第五册

大青花鱼

目录

第一章　圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

1.1　圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点 O 距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段 XY，到 O 的距离和 AB 等长的点构成一个圆。O 叫做**圆心**，XY 叫做圆的**半径**，长度一般记为 r。不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为 O、半径为 r 的圆，一般记为圆 (O,r) 或 $\odot_{(O,r)}$。圆心 O 和另一点 P 确定的圆，一般记为圆 (O,P) 或 $\odot_{(O,P)}$。如果不在意半径，在不至于混淆的情况下，也可以简记为圆 O。

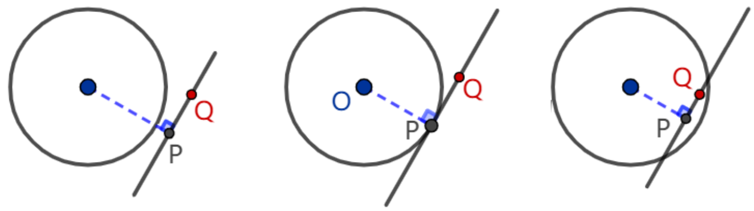
平面上的点到 O 的距离小于 r，就说它在圆内；如果等于 r，就说它在圆上；如果大于 r，就说它在圆外。

和引进直线等概念时一样，圆也有一条公理，规定它和直线的关系。

公理 1. 直线交圆公理 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

从这个公理出发，我们可以整理直线和圆的位置关系。

考虑直线 l 和圆 $\odot_{(O,r)}$。过 O 作直线 $m \perp l$，记垂足为 P，$|OP| = d$。



1. 如果 $d > r$，那么 P 在圆外。根据垂距定理，l 上任意点都在圆外。我们说直线 l 与圆 O **相离**。反之，如果直线与圆相离，那么 P 在圆外，因此 $d > r$。
2. 如果 $d = r$，那么 P 在圆上。根据垂距定理，l 上的点除了 P 都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线 l 与圆 O **相切**，称 P 为**切点**。反之，如果直线与圆相切于点 Q，那么 $|OQ| = r$。l 上其他点都在在圆外，所以根据垂距定理的逆定理，$OQ \perp l$，$d = r$。
3. 如果 $d < r$，那么 P 在圆内。根据直线交圆公理，直线和圆有两个交点 A、B。我们说直线与圆**相交**，或直线**割圆**于 A、B。反之，如果直线和圆有两个交点，那么根据直线交圆公理，直线有部分在圆内，这部分上的点到圆心距离小于 r，因此根据垂距定理，$d < r$。

设直线割圆于两点 A、B，我们说直线是圆的**割线**。根据直线交圆公理，线段 AB（除端点）在圆内。我们把线段 AB 称为圆的一条**弦**。如果 AB 过圆心 O，就说它是圆的直径，A、B 互为**对径点**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

考虑圆 O 上的弦 AB 的垂直平分线 m，圆心 O 显然在 m 上。$m \perp AB$，设垂足为 P，那么 $|AP| = |PB|$。设 m 和圆交于两点 C, D，则弦 CD 就是直径。所以我们说：**恰有一条直径平分每条弦**。

习题 1.1.1. 补充：

1. 设直线割圆于两点 A、B，证明线段 AB（除端点）在圆内。

2. 证明：同一个圆中，直径是最长的弦。

1.2 圆和旋转

怎么画一个圆？我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点，我们将圆规尖定在要画的圆心处，将笔头接触圆上的点，然后轻轻旋转，笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段，我们首先张开圆规，圆规尖和笔头分别对齐半径两端，然后保持圆规形状不变，将圆规尖定在要画的圆心处，让笔头接触纸面，轻轻旋转，笔头就画出一个圆。

可以看出，圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作，把平面中的点映射到另一点。给定角 AOB，可以这样定义**旋转**：

定义 1.2.1. 给定角 AOB，平面中一点 P 关于 $\angle AOB$ 旋转的结果，是唯一使得 $\angle POQ = \angle AOB$ 且 $|OP| = |OQ|$ 的点 Q。

O 称为旋转的**中心**。任何点 P 绕中心旋转，结果都在圆 (O, P) 上。

可以看到，给定一个圆 (O, P)，从点 P 出发，旋转不同的角度，就得到圆上其它的点。用圆规画圆时，从零角出发，随着角度不断增大，直到周角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是 $0°$ 到 $369°$）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上 0 和 360 之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为 $\gamma_{(O,P)}$。

通过 $\gamma_{(O,P)}$，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然 $[0, 360)$ 对应整个圆，那么 $[0, 180]$ 就对应半个圆，$[0, 60]$ 就对应六分之一个圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应 $[a_1, a_1 + x]$ 和 $[a_2, a_2 + x]$，这两个圆弧有什么不同吗？观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全

等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如 $[0,60]$ 对应的圆弧，起点就是 P，终点是 60 度角 POQ 的终边和圆的交点 Q。如果圆弧对应的区间长度超过 180，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于 180，就说它是**劣弧**；如果等于 180，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。我们说它们互为**补弧**。

同一个圆上，明确了起点 A 和终点 B，就唯一确定了圆弧 $\overset{\frown}{AB}$。如果只说了两点 A、B，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 一般指劣弧或起点为 A 终点为 B 的圆弧。

习题 1.2.1. 证明:

1. 任意线段经过旋转得到等长的线段。

2. 任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

1.3 圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为 A，终点为 B 的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和圆上弧外一点 P，则角 APB 称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间，有什么关系呢? 如右图，连接 PO，延长交圆于对径点 Q。由于 $\triangle AOP$ 是等腰三角形，$\angle OAP + \angle OPA = 0$，

同理，$\angle OBP + \angle OPB = 0$。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说，圆心角是圆周角的两倍大小，圆周角是圆心角的一半大小。

定理 1.3.1. 圆周角定理 给定圆 O 上的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 及圆上弧外的点 P，如果 $P \notin \overset{\frown}{AB}$，那么：

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果点 P 在弧上，$\angle APB$ 和 $\angle AOB$ 是什么关系呢？这时 $\angle APB$ 对应 $\overset{\frown}{AB}$ 的补弧，于是它是 $\overset{\frown}{AB}$ 对应的圆心角的一半大小。$\overset{\frown}{AB}$ 对应的圆心角是周角减去 $\angle AOB$，所以

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角，因此，根据圆周角定理，对径点对应的圆周角是直角。或者说，半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是，讨论圆心角时，我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时，为了方便，我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里，圆上的点 A、B 对应的圆心角 $\angle AOB$ 和点 C、D 对应的圆心角 $\angle COD$ 相等，那么根据“边角边”，圆心 O 和它们构成的三角形满足：$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。弦 AB 和 CD 也等长。不仅如此，根据圆映射，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 也等长。事实上，$\overset{\frown}{CD}$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之，如果两个圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长，那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等，那么弦 AB 和 CD

也等长。更进一步，设 P 是圆上不属于两弧的点，那么圆周角 $\angle APB$ 和 $\angle CPD$ 一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来，如果圆 O 上两条弦 AB 和 CD 等长，那么根据“边边边”，$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。于是圆心角相等，所以劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说，在同一个圆里，两点对应的弦长相等当且仅当对应的（劣弧）弧长相等，当且仅当对应的圆心角相等，当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角，都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点 A、B，它们对应的垂直平分线 l 平分 $\angle AOB$，即把 $\angle AOB$ 分成两个相同大小的圆心角。因此，设 l 和圆交于 P、Q，则它们也分别平分所在的圆弧（称为弧的中点）。我们把这一系列结论总称为垂径定理：

定理 1.3.2. 垂径定理 给定圆上两点，则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦，同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成：过圆 O 的弦 AB 中点的直径与弦 AB 垂直，同时平分 $\angle AOB$ 和弧 $\overset{\frown}{AB}$。

给定圆 (O,r)，弦 AB 中点记为 M，$|MO|$ 称为弦 AB 的**弦心距**。由于 $MO \perp AB$，$\triangle OAM$ 是直角三角形，根据勾股定理，

$$|OM|^2 + |AM|^2 = |OA|^2 = r^2.$$

设直线 MO 与圆 O 交于 P、Q 两点，则

$$|MP| \cdot |MQ| = (r - |OM|)(r + |OM|) = r^2 - |OM|^2.$$

比较以上两式，可以得到：

$$|MA| \cdot |MB| = |MA|^2 = |MB|^2 = |MP| \cdot |MQ|.$$

这个推论也常常被称为垂径定理。

1.4 点到圆的势

圆是到定点距离相同的点的集合，所以点对圆来说是关键的概念。一点和圆的关系，可以用它到圆的距离来理解。点 P 在圆 (O, r) 上，当且仅当它到圆心的距离为 r。

如果不知道圆心的位置，有没有办法理解点和圆的位置关系呢？我们引进点到圆的**势**的概念。

定义 1.4.1. 点 P 到圆 (O, r) 的势，等于 $|OP|^2 - r^2$。

乍一看，点到圆的势，仍然和它到圆心的距离相关。点到圆心的距离 d 比 r 小的时候，点在圆内，这时它到圆的势小于 0。$d > r$ 的时候，点在圆外，势也大于 0。$d = r$ 的时候，点在圆上，势等于 0。

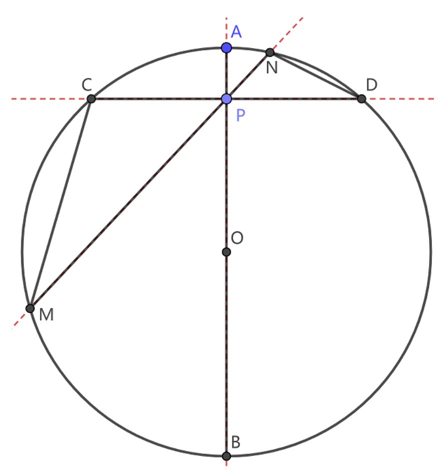
下面，我们从垂径定理出发，给出一种不依赖圆心的方法，计算点到圆的势。

首先设点 P 在圆 (O, r) 内。连接 OP，延长为直径，交圆于 A, B 两点（A、P 在 O 同侧）。过 P 作该直径的垂线，交圆于 C, D 两点。弦 CD 的垂直平分线过 O，而 $OP \perp CD$，所以 OP 就是弦 CD 的垂直平分线。根据垂径定理，$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| = r^2 - |OP|^2$。这说明 $|PA| \cdot |PB|$、$|PC| \cdot |PD|$ 是 P 的势的绝对值。

过 P 任意作一条直线，和圆交于两点 M, N，是否也有这个结论呢？

如右图，可以发现，$\angle NDC$ 和 $\angle NMC$ 都对应同一段弧，且 C, M 都在弧外，所以 $\angle NDC = \angle NMC$。又对顶角 $\angle DPN = \angle CPM$，所以 $\triangle DPN \backsim \triangle MPC$。也就是说，

$$\frac{|PD|}{|PN|} = \frac{|PM|}{|PC|}.$$



换句话说，$|PC|\cdot|PD|=|PN|\cdot|PM|$。

对圆内一点 P 来说，即便不知道圆心，只要过 P 作直线与圆交于两点，那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势的绝对值。

如果点在圆外，是否有类似的结论呢？我们仍然连接 OP，直线 OP 割圆于两点：A, B （A 位于 O、P 之间）。可以算出：

$$|PA|\cdot|PB|=(|PO|-|AO|)\cdot(|PO|+|PB|)=|OP|^2-r^2.$$

过 P 作直线 l 和圆交于两点 M, N，$|PM|\cdot|PN|$ 是否也等于 $|OP|^2-r^2$ 呢？

如右图，注意到 $\angle BNA$ 和 $\angle BMA$ 都对应半圆，所以都是直角。三角形外角 $\angle PAN=\angle ABN+\angle BNA$，而 $\angle ABN$ 和 $\angle AMN$ 对应同一段弧且都不在弧上，所以 $\angle ABN=\angle AMN$。于是，

$$\angle PAN=\angle ABN+90^\circ=\angle AMN+\angle BMA=\angle BMN.$$

这说明 $\triangle PAN\backsim\triangle PBM$，所以

$$\frac{|PA|}{|PN|}=\frac{|PM|}{|PB|},$$

换句话说，$|PM|\cdot|PN|=|PA|\cdot|PB|$。我们把这个性质总结为：

对圆内一点 P 来说，即便不知道圆心，只要过 P 作直线与圆交于两点，那么 P 到两点的距离乘积就是它到圆的势。

因此，无论在圆内还是圆外，经过一点 P 的直线与圆交于两点，则它到两点的距离乘积只与它和圆的远近关系有关。如果 P 在圆内，这个乘积等于 $r^2-|PO|^2$；如果 P 在圆外，这个乘积等于 $|PO|^2-r^2$。或者说，这个乘积就是势的绝对值。至于 P 在圆上的情形，我们可以认为它与圆交于两点，其中一点就是它自身，所以到自身距离为 0，从而乘积总是 0，等于它的势。

定理 1.4.1. 圆势定理 过点 P 作直线与圆 (O, r) 交于两点：A、B，那么

$$|PA|\cdot|PB|=\left||PO|^2-r^2\right|.$$

比起乘积 $|PA|\cdot|PB|$，点到圆的势多了正负号。如何理解这个正负号呢？如果过圆 (O,r) 的圆心作一条直线，在上面建立数轴。当我们把原点 P 选在圆内的时候，A 和 B 就对应符号相异的数；如果把原点 P 设在圆外，A 和 B 就代表同号的数了。所以，以 P 为原点，PO 为正方向的数轴和圆交于两点，这两点代表的数的乘积就是 P 到圆的势。或者说，圆势附带了 P 和 A、B 的位置关系的信息。

1.5 切线

过一点作直线要与圆交于两点不难，与圆交于一点则不简单。根据直线交圆公理，过圆内的点，无法作和圆相切的直线。过圆外一点，可以作与圆相切的直线直观上，我们可以把直尺从和圆相交的状态逐渐移动，直到尺子碰到圆的“边缘”，作出大致和圆相切的直线。

直线和圆相切是一种特殊的状况。过圆外或圆上一点的直线 l 如果和圆 O 相切，就说它是点到圆的**切线**。切线和圆的（唯一）交点，称为**切点**。根据相切的性质，过圆心 O 作关于 l 的垂线，切点就是垂足。过圆上一点，只有一条切线，过圆外一点，可以作两条切线。

过圆 (O,r) 外一点 P 作切线，记切点为 Q，则 $\triangle OQP$ 为直角三角形。根据勾股定理，

$$|PQ|^2+|OQ|^2=|OP|^2.$$

因此，$|PQ|^2=|OP|^2-r^2$。也就是说，点 P 到切点的距离平方，是它关于圆的势。若过 P 作圆 O 的割线，交圆于 A、B 两点，那么由上一节可知

$$|PA|\cdot|PB|=|OP|^2-r^2=|PQ|^2.$$

也就是说，

$$\frac{|PA|}{|PQ|}=\frac{|PQ|}{|PB|}.$$

因此，$\triangle PAQ\sim\triangle PQB$。这两个三角形的相似关系称为**切割线定理**。

从切割线定理可以推出：$\angle PQA = \angle PBQ$。从另一个角度，可以这样理解：过圆上一点 Q 只有一条切线 PQ。如果过 Q 再作一条直线，直线于圆必交于另一点 A，而 $\angle PQA$ 等于圆弧 $\overset{\frown}{QA}$ 对应的圆周角。

第二章　圆和多边形

我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。

2.1　三角形的外接圆和内切圆

首先来看三个点的情形。

设 A、B、C 是圆 (O,r) 上（相异的）三点，则线段 AB、BC、AC 的垂直平分线都过圆心 O。因此，O 是 $\triangle ABC$ 的外心（这里附带说明了圆上相异三点必然不共线），$|OA|=|OB|=|OC|=r$。反之，设有（非退化的）$\triangle ABC$，以它的外心 O 为圆心，以 $|OA|$ 为半径，就可以画出一个圆，过顶点 A、B、C。这说明，**不共线的三点恰好对应一个圆**。或者说，**不共线的三点确定一个圆**。我们把这个圆称为三角形的**外接圆**（“外心”即“外接圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**内接三角形**。

三角形不仅可以内接于圆，圆也可以内接于三角形。考虑三角形 ABC 的内心，它到三角形三边的距离相等。以内心为圆心，以它到三边的距离为半径作圆，这个圆和三角形三边都相切。我们把这个圆叫做三角形的**内切圆**（“内心”即“内切圆圆心”的简称），把三角形称为圆的**外切三角形**。

除了内心，三角形还有旁心。旁心到三角形三边的距离也相等。因此，

以每个旁心为圆心，以它到三遍的距离为圆心，各可以得到一个圆。每个圆都与三角形一边和另两边的延长线相切。这三个圆称为三角形的旁切圆（“旁心”即“旁切圆圆心”的简称），把三角形称为它们的**旁切三角形**。

2.2 圆内接四边形

在三个点的基础上再加一个点 D，四个点 A、B、C、D 能否恰好对应一个圆呢？显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的外接圆未必是同一个圆。所以，四个点不总是在同一个圆上。换句话说，要让四个点共圆，这四个点必须满足一定的条件。

如右图上情形，设 A、B、C、D 圆 (O,r) 上（相异的）四点，考察它们对应的圆弧。我们发现，$\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 是整个圆的分划，因此，它们对应的圆心角之和是周角。根据圆周角定理，$\angle ABC+\angle CDA=180°$。同理，$\angle BCD+\angle DAB=180°$。

我们还可以发现，圆周角 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 都对应 $\overset{\frown}{BC}$，因此根据“等弧对等角”，$\angle BAC=\angle BDC$。同理可得：$\angle ACB=\angle ADB$，$\angle CAD=\angle CBD$，$\angle DBA=\angle DCA$。

如果 A、B、C、D 顺序改变，如右图下情形，那么四边形 $ABCD$ 就是蝶形。$\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 对应同一段圆弧 $\overset{\frown}{AC}$。这时 $\angle ABC+\angle CDA=0°$，或者说 $\angle ABC=\angle ADC$。同理，$\angle BAD=\angle BCD$。

综合两种情况，**圆内接四边形对角要么和为平角，要么相等**。

可以看到，如果把相交的对边 AB、CD 看作对角线，把对角线 AC、BD 看作对边，我们就得到一个凸四边形 $ACBD$。因此，观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现，我们仍然有 $\angle BAC=\angle BDC$、$\angle ACB=\angle ADB$，$\angle CAD=\angle CBD$，$\angle DBA=\angle DCA$。如果对角线 AC 和 BD 交于点 P，仍然有 $\triangle APB\backsim\triangle CPD$、$\triangle BPC\backsim\triangle DPA$。换句话说，即便圆内接四边

形不是凸四边形，用它的顶点也能画出圆内接凸四边形，并且不妨碍我们讨论相关的性质。所以，我们总把圆内接四边形问题归结为凸四边形来讨论，也称之为四边共圆问题。

以上是圆内接四边形边和角的性质，反过来，满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢？或者说，满足什么条件的四个点共圆呢？

定理 2.2.1. 如果凸四边形 $ABCD$ 中的一对内角 $\angle ABC$ 与 $\angle CDA$ 的和是平角，那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明. $\angle ABC+\angle CDA=180°$，所以要么两个角都是直角，要么一个是钝角，一个是锐角。
如果两个角都是直角，作对角线 AC，取它的中点 O。$\triangle ABC$ 是直角三角形，AC 是斜边，根据直角三角形的中线定理，$|AO|=|BO|=|CO|$。同理，$\triangle CDA$ 是直角三角形，AC 是斜边，于是 $|AO|=|DO|=|CO|$。因此 A,B,C,D 四点都在 $\odot_{(O,A)}$ 上。
如果两个角一个是钝角，一个是锐角。不妨设 $\angle ABC>90°>\angle CDA$。作对角线 AC，则 B、D 在 AC 两侧。作对角线 AC 的垂直平分线 l。显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 的外心都在 l 上，只需证明两者是同一点。
设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot_{(O_1,B)}$。$\angle ABC$ 是钝角，因此它的圆心角对应优弧。于是，O_1 和 B 在直线 AC 两侧。$\angle CO_1A=360°-2\angle ABC$。
另一方面，设 $\triangle CDA$ 的外接圆为 $\odot_{(O_2,D)}$。$\angle CDA$ 是锐角，因此它的圆心角对应劣弧。于是，O_2 和 D 在直线 AC 同一侧。$\angle CO_2A=2\angle CDA$。
以上两个结论说明，O_1 和 O_2 都和 D 在直线 AC 同一侧，且 $\angle CO_1A=\angle CO_2A$。而 $\triangle CO_1A$ 和 $\triangle CO_2A$ 都是等腰三角形，所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。A,B,C,D 四点都在 $\odot_{O_1,A}$ 上。 □

从这个定理可以推出，矩形、等腰梯形和正方形都是圆内接四边形。

定理 2.2.2. 如果凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ACB=\angle ADB$，那么 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明. $ABCD$ 是凸四边形，所以 C 和 D 在直线 AB 同侧。作边 AB 的垂直平分线 l，显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的外心都在 l 上，只需证明它们是同一点。
设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot_{(O_1,C)}$，$\triangle ABD$ 的外接圆为 $\odot_{(O_2,D)}$。如果 $\angle ACB$ 是钝角，那么它的圆心角对应优弧。于是，O_1 和 C 在直线 AB 两侧，且 $\angle BO_1A = 360° - 2\angle ACB$。这时，$\angle ADB = \angle ACB$ 也是钝角，所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 两侧，且 $\angle BO_2A = 360° - 2\angle ADB$。如果 $\angle ACB$ 是锐角，那么它的圆心角对应劣弧。于是，O_1 和 C 在直线 AB 同侧，且 $\angle BO_1A = 2\angle ACB$。这时，$\angle ADB = \angle ACB$ 也是锐角，所以同样有 O_2 和 D 在直线 AB 同侧，且 $\angle BO_2A = 2\angle ADB$。
因此，O_1 和 O_2 总在直线 AB 同侧，且 $\angle BO_1A = \angle BO_2A$。而 $\triangle BO_1A$ 和 $\triangle BO_2A$ 都是等腰三角形，所以两者同角全等。这说明 O_1 和 O_2 是同一点。A, B, C, D 四点都在 $\odot_{O_1,A}$ 上。 □

定理 2.2.3. 过一点 P 的两条直线 m, n 上各有两点: $A, C \in m$ 和 $B, D \in n$，分别各在 P 两侧。如果

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|,$$

那么四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。

证明. 考虑 $\triangle APB$ 和 $\triangle DPC$。对顶角 $\angle APB = \angle DPC$。而 $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$ 等于说

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PD|}{|PC|}.$$

因此根据“边角边”，$\triangle APB \sim \triangle DPC$。于是有 $\angle ABP = \angle DCP, \angle BAP = \angle CDP$。因此，根据定理 2.2.2，四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形。 □

这个定理也可以理解为：两条线段相交，如果交点把每条线段分成的两部分长度之积相等，那么线段端点共圆。也就是说，这两条线段实际上是圆的两条相交的弦。

反之,圆的两条弦 AC 和 BD 相交于 P,则"等弦对等角"说明 $\angle ACD = \angle ABD$、$\angle BAC = \angle BDC$。因此 $\triangle ABP \sim \triangle DCP$,$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$。

定理 2.2.4. 相交弦定理 圆的两条弦 AC 和 BD 相交于 P,则

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|.$$

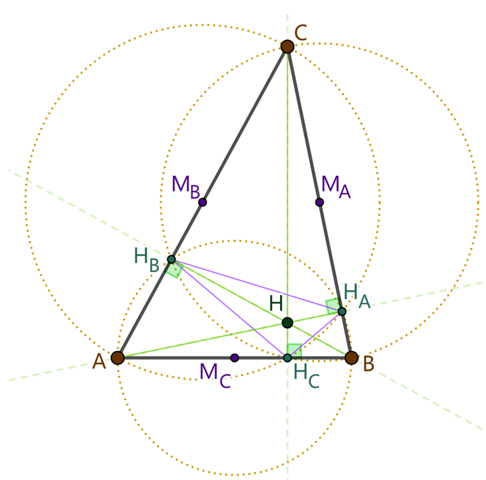
习题 2.2.1.
给定圆内接凸四边形 $ABCD$。E 是对角线 AC 上一点。$\angle CDE = \angle BDA$。

1. 证明:$\triangle CDE \sim \triangle BDA$。
2. 证明:$\triangle CDB \sim \triangle EDA$。
3. 证明:$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

给定凸四边形 $ABCD$,作射线 CE 使得 $\angle ECD = \angle ABD$,作射线 DE 使得 $\angle CDE = \angle BDA$。两射线交于点 E。

1. 证明:$\triangle CDE \sim \triangle BDA$。
2. 证明:$\triangle CDB \sim \triangle EDA$。
3. 证明:$|AC| \cdot |BD| \geqslant |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.
4. 证明,凸四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形,当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.
5. 证明:A, B, C, D 四点共圆,当且仅当 $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

2.3 垂心组和外接圆



垂心组

考虑锐角三角形 ABC,把顶点到对边的垂足分别记作 H_A, H_B, H_C,垂心为 H。由于 $\angle HH_AB = \angle BH_CH = 90°$,两角之和为平角,故 H, H_A, H_C, B 四点共圆。这说明 $\angle H_CHH_A +$

$\angle H_ABH_C = 180°$。这说明 $\angle CHA = \angle H_CHH_A$ 是钝角，$\triangle AHC$ 是钝角三角形。

考察钝角三角形 AHC,可以发现,它的顶点到对边的垂足也是 H_A, H_B, H_C,而垂心是 B。

类似地，我们可以证明 H, H_B, H_C, A 四点共圆，H, H_A, H_B, C 四点共圆。钝角三角形 BHC、CHA 的顶点到对边的垂足也是 H_A, H_B, H_C，而垂心分别是 A 和 B。

于是，从锐角三角形 ABC 及其垂心 H 出发，可以得出四个三角形，每三个点构成的三角形的垂心，是四个点中剩余的那个点。我们把这样的四点称为**垂心组**。

从钝角三角形及其垂心出发，一样可以得到一个垂心组。从直角三角形出发，其垂心和直角顶点重合，四点的垂心组退化为三点。

从上面的讨论可知，垂心组四点共享三个垂足。任一顶点、垂心和另外两个顶点对应的垂足四点共圆。

考察 A, H_B, H_A, B 四点。由 $\angle AH_BB = 90° = \angle AH_AB$ 可知，A, H_B, H_A, B 四点共圆。由于 $\angle AH_BB$ 是直角，A, H_B, H_A, B 四点所在的圆，圆心是边 AB 的中点 M_C。同理，A, H_C, H_A, C 四点共圆，圆心是边 AC 的中点 M_B；B, H_C, H_B, C 四点共圆，圆心是边 BC 的中点 M_A。

从 A, H_B, H_A, B 四点共圆可以推出:$\angle A = \angle CH_AH_B$,$\angle B = \angle H_AH_BC$。也就是说，$\triangle CH_BH_A \backsim \triangle CBA$。

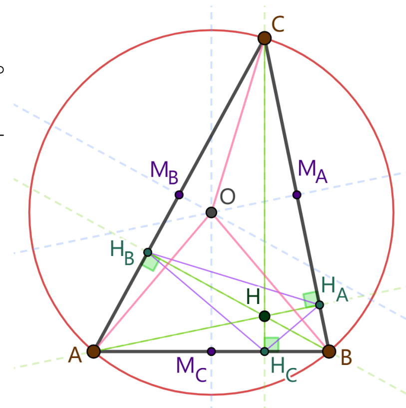
从以上两个四点共圆性质还可以推出 $\angle HH_CH_A = \angle CAH$,$\angle HH_AH_C = \angle ACH$。因此，$\triangle HH_AH_C \backsim \triangle HCA$。

以上是三角形垂心组的基本性质。垂心是顶点到对边垂线的交点。另外一个和边垂直的概念是边的中垂线。如果把三角形的垂心和外心一起来看，会发现两者有密切的关联。

考虑锐角三角形 ABC、其垂心 H 及其外心 O。边 BC 可以看作 $\triangle ABC$ 外接圆的弦。圆心角 $\angle BOC = 2\angle A$，因此在等腰三角形 BOC 中，

$$\angle CBO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle A = \angle HBA.$$

同理，$\angle BAO = \angle HAC$，$\angle ACO = \angle HCB$。



此外，$\angle H_C H_A B = \angle A$，因此 $\angle H_C H_A B + \angle CBO = 90^\circ$。这说明半径 $OB \perp H_A H_C$。同理，半径 $OA \perp H_B H_C$，$OC \perp H_A H_B$。

作点 A 在 ABC 外接圆上的对径点 A'，AA' 是直径，所以 $\angle ACA'$ 是直角。因此

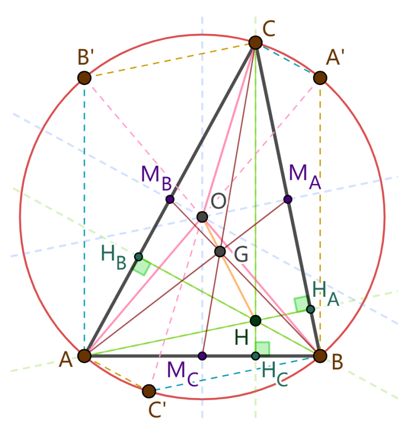
$$\angle H_C H A' = 90^\circ - \angle ACH_C = \angle A.$$

另一方面，A, H_B, H, H_C 四点共圆，所以

$$\angle H_C H B = 180^\circ - \angle H_B H H_C = \angle A.$$

这说明 $CA' \,//\, HB$。同理，我们可以得到 $BA' \,//\, HC$。因此四边形 $A'BCH$ 是平行四边形。

作 B, C 的对径点 B', C'，同样可以证明，四边形 $AB'HC$ 和 $AHBC'$ 是平行四边形。



连接圆心 O 和 AB 中点 M_C，O 是直径 AA' 的中点，所以 OM_C 平行于 $A'B$，且长度为 $A'B$ 一半。我们把这种关系简称为“OM_C 平行且等于 $A'B$ 的一半”。

连接 OH 和 AM_C。由于 OM_C 平行且等于 $A'B$ 的一半，$A'B$ 平行且等于 HC，因此 OM_C 平行且等于 HC 的一半。记 OH

和 CM_C 交点为 G，不难看出，$\triangle OGM_C \sim$
$\triangle GHC$，且

$$\frac{|M_CG|}{|GC|} = \frac{|OG|}{|GH|} = \frac{|OM_C|}{|HC|} = \frac{1}{2}.$$

也就是说，点 G 在三角形 ABC 中线 CM_C 上，且到 C 点的距离是到 M_C 距离的两倍。这说明 G 就是三角形 ABC 的重心。我们发现，三角形的垂心、外心和重心满足以下的性质：

定理 2.3.1. 三心共线定理
三角形 ABC 的垂心、外心和重心共线，重心位于外心和垂心为端点的线段上，而且重心到垂心的距离是重心到外心距离的两倍。

习题 2.3.1. 沿用本节记号，证明：

1. $|AH| \cdot |HH_A| = |BH| \cdot |HH_B| = |CH| \cdot |HH_C|$.

2. H 是 $\triangle H_AH_BH_C$ 的内心。

3. 记 $\triangle ABC$ 的内心为 I，旁心分别为 J_A, J_B, J_C，则 I 是 $\triangle J_AJ_BJ_C$ 的垂心。

4. H 关于 AB 的对称点 H^C 在 ABC 外接圆上，且 $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{H^CB}$。

5. $\triangle AHB$、$\triangle AHC$ 和 $\triangle CHB$ 的外接圆都和 $\triangle ABC$ 的外接圆一样大。它们的圆心分别是 $\triangle ABC$ 的外心 O 关于三边的对称点，和 O 组成垂心组。并且这个垂心组和垂心组 A, B, C, H 全等。

2.4 九点圆

我们已经了解过三角形的外接圆、内切圆和旁切圆。本节我们再介绍三角形内部的一个特殊的圆。

设有三角形 ABC，上一节中，我们证明了 $\triangle ABC$ 的垂心 H、外心 O 和重心 G 共线。考虑线段 OH，作它的中点 M。我们知道 $AHBC'$ 是平行四边形，所以 M_C 是其对角线 HC' 的中点。因此，MM_C 平行且等于 OC' 的一半。

作 CH 的中点 D_C，由于 OM_C 平行且等于 CH 的一半，因此平行且等于 HD_C。也就是说，四边形 HD_COM_C 是平行四边形，于是 M_C, M, D_C 共线，M 是 M_CD_C 的中点，$|MD_C| = |MM_C| = \frac{1}{2}|M_CD_C|$。

$\triangle M_CH_CD_C$ 是直角三角形，所以斜边中点 M 到直角顶点 H_C 的距离是斜边长度 M_CD_C 的一半。也就是说，

$$|MD_C| = |MM_C| = |MH_C| = \frac{1}{2}|OC'| = \frac{\mathtt{R}}{2}.$$

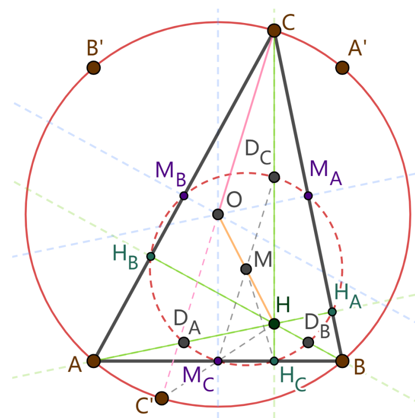
其中 R 是 ABC 的外接圆半径。

同理，我们也有

$$|MD_A| = |MM_A| = |MH_A| = \frac{\mathtt{R}}{2},$$

$$|MD_B| = |MM_B| = |MH_B| = \frac{\mathtt{R}}{2}$$

所以，以 M 为圆心，以 $\frac{\mathtt{R}}{2}$ 为半径画圆，我们就会发现，这个圆经过三边中点，三边上的垂足，以及三顶点到垂心连线的中点，合共九点。我们把这个圆称为**九点圆**。



定理 2.4.1. 九点圆定理
三角形三边中点、三边垂足，以及三顶点到垂心连线的中点共圆。圆心为外心与垂心的中点，半径为三角形外接圆半径的一半。

三角形的九点圆的大小，刚好是三角形外接圆的一半。如果我们把三角形的垂心 H 看作“起点”，那么三角形的外接圆可以看作是九点圆外延加倍得到的。比如，把线段 HD_C 加倍延长，就得到 HC；把线段 HM_C 加倍延长，就得到 HC'；把线段 HH_C 加倍延长，就得到外接圆上一点 H^C。一般来说，从 H 出发，连接 H 和九点圆上任一点，加倍延长后，终点就会落在外接圆上。

习题 2.4.1. 沿用本节记号，证明：

1. 作外心 O 关于三边的对称点：O_A, O_B, O_C，则垂心 H 是 $\triangle O_AO_BO_C$

的外心。

2. $\triangle O_AO_BO_C \simeq \triangle ABC$。两者关于点 M 对称，有共同的九点圆。

3. 记 $\triangle ABC$ 的旁心为 J_A, J_B, J_C，则 $\triangle J_AJ_BJ_C$ 的九点圆是 $\triangle ABC$ 的外接圆。

2.5 圆内接多边形

九点圆涉及了内接于同一个圆的九边形。对一般的多边形来说，成为圆内接多边形意味着什么呢?

从四边形的情况来看，顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点 A、B、C、D 按顺时针或逆时针顺序排列，那么四边形 $ABCD$ 是凸四边形，否则，四边形 $ABCD$ 可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形，我们只研究最简单的一类: 顶点按逆时针顺序排列的多边形。具体来说，设圆 O 上有 n 个点: $A_1, A_2, \cdots, A_n$，从 A_1 出发构造圆映射 $\gamma_{(O,A_1)}$，把 $[0, 360)$ 映射到圆周，那么 0 对应 A_1。设 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分别对应 n 个点，那么 $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n$。这样定义的圆内接多边形: $A_1A_2\cdots A_n$ 就是我们研究的对象。这样定义的多边形，每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数 n，凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。具体来说，每个顶点和相邻两个顶点的连线是 n 边形的边，和其余 $n-3$ 个顶点的连线是对角线。因此每个点是 $n-3$ 条对角线的端点。另一方面，每条对角线对应两个顶点，因此一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢? 我们知道三角形的内角和是平角，凸四边形的内角和是两个平角（或者说周角，如果把角度约定在负平角和正平角之间，则减去一个周角变成零角）。边数继续增多时，我们定义凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的内角和为:

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n + \angle A_{n-1}A_nA_1 + \angle A_nA_1A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间，可以猜测：凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形，我们可以这样证明：n 个顶点把圆分为 n 段圆弧。每个顶点张成的内角，对应了其中 $n-2$ 段圆弧。如果考虑所有 n 个内角对应的圆弧，则每段圆弧计入 $n-2$ 次（圆弧两端是内角顶点的时候不计入，其它情况下都计入）。也就是说，n 个内角和对应 $n-2$ 个整圆。这些内角都是圆周角，因此它们的和是 $n-2$ 个整圆对应的圆周角，即 $n-2$ 个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况，我们可以通过不断“裁剪”三角形来证明。我们还记得，凸四边形可以裁成两个三角形，因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看，我们通过裁掉一个三角形，把凸四边形变成了三角形。对一般的凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 来说，由于它的每个内角都介于零角和平角之间，我们可以考虑裁掉某个角，把它变成 $n-1$ 边形。比如，沿着线段 A_1A_3 剪一刀，就把 $A_1A_2\cdots A_n$ 分成了三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。

定理 2.5.1. 凸 n 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

证明. 用归纳法证明。命题 $P(n)$：凸 $n+2$ 边形的内角和是 n 个平角。我们要证明 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立。
$n=1$ 时，由于三角形内角和是平角，$P(1)$ 成立。
假设 $P(n)$ 成立，下面证明 $P(n+1)$ 成立。
设有凸 $n+3$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，将它裁成三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。前者的内角和是平角。根据 $P(n)$，后者的内角和是 n 个平角，因此，$A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的内角和是 $n+1$ 个平角。于是 $P(n+1)$ 成立。
因此对所有正整数 n，命题 $P(n)$ 成立。 □

满足什么条件时，凸多边形是圆内接多边形呢？最直接的条件，自然是平面上有一个圆，使多边形顶点都在圆上。或者说，能找到一点，到多边形各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点，可以查看多边形各边和各条对角线的垂直平分线。如果多边形是圆内接多边形，它的边和对角线都是圆的弦，垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说，可以考察两条边（或对角线）的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等，那么多边形内接于以它为圆心的圆，否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形：**正多边形**。正多边形是各边等长，各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形各个的内角角度是 $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$。

习题 2.5.1.

1. 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形，哪些总是圆内接多边形？哪些可以是圆内接多边形？要满足什么条件？

2. 设有整数 $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$，圆内接 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，$\angle A_iA_kA_j$ 和 $\angle A_iA_lA_j$ 有什么关系？

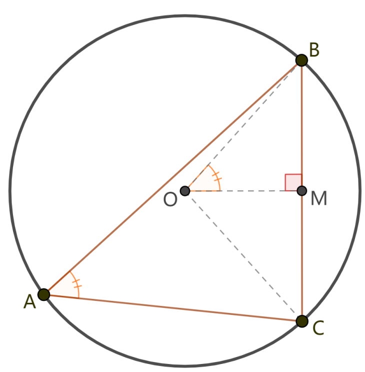
第三章　三角函数

通过研究点、直线、角和三角形、四边形、圆形，我们对简单的平面图形有了更多的认识。其中对三角形的研究贯通了我们对各种形状的探索。通过对三角形性质的理解，我们建立了三角形和四边形、圆形乃至更复杂的形状之间的关系。

如果对前面学习的知识做一次整理，我们会发现，大多数的结论要么和共点、共线、共圆有关，要么是长度之间、角度之间的相等或简单倍数关系。我们把这些结论称为定性结论。

在科学研究和生产实践中，我们更需要知道的是形状之间定量的关系。比如，如果三角形的三边长度分别是 $4, 5, 6$，我们希望知道三角形内角到底是多少度。又比如，如果菱形两条邻边长度为 1，夹角为 $50°$，我们希望知道菱形对角线的长度。

为了研究形状之间的定量关系，我们仍然从三角形开始研究。



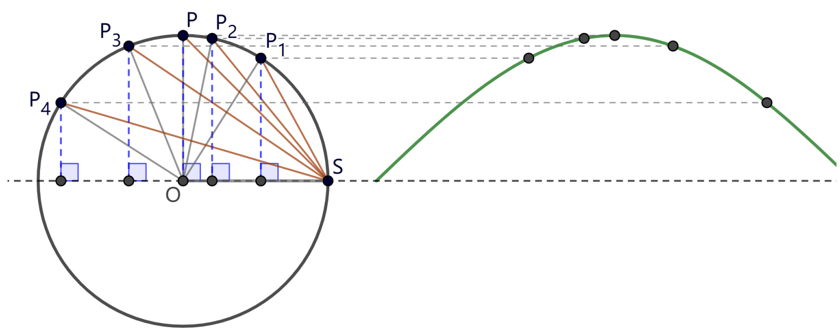
3.1　正弦函数

如右图，我们想知道三角形 ABC 中 $\angle A$ 的角度和对边 BC 长度的关系。为此，我们

作 ABC 的外接圆 O，则 BC 是 O 的弦。$\angle A$ 作为圆周角，是圆心角 $\angle COB$ 的一半。作 BC 中点 M，则 $\angle A = \angle MOB$。这样，我们就把一般三角形的边角关系转化成了直角三角形 MBO 的边角关系。

那么，直角三角形的角和边有什么关系呢？我们先来看另一个问题。

考虑半径为 1 的圆 O（这个圆以后会经常出现，我们把它叫做**单位圆**）和圆上一点 S。给定角 α，以 OS 为始边，角的终边交圆 O 于点 P。称 $\triangle SOP$ 为角 α 对应的**单位三角形**（如下图）。根据三角形面积公式（底乘高除以 2），单位三角形的面积等于 P 到始边距离的一半。



不难看出，α 为直角时，单位三角形的面积最大，为 $\frac{1}{2}$。其它情况下，运用勾股定理可知，P 到始边距离小于半径，因此面积小于 $\frac{1}{2}$。

我们把角 α 对应的单位三角形的面积和直角对应的单位三角形面积之比称为 α 的正弦或正弦值，记为 $\sin\alpha$。$\sin A$ 就是 P 到始边距离，也就是前面直角三角形 MBO 中 BM 与外接圆半径之比，或弦长与外接圆直径之比。

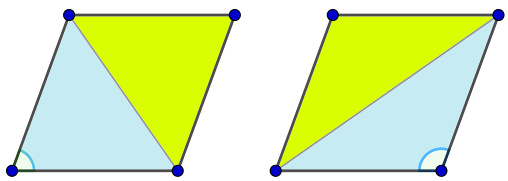
角度在零角到平角之间的每个角，都可以按以上方法定义正弦。更准确来说，我们定义的是角度的正弦。不过，它实际上对应着一个把数映射到数的映射，也就是函数。比如，0 和 180 之间的任何实数，都通过角度制的圆映射对应某个角度，从而对应某个正弦值。

另一种对应方法使用弧度，也就是把角度在单位圆上对应的弧长映射

到角度的正弦值。比如，60° 角对应着圆周的六分之一，在单位圆上对应的弧长是 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$。我们就说 60° 角的正弦值是 $\sin\frac{\pi}{3}$。把角度或角度在单位圆上的弧长对应到角度的正弦值的函数，称为**正弦函数**。

正弦函数有什么性质呢？观察不同角度对应的单位三角形可知，零角的正弦值是 0（退化的三角形面积为 0）。从零角出发，随着角度增大，正弦值不断增大；直角时，正弦值达到最大值 1。然后，随着角度增大，正弦值不断减小；平角时，正弦值减为 0。

两个角互为补角时，对应的单位三角形是同一个菱形按不同对角线剖开得到的一半。所以两者面积相等。也就是说，**两个角互为补角，则正弦值相等**。因此，我们将把重点放在研究锐角的正弦值上。



对具体的某个角度来说，怎么计算它的正弦值呢？这个问题不简单。以我们掌握的知识，还无法精确计算任意角度的正弦值，甚至难以估计任意角度的正弦值。求解任意角度的正弦值属于实变函数分析的重要基础内容。目前，我们可以使用正弦函数表，查找角度的正弦值，或通过使用计算器、编程等方式，借助计算机计算角度的正弦值。使用正弦表，可以方便地查找角度对应的正弦值。以下是整数角度的正弦表：

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0°	0.0000	0.1736	0.3420	0.5000	0.6428	0.7660	0.8660	0.9397	0.9848
1°	0.0175	0.1908	0.3584	0.5150	0.6561	0.7771	0.8746	0.9455	0.9877
2°	0.0349	0.2079	0.3746	0.5299	0.6691	0.7880	0.8829	0.9511	0.9903
3°	0.0523	0.2250	0.3907	0.5446	0.6820	0.7986	0.8910	0.9563	0.9925
4°	0.0698	0.2419	0.4067	0.5592	0.6947	0.8090	0.8988	0.9613	0.9945
5°	0.0872	0.2588	0.4226	0.5736	0.7071	0.8192	0.9063	0.9659	0.9962
6°	0.1045	0.2756	0.4384	0.5878	0.7193	0.8290	0.9135	0.9703	0.9976
7°	0.1219	0.2924	0.4540	0.6018	0.7314	0.8387	0.9205	0.9744	0.9986
8°	0.1392	0.3090	0.4695	0.6157	0.7431	0.8480	0.9272	0.9781	0.9994
9°	0.1564	0.3256	0.4848	0.6293	0.7547	0.8572	0.9336	0.9816	0.9998

每列的数据十位相同，每行的数据个位相同。比如，要查 26° 的正弦值，就在十位为 2 的第三列，找到个位为 6 的第七行，查得正弦值为 0.4384。

对于非整数角度的正弦值，我们可以查询更精确的正弦表，或者用一次函数来近似估计。如果我们把整数角度的正弦值看作正弦函数的函数值，在直角坐标系上画出函数值对应的点，可以观察到正弦函数的值从 0 平稳增长到 1。因此，可以认为两个整数角度之间，正弦函数的图像近似于线段，也就是一次函数图像的一部分。因此，非整数角度的正弦值可以通过计算线段上点的坐标而得到。

举例来说，37° 和 38° 之间的角度（比如说 37.3°）的正弦值，可以看作经过 $(37, \sin 37^\circ)$ 和 $(38, \sin 38^\circ)$ 两点的一次函数图像在横坐标为 37.3 时对应的纵坐标。这个一次函数可以写成:

$$y = \sin 37^\circ + \frac{\sin 38^\circ - \sin 37^\circ}{38 - 37} \cdot (x - 37)$$

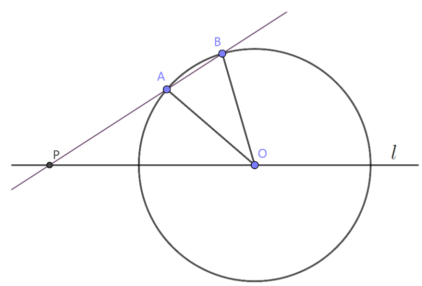
横坐标 $x = 37.3$ 时，代入函数表达式，就得到：

$$\begin{aligned} y &= \sin 37^\circ + 0.3 \cdot (\sin 38^\circ - \sin 37^\circ) \\ &= 0.6018 + 0.3 \cdot (0.6157 - 0.6018) \approx 0.60597 \end{aligned}$$

实际上 $\sin 37.3^\circ \approx 0.60599$，可见偏差不大。

反过来，如果已知角的正弦值，也可以通过查表，估计角度的大小。比如，已知 $\sin A = 0.83$，查表可知 $\angle A$ 大小在 56° 和 57° 之间。

想一想，如果要得到更精确的结果，除了查询更精确的正弦表，还可以怎么做？



习题 3.1.1. 如右图，延长 BA 交 l 于点 P。

1. 计算 $S_{\triangle AOP}$ 和 $S_{\triangle BOP}$。

2. 通过比较 $S_{\triangle AOP}$ 和 $S_{\triangle BOP}$，证明锐角的正弦值随角度增大而增大，钝角的正弦值随角度增大而减小。

3. 从 46°、48° 的正弦值出发，用一次函数近似估计 47°，和正弦表上的值比较。哪个值比较大？对别的角度试一试，估计值的偏差有什么规律？

4. 已知某锐角的正弦值为 0.73，请估计它的角度大小。

3.2 正弦定理

我们可以用正弦值来探讨三角形的边角关系。首先把正弦值应用到一般三角形的面积上。我们知道 $\angle A$ 对应的单位三角形的面积是 $\frac{1}{2}\sin A$。如果 $\angle A$ 的两邻边长度分别是 b 和 c，那么根据等高三角形的面积关系，三角形的面积是单位三角形的 bc 倍，也就是 $\frac{1}{2}bc\sin A$。

定理：三角形两边长度为 b 和 c，夹角为 A，则面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A$。

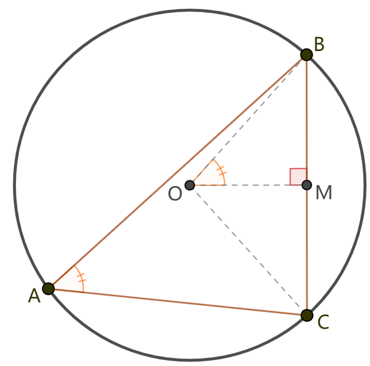
设三角形 ABC 中 A, B, C 对边长度为 a, b, c，那么它的面积可以用三

种方式表示:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

两边除以 $\frac{abc}{2}$，就得到:

$$\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc}=\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}.$$



上式告诉我们，三角形三个内角的正弦值和对边长度的比是定值 $\frac{2S_{\triangle ABC}}{abc}$。如何理解这个定值呢？让我们回到前面的三角形 MOB。我们知道 $BM=\mathrm{R}\sin A$，其中 R 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径。所以 $\frac{a}{2}=\mathrm{R}\sin A$，即 $\frac{\sin A}{a}=\frac{1}{2\mathrm{R}}$。也就是说，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\mathrm{R}.$$

定理 3.2.1. 正弦定理 三角形任一边长与其对角正弦值之比为外接圆直径。

从正弦定理可以立刻得出：三角形的面积等于三边长之积与外接圆半径之比的四分之一。

$$S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4\mathrm{R}}.$$

下面来看正弦定理的具体应用。

例子 3.2.1. 三角形 ABC 中，边 AB、AC 长度分别为 3 和 5，$\angle B=80^\circ$，求 BC 的长度和 $\angle C$ 的大小。

解答. 根据正弦定理:

$$\frac{|AC|}{\sin B}=\frac{|AB|}{\sin C},$$

所以 $\sin C=\frac{|AB|\sin B}{|AC|}$。查表知 $\sin 80^\circ=0.9848$，算得 $\sin C\approx 0.5909$，反查正弦表可知 $\angle C\approx 36.2^\circ$ 或 $\angle C\approx 143.8^\circ$。由于三角形内角和是平

角，$\angle C+\angle B<180^\circ$，故排除 $\angle C\approx 143.8^\circ$。于是 $\angle C\approx 36.2^\circ$，$\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C\approx 63.8^\circ$，使用正弦定理可算得：

$$|BC|=\frac{|AB|\sin A}{\sin B}=\frac{3\cdot\sin 80^\circ}{\sin 63.8^\circ}\approx 3.29$$

已知三角形两边长度和其中一边对角的大小，可以根据正弦定理得出另一边对角的正弦值，从而得出它的角度。用平角减去两角角度，就得到第三个角的大小。再次使用正弦定理，就得到第三边的长度。要注意的是，用正弦定理算出的是角的正弦值，而不是角度。由于互为补角的正弦值相等，同一个正弦值对应两个互为补角的角度。因此，给定三角形两边和其中一边的对角，并不一定能确定三角形的形状。换句话说，“边边角”不能用来证明三角形全等。

例子 3.2.2. 已知三角形 ABC 中，$\angle A=64^\circ$，$\angle B=75^\circ$，$\angle C$ 对边长度 $c=4$，求另两边的长度。

解答. 三角形内角和为平角，所以 $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=41^\circ$。根据正弦定理：

$$\frac{a}{\sin 64^\circ}=\frac{b}{\sin 75^\circ}=\frac{c}{\sin 41^\circ}.$$

所以 $a=\frac{c\sin 64^\circ}{\sin 41^\circ}=\frac{4\times 0.8988}{0.6561}\approx 5.48$，$b=\frac{c\sin 75^\circ}{\sin 41^\circ}=\frac{4\times 0.9659}{0.6561}\approx 5.89$。

已知两内角大小和一边的长度，等于知道所有内角大小和一边边长。根据正弦定理，可以算出另两边的长度。这说明“角边角”和“角角边”都可以用来证明三角形全等。

正弦定理不仅可以用来处理定量关系，也可以用来处理定性关系。三角形的边长和对角的正弦值之比是定值，所以，边长越大，对角的正弦值也越大。而锐角的正弦值随着角度增大而增大，至直角达到最大。所以，锐角和直角三角形中，较大的边，对角也较大，较大的角，对边也较大。这个性质称为“**大边对大角**”、“**大角对大边**”。

对钝角三角形，“大边对大角”、“大角对大边”的结论是否也成立呢？设三角形 ABC 中 $\angle A$ 是钝角，则 $\angle A$ 的补角是锐角。三角形内角和为平角，所以 $180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C > \angle B$，$\angle A$ 的补角大于 $\angle B$，即 $\sin A = \sin(B+C) > \sin B$。同理，$\sin A > \sin C$。钝角 $\angle A$ 作为较大的角，其正弦值大于锐角 $\angle B$ 和 $\angle C$。而 $\angle B$ 和 $\angle C$ 同为锐角，“大边对大角”、“大角对大边”的结论在两者之间同样成立。综上所述，任意三角形中，“大边对大角”、“大角对大边”的结论总成立。

习题 3.2.1.

1. 设三角形 ABC 内角 A, B 的公共边为 c, 证明: $S_{\triangle ABC} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin(A+B)}$。

2. 三角形一边的长度是另一边的 2 倍。证明：至少有一个内角不大于 30°，一个内角不小于 75°。

3. 已知三角形 ABC 中 $\angle A = 36^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，$\angle C$ 对边长度 $c = 8$，求另两边的长度。

4. 已知三角形两边长度是 4、5，一个内角是 40°，第三边的长度有几种可能？找出所有满足条件的三角形。

5. 已知三角形两边长度是 4、5，一个内角是 70°，第三边的长度有几种可能？结论和上一题有什么不同？找出所有满足条件的三角形。

3.3 余弦函数

例子 3.3.1.

1. 三角形 ABC 中，边 AB、AC、BC 的长度分别为 3、5、6，求三个内角的大小。

2. 三角形 ABC 中，边 BC、AC 的长度分别是 4、6，$\angle C = 50^\circ$，求 AB 长度。

使用正弦定理，我们列出以下等式:

1. $\frac{6}{\sin A} = \frac{5}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$.

2. $\frac{4}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} = \frac{|BC|}{\sin 50^\circ}$.

每个等式中都有两个未知量。我们无法直接用正弦定理计算内角的正弦值了。不过，既然我们能通过“边边边”和“边角边”证明三角形全等，这让我们猜想，有别的方法计算内角的角度。

第一题中，让我们把 AB、AC、BC 的长度换成 3、4、5，我们观察到最长边边长的平方等于另两边边长的平方和。根据勾股定理逆定理，三角形是直角三角形。所以 $\angle A$ 是直角。用正弦定理解得 $\sin B = 0.8$，$\sin C = 0.6$，查表可知 $\angle B \approx 53^\circ$，$\angle C \approx 37^\circ$。

第二题中，让我们把 $\angle C$ 改为直角，那么根据勾股定理，$|AB| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$。

可以看出，对于直角三角形，由于有勾股定理作为“武器”，我们总可以破解三角形的边角关系。因此，我们需要“升级装备”，把勾股定理推广为对一般的三角形也适用的结论。为此，我们需要定义角的余弦。

什么是角的余弦呢? 我们已经定义了角的正弦。在直角三角形中，锐角的正弦是对边长度与斜边长度之比。这个公式中我们用到了三角形的两条边。我们定义锐角的**余弦**（或**余弦值**）为剩余的直角边（也就是相邻的直角边）长度与斜边长度之比。在 MOB 的例子中，角 A 的余弦就是弦 BC 的弦心距，记为 $\cos A$。

显然，直角三角形中，一个锐角的邻边就是另一个锐角的对边。所以**锐角的余弦等于它的余角的正弦**:

$$\forall\ 0 \leqslant A \leqslant 90^\circ,\ \ \cos A = \sin(90^\circ - A).$$

这样我们就定义了**余弦函数**。零角的余弦是 1。从零角出发，随着角度增大，角的余弦逐渐减小。直角时，余弦值达到最小值 0。

此外，角的正弦和余弦分别是直角三角形两条直角边和斜边的比值。所

以根据勾股定理，

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1.$$

其中 $\cos^2 A, \sin^2 A$ 分别是 $(\cos A)^2, (\sin A)^2$ 的简便记法。这个结论也叫三**角勾股定理**。

怎么计算角的余弦值呢？从三角勾股定理定理可以看出，已知锐角的正弦，就可以得到它的余弦：$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}$。所以，可以查正弦表得到角的正弦值，再求出余弦值。反过来，已知锐角的余弦，可以先算出它的正弦，然后查表得到角度。

习题 3.3.1.

1. 从等腰直角三角形的性质出发，计算 $45°$ 的正弦和余弦值。

直角三角形 ABC 中，$\angle C$ 是直角。斜边长度 c 是直角边长度 a 的 2 倍。

2. 作斜边中点 M，证明：$\triangle BMC$ 是正三角形。

3. 计算 $30°$ 和 $60°$ 的正弦和余弦值。

等腰三角形 ABC 中，顶角 $\angle A$ 是底角 $\angle B$ 的 2 倍。

4. 设 $\angle B$ 的平分线交对边于点 D。证明：$\triangle ABC \sim \triangle BCD$。

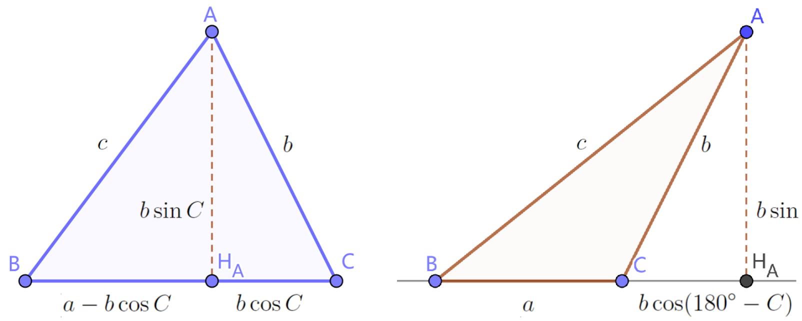
5. 设底边长 $a = 1$，腰长 $b = c = x$，证明：$x^2 - x - 1 = 0$。

6. 计算 $18°$、$36°$、$54°$ 和 $72°$ 的正弦和余弦值。

3.4 余弦定理

定义了角的余弦，我们再来看前面“边边边”的问题（例题 3.3.1第一题）。如果 $\angle C$ 是直角，那么根据勾股定理，可以直接求出 AB 长度。如果 $\angle C$ 不是直角，我们希望把问题转化为直角三角形的边角关系。

作顶点 A 到 BC 的高，记垂足为 H_A，则 $H_A \neq C$。$\triangle ACH_A$ 是直角三角形，所以 $|AH_A| = |AC| \sin C = b \sin C$。如果 $\angle C$ 是锐角，那么 H_A 在线段 BC 上，$|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos C$；如果 $\angle C$ 是钝角，那么 H_A 在线段 BC 延长线上，$|CH_A| = |AC| \cos C = b \cos(180° - C)$。



$\triangle ABH_A$ 是直角三角形。根据勾股定理，$|AB|^2=|AH_A|^2+|BH_A|^2$。如果 $\angle C$ 是锐角，那么

$$|AB|^2=|AH_A|^2+|BH_A|^2=|AH_A|^2+(|BC|-|CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2&=(b\sin C)^2+(a-b\cos C)^2\\ &=b^2\sin^2 C+b^2\cos^2 C+a^2-2ab\cos C\\ &=a^2+b^2-2ab\cos C \end{aligned}$$

我们得到了 a、b、c 和 $\angle C$ 的关系。这个关系叫做**余弦定理**。可以看出，$\angle C$ 为直角时，余弦定理就变成了勾股定理。所以，余弦定理是勾股定理的“升级版本”，勾股定理可以看作是余弦定理的特例。使用余弦定理，我们可以解决例题 3.3.1第一题。

解答. 根据余弦定理，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cos 50°\approx 21.15.$$

因此 $c\approx\sqrt{21.15}\approx 4.6$。

用同样的方法，能否解决第二题呢？我们列出等式：

$$6^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos C$$

解得 $\cos C = -\frac{1}{15}$。显然，任何锐角或直角的余弦都不是负数。我们猜测，这是因为 C 是钝角。而前面的推导中，$\angle C$ 是锐角。

来看 $\angle C$ 是钝角的情况。如果 $\angle C$ 是钝角，那么

$$|AB|^2 = |AH_A|^2 + |BH_A|^2 = |AH_A|^2 + (|BC| + |CH_A|)^2$$

即

$$\begin{aligned} c^2 &= (b\sin C)^2 + (a + b\cos(180^\circ - C))^2 \\ &= b^2\sin^2 C + b^2\cos^2(180^\circ - C) + a^2 + 2ab\cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

可以看到，对钝角三角形，余弦定理的表达式比锐角三角形复杂很多。把 $a = 3$、$b = 5$、$c = 6$ 代入钝角的余弦定理公式，我们发现难以解出 C。公式中，含有 C 的项无法像锐角的情况里那样合并化简，原因在于我们没有定义钝角的余弦值，只能用锐角 $180^\circ - C$ 的余弦值来表示。

如何定义钝角的余弦值呢？钝角的正弦为其补角的正弦。我们希望钝角的余弦也满足三角勾股定理：

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

这就要求

$$\begin{aligned} \cos C &= \sqrt{1 - \sin^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(180^\circ - C)} \\ &= \pm\cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦：$\cos C = \cos(180^\circ - C)$，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C.$$

如果我们定义钝角的余弦为它补角的余弦的相反数：$\cos C = -\cos(180^\circ - C)$，钝角三角形的余弦定理就变成：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

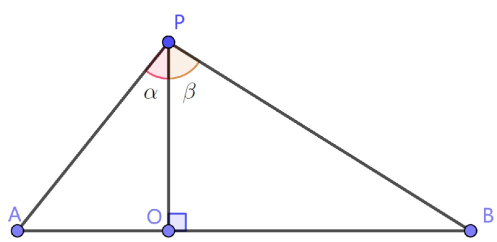
显然，后一种情况下，钝角三角形和锐角三角形余弦定理的形式就统一了。接下来我们会看到，后者在各个方面都更加合理。

习题 3.4.1.

1. 已知三角形三边长为 5、7、8，求三内角的大小。

3.5 和差角公式

解决平面形状的问题时，我们常常需要处理角度的和与差。给定两个角度 α、β，我们希望能够给出 $\alpha+\beta$、$\alpha-\beta$ 的正弦和余弦值。换句话说，我们希望能够打通正弦函数、余弦函数和实数的加减法的关系。



让我们从两个锐角的和出发。如上图，$\alpha = \angle APO$ 和 $\beta = \angle OPB$ 都是锐角，$OP \perp AB$。$\triangle AOB$ 的面积是 $\triangle AOP$、$\triangle BOP$ 面积之和。用相应的面积公式表示：

$$\frac{1}{2}|AP||BP|\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}|AP||OP|\sin\alpha + \frac{1}{2}|OP||BP|\sin\beta$$

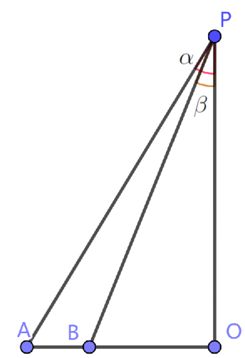
因此：

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{|OP|}{|BP|}\sin\alpha + \frac{|OP|}{|AP|}\sin\beta$$

$\triangle AOP$、$\triangle BOP$ 都是直角三角形，所以 $|OP| = |AP|\cos\alpha = |BP|\cos\beta$。代入上式，就得到：

$$\forall\ 0 < \alpha, \beta < 90^\circ,\ \ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

这就是两锐角之和正弦值的公式，简称**和角正弦公式**。可以验证，当 α、β 是零角或直角的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为 $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 90^\circ$。



对于两锐角之差，可以用类似的方式推导。如右图，设 $\alpha = \angle APO > \beta = \angle BPO$, $\triangle AOP$ 的面积是 $\triangle APB$、$\triangle OPB$ 面积之和。比照和角正弦公式的推导，可以得到：

$$\forall\ 0 < \beta < \alpha < 90^\circ,\ \ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

是为两锐角之差正弦值的公式，简称**差角正弦公式**。
可以验证，无论是当 α、β 是零角或直角的时候，还是 $\alpha = \beta$ 的时候，公式仍然成立。所以，可以把公式的适用范围扩大为 $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$。

注意到和角、差角正弦公式中都出现了角的余弦，我们可以据此推出和角、差角的余弦公式。首先，假设 α、β、$\alpha-\beta$ 都是锐角。从和角正弦公式出发，可以得到这样的关系：

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha-\beta+\beta) = \sin(\alpha-\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta.$$

这个等式中只有 $\cos(\alpha-\beta)$ 是未知的。根据差角正弦公式，可以得到：

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \sin(\alpha-\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta \\
&= (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta \\
&= \sin\alpha\cos^2\beta - \cos\alpha\sin\beta\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sin\beta\cos(\alpha-\beta) &= \sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= \sin\alpha(1-\cos^2\beta) + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= \sin\alpha\sin^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= \sin\beta(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta)\end{aligned}$$

两边约去 $\sin\beta$，就得到：

$$\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta.$$

这就是两锐角之差余弦值的公式，简称**差角余弦公式**。

同理，假设 α、β、$\alpha+\beta$ 都是锐角，从差角正弦公式出发，可以得到：

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) = \sin(\alpha+\beta-\beta) &= \sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta \\ &= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta \\ &= \sin\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sin\beta\cos(\alpha+\beta) &= -\sin\alpha + \sin\alpha\cos^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= -\sin\alpha(1-\cos^2\beta) + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= -\sin\alpha\sin^2\beta + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta \\ &= \sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$

两边约去 $\sin\beta$，就得到：

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

这就是两锐角之和余弦值的公式，简称**和角余弦公式**。

要注意的是，上面的推导中，我们假设 α、β、$\alpha+\beta$ 是锐角。然而，推导中涉及的项，除了 $\cos(\alpha+\beta)$，都不要求 $\alpha+\beta$ 是锐角。另一方面，在和

角余弦公式中，只要确定了 α、β，就能计算 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。所以，$\alpha+\beta$ 是直角或钝角时，我们可以定义 $\cos(\alpha+\beta)$ 为关于 x 的方程：

$$x=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

的唯一解。这样，我们就定义了钝角的余弦值。当然，这样定义钝角余弦值，不好理解。为了好理解，我们仿照正弦，给出互为补角的两角余弦的关系。这样，通过单个锐角的余弦值，就能得到钝角的余弦值了。

在和角余弦公式中，令较大角为直角，代入得到

$$\forall\ 0\leqslant\beta\leqslant 90^\circ,\ \ \cos(90^\circ+\beta)=-\sin\beta.$$

对锐角 β 来说，$90^\circ-\beta$ 也是锐角，于是：

$$-\cos\beta=-\sin(90^\circ-\beta)=\cos(180^\circ-\beta).$$

这说明 $\cos(180^\circ-\beta)=-\cos\beta$。**互为补角的两角，余弦值互为相反数**。

上一节中，我们让钝角的余弦等于其补角的相反数。现在我们看到，这个选择是合理的。至此，我们可以写出余弦定理的统一形式：

定理 3.5.1. 余弦定理 设三角形 ABC 的内角 A,B,C 对边长度分别为 a,b,c，则

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\ \ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ \ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

余弦定理说明，三角形内角的余弦值，决定了它对边边长的平方与另两边边长的平方和的大小关系。锐角的余弦值大于 0，它对边边长的平方小于另两边边长的平方和。钝角的余弦值小于 0，它对边边长的平方大于另两边边长的平方和。直角的余弦值是 0，它对边边长的平方等于另两边边长的平方和。

回到例题 3.3.1：三角形三边长为 3、5、6，求三个内角的大小。不妨设三角形 ABC 中 $a=3$、$b=5$、$c=6$。根据余弦定理，

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \approx -0.0667.$$

于是 $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} \approx 0.9978$，查表知锐角 $180° - C \approx 86.2°$，即 $\angle C \approx 93.8°$。同理，可以算得 $\angle A \approx 29.9°$，$\angle B \approx 56.3°$。

习题 3.5.1.

1. 验证：和角、差角公式对边界情形（零角、直角等情况）成立。

2. 证明正弦和余弦的**倍角公式**：

$$\begin{aligned}\forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 90°,\ \ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

3. 证明正弦和余弦的**半角公式**：

$$\begin{aligned}\forall\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 180°,\ \ \sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\end{aligned}$$

4. 证明正弦和余弦的**积化和差公式**：

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) \\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\end{aligned}$$

5. 证明正弦和余弦的**和差化积公式**：

$$\begin{aligned}\sin\alpha \pm \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\end{aligned}$$

5. 设平行四边形 $ABCD$ 的相邻两边长为 a,b，两对角线长为 u,v，证明：$u^2+v^2=2a^2+2b^2$。

6. 设 $\triangle ABC$ 三边长分别为 a,b,c，证明：

$$\sin A=\frac{\sqrt{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{2bc}.$$

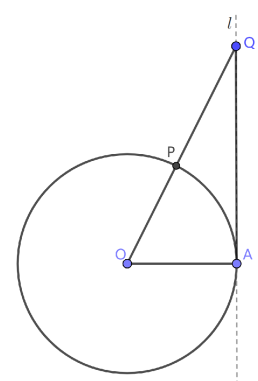
7. 设 $\triangle ABC$ 周长的一半为 p，证明：$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$。

8. $\triangle ABC$ 一边的长度是另一边的 2 倍。设 A 是 $\triangle ABC$ 最大的内角，证明：$\cos A\leqslant 0.25$。

3.6 正切函数和余切函数

历史上，除了正弦函数和余弦函数，数学家们还发明了别的函数来讨论角度。**正切函数**和**余切函数**就是两种常用的函数。

如下图，单位圆的切线 l 与锐角 $\angle AOP$ 的终边交于 Q，定义 $\angle AOP$ 的**正切**（**值**）为 $\tan\angle AOP=|AQ|$，**余切**（**值**）为 $\cot\angle AOP=\frac{1}{|AQ|}$。也就是说，我们用角截切线的长度来度量角的大小。按照定义，**同角的正切值和余切值互为倒数**。



和正弦、余弦一样，我们可以定义正切、余切函数。要注意的是，正切函数对零角和锐角有定义，但对直角没有定义。余切函数对锐角和直角有定义，对零角没有定义。

不难证明：

$$\forall\ 0<\alpha<90^\circ,\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

换句话说，可以用锐角的正弦和余弦定义它的正切和余切。零角的正切是 0，直角的余切是 0。从零角开始，随着角度增大，正切值不断增大。从直

角开始随着角度减小，余切值不断减小。$\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45°$，因此 $\tan 45° = \cot 45° = 1$。

反过来，也可以用锐角的正切和余切定义它的正弦和余弦：

$$\forall\ 0 < \alpha < 90°,\ \ \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\cot^2\alpha}},\ \ \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$$

对于钝角，我们希望保持正切、余切和正弦、余弦的关系，因此，定义

$$\forall\ 90° < \alpha < 180°,\ \ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

于是，补角的正切和余切满足以下关系：

$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha,\ \ \cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$$

也就是说，钝角的正切和余切都小于 0。

从正弦和余弦的和差角公式，可以推出正切和余切的和差角公式：

$$\begin{aligned}
&\forall 0 \leqslant \alpha, \beta < 90°,\\
&\qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}\\
&\qquad\qquad\qquad\ \ = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}\\
&= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall 0 < \alpha, \beta \leqslant 90°,\\
&\qquad \cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}\\
&\qquad\qquad\qquad\ \ = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}&=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}\end{aligned}$$

以上关系可以简写为:

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$$

三角形中，内角之和为平角。因此，两角之和的正切值是第三个角正切值的相反数:

$$\begin{aligned}\tan C=\tan(180^\circ-(A+B))&=-\tan(A+B)\\&=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.\end{aligned}$$

于是:

$$\tan C(1-\tan A\tan B)=-\tan A-\tan B,$$
$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

定理 3.6.1. 正切定理 三角形内角的正切值之和等于它们的乘积。

正切定理和正弦定理、余弦定理不同。它并不涉及三角形的边，是纯粹关于角的定理。使用正切定理无法解决边角关系的问题，但可以比较方便地给出三角形内角的关系。利用正切和余切的倒数关系，可以写出关于余切的类似结论:

定理 3.6.2. 余切定理 三角形 ABC 内角的余切值满足:

$$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1.$$

习题 3.6.1.

1. 证明正切和余切的**倍角公式**:

$$\forall\ 0<\alpha<45^\circ,\ \ \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

2. 证明正切和余切的**半角公式**:

$$\forall\ 0<\alpha<180^\circ,\ \ \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$
$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

定义锐角 α 的**正割值**（$\sec\alpha$）和**余割值**（$\csc\alpha$）:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\ \ \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

3. 证明：锐角的正割等于它的余角的余割，锐角的余割等于它的余角的正割。

4. 证明:

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha,\ \ 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

5. 证明**万能公式**:

$$\forall 0<\alpha<180^\circ,\ 记\tan\frac{\alpha}{2}=t,\ 则:$$
$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2},\quad \sec\alpha=\frac{1+t^2}{1-t^2},$$
$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \cot\alpha=\frac{1-t^2}{2t},\quad \csc\alpha=\frac{1+t^2}{2t}.$$

第四章　从或许到确定

预测未来，是人类社会的重要活动。合理有效地预测未来，是社会文明进步的标志。中华文明作为农耕文明，很早就懂得预测未来的重要性。历法、史书、节气，都是我们的祖先为了后人更好地预测未来，留下的经验总结。

生产活动中，预测尤其重要。比如，农牧业、渔业、运输业等行业需要预测天气，销售行业需要预测产品的市场需求。科学研究和工程制造中，如果能够提前知道产品在各种各样的情境和场景下的性能，可以节约大量人力物力。社会要发展，就需要更高的预测水平。

4.1　事件和见知

如何判断某件事情将来会不会发生? 我们要依赖已有的知识和经验。日常生活中，我们会说“明天大概要下雨”、“今年冬天肯定很冷”、“我明天大概去不了了”。根据已有条件，有些事情必然发生，有些事情或许会发生，有些事情不可能发生。事情发生与否，取决于某些条件。我们把这样的事情叫作**随机事件**，简称**事件**。在已知条件下，如果某事件必然发生，就说它是**必然事件**；如果某事件必然不发生，就说它是**不可能事件**；如果某事件或许会发生，就说它是**或然事件**。数学中，研究这些事情的理论叫作概率论。

概率论假定，我们关心的随机事件有某些恒定的内在规律，受某些固

有未知因素的影响。概率论通过研究这些内在规律和因素，预测事件是否会发生。

如何描述一个事件? 从客观的角度，我们可以把“发生一件事”看成事物状态、形势局面的改变。一件事是否发生，可以用改变后的状态或局面表示。我们也许无法确定未来事物发展成哪个状态、形势走向哪个局面，但我们可以事先确定事物未来所有可能的状态、所有可能出现的局面。

比如，我们无法确定明天杭州是否下雨，但我们知道，在明天杭州是否下雨这个问题上，只可能出现两个结局：下雨或不下雨。又比如，我们投一个骰子前，无法确定朝上一面的点数，但我们知道，投出的骰子最终只有六个状态：朝上一面是 $1, 2, 3, 4, 5$ 或 6 点。这些最终状态、局面是**互斥**的。比如明天杭州不可能既下雨又不下雨，骰子停下之后不可能既是 1 点朝上又是 2 点朝上。

我们把所有可能的最终状态或局面看成一个集合，集合中的每个元素称为事情的**终态**或**结局**。比如，考虑明天杭州是否下雨这个问题时，所有结局构成 {下雨, 不下雨} 这个集合，每次投骰子时，骰子的终态构成 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 这个集合。我们把这个集合叫作**终集**，即终态的全集。我们可以把相关的事件用终集的子集表示。比如，“明天杭州下雨”对应 {下雨} 这个子集，“骰子点数是偶数”对应 $\{2, 4, 6\}$ 这个子集。事物发展的终态如果在子集里，就说明事件发生了，否则事件没有发生。

单元集也对应着事件。我们把这些事件叫做**基本事件**。不是任何其他事件的交集的事件，叫做基本事件。比如 $\{1\}$ 对应的“骰子点数是 1”就是基本事件。基本事件是各种事件的“基本单元”，它们通过合并形成别的事件。基本事件之间是互斥事件，它们是终集的分划。

终集可以是有限的，也可以是无限的。目前我们只讨论有限的情况。要注意的是，随着问题的条件、环境、思考问题的角度发生变化，终集也会变化。比如，我们考虑明天杭州下雨的问题时，可能要把准备经过杭州的台风“凤凰”也考虑在内。台风“凤凰”也许继续靠近，也许转向。这时，我们

的终集是：

{台风靠近且下雨, 台风靠近且不下雨, 台风转向且下雨, 台风转向且不下雨}

而“明天杭州下雨”对应子集 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}。

对于随机事件，如果我们知道得更多，就能作出更准确的预测。比如，如果我们不知道台风的情况，那么即便我们把终集依照“台风是否继续靠近”划分，我们能把握的也只是 {台风靠近且下雨, 台风转向且下雨}、{台风靠近且不下雨, 台风转向且不下雨} 两个事件，与 {下雨}, {不下雨} 并没有不同。如果我们掌握了台风的动向，我们就希望把 {下雨} 分成 {台风靠近且下雨} 和 {台风转向且下雨} 来讨论了。可以说，随着我们对事物、形势的认知增加，我们的终集会越来越“细”。

为了描述认知增加的过程，我们从最“细”的终集出发，定义每个阶段的**知集**，代替不同阶段的终集。知集是最“细”终集的子集构成的集合，满足：

1. 空集属于知集；
2. 如果集合 A 属于知集，那么 A 的补集也属于知集；
3. 如果集合 A 和 B 属于知集，那么它们的并集也属于知集。

知集表示我们每个阶段的认知。我们根据当前的认知来讨论各种事件。比如，在杭州下雨的例子里，可以有两个知集，分别是：

$$S_1 = \big\{\varnothing, \{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{AN}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}\big\}$$

和

$$\begin{aligned} S_2 = \big\{&\varnothing, \{\mathrm{AR}\}, \{\mathrm{AN}\}, \{\mathrm{DR}\}, \{\mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{DN}\}, \\ &\{\mathrm{AN}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{DN}, \mathrm{AN}\}, \{\mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DR}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DN}\}, \\ &\{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AN}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}, \{\mathrm{AR}, \mathrm{AN}, \mathrm{DR}, \mathrm{DN}\}\big\} \end{aligned}$$

其中 AR, AN, DR, DN 分别表示“台风靠近且下雨”、“台风靠近且不下雨”、“台风转向且下雨”和”台风转向且不下雨“。可以看出，S_1 是 S_2 的子集。S_1 到 S_2 的过程，就是对台风认知加深的过程。

这种描述下，不同的知集就对应不同“粗细”的终集。每个知集都对应自己的基本事件。这时候的基本事件不一定是单元集。比如，$\{\mathrm{AR}, \mathrm{DR}\}$ 在 S_1 中是基本事件，在 S_2 中就不是基本事件了。

习题 4.1.1. 写出以下问题的终集和知集。

1. 我国朱鹮从东北省份向南迁徙的路线有三条：西线、中线和东北线。小明想知道黑龙江省的某只朱鹮沿哪条路线南迁。

2. 某航空公司规定：作为补偿，飞机晚点一小时以上，返还全票票价的 40%；如果晚点三小时以上，返还全票票价的 75%。乘客实际购票价低于前述返还价格的，返还乘客实际购票价。航班因晚点取消，且乘客自愿接受转乘下一班机的，公司协助补票，实施“就低返利”政策：按照下一班机实时票价和乘客最初购票价的较低者计算新票价，多则退还差价；并另外补偿新票价的 30%。某乘客购票后，在候机时被告知飞机可能晚点，他试着分析可能得到的晚点补偿。

4.2 概率和分布

预测随机事件时，我们除了关心会发生什么事情，还关心事情有多大可能发生。当我们说“这事百分之百能成”，“他八成还在路上”，“他的话只有三分准头”，我们认为某些事情比另一些事情更可能发生。习惯上，我们用数来描述事情有多大可能发生。在数学中，我们把这个做法称为**事件的概率**。

我们用不大于 1 的非负实数表示事件的概率。约定不可能事件的概率是 0，必然事件的概率是 1。事件的概率越大，越有可能发生。此外，事件的概率应当和事件之间的关系相符。两个互斥事件同时发生的概率应该是

0，至少有一个发生的概率应该是它俩概率的和。用集合的语言来说，空集的概率应该是 0，终集的概率应该是 1；两个集合不相交，那么它们的并集的概率等于它们概率的和。

我们习惯用映射 $\mathbb{P}$ 来记录概率。把事件 A 的概率记为 $\mathbb{P}(A)$。比如，我们说明天八成会下雨，可以写成 $\mathbb{P}(\{\text{下雨}\}) = 0.8$。不至于混淆时，也可以省略表示集合的大括号，写成：$\mathbb{P}(\text{下雨}) = 0.8$。

基本事件两两互斥，并集是终集（全集）。所以，基本事件的概率之和等于 1。

举例来说，投骰子的时候，我们一般认为投出 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 点的可能性都一样大，即每个基本事件的概率都相等。于是它们各自的概率是六分之一。据此，可以算出任何事件的概率。比如，“投出 5 点或以上”的概率是“投出 5 点”的概率加上“投出 6 点”的概率，也就是三分之一。如果我们知道骰子有问题，比如投出 6 点的可能性是其他任一点数的 2 倍，那么“投出 6 点”的概率是七分之二；投出其他点数，比如“投出 3 点”的概率是七分之一；而“投出 5 点或以上”的概率是七分之三。

终集是有限集合的时候，对每个知集来说，只要知道了其中每个基本事件分配到的概率（称为**概率分布**），就可以推出知集里其他事件的概率。

思考 4.2.1. 同一个终集下的不同知集中，同一个事件的概率是否相同?

4.3 二项分布和均匀分布

我们来看两种简单的概率分布。

考虑只有两个终态 a, b 的终集，两个基本事件 $\{a\}, \{b\}$ 概率之和是 1。设其中一个的概率是 p，则另一个的概率是 $1 - p$。我们把这样的概率分布叫作**二项分布**。举例来说，如果我们认为明天杭州下雨的概率是 0.7，不下雨的概率就是 $1 - 0.7 = 0.3$。我们说，我们认为明天杭州下雨的问题服从二

项分布。

又比如：抛一枚硬币，我们认为正面朝上的概率是 0.52，那么反面朝上的概率就是 $1-0.52=0.48$。我们说，我们认为抛这枚硬币的问题服从二项分布。为了好说话，我们会在两个基本事件中选一个我们更关心的，称为**正面事件**，把另一个称作**反面事件**。如果正面事件的概率是 p，就说问题服从系数为 p 的二项分布。

终集为 $\{a,b\}$ 的二项分布，包括四个事件，分别对应 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$ 四个子集。设 $\{a\}$ 是正面事件，概率为 p，那么这四个事件的概率分别是 0、p、$1-p$ 和 1。

对于元素更多的终集，情况更加复杂。我们考虑一种简单情形：每个基本事件的概率相等。这样的概率分布称为**等概率分布**或**均匀分布**。比如，投骰子时，如果我们认为每面朝上的概率都相等，就说投骰子服从均匀分布。

假设终集有 n 个终态，那么每个基本事件的概率就是 $\frac{1}{n}$。对于任意事件，我们可以数一下事件包含了几个终态，用终态个数除以所有终态的个数，就是它的概率。我们把这个性质写作：

$$\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|S|}$$

其中 $|A|$ 表示事件 A 作为集合的元素个数，$|S|$ 表示终集 S 的元素个数。比如，服从均匀分布的投骰子问题中，要求“大于 2 点”的概率，我们数一下事件 $\{3,4,5,6\}$，它包含了 4 个终态，所以“大于 2 点”的概率是 $4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$。

习题 4.3.1.

1. 把 1 到 100 分别写在小纸条上放入黑箱里，随意抽取一张，抽到的数是素数的概率是多少？完全平方数的概率是多少？各位数字乘积大于 10 的概率是多少？

2. 有没有以全体自然数为终集的均匀分布？为什么？说说你的理由。

4.4 排列和组合

均匀分布的问题里，事件的概率只和它包含的终态的个数以及所有终态的个数有关。因此，在相关的一些问题里，我们关心如何计出事件包含的终态的个数。

例子 4.4.1. 将编号为 $1,2,3$ 的 3 个小球排成一列，最左边的球是 1 的概率是多少?

要知道事件“最左边的球是 1”的概率，用“最左边的球是 1”包含的终态个数除以所有终态的个数。怎么计算“最左边的球是 1”包含的终态个数和所有终态的个数呢?

首先考虑所有终态的个数：将编号为 $1,2,3$ 的 3 个小球排成一列，有多少种方法?

不妨设三个球从左到右排列。无论排列方式如何，三个球分别占据“左”、“中”、“右”三个位置。从左边开始，把球一个个放到位置上。左边的位置可以放三个球中任何一个，因此有 3 种方法。按任一种方法放好左边的球以后，中间的位置可以放剩余两个球中任何一个，因此有 2 种方法。按任一种方法放好中间的球以后，右边的位置可以放最后一个球，只有 1 种方法。于是一共有 $3\times 2\times 1=6$ 种方法。

如果最左边的球是 1，有多少种方法? 这时左边的位置已经放好了 1 号球，因此中间的位置还有两种放法。任一种方法放好中间的球以后，右边的位置放最后一个球，只有 1 中方法。因此，一共有 $2\times 1=2$ 种方法。

综上所述，“最左边的球是 1”的概率是:

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是1})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

我们把 n 个互不相同的物品排成一列的方法数目称为 n **排列数**，记作

P_n。比如，编号为 $1,2,3$ 的 3 个小球排成一列的方法数目就叫做“3 排列数”，记作 P_3。

对于一般的自然数 n，n 排列数是 $n-1$ 排列数的 n 倍。这是因为，如果把 n 个互不相同的物品排成一列，第一个位置总可以放 n 个物品中的任何一个，有 n 种方法。按任一种方法放好第一个位置后，剩下的 $n-1$ 个位置摆放剩下的 $n-1$ 个物品的方法数目，恰好就是 $n-1$ 排列数。

因此，用归纳法可以证明，n 排列数就是 n 乘以 $n-1$ 乘以 $n-2$……直到乘以 1 的乘积。比如，5 排列数就是 $5\times4\times3\times2\times1=120$。

如果我们把从 n 乘到 1 的计算看成关于 n 的函数的话，这个函数叫做（n 的）**阶乘**，记作 $n!$。n 排列数就是 n 的阶乘。

例子 4.4.2. 将 3 个红球和 2 个白球组成一列，最左边的球是红球的概率是多少?

我们仍然先计算 3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数。这里球只有红白两种颜色的分别。同色的球没有差别。如果我们把球编号，$1,2,3$ 号球是红球，$4,5$ 号球是白球，那么，按照编号排列，有 $5!=120$ 种方法。不过，$1-2-3-4-5$ 和 $2-3-1-4-5$ 其实是同一种方法。因为 $1,2,3$ 号球都是红球，并没有差别。把 $1-2-3-4-5$ 里的 3 个红球任意改变次序，都不影响结果。同理，把 $1-2-3-4-5$ 里的 2 个白球任意改变次序，都不影响结果。3 个红球的排列方法有 $3!=6$ 种，2 个白球的排列方法有 $2!=2$ 种，于是这 $6\times2=12$ 种方法都对应同一种结果。也就是说，带编号的 12 个排列方法对应一种不带编号的排列方法。因此，实际上只有 $\frac{5!}{3!2!}=10$ 种排列方法。

我们把不带编号的排列方法称为**组合数**或**选列数**。比如，3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目叫做“3, 2 组合数”，或“5 选 3”（因为也可以看作从 5 个位置里选 3 个放红球），记作 C_5^3 或 $\binom{5}{3}$。

如果最左边的球是红球，那么剩下的 4 个位置要放 2 个红球、2 个白

球。于是，一共有 C_4^2 种方法。计算可知：

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6.$$

即一共有 6 种方法。因此最左边的球是红球的概率是：

$$\mathbb{P}(\text{最左边的球是红球}) = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

一般来说，“n 选 m”也可以用阶乘计算：

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

容易发现：“n 选 m”等于“n 选 $n-m$”。比如，5 选 3 等于 5 选 2。用红球和白球的例子，可以理解为：3 个红球和 2 个白球组成一列的方法数目，等于 3 个白球和 2 个红球组成一列的方法数目。

掌握了排列数和组合数，我们就可以计算一些复杂问题里终态的个数。

习题 4.4.1.

1. 5 个红球和 3 个白球排成一列，有多少种方法？

2. 2 个红球、3 个白球和 2 个黄球排成一列，有多少种方法？

3. 从编号 $1, 2, 3, 4, 5$ 的 5 个球中选出 3 个排成一列，有多少种方法？这个数目叫做 $5, 3$ 排列数。试求一般情况下 n, m 排列数（从编号为 1 到 n 的 n 个球中选出 m 个排成一列的方法数目）的公式。

4. 设有两个正整数 $m < n$，证明：$m!$ 整除 $n!$。