等式两边同时减去 20，再将等式两边同时减去 $4x$ ，得到：

$$3x - 4x = -20 - 16.$$

左边合并同类项，右边计算减法，就得到：

$$-x = -36.$$

再将等式两边同时除以 -1 ，就得到解： $x = 36$ 。

答：这个班有 36 个学生。

我们可以这样总结一元一次方程 $ax + b = cx + d$ 的解：

$$\left\{ \begin{array}{l} a \neq c \text{ 有唯一解: } \frac{d-b}{a-c} \\ a = c \left\{ \begin{array}{ll} b \neq d & \text{无解} \\ b = d & \text{有任意解} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

5.2 一元一次不等式

例子 5.2.1. 根据以下问题，设未知数并列出不等式：

- (1). 海水的盐度是 0.351%，生理盐水的盐度是 0.9%，一千克海水中至少要加入多少克纯水，才能让盐度降到生理盐水的盐度以下？
- (2). 100 亩地规划种植葡萄。食用葡萄每亩年收益为 0.4 万元，酿酒葡萄每亩年收益为 0.6 万元。规划年收益 52 万元。要如何安排种植？

解答.

- (1) 解：设要加 x 克水，题目条件可以写成：

$$\frac{1000 \times 0.351\%}{1000 + x} < 0.9\%.$$

由题目条件，可以假设 $1000 + x$ 是正数，两边乘以左式分母，得到：

$$1000 \times 0.351\% < 0.9\% \times (1000 + x).$$

(2) 解：设 x 亩地种食用葡萄，那么 $100 - x$ 亩地种酿酒葡萄，题目条件可以写成：

$$0.4 \times x + 0.6 \times (100 - x) \geq 52.$$

一元一次不等式和一元一次方程很像，也涉及关于变量的一元一次式。一元一次方程中，两个一元一次式有相等关系，一元一次不等式中，两个一元一次式有不等关系。区别在于，相等关系只有一种，而不等关系有两类四种。

不等式的基本性质和等式有什么共同点，又有什么区别呢？

例子 5.2.2. 观察以下不等式，你能发现什么规律？

- (1). $2 < 3, \quad 3 < 4, \quad 6 < 7$
- (2). $4 \leq 7, \quad 6 \leq 10.5, \quad 1.2 \leq 2.1, \quad 28 \leq 49$
- (3). $3 < 5, \quad 9 < 15, \quad -6 > -10, \quad -0.36 > -0.6$
- (4). $-7 \leq 1, \quad 7 \geq -1, \quad -1.4 \leq 0.2, \quad 1.19 \geq -0.17$

等式的基本性质是：等式两边加、减、乘、除以同一个量，成立的等式仍然成立。

不等式两边加减同一个量，成立的不等式仍然成立。不等式两边乘以或除以同一个量，成立的不等式不一定成立。

我们观察到，只有当不等式两边同时乘以或除以正数的时候，不等式仍然成立；不等式两边同时乘以或除以负数的时候，不等式不再成立，反号的不等式反而成立。

为什么乘除法和加减法有这样的区别呢？因为大于、小于这些不等关系是按照加减法定义的。我们可以看以下的例子：

例子 5.2.3. 观察以下的式子，不等关系之间有什么联系？

(1). $2 < 3, \quad 3 > 2, \quad -2 > -3, \quad -3 < -2$

(2). $4 \leq 7, \quad 7 \geq 4, \quad -7 \leq -4, \quad -4 \geq -7$

一般来说，两个数 a, b 的不等关系是**互反**的：如果 $a < b$ ，那么 $b < a$ ，反之亦然；如果 $a \leq b$ ，那么 $b \geq a$ ，反之亦然。左右边互换的时候，不等号要反过来。而两个数的相等关系是**自反**的：如果 $a = b$ ，那么 $b = a$ 。左右边互换的时候，等号仍然是等号。

从 $2 < 3$ 到 $-2 > -3$ ，可以理解为两边同时乘以 -1 ；也可以理解为两边同时减去 2，再同时减去 3，然后左右边互换。左右边互换时，不等式反号。如果两个数相等，那么左右边互换时不需要反号，或者说，等号的反号仍然是等号（因此说相等关系是自反的）。

追根究底，不等关系反映了数与数之间的顺序，相等关系反映了数与数之间有共同之处。它们代表了数的不同性质。

一元一次不等式的解法，思路和一元一次方程类似。我们都希望把一次项整理到不等式一边，把常数项整理到不等式另一边，然后合并同类项，最后两边同时除以变量 x 的系数，求出 x 的解。

因此，在处理一元一次不等式的时候，可以有两种方式。要么用加减法使一次项的系数变成正数，然后两边同时除以系数得到解。这个方法不需考虑做除法时不等式反号的问题；要么不要求一次项的系数是正数，两边同时除以一次项系数的时候，视情况决定不等号是否要反号。

解答. 按这个方法，我们可以解以上两个问题中的不等式：

(1) 解：设要加 x 克纯水，题目条件可以写成：

$$\frac{1000 \times 0.35\%}{1000 + x} < 0.9\%.$$

由题目条件, 可以假设 $1000 + x$ 是正数, 两边乘以左式分母, 得到:

$$\begin{aligned} 1000 \times 0.351\% &< 0.9\% \times (1000 + x) \\ 3.51 &< 9 + 0.009x \\ 3.51 - 0.9 &< 0.009x \\ 2.61 &< 0.009x \end{aligned}$$

两边同时除以正数 0.009, 得到:

$$\frac{2.61}{0.009} < x$$

即:

$$x > \frac{2.61}{0.009} = 290.$$

此时 $1000 + x > 1290 > 0$, 符合假设。

答: 至少要加 290 克纯水。

(2) 解: 设 x 亩地种食用葡萄, 那么 $100 - x$ 亩地种酿酒葡萄, 题目条件可以写成:

$$\begin{aligned} 0.4 \times x + 0.6 \times (100 - x) &\geq 52 \\ 0.4x - 0.6x + 60 &\geq 52 \\ -0.2x &\geq 52 - 60 \\ -0.2x &\geq -8 \end{aligned}$$

一次项系数 -0.2 是负数, 所以两边同时除以 -0.2 , 不等式反号:

$$x \leq \frac{-8}{-0.2}$$

得到 $x \leq 40$ 。由问题条件, x 还需要满足 $0 \leq x \leq 100$, 所以解为: $x \leq 40$ 且 $0 \leq x \leq 100$, 也就是 $0 \leq x \leq 40$ 。

答: 至多 40 亩地种食用葡萄, 其余的地种酿酒葡萄。

可以看到，一元一次不等式的解与一元一次方程的解是不一样的。一元一次方程的解总是单元集、全集或空集，一元一次不等式的解一般既不是全集、也不是单元集或空集。

另外要注意的是，在解决实际问题的時候，往往需要根据题目条件做一些额外的假设，才能列出方程或不等式。解完方程、不等式后，应该及时检验得到的解，看是否能让这些假设成立。

综上所述，可以这样总结解一元一次不等式的方法：

方法一：

1. 通过两边同时加减法，将一次项移到不等式一边，将常数项移到另一边，并保证一次项系数不是负数。
2. 如果一次项系数等于 0，比较不等式两边：
 - 2.1. 如果不等式成立，则原不等式有任意解。
 - 2.2. 如果不等式不成立，则原不等式无解。
3. 如果一次项系数大于 0，将两边同时除以一次项系数，得到不等式的解。

方法二：

1. 通过两边同时加减法，将一次项移到不等式一边，将常数项移到另一边。
2. 如果一次项系数等于 0，比较不等式两边：
 - 2.1. 如果不等式成立，则原不等式有任意解。
 - 2.2. 如果不等式不成立，则原不等式无解。
3. 如果一次项系数大于 0，将两边同时除以一次项系数，得到不等式的解。
4. 如果一次项系数小于 0，将两边同时除以一次项系数，并将不等式反号，得到不等式的解。

第六章 代数式的运算

代数式是含有变量的算式。代数式的运算和数式并没有区别。毕竟，代数式里的变量只是用来代替数的。对代数式做运算，使用和数式运算一样的规则：加法结合律、乘法结合律、加法交换律、乘法交换律，以及乘法对加法的分配律。

6.1 整式的运算

例子 6.1.1. 计算：

1. $(a + b)(a - b)$

解：

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) \\&= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b \\&= a^2 + (-1 + 1)ab - b^2 \\&= a^2 - b^2\end{aligned}$$

$$2. (a^2 + ab + b^2)(a - b)$$

解:

$$\begin{aligned}(a^2 + ab + b^2)(a - b) &= a^2 \cdot (a - b) + ab \cdot (a - b) + b^2 \cdot (a - b) \\&= a^2 \cdot a - a^2 \cdot b + ab \cdot a - ab \cdot b + b^2 \cdot a - b^2 \cdot b \\&= a^3 + (-1 + 1)a^2b + (-1 + 1)ab^2 - b^3 \\&= a^3 - b^3\end{aligned}$$

与整式有关的计算，一个常见的目标是把式子**展开**，也就是把几个整式的乘积转成一个整式：单项式或多项式。展开整式，可以按照以下步骤操作：

1. 用分配律把整式乘积转为整式中各项的乘积之和。
2. 合并同类项（用到结合律和交换律）。

比如，在第一个例子中，我们首先把 $a - b$ 看成一个整体，把 $a + b$ 看成两项相加。使用分配律，就把 $(a + b)(a - b)$ 转为 $a \cdot (a - b)$ 与 $b \cdot (a - b)$ 的和。接下来，我们把 $a - b$ 看成两项相减，再次使用分配律，就把 $(a + b)(a - b)$ 完全转成若干项的和：

$$a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b$$

接着，我们合并同类项。使用交换律，可以知道 $ab = ba$ ，所以这两项是同类项，可以合并。合并后，系数是 $-1 + 1 = 0$ ，所以这 ab 项被消去了。剩下的两项无法合并同类项了。于是我们最后得到：

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

另一种常见的代数式计算叫做**变量代换**。我们知道，变量是用来代替数的。其实，变量也可以用来代替变量。用变量代替变量，可以变化代数式的形式，很多时候，可以帮助我们更好地理解事物间的关系。

举例来说, 我们想展开 $(a - 2b + 1)(a - 2b - 1)$, 除了像上面的例子一样直接使用分配律然后合并同类项, 还有什么别的方法吗? 我们可以观察到, 这个式子是两个整式的乘积, 第一个是 $a - 2b$ 与 1 的和, 第二个是 $a - 2b$ 与 1 的差。于是, 我们可以把 $a - 2b$ 看成一个整体, 把 1 看成一个整体。我们用变量 x 代替 $a - 2b$, y 代替 1, 那么原式就变成了 $(x + y)(x - y)$, 于是等于 $x^2 - y^2$ 。

我们再把 x 和 y 代替的变量和数代回去, 就得到 $(a - 2b)^2 - 1^2$ 。 $1^2 = 1$, 所以我们现在只需要展开 $(a - 2b)^2$ 了。

数学中常用的整式等式:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$$

$$a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a + b)(a + c) = a^2 + ab + ac + bc$$

$$(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

习题 6.1.1. 验证以下等式:

$$1. (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

$$2. a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a + b).$$

$$3. 3(a - b)(b - c)(c - a) = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$$

求以下代数式中 x^3 的系数:

$$1. (x - 2)^5.$$

$$2. (x^2 - x + 1)(x^3 - x^2 + 2x - 1).$$

6.2 分式的运算

例子 6.2.1. 通分:

$$1. \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

解:

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} &= \frac{(b+c)bc + (a+c)ac + (a+b)ab}{abc} \\ &= \frac{a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2}{abc} \end{aligned}$$

$$2. \frac{a+2b}{a+b-1} - \frac{a+b+1}{a-b+1}$$

解:

$$\begin{aligned} \frac{a+2b}{a+b-1} - \frac{a+b+1}{a-b+1} &= \frac{(a+2b)(a-b+1) - (a+b+1)(a+b-1)}{(a+b-1)(a-b+1)} \\ &= \frac{a^2 - ab + a + 2ab - 2b^2 + 2b - (a^2 + 2ab + b^2 - 1)}{(a+b-1)(a-b+1)} \\ &= \frac{-ab - 3b^2 + a + 2b + 1}{(a+b-1)(a-b+1)} \end{aligned}$$

习题 6.2.1. 验证以下等式:

$$1. \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}.$$

$$2. \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

求以下代数式中 x 的系数:

$$1. (x^2 - \frac{1}{x})^5.$$

$$2. (x - x^2 - \frac{1}{x} + 1)(x^2 + x + 3 - \frac{2}{x}).$$