

第四册

大青花鱼

目录

第一章 四边形

四边形是生活中常见的形状。下面来看几种常见的四边形。

1.1 平行四边形

平行四边形是一种重要的四边形。它由两组平行线确定。

设直线 $l_1 \parallel l_2$, $m_1 \parallel m_2$, 且 l_1 和 m_1 有交点 A , 那么 l_2 和 m_1 、 l_2 和 m_2 、 l_1 和 m_2 各有交点 B 、 C 、 D , 四边形 $ABCD$ 叫做平行四边形, 记作 $\square ABCD$ 。

设有四边形 $ABCD$, 我们说 AB 、 CD 互为对边, BC 、 DA 互为对边; $\angle ABC$ 和 $\angle CDA$ 互为对角, $\angle BCD$ 和 $\angle DAB$ 互为对角。线段 AC 和 BD 称为四边形的对角线。

定理 1.1.1. 平行四边形对边平行且等长, 对角相等。

证明: 给定 $\square ABCD$, 按定义可知对边平行。

接着证明 $\square ABCD$ 的对角相等。

$\angle ABC$ 和 $\angle DAB$ 是同旁内角, 所以和为平角。类似地, $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 是同旁内角, 所以和为平角。于是, $\angle DAB = \angle BCD$ 。同理, $\angle ABC$ 和



$\angle DAB$ 是同旁内角，所以和为平角。类似地， $\angle CDA$ 和 $\angle DAB$ 是同旁内角，所以和为平角。于是， $\angle ABC = \angle CDA$ 。

最后证明 $\square ABCD$ 的对边等长。

连接对角线 AC 。 $AB \parallel CD$ ，所以内错角 $\angle CAB = \angle ACD$ ；同理， $BC \parallel DA$ ，所以内错角 $\angle BCA = \angle DAC$ 。另外 $|AC| = |AC|$ 。所以，根据“角边角”， $\triangle ABC \simeq \triangle CDA$ 。因此， $|AB| = |CD|$ ， $|BC| = |DA|$ 。□

从证明中可以看出，平行四边形和三角形有密切的关系。把平行四边形沿对角线“裁开”，就得到一对同角全等的三角形。一般来说，任何四边形沿对角线裁开，都会得到两个三角形。因此，在约定角的范围是负平角到正平角时，**四边形的内角和是零角**。对平行四边形来说，为了方便，也说它的内角和是周角。

除了对边分别平行，还有什么办法，判断一个四边形是不是平行四边形呢？我们可以从这对全等三角形入手。以上证明中用到了“角边角”，是否可以换成“边角边”或“边边边”呢？

定理 1.1.2. 对边等长的四边形是平行四边形。

证明： 设四边形 $ABCD$ 中 $|AB| = |CD|$ ， $|BC| = |DA|$ 。连接 AC ，根据“边边边”， $\triangle ABC \simeq \triangle CDA$ ，因此， $\angle CAB = \angle ACD$ ，于是 $AB \parallel CD$ 。同理，由于 $\angle BCA = \angle DAC$ ， $BC \parallel DA$ 。于是四边形 $ABCD$ 是平行四边形。□

定理 1.1.3. 一对边平行且等长的四边形是平行四边形。

证明： 设四边形 $ABCD$ 中 $AB \parallel CD$ 且 $|AB| = |CD|$ 。连接 AC 。 $|AC| = |AC|$ 。由于 $AB \parallel CD$ ，内错角 $\angle CAB = \angle ACD$ 。根据“边角边”， $\triangle ABC \simeq \triangle CDA$ ，因此，由于 $\angle BCA = \angle DAC$ ， $BC \parallel DA$ 。于是四边形 $ABCD$ 是平行四边形。□

定理 1.1.4. 对角相等的四边形是平行四边形。

证明： 设四边形 $ABCD$ 中 $\angle ABC = \angle CDA$, $\angle BCD = \angle DAB$ 。四边形的内角和是两个平角，所以同旁内角 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 满足 $\angle ABC + \angle BCD = 180^\circ$ ，这说明 $AB \parallel CD$ 。同理，同旁内角 $\angle ABC$ 和 $\angle DAB$ 满足 $\angle ABC + \angle DAB = 180^\circ$ ，因此 $BC \parallel DA$ 。□

思考 1.1.1. 一对边等长，一对角相等的四边形，是否是平行四边形？

给定 $\square ABCD$ ，设对角线 AC 和 BD 的交点为 G ，我们把 G 叫做平行四边形的**中心**。可以用“角边角”证明： $\triangle ABG \simeq \triangle CDG$, $\triangle BCG \simeq \triangle DAG$ 。因此， $|AG| = |CG|$ 、 $|BG| = |DG|$ 。 G 同时是两条对角线的中点。换句话说，**平行四边形的两条对角线相互平分**。用对称的说法， A 和 C 关于 G 对称， B 和 D 关于 G 对称。

在直角坐标系中，如果 A 的坐标是 (x_A, y_A) ， B 的坐标是 (x_B, y_B) ， C 的坐标是 (x_C, y_C) ， D 的坐标是 (x_D, y_D) ，那么 G 的坐标 (x_G, y_G) 满足：

$$x_A + x_C = 2x_G = x_B + x_D, \quad y_A + y_C = 2y_G = y_B + y_D.$$

平行四边形还可以用来定义平移变换。直角坐标系中，我们已经定义过平移。使用平行四边形的概念，设 A 是原点，那么关于另一点 B 的平移可以这样定义：对平面上任一点 D ，作平行四边形 $ABCD$ ，则 C 就是 D 平移后得到的点。用坐标来表示的话，这个平移就是：

$$(x_D, y_D) \mapsto (x_D + x_B, y_D + y_B).$$

习题 1.1.1. 证明：

1. 对角线相互平分的四边形是平行四边形。

1.2 特殊平行四边形

平行四边形是对边平行、对角相等的四边形。下面我们来看几种特殊的平行四边形。

如果四边形四边等长，就说它是**菱形**。菱形肯定是平行四边形。由于平行四边形对边等长，所以也可以这样判定菱形：

定理 1.2.1. 邻边等长的平行四边形是菱形。

把菱形沿对角线“裁开”，得到的一对三角形都是等腰三角形。由于对角线平分，菱形的中心是等腰三角形底边中点，对角线也是中线。而等腰三角形三线合一，中线就是高线。所以菱形的对角线不仅相互平分，而且相互垂直。

反过来，如果四边形的对角线相互平分，而且相互垂直，那么它是菱形。菱形的两条对角线把它分为四个全等的直角三角形。

如果四边形四角相等，就说它是**矩形或长方形**。由于四边形内角和是周角，平行四边形对角相等，所以也可以这样判定矩形：

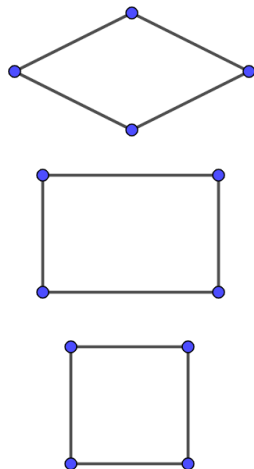
定理 1.2.2. 有一个角是直角的平行四边形是矩形。

把矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC “裁开”，得到 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ ，由于 $\angle ABC$ 和 $\angle CDA$ 都是直角， $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 是直角三角形。根据勾股定理。 $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ 。另一方面，把矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD “裁开”，通过类似推理可以得到： $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$ 。而 $|BC| = |AD|$ ，所以 $|AC| = |BD|$ 。即：

定理 1.2.3. 矩形的对角线相互平分，而且等长。

反过来，如果四边形的对角线相互平分而且等长，那么它是矩形。矩形的两条把它分为两对全等的等腰三角形。

如果一个四边形既是菱形，又是矩形，就称它为**正方形**。正方形是我们很熟悉的图形。正方形的四边等长，四个内角都是直角。它的对角线长度是



边长的 $\sqrt{2}$ 倍。把正方形沿对角线“裁开”，得到一对等腰直角三角形。正方形的两条对角线把它分为四个更小而全等的等腰直角三角形。

1.3 梯形

除了平行四边形，还有其他类型的四边形。

如果四边形有一对边平行，就说它是**梯形**。如果梯形另一对边也平行，就是平行四边形。我们已经研究过平行四边形了，所以，一般说梯形时，都指非平行四边形的梯形。

研究相似三角形的时候，我们已经接触过梯形。如右图，大的三角形里去掉小的三角形，就是梯形。把梯形补全为一对相似三角形，是常见的思考方式。



按照这个说法，梯形平行的一对边长度不等。我们称它们为**上底**和**下底**。一般会把较短的一边称为上底，较长的称为下底。另外两条边一般称为梯形的**腰**。两腰等长的梯形，称为**等腰梯形**。等腰梯形对应一对相似的等腰三角形。

设梯形 $ABCD$ 中 $BC \parallel AD$ ，那么同旁内角 $\angle ABC + \angle DAB = 180^\circ$ ， $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$ 。如果其中一个角是直角，这样的梯形叫作**直角梯形**。直角梯形对应一对相似的直角三角形。

梯形两腰的中点连线，称为梯形的**中位线**。

定理 1.3.1. 梯形中位线长度是两底长度之和的一半。

证明： 设梯形 $ABCD$ 中 $BC \parallel AD$, M 是边 AB 的中点, N 是边 CD 的中点, 直线 AB 、 CD 交于点 O 。由于 $BC \parallel AD$, $\triangle OBC \sim \triangle OAD$ 。因此:

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|BC|}{|AD|} = k.$$

其中 k 是比例系数, 即:

$$|OB| = k|OA|, \quad |OC| = k|OD|.$$

于是

$$|OM| = |OB| + \frac{|AB|}{2} = \frac{|OA| + |OB|}{2} = \frac{k+1}{2} \cdot |OA|.$$

同理,

$$|ON| = |OC| + \frac{|CD|}{2} = \frac{k+1}{2} \cdot |OD|.$$

这说明

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|ON|}{|OD|} = \frac{k+1}{2}.$$

而 $\angle MON = \angle AOD$, 所以 $\triangle OAD \sim \triangle OMN$ 。于是中位线 MN 的长度为

$$|MN| = |AD| \cdot \frac{|OM|}{|OA|} = \frac{k+1}{2} \cdot |AD|.$$

将 $k = \frac{|BC|}{|AD|}$ 代入, 就得到

$$|MN| = \frac{|BC| + |AD|}{2}.$$

□

1.4 筝形

平行四边形可以“裁成”两个同角全等的三角形。或者说，一对同角全等的三角形可以拼出一个平行四边形。那么，一对反角全等的三角形拼出的图形是什么呢？



这个图形叫作**筝形**。我们对筝形并不陌生，在证明“角边角”的时候已经见过。四边形的两对邻边分别等长，就叫作筝形。

如果筝形的对边也等长，就成了菱形。所以，一般说筝形时，都指非菱形的筝形。

筝形的最大特点，就是一条对角线是另一条的垂直平分线。我们把它叫作**脊线**，把另一条（被它平分的）对角线叫作**肩线**。我们已经证明过，脊线和肩线相互垂直。它们把筝形分为两对全等直角三角形。

直角坐标系中，把 $(0,0)$ 、 $(0,a)$ 、 (a,a) 、 $(a,0)$ 四点依次连起来，就围成一个边长为 a 的正方形。如果把 $(0,0)$ 、 $(0,b)$ 、 (a,b) 、 $(a,0)$ 四点依次连起来，就围成一个长宽为 a 和 b 的矩形。如果把 $(-a,0)$ 、 $(0,b)$ 、 $(a,0)$ 、 $(0,-b)$ 四点依次连起来，就围成一个菱形。如果把 $(0,0)$ 、 (a,b) 、 $(a+u,b+v)$ 、 (u,v) 四点依次连起来，就围成一个平行四边形。这些形状可以看作是实心的点集。比如以上正方形对应点集：

$$\{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq a\}.$$

从 $(0,0)$ 、 $(0,a)$ 、 (a,a) 、 $(a,0)$ 连成的正方形出发，关于点 $(0,a)$ 平移，就得到一个新的正方形，它是 $(0,a)$ 、 $(0,2a)$ 、 $(a,2a)$ 、 (a,a) 连成的正方形。

思考 1.4.1.

1. 从一个（实心）正方形出发，通过平移，能否填满整个平面，不留空隙也不互相重叠？

2. 从一个（实心的）矩形、菱形、平行四边形出发，通过平移，能否填满整个平面，不留空隙也不互相重叠？

3. 如果从一个（实心）图形出发，用和它全等的图形可以填满整个平面，不留空隙也不互相重叠，就说它是**密铺图形**，可以密铺平面。正方形、矩形、菱形、平行四边形、等腰梯形、直角梯形、筝形，哪些是密铺图形？

4. 如果一个图形关于某条直线的轴对称图形是它自己，就说它是**轴对称图形**，该直线是它的对称轴。同样，如果一个图形关于某点的中心对称图形是它自己，就说它是**中心对称图形**，该点是它的对称中心。正方形、矩形、菱形、平行四边形、等腰梯形、直角梯形、筝形，哪些是轴对称图形，哪些是中心对称图形？它们分别有哪些对称轴和对称中心？

1.5 剪形和蝶形

第二章 数的分解

自然数是我们最早认识的数。我们已经熟悉了自然数的四则运算，并且学习了因数和倍数。了解一个数的因数，无论对于理论研究，还是在实际生活中，都很有用处。

2.1 初识素数

我们已经学习过因数的概念。我们把因数只有自己和 1 的正整数叫做**素数**，除了 1 和自己还有别的因数的正整数叫做**合数**。约定 1 既不是素数也不是合数。

举例来说，2、3、5、7 是素数，而 4、6、8 是合数。偶素数只有一个：2，其余素数都是奇数。

定理 2.1.1. 设 p 是素数。任何正整数要么是 p 的倍数，要么与 p 互素。

证明： 设 n 是正整数。记 n 和 p 的最大公因数为 d 。 d 是 p 的因数。因此按 p 的定义，要么 $d = p$ ，要么 $d = 1$ 。如果 $d = p$ ，那么 n 是 p 的倍数。如果 $d = 1$ ，那么 n 与 p 互素。 \square

素数与合数有什么关系呢？

定理 2.1.2. 合数总有素因数。

证明： 按照定义，合数总有真因数。给定合数 n ，它的真因数大于 1、小于 n ，至少有一个，至多有 $n-2$ 个。其中总有一个最小的真因数，我们把它记为 p 。

p 的因数也是 n 的因数，所以要么是 1，要么大于等于 p 。也就是说， p 没有真因数。所以 p 是素数。 \square

定理 2.1.3. 每个大于 1 的整数都可以表示成素数或其乘积。

证明： 使用归纳法。命题 $P(n)$ ：整数 n 可以表示成素数或其乘积。下面证明 P 对每个大于 1 的整数成立。

$n = 2$ 时，由于 $2 = 2$ ， $P(2)$ 成立。

假设对某个大于 1 的整数 n ， $P(2), \dots, P(n)$ 都成立，下面证明 $P(n+1)$ 也成立。

如果 $n+1$ 是素数，那么 $n+1 = n+1$ 就是素数，于是 $P(n+1)$ 成立。

如果 $n+1$ 是合数，那么它至少有一个素因数 p 。设 $n+1 = mp$ ， $m \in \mathbb{Z}^+$ ，由于 $1 < p < n+1$ ，所以 $1 < m < n+1$ 。根据假设， $P(m)$ 成立，也就是说， m 可以表示成素数或其乘积：

$$m = p_1 p_2 \cdots p_k, \quad l \in \mathbb{Z}^+$$

于是， $n+1 = mp = p p_1 p_2 \cdots p_k$ 也是素数的乘积。于是 $P(n+1)$ 成立。

综上所述， $P(n)$ 对每个大于 1 的整数成立。 \square

我们把这种表示正整数的方式称为**素因数分解**。如果把自然数比作一座座房屋，那么素数就是砖瓦，构建起一个个合数。

素数与合数，谁比较多呢？一位数中，有 4 个素数，4 个合数；二位数中，有 21 个素数，69 个合数；三位数中，有 143 个素数，757 个合数；四位数中有 1061 个素数，7939 个合数。

越大的素数，越是罕见。

会不会从某个数开始，所有比它大的都是合数？也许，素数只有有限个？我们有这样一个定理：

定理 2.1.4. 素数的个数是无穷的。

证明： 使用反证法证明。反设素数的个数不是无穷的，即只有有限多个素数。把素数的个数记为 N ，把它们从小到大分别记为 p_1, p_2, \dots, p_N 。

考察这样的正整数：

$$m = p_1 p_2 \cdots p_N + 1.$$

m 与所有素数互素。所以， m 的因数要么是 1，要么是它自己，要么是某个与 p_1, p_2, \dots, p_N 都不一样的数。这就说明，要么 m 自己是素数，要么它的因数中有和 p_1, p_2, \dots, p_N 都不一样的素数。这就和“素数一共有 N 个”矛盾了。

因此，原命题的否定“素数的个数不是无穷的”是假的，原命题成立。 \square

素数作为“砖瓦”的性质，还体现在以下定理中：

定理 2.1.5. 存因定理 如果素数 p 整除两个自然数 a 和 b 的乘积： $p|ab$ ，那么 p 整除 a 或 p 整除 b 。

证明： 给定符合条件的素数 p 和自然数 a, b 。如果 p 整除 a ，那么命题得证。

如果 p 不整除 a ，那么由于两者的最大公因数是 p 的因数，因此只能是 1。两者互素。根据倍和析因定理，存在整数 m, n 使得

$$mp + na = 1.$$

两边乘以 b ，就得到：

$$mp + nab = b.$$

根据已知条件，存在整数 k 使得 $ab = kp$ ，于是

$$b = mp + nkp = (m + nk)p,$$

即 p 整除 b 。 □

存因定理告诉我们，如果某个正整数 n 有素因数 p ，把 n “拆成” 两个数的乘积，那么总有一个有素因数 p 。反复运用存因定理，我们可以把这个结论加强：无论把 n “拆成” 几个数的乘积，总有一个有素因数 p 。这反映了素数作为自然数中的“砖瓦”的性质。

习题 2.1.1. 证明：

1. 两个素数要么相等，要么互素。
2. 如果素数 p 整除完全平方数 n ，那么 p^2 也整除 n 。
3. 设 p, q 是素数， i, j 是正整数，那么要么 p^i 和 q^j 互素，要么 p^i 整除 q^j ，要么 q^j 整除 p^i 。
4. 对任何正整数 n ，都存在 n 个连续合数 $a, a+1, \dots, a+n-1$ 。

2.2 算数基本定理

从存因定理出发，可以得到一个很重要的结论：

定理 2.2.1. 算术基本定理 如果不考虑素因数的排列顺序，素因数分解的方式是唯一的。

证明： 如果某个大于 1 的整数 n 有两种素因数分解。把每种分解的素因数从小到大排列：

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_l, \quad k, l \in \mathbb{Z}^+.$$

我们要证明这两种分解是一样的。

考虑 p_1 ， p_1 整除 $n = q_1 q_2 \cdots q_l$ 。根据存因定理，存在某个 j 使得 p_1 整除 q_j 。 q_j 也是素数，所以 p_1 不可能是它的真因数。于是 $p_1 = q_j \geq q_1$ 。

考虑 q_1 ，按照相同的推理，存在某个 i 使得 q_1 整除 p_i 。于是 $q_1 = p_i \geq p_1$ 。

因此, $p_1 = q_1$ 。

我们把 n 除以 p_1 , 得到正整数 n_1 。如果 $n_1 = 1$, 那么我们有 $n_1 = p_1$, 分解方式是唯一的。如果 $n_1 = p_2 \cdots p_k = q_2 \cdots q_l > 1$, 我们可以再次运用以上的推理, 得到: $p_2 = q_2$ 。

以此类推, 经过有限步后, 我们可以得到: $k = l$, 且

$$p_1 = q_1, p_2 = q_2, \cdots, p_k = q_k.$$

也就是说, n 的素因数分解只有一种方式。 \square

这个结论非常重要, 我们把它称为算术基本定理。算术基本定理告诉我们, 不考虑排列顺序的话, 每个大于 1 的正整数都可以用唯一的方式写成素数或其乘积。这种唯一的方式可以看作每个正整数的“身份证”。为了方便讨论, 素因数分解中, 一般素因数从小到大排列, 并用乘方的形式合并相同的素因数。比如, 252 的素因数分解写成;

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1.$$

这种写法称为数的**标准分解**。以上就是 252 的标准分解。有时候, 为了便于讨论, 我们会把不是 n 的因数的素数也写进分解表达式里, 用它的 0 次方“占位”。比如 210 就可以写成:

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1.$$

这样的写法, 在规定了涉及的素数集合后, 仍然是唯一的。

习题 2.2.1. 写出以下数的标准分解:

1. 256, 243, 125.
2. 60, 780, 1296.
3. 1001, 5929, 8801.

把正整数 n 分解, 得到: $n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}$ 。我们把 u_i 称为 p_i 在 n 中的重数。它是让 p_i^i 整除 n 的最大自然数 i 。

定理 2.2.2. 如果 n 整除 m , 那么任何素数在 n 中的重数小于等于它在 m 中的重数。

证明： 设素数 p 在 n 和 m 中的重数分别是 u 和 v 。于是 p^u 整除 n ，因而整除 m 。另一方面， v 是让 p^i 整除 m 的最大自然数 i 。所以， $u \leq v$ 。 \square

上面的结论也可以换个方式说成：如果 n 是 m 的因数，那么任何素数在 n 中的重数小于等于它在 m 中的重数；如果 n 是 m 的倍数，那么任何素数在 n 中的重数大于等于它在 m 中的重数。

定理 2.2.3. 正整数 n, m 的乘积，等于它们的最大公因数和最小公倍数的乘积。

证明： 设 n, m 的最大公因数是 d ，最小公倍数是 q ，下面证明 $nm = dq$ 。把 n, m, d, q 分解，设涉及的素数为 p_1, p_2, \dots, p_k 。把四个数分别记为：

$$\begin{aligned} n &= p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}, & m &= p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_k^{v_k}, \\ d &= p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}, & q &= p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}. \end{aligned}$$

d 既是 n 的因数也是 m 的因数，所以对每个素因数 p_i ，它在 d 中的重数 s_i 都小于等于 u_i 和 v_i 。同时，由于 d 是最大公因数，所以 s_i 是 u_i 和 v_i 中较小的数。

q 既是 n 的倍数也是 m 的倍数，所以对每个素因数 p_i ，它在 q 中的重数 t_i 都大于等于 u_i 和 v_i 。同时，由于 q 是最小公倍数，所以 t_i 是 u_i 和 v_i 中较大的数。

因此，对每个素因数 p_i ， $s_i + t_i = u_i + v_i$ 。于是，

$$\begin{aligned} nm &= (p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}) \cdot (p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_k^{v_k}) \\ &= p_1^{u_1+v_1} p_2^{u_2+v_2} \cdots p_k^{u_k+v_k} \\ &= p_1^{s_1+t_1} p_2^{s_2+t_2} \cdots p_k^{s_k+t_k} \\ &= (p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}) \cdot (p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}) \\ &= dq \end{aligned}$$

\square

习题 2.2.2.

1. 设 i 是素数 p 在正整数 n 中的重数。
 1. 1. 如果 p 不整除 n , 证明 $i = 0$ 。
 1. 2. 如果自然数 $j < i$, 证明: p^j 整除 n 。
 1. 3. 如果自然数 $j > i$, 证明: p^j 不整除 n 。
2. 设正整数 n, m 的最大公因数是 d , 素数 p 在 d, n, m 中的重数分别是 s, u, v 。
 2. 1. 设 v 是 u, v 中较小的数, 证明: $s \leq v$ 。
 2. 2. 假设 $s < v$, 考虑 pd , 证明 pd 是 n, m 的公因数。
 2. 3. 证明 s 等于 u, v 中较小的数。
 2. 4. 设正整数 n, m 的最小公倍数是 q , 素数 p 在 q, n, m 中的重数分别是 t, u, v , 证明: t 等于 u, v 中较大的数。

给定一个正整数, 如何将它分解呢? 这个问题一直困扰着人类。将非常大的整数分解, 是一项非常困难的任务。即便在现代, 电子计算机计算能力有极大发展, 可以轻易做到每秒百亿乃至万亿次运算, 分解大整数仍然需要非常多的时间。一些常用的密码技术, 就依赖于分解大整数非常困难这个事实。

如今, 量子计算理论不断发展。人们将希望寄于量子计算机, 认为将来使用量子计算机及相应的算法, 可以在合理时间内分解大整数。

第三章 因式分解

整式是变量和数量作加减法和乘法得到的代数式。它的性质和整数很相似。整数可以分解成因数的乘积，整式也可以分解为整式的乘积。把整式的乘积写成若干项的和，叫做整式的展开；反过来，把一个整式写成多个整式的乘积，称为整式的**因式分解**。乘积中每个整式称为原整式的**因式**。

整式的因式分解是一个非常庞大的问题。我们只从最简单的情况出发，归纳一些特殊情况下的简单方法。

3.1 一元整式

一种简单的情况是一元整式的因式分解。给定变量为 x 的一元整式 p ，合并同类项后按照次数从高到低排列，可以写成：

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

其中 a_0, a_1, \dots, a_n 都是有理数，称为 p 的系数。其中 a_n 不等于 0，而其它数可能等于 0。 $a_n x^n$ 称为 p 的**最高次项**， a_n 就是最高次项的系数， n 称为 p 的次数。比如 $n = 1$ 时， p 就是我们见过的一元一次式。 $n = 0$ 时， p 只有常数项，称为常式。为了强调 p 是关于 x 的一元式，我们也将 p 记为 $p(x)$ 。

给定一元整式 $n(x)$ 和 $m(x)$ ，如果 $n(x)$ 可以写成 $m(x)$ 和另一个一元整式 $q(x)$ 的乘积，就说 $n(x)$ 是 $m(x)$ 的**倍式**， $m(x)$ 是 $n(x)$ 的**因式**。

和整数一样，一元整式也有带余除法。整式的带余除法可以和整数除法一样，用竖式计算。比如 $8x^5 + 2x^4 - 9x^3 + 4x - 5$ 除以 $2x^2 + x - 1$ ：

$$\begin{array}{r}
 4x^3 - x^2 - 2x + \frac{1}{2} \\
 \hline
 2x^2 + x - 1 8x^5 + 2x^4 - 9x^3 \\
 - 8x^5 - 4x^4 + 4x^3 \\
 \hline
 - 2x^4 - 5x^3 \\
 2x^4 + x^3 - x^2 \\
 \hline
 - 4x^3 - x^2 + 4x \\
 4x^3 + 2x^2 - 2x \\
 \hline
 x^2 + 2x - 5 \\
 - x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\
 \hline
 \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}
 \end{array}$$

可以看到，**被除式** $8x^5 + 2x^4 - 9x^3 + 4x - 5$ 除以**除式** $2x^2 + x - 1$ ，得到**商式** $4x^3 - x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ 和**余式** $\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ 。竖式除法中，不同次数的项就好像整数的个十百千等数位。不同的是相减的时候没有借位，而且由于系数可以是分数，所以只要剩下的式子的次数不少于除式，就可以继续相减。最后得到的余式，次数一定严格小于除式。

思考 3.1.1. 整式 $p(x)$ 除以一次式，余式是怎样的？除以常式呢？

习题 3.1.1. 计算带余除法：

1. $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ 除以 $x^2 + x + 2$ 。
2. $x^6 - x^5 - 4x^3 + 11x^2 - 9x + 19$ 除以 $x^3 - 2x^2 + x + 4$ 。

3.2 试根法

怎么样找到一元整式的因式呢？我们来看上面的整式除法。

不过, 如果余式是常式, 那么它是不是 0, 就和 x 的取值无关了。一种特殊情况是: 除式是一次式: $x - a$ 。它只在 x 取值为 a 的时候为 0。这时, 如果被除式也是 0, 那么余式肯定是 0。于是除式是被除式的因式。

定理 3.2.1. 余式定理 如果 a 是一元整式 $p(x)$ 的根, 那么 $x - a$ 是它的因式。

习题 3.2.1.

设有整式 $p = 6x^3 - 3x^2 + 2x - 1$:

1. 试着分解 p 。
2. 如果既约分数 $\frac{a}{b}$ 是 p 的根, 证明: $|b|$ 整除 6。

设有整式 $p = x^3 - 4x^2 - x - 20$:

1. 试着分解 p 。
2. 如果既约分数 $\frac{a}{b}$ 是 p 的根, 证明: $|a|$ 整除 20。

如果既约分数 $\frac{a}{b}$ 是整式 $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 的根, a 和 b 应该满足什么条件?

3.3 一般整式的分解

对一般的整式来说, 也有一些普遍适用的方法。

提公因式法

如果要分解的整式中有显然的公因式, 那么可以将它提取出来。比如:

$$x^6 - 2x^4 + 19x^3 - 3x$$

以上这个式子中, 每一项显然都有 x 作为因式。因此, 可以分解为:

$$x(x^5 - 2x^3 + 19x^2 - 3).$$

提公因式法是分配律的逆应用。

公式法

如果可以注意到要分解的整式是某个公式的展开形式，那么应用公式，就可以把展开的形式还原成因式的乘积形式。比如：

$$x^4 + 4$$

这个式子可以看成两个平方的差：

$$x^4 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 - 2)^2 - (2x)^2.$$

于是，使用 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 这个公式，就可以得到：

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2 + 2x)(x^2 - 2 - 2x).$$

应用公式法，取决于要分解的整式是否符合某个特定公式的展开形式。

分组分解法

分组分解的思想是从提公因式法出发。如果不能发现显然的公因式，就分组考察整式的项，看看是不是有哪些项可以先提取公因式。比如：

$$ab + abc - a^2 - b^2c$$

可以先把上式的项分为两组：

$$ab + abc - a^2 - b^2c = (ab - a^2) + (abc - b^2c)$$

然后分别对每一组做因式分解：

$$ab + abc - a^2 - b^2c = (ab - a^2) + (abc - b^2c) = a(b - a) + bc(a - b)$$

然后再提取公因式 $a - b$ ：

$$ab + abc - a^2 - b^2c = a(b - a) + bc(a - b) = (a - b)(-a + bc).$$

可以看到，分组分解的关键在于：各组各自分解的结果，应该有共同的因式。比如上式分成两组，每组都分解出了 $a - b$ 这个因式。

待定系数法

如果对因式分解的结果有一定的猜测，可以先用变量代替暂时不知道的系数，写出因式乘积。展开后，通过对比各项，得到系数。比如：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2$$

上式中，让 $a = b$ ，则式子变为：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = 3b^2 + bc - b^2 - bc - 2b^2 = 0$$

所以，猜测 $a - b$ 是因式。由于式子最高次项次数是 2，猜测因式分解结果为：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = (a - b)(ua + vb + wc).$$

展开后得到：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = ua^2 + vb^2 + (v - u)ab + wac - wbc.$$

对比左右各项，得到 $u = -1$ 、 $v = 2$ 、 $w = 1$ 。即：

$$3ab + ac - a^2 - bc - 2b^2 = (a - b)(-a + 2b + c).$$

待定系数法建立在对因式分解结果的合理猜测上。如果猜测出现错误，后面对比各项时就会发现矛盾。

第四章 二次方根和二次根式

分式开平方得到的代数式,叫做**二次根式**。二次根式可以看成用代数式代替二次方根 \sqrt{q} 中的数量 q 得到的结果。 \sqrt{c} 、 $\sqrt{1-a+a^2}$ 、 $\sqrt{x^3-x^2-2}$ 等都是二次根式。通过二次根式,我们可以更好地理解二次方根的性质。

4.1 二次方根的化简

思考 4.1.1. 以下二次方根有什么联系?

1. $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{8}$ 、 $\sqrt{72}$.
2. $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{45}$ 、 $\sqrt{147}$.
3. $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{\frac{5}{4}}$ 、 $\sqrt{\frac{20}{49}}$.

如果正整数 n 有完全平方数 a^2 作为因数: $n = ma^2$, 那么

$$\sqrt{n} = \sqrt{m}\sqrt{a^2} = a\sqrt{m}.$$

用这个方法,可以把正整数 n 的二次方根 \sqrt{n} 写成一个整数 a 和一个无理数 \sqrt{m} 的乘积。其中 m 没有完全平方数作为因数,所以 \sqrt{m} 是无理数。我们把这样的形式称为 \sqrt{n} 的**最简形式**,把找到最简形式的过程称为(整数)二次方根的化简。

要化简整数的二次方根,可以先把整数分解成素因数的乘积。给定(大

于 1 的) 正整数 n , 写出它的标准分解:

$$n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k}$$

如果某个素因数 p_i 在 n 中的指数 u_i 是偶数, 那么 $p_i^{u_i}$ 是一个完全平方数; 如果 u_i 是奇数, 那么 $p_i^{u_i-1}$ 是一个完全平方数。于是, 我们可以把 n 的素因数分为两类, 一类是指数为偶数的, 另一类是指数为奇数的。我们可以把前一类中的 $p_i^{u_i}$ 和后一类的 $p_i^{u_i-1}$ 提出来, 相乘得到一个完全平方数。剩下的就是指数为奇数的素因数的乘积。如果我们定义这样的函数:

$$\varsigma : n = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \cdots p_k^{u_k} \mapsto p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}.$$

其中的 r_1, r_2, \cdots, r_k 分别是 u_1, u_2, \cdots, u_k 除以 2 的余数。那么 $\varsigma(n)$ 就是剩下的指数为奇数的素因数的乘积。而 $\frac{n}{\varsigma(n)}$ 是一个完全平方数。

$\varsigma(n)$ 已经没有完全平方数的因子了, 我们把它叫做 n 的**二次方余**。 n 可以写成:

$$\sqrt{n} = a\sqrt{\varsigma(n)}.$$

其中正整数 a 是 $\frac{n}{\varsigma(n)}$ 的平方根。

举例来说, 要化简 $\sqrt{2520}$, 可以先把正整数 2520 分解:

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

然后提出完全平方的部分, 计算方余:

$$2520 = (2^2 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7)$$

因此 $\varsigma(n) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$,

$$\sqrt{2520} = 6\sqrt{70}.$$

对一般的正有理数 r , 我们也希望将 \sqrt{r} 表示成 $a\sqrt{m}$ 的形式, 其中 a 是有理数, 而 m 是没有完全平方数因子的正整数。我们把这样的形式称为有理数二次方根的最简形式。

把 r 写成既约分数: $r = \frac{p}{q}$, 不难发现, 可以把 \sqrt{r} 写成:

$$\sqrt{r} = \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{pq}{q^2}} = \frac{\sqrt{pq}}{q}.$$

这样, 只需要把正整数 pq 的二次方根化简, 就能得到 \sqrt{r} 的最简形式。

对整式和分式来说, 它们开平方得到的二次根式也可以用类似的方式化简。

习题 4.1.1. 化简以下的二次方根:

1. $\sqrt{5480}, \sqrt{1240}, \sqrt{5760}.$
2. $\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{1744}{85}}, \sqrt{\frac{576}{132}}, \sqrt{\frac{2240}{6897}}.$
3. $\sqrt{48} - 1.8\sqrt{6} + 5\sqrt{3}, 7\sqrt{18} + 1.5\sqrt{108} + 10\sqrt{242}.$

化简以下的代数式:

1. $\sqrt{(1-a^2)(1+a)}, \sqrt{(b^3-a^3)(a-b)}.$
2. $\sqrt{\frac{1-a^4}{(1+a)^3}}, \sqrt{\frac{1-a^4}{a(a+1)}} + \sqrt{a^2+1}.$

4.2 二次域

考虑这样一个集合: $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 。有理数集 \mathbb{Q} 是它的子集, 它是实数集 \mathbb{R} 的子集。我们把它记为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 。

举例来说, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素有: $1 + \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}, 0, 7$ 等等。

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素有什么性质呢?

$1 + \sqrt{2}$ 和 $3 - 2\sqrt{2}$ 是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素, 它们的和是 $4 - \sqrt{2}$, 差是 $-2 + 3\sqrt{2}$, 乘积是 $-1 + \sqrt{2}$, 商是 $7 + 5\sqrt{2}$ 。

一般来说, 如果 x 和 y 是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素, 它们进行四则运算的结果仍然是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素。具有这种性质的数集叫做**数域**。有理数、实数都是数域, 自然数、整数、正数不是数域。 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 、 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 这样的数域叫做**二次域**。

如果 n 是正整数, \sqrt{n} 在不在 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 里呢?

定理 4.2.1. $\sqrt{3}$ 不属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 。

证明: 用反证法。反设 $\sqrt{3}$ 属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 。于是存在有理数 a, b 使得

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}.$$

两边平方, 得到:

$$3 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}.$$

如果 $ab \neq 0$, 那么 $\sqrt{2} = \frac{3-a^2-2b^2}{2ab}$ 是有理数。矛盾!

如果 $a = 0$, 那么 $2b^2 = 3$, 于是 $b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 是无理数。矛盾!

如果 $b = 0$, 那么 $a^2 = 3$, 于是 $a = \sqrt{3}$ 是无理数。矛盾!

综上所述, 原命题的否定 “ $\sqrt{3}$ 属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ” 是假的, 因此原命题是真的。

□

用同样的方法, 可以证明 $\sqrt{2}$ 不属于 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 。也就是说, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 不是 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 的子集, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 也不是 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的子集。

习题 4.2.1. 想一想:

1. 对哪些正整数 n , \sqrt{n} 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 里?
2. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 的交集是什么集合? 是不是数域?
3. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 的并集是什么集合? 是不是数域?

第五章 一元二次方程

我们已经学习过一元一次方程。解一元一次方程可以看作找出一元一次式 $ax + b = 0$ 时变量 x 的取值。找出一元二次式 $ax^2 + bx + c = 0$ 时 x 的取值，叫做解一元二次方程。

例子 5.0.1. 根据以下问题，设未知数并列出方程：

- (1). 一座方城，南北正中有城门。北门出城直走 100 步有树，南门出城直走 100 步转西，走 1200 步后恰能望到。问方城长度是多少？
- (2). 氢气和碘蒸气产生化学反应： $H_2 + I_2 = 2HI$ 。50 摄氏度时，正反应的平衡常数 $k_c = 5.25$ 。现在将 1 摩尔氢气和 2 摩尔碘蒸气放置于 1 升的容器中，将温度调节到 50 摄氏度。反应达到平衡时，有多少摩尔的 HI 产生？

解答.

(1) 解：设方城长 x 步，北门位置为 M 点，外树的位置为 A 点，南门外转向的位置为 B 点，西行恰好望见树的位置为 C 点，城西北角为 N 点。直角三角形 AMN 和 ABC 相似。因此：

$$\frac{|AM|}{|MN|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

根据已知条件， $|AM| = 100$ ， $|MN| = 0.5x$ ， $|AB| = x + 200$ ， $|BC| = 1200$ 。于是可以列出方程：

$$\frac{100}{0.5x} = \frac{x + 200}{1200},$$

即:

$$\begin{aligned} 0.5x(x + 200) &= 100 \cdot 1200 \\ x^2 + 200x - 240000 &= 0 \end{aligned}$$

(2) 解: 设平衡时产生了 x 摩尔的 HI 。根据反应方程式, 这时 H_2 和 I_2 分别消耗了 $0.5x$ 摩尔。因此平衡时三者浓度分别为 $1 - 0.5x$ 摩尔/升、 $2 - 0.5x$ 摩尔/升和 x 摩尔/升。根据条件, 反应平衡常数为 5.25, 即浓度比:

$$\frac{(1 - 0.5x)(2 - 0.5x)}{x^2} = 5.25,$$

也即:

$$\begin{aligned} 5.25x^2 &= (1 - 0.5x)(2 - 0.5x) \\ 10x^2 + 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

5.1 解一元二次方程

怎么求一元二次方程的解呢? 我们其实已经解决过一种简单的情形。考虑等腰直角三角形, 如果直角边长度为 1, 那么斜边长 x 满足:

$$x^2 = 2.$$

这就是个一元二次方程。解这个一元二次方程的方法是对右边的 2 开平方, 得到解:

$$x = \sqrt{2}.$$

当然, 另一个解: $x = -\sqrt{2}$ 也满足方程。只是我们要求的斜边长度是正数, 所以这个解不是我们要找的。不过, 仅就方程 $x^2 = 2$ 来说, 它有两个解, 分别是 $x_1 = \sqrt{2}$ 和 $x_2 = -\sqrt{2}$ 。为了方便, 有时我们也写成 $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ 。

$x^2 = 2$ 和一般的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有什么不同呢？我们注意到，二次项 x^2 的系数不再是 1，而且多了一次项 bx 。二次项系数的问题不难解决，我们把方程两边同时除以 a ，就可以让二次项系数等于 1：

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

至于一次项，我们希望通过一些手段把它“去掉”。这样，问题就转化为类似 $x^2 = 2$ 的简单情形了。

第一种手段叫作配方法。我们希望把 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ 表示与 x 相关的平方形式。观察平方和公式：

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2$$

$$(x + 2)^2 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$$

...

对任何数 t ，根据平方和公式， $(x + t)^2 = x^2 + 2tx + t^2$ ，如果让 $2t = \frac{b}{a}$ ，那么 $(x + t)^2$ 就和 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ 有相同的一次项了。这时， $t = \frac{b}{2a}$ ， $(x + \frac{b}{2a})^2$ 展开得到 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ ，和 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ 还相差： $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ 。于是，原方程变成：

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

现在方程和 $x^2 = 2$ 已经很像了。最后需要讨论等号右边常数项是否小于 0。实数 $x + \frac{b}{2a}$ 的平方总大于等于 0，所以，如果等号右边的常数项小于 0，那么方程无解。如果常数项恰好等于 0，那么方程恰有一个解： $x = -\frac{b}{2a}$ 。如果常数项大于 0，那么方程和 $x^2 = 2$ 一样有两个解。

第二种手段是待定系数法。我们可以直接猜测： $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ 能够写成 $(x - \lambda)^2 = \mu$ 的形式。把后者展开，通过对比各项系数，可以得到： $\lambda = -\frac{b}{2a}$ ， $\mu = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 。

无论哪一种方法，我们都发现，常数项 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ 的正负性质和方程解的个数有直接关系。它的分母 $4a^2$ 总是正数，所以关键在于分子： $b^2 - 4ac$ 。我

们把这个式子叫作一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的**判别式**，记作 Δ ：

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$\Delta < 0$ 时，方程无解； $\Delta = 0$ 时，方程有唯一解： $x = -\frac{b}{2a}$ ； $\Delta > 0$ 时，方程有两个解：

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

对二次整式 $ax^2 + bx + c$ 来说，使得它等于 0 的 x 的值叫作它的根。 $\Delta < 0$ 时，整式无根； $\Delta > 0$ 时，整式有两个根。 $\Delta = 0$ 时，整式变为 $(x + \frac{b}{2a})^2$ ，我们说整式有二重根，或者说根的重数是 2。为了方便，对整式对应的方程，我们也使用“方程的根”的说法。这时，方程的根就是对应整式的根。

于是，我们可以给出上面两个例题中方程的解：

解答. 1. 解：方程 $x^2 + 200x - 240000 = 0$ 的判别式是： $\Delta = 200^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240000) = 1000000 > 0$ ，所以方程有两个根：

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-200 \pm \sqrt{1000000}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-200 \pm 1000}{2} \end{aligned}$$

即 $x_1 = 400$ 和 $x_2 = -600$ 。根据题目条件， $x > 0$ ，所以解为 $x = 400$ 。
答：方城长 400 步。

2. 解：方程 $10x^2 + 3x - 4 = 0$ 的判别式是： $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-4) = 169 > 0$ ，所以方程有两个根：

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 10} \\ &= \frac{-3 \pm 13}{20} \end{aligned}$$

即 $x_1 = 0.5$ 和 $x_2 = -0.8$ 。根据题目条件， $x \geq 0$ ，所以解为 $x = 0.5$ 。
答：生成了 0.5 摩尔的 HI 。

5.2 根和系数的关系

上一节我们给出了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解。从根的角度, $ax^2 + bx + c$ 要么无根, 要么有两个根。这两个根和变量的系数有什么关系呢?

写出两个根的表达式:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

要注意的是, 从根的角度, $\Delta = 0$ 时, 这个式子也成立。把两个根相加, 得到:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

把它们相乘, 得到:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

于是,

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c.$$

我们把 $a(x - x_1)(x - x_2)$ 称为整式 $ax^2 + bx + c$ 的根形式。

从另一个角度, 可以这么理解: 整式 $ax^2 + bx + c$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 说明 $x - x_1$ 和 $x - x_2$ 都是它的因式。 $x_1 \neq x_2$ 时, $x - x_1$ 和 $x - x_2$ 互素, 于是 $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)q$, 其中 q 是整式。显然, 如果 q 的次数大于 0, $(x - x_1)(x - x_2)q$ 的次数就大于 2 了, 因此 q 是常式。对比系数可知, $q = a$, 于是可以得出 $ax^2 + bx + c$ 的根形式。

$x_1 = x_2$ 的时候, 就无法直接得出 $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)q$ 了, 所以需要特别指出根的重数是 2, 它表示 $ax^2 + bx + c = (x - x_1)^2q$ 。这就是根的重数的用处。

设一元二次方程 $ax^2 + bx + c$ 的系数是有理数。它的解 x_1 和 x_2 都是开方得到的, 可能不是有理数, 而属于某个二次域。但它们的和与积是方程

系数的商,所以必然是有理数。除此之外,如果计算其他关于 x_1 和 x_2 的式子,结果可能就不是有理数了。比如,计算 $x_1 - x_2$,可以得到:

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}.$$

$\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ 中有开方运算,不一定是有理数。

$x_1 - x_2$ 和 $x_1 + x_2$ 、 x_1x_2 有什么区别呢? 如果交换 x_1 和 x_2 的位置, $x_1 - x_2$ 会变成 $x_2 - x_1$, 而 $x_1 + x_2$ 、 x_1x_2 和原来一样。我们把交换 x_1 和 x_2 的位置而不变的二元整式叫作二元对称式。二元对称式除了 $x_1 + x_2$ 、 x_1x_2 还有很多, 比如 $x_1^2 + x_2^2$ 、 $x_1x_2^2 + x_2x_1^2$ 等等。

一元二次方程的根是无理数的时候, 有什么性质呢? 先来看一个具体的例子。设有方程: $x^2 - 2x - 1 = 0$ 。它的根是:

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

两个根都能写成 $u + v\sqrt{2}$ 的形式 (u, v 是有理数)。也就是说, 它们都是二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 的元素。一般情况: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c$ 的系数是有理数, 如果它有两个无理数解:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

设二次方根 $\sqrt{\Delta}$ 化简的结果是: $\sqrt{\Delta} = r\sqrt{m}$, 那么两个根都是 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ 的元素。

如果直接把两个解放在数轴上看, 它们也关于点 $-\frac{b}{2a}$ 对称。如果把数轴看做 x 轴, 建立直角坐标系, 那么两个解分别对应 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$, 它们关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称。

第六章 函数初步（下）

我们已经学习了正比例函数和一次函数。直角坐标系中，它们的图像是直线。现在我们来看另外几种函数。

6.1 反比例函数

正比例函数是从正面描述比例关系的函数。除了正比例关系，我们还可以从另一个方面描述比例关系。比如，两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似，那么对应的边长成比例：

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = k.$$

如果已知 $|AB|$ 为定值，那么比例系数和 $|A'B'|$ 的关系叫做反比例关系，对应的映射叫**反比例函数**。一般来说，反比例函数是这样的：

$$x \mapsto \frac{k}{x}$$

比如， $x \mapsto \frac{3}{x}$ 就是一个反比例函数。

反比例函数有什么性质呢？以 $x \mapsto \frac{3}{x}$ 为例。下表是 x 取不同值时函数的值：

x	-30	-6	-3	-0.3	0.3	1	3	6	60
$f(x)$	-0.1	-0.5	-1	-10	10	3	1	0.5	0.05

对比 $f(-0.3)$ 和 $f(0.3)$ 、 $f(-3)$ 和 $f(3)$ 、 $f(-6)$ 和 $f(6)$ ，可以注意到：如果 a 和 b 是相反数，那么 $f(a)$ 和 $f(b)$ 也是相反数。这个性质也可以写成：

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = -f(x).$$

这个性质可以用反比例函数的定义证明：

$$f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x).$$

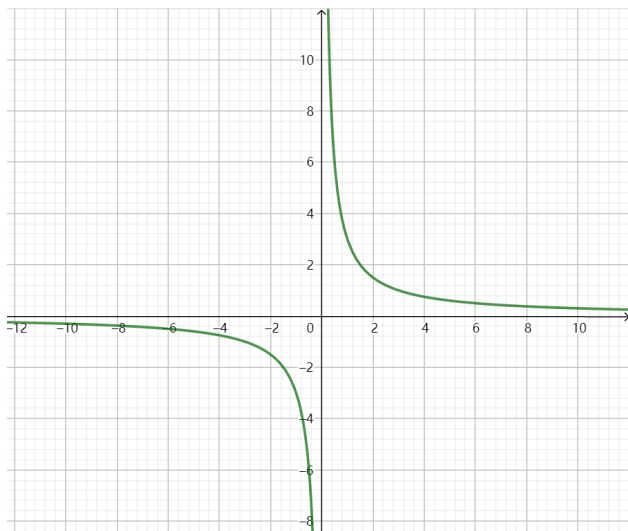
另外可以发现， $x < 0$ 时， $f(x)$ 也小于 0。 x 越小， $f(x)$ 越大。 $x > 0$ 时， $f(x)$ 也大于 0。 x 越小， $f(x)$ 越大。要注意的是， x 不能等于 0。反比例函数的定义域是不为零的实数的集合，记作 \mathbb{R}^* 或 \mathbb{R}^\times 。

把 3 换成其它的数，你有什么发现？

设有反比例函数 $f: x \mapsto \frac{k}{x}$ 。当 $k > 0$ 的时候， x 和 $f(x)$ 同号。 $x < 0$ 时， x 的值越接近 0， $f(x)$ 越小； $x > 0$ 时， x 的值越接近 0， $f(x)$ 越大。当 $k < 0$ 的时候， x 和 $f(x)$ 异号。 $x < 0$ 时， x 的值越接近 0， $f(x)$ 越大； $x > 0$ 时， x 的值越接近 0， $f(x)$ 越小。 k 的正负对函数的性质有本质影响。

反比例函数的图像是怎样的呢？我们可以用描点法得到大致的模样，但目前我们掌握的知识，还不足以严谨地勾画出反比例函数的图像。借助计算机作图软件，我们可以得到反比例函数的图像：

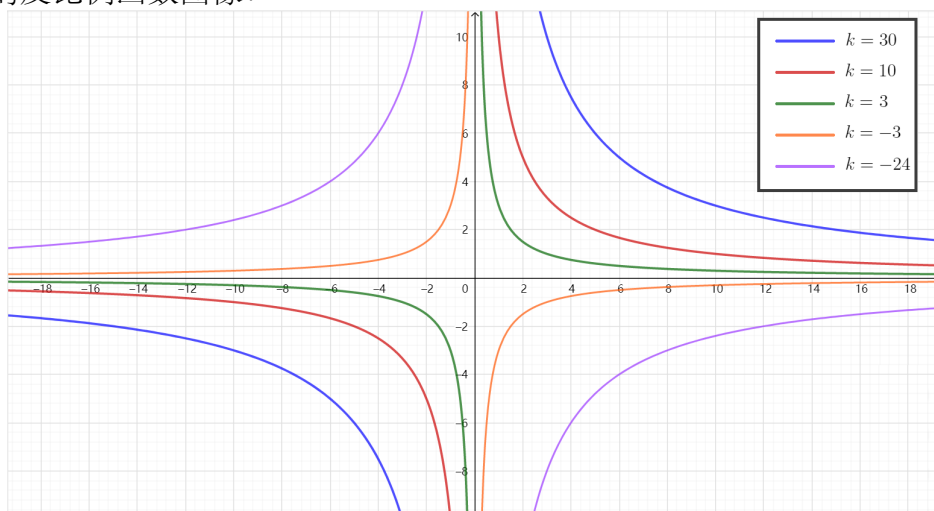
我们说反比例函数的图像是一条曲线。右图中，第一象限中的部分叫做反比例函数的**正支**，它是函数在 $x > 0$ 时的图像；第三象限中的部分叫做反比例函数的**负支**；它是函数在 $x < 0$ 时的图像。 $k > 0$ 时，



正支在第一象限，负支在第三象限； $k < 0$ 时，正支在第四象限，负支在第二象限。

另外，反比例函数的图像关于原点中心对称。这可以通过性质： $f(-x) = -f(x)$ 得到。对图像中每一点 $(x, f(x))$ ， $(-x, -f(x)) = (-x, f(-x))$ ，因此它关于原点的对称点也在函数图像上。

对不同的 k ，反比例函数的图像有什么不一样呢？我们画出不同的 k 对应的反比例函数图像：



首先， $k = 3$ 的图像和 $k = -3$ 的函数图像恰好关于 y 轴对称，也关于 x 轴对称。一般来说， $k < 0$ 时，函数图像和 $-k$ 时的函数图像关于 y 轴和 x 轴对称。由对称性，我们可以只研究 $k > 0$ 情况下函数图像的正支。

对比上图第一象限中三种颜色的曲线，我们可以发现，每条曲线都随着 x 变大而越来越平缓， x 越靠近 0，曲线就越陡峭。观察不同曲线之间的区别，可以发现， k 越大，曲线越“靠右上方”。这并不难理解。比如，对横坐标 $x = 4$ 来说，正数 k 越大，纵坐标 $\frac{k}{4}$ 就越大，在图像中越“靠上”。同样，要让纵坐标 $f(x) = 4$ ，那么对应的横坐标 $x = \frac{k}{4}$ ，于是正数 k 越大， $\frac{k}{4}$ 就越大，在图像中越“靠右”。

反比例函数的图像还有一个基本性质：如果点 (a, b) 在图像上，那么

(b, a) 也在图像上。这是因为 $a = \frac{k}{b}$, 当且仅当 $b = \frac{k}{a}$ 。

习题 6.1.1. 证明:

1. 只要 (a, b) 在函数 $x \mapsto \frac{k}{x}$ 的图像上, 那么 (b, a) 、 $(-a, -b)$ 、 $(-b, -a)$ 都在图像上。

2. 如果斜率为 -1 的直线 $x \mapsto -x + c$ 和函数 $x \mapsto \frac{k}{x}$ 的图像有交点, 那么 $c^2 \geq 4k$ 。

6.2 二次函数

一元一次式对应一次函数, 而一元二次式对应着二次函数。一般来说, 一元二次式可以写成 $ax^2 + bx + c$ 的形式, 其中 $a \neq 0$ 。我们把形如

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

的函数叫做二次函数。

我们从最简单的情形: $x \mapsto x^2$ 开始研究。下表是 x 取不同值时函数的值:

x	-10	-5	-2	-1	0	1	2	5	10
$f(x)$	100	25	4	1	0	1	4	25	100

首先可以发现, 如果 a 和 b 是相反数, 那么 $f(a) = f(b)$ 。比如, $f(-5) = f(5)$ 、 $f(-2) = f(2)$ 、 $f(-1) = f(1)$ 。这个性质可以写成:

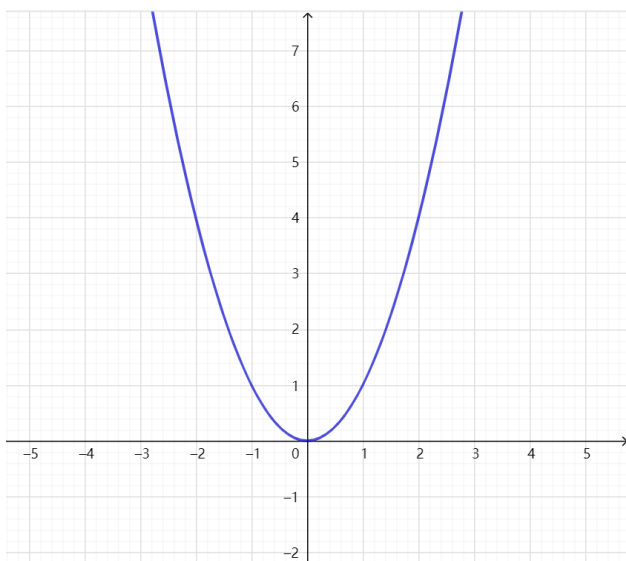
$$f(-x) = f(x).$$

这个性质可以用函数的定义证明:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

另外可以看到, $x < 0$ 时, $f(x)$ 大于 0, 且 x 越大, $f(x)$ 越小, 最终在 $x = 0$ 时函数值取 0。 $x > 0$ 是, $f(x)$ 大于 0, 且 x 越大, $f(x)$ 越大。

函数 $x \mapsto x^2$ 的图像是怎样的呢? 和反比例函数情形一样: 我们可以用描点法得到大致的模样, 但目前我们掌握的知识, 还不足以严谨地勾画出它的图像。借助计算机作图软件, 我们可以得到函数 $x \mapsto x^2$ 的图像:

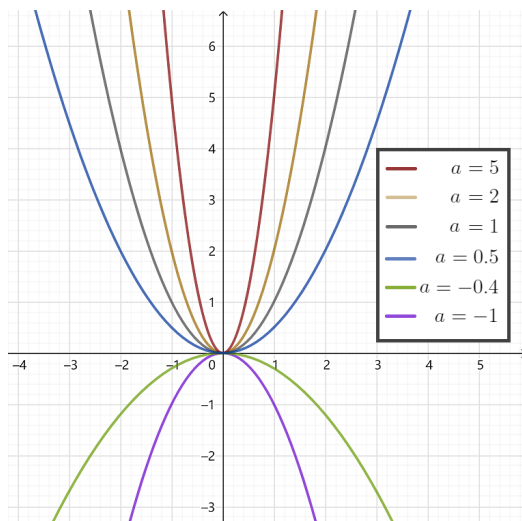


观察图像, 这是一条曲线。首先可以注意到, 它关于 y 轴对称。这一点可以用前面得到的性质证明。给定图像上一点: (x, x^2) , $(-x, x^2)$ 也在图像上, 所以图像关于 y 轴对称。由对称性, 我们可以先研究曲线在 $x \geq 0$ 部分的性质。

可以发现, 从 $x = 0$ 开始, 随着 x 逐渐增大, 函数值也逐渐增大, 而且增长速度逐渐加快。在 $x = 0$ 附近, 曲线比较平缓, x 增大后, 曲线越来越陡峭。

如果把函数乘以系数 a , 得到 $x \mapsto ax^2$, 函数的性质会发生什么变化? 我们可以验证: $a > 0$ 时, 以上提到的性质保持不变。 $a < 0$ 时, 函数的正负和增减性质颠倒了。首先, ax^2 总小于等于 0。 $x < 0$ 时, x 越大, 函数值越大, $x > 0$ 时, x 越大, 函数值越小。从 $x = 0$ 开始, 随着 x 逐渐增大,

函数值逐渐减小, 而且减小速度逐渐加快。与 $a > 0$ 时相同的是: 在 $x = 0$ 附近, 曲线比较平缓, x 增大后, 曲线越来越陡峭。



对于一般的一元二次式 $ax^2 + bx + c$, 二次函数 $x \mapsto ax^2 + bx + c$ 的图像是怎样的呢? 上一章中, 我们使用配方法解一元二次方程。用同样的方法, 我们可以把 $ax^2 + bx + c$ 写成:

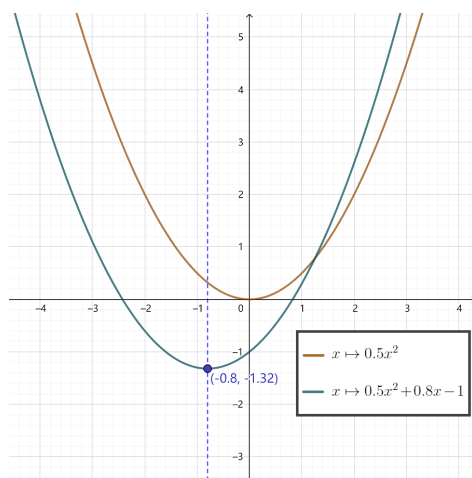
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

因此, 如果我们把 $x \mapsto ax^2$ 的图像按 $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ 平移, 就得到 $x \mapsto ax^2 + bx + c$ 的图像。比如, 要得到 $x \mapsto 0.5x^2 + 0.8x - 1$ 的图像, 我们从 $x \mapsto 0.5x^2$ 出发。将 $0.5x^2 + 0.8x - 1$ 配方得到

$$0.5x^2 + 0.8x - 1 = 0.5(x + 0.8)^2 - 1.32$$

于是将 $x \mapsto 0.5x^2$ 按 $(-0.8, -1.32)$ 平移, 就得到 $x \mapsto 0.5x^2 + 0.8x - 1$ 的图像。

用 $x \mapsto 0.5x^2 + 0.8x - 1$ 作例子, 可以看到, 原来 $x \mapsto ax^2$ 的图像关于 y 轴对称。平移之后, 图像关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称。 $a > 0$ 时, $x \mapsto ax^2$ 的



图像最低点是 $(0, 0)$ ，平移之后，最低点是 $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ 。 $a < 0$ 时， $x \mapsto ax^2$ 的图像最高点是 $(0, 0)$ ，平移之后，最高点是 $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ 。直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 叫做二次函数图像的对称轴，点 $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ 叫做二次函数图像的顶点。

习题 6.2.1.

1. 二次函数 $x \mapsto x^2$ 的图像和 $x \mapsto ax + b$ 恰有一个交点，那么 a 、 b 满足怎样的关系？交点的坐标是多少？

2. 二次函数 $x \mapsto ax^2 + bx + c$ 的图像和它关于点 (x_0, y_0) 平移后的图像有交点，则 (x_0, y_0) 应满足什么条件？交点个数可以是多少？

6.3 一元二次不等式

通过研究二次函数的图像，我们可以直观地理解一元二次不等式。

一元二次不等式是类似 $ax^2 + bx + c > 0$ 的不等式。其中的大于号也可以是小于号、大于等于号或小于等于号。以不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 来说， x 是不等式的一个解，当且仅当点 $(x, ax^2 + bx + c)$ 在 x 轴上方。也就是说， $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集，就是二次函数 $x \mapsto ax^2 + bx + c$ 在 x 轴上方的点的横坐标的集合。

观察 $x \mapsto ax^2 + bx + c$ 的图像可知, 如果 $\Delta > 0$, 那么二次函数有两个零点。 $a > 0$ 时, 不等式的解集对应两个零点两侧的部分, 是两个开区间的并集:

$$(-\infty, \frac{-b - \Delta}{2a}) \cup (\frac{-b + \Delta}{2a}, \infty)$$

$a < 0$ 时, 不等式的解集对应两个零点之间的部分, 即开区间:

$$(\frac{-b - \Delta}{2a}, \frac{-b + \Delta}{2a})$$

如果 $\Delta < 0$, 那么二次函数没有零点。 $a > 0$ 时, 二次函数的图像总在 x 轴上方, 于是不等式的解集是全体实数。 $a < 0$ 时, 二次函数的图像总在 x 轴下方, 于是不等式的解集是空集。

如果 $\Delta = 0$, 那么二次函数恰有一个零点。 $a > 0$ 时, 不等式的解集对应零点两侧的部分, 是两个开区间的并集:

$$(-\infty, \frac{-b}{2a}) \cup (\frac{-b}{2a}, \infty)$$

$a < 0$ 时, 二次函数的值不大于零, 于是不等式的解集是空集。

要是不等式的大于号换成大于等于号, 则相关的“开”的部分也换成“闭”。如果 $\Delta > 0$, 二次函数有两个零点。 $a > 0$ 时, 不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解集是:

$$(-\infty, \frac{-b - \Delta}{2a}] \cup [\frac{-b + \Delta}{2a}, \infty)$$

$a < 0$ 时, 不等式的解集是:

$$[\frac{-b - \Delta}{2a}, \frac{-b + \Delta}{2a}]$$

如果 $\Delta < 0$, 那么二次函数没有零点。 $a > 0$ 时, 二次函数的图像总在 x 轴上方, 于是不等式的解集是全体实数。 $a < 0$ 时, 二次函数的图像总在 x 轴下方, 于是不等式的解集是空集。

如果 $\Delta = 0$, 那么二次函数恰有一个零点。 $a > 0$ 时, 不等式的解集包括了零点, 因此是全体实数。 $a < 0$ 时, 二次函数的值不大于零, 于是不等式的解集是单元集: $\{\frac{-b}{2a}\}$ 。

要是不等式的大于号（大于等于号）换成小于号（小于等于号），只需要把左边的项移到右边，就转化成大于号（大于等于号）的情况。

例子 6.3.1.

1. 求不等式 $2x^2 - 5x + 2 > 0$ 的解集。
2. 求不等式 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ 的解集。

解答.

1. 首先求一元二次方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 的解。依公式可得：

$$x_1 = 0.5, \quad x_2 = 2.$$

因此，不等式的解集是 $(-\infty, 0.5) \cup (2, \infty)$ 。

2. 首先求一元二次方程 $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的解。依公式可得：

$$x = 3.$$

因此，不等式的解集是全体实数。

一元二次不等式还可以用来解反比例函数和一次函数的不等式。

例子 6.3.2. 求不等式 $\frac{8}{x} > x + 2$ 的解集。

可以把这个不等式理解为反比例函数 $x \mapsto \frac{8}{x}$ 和一次函数 $x \mapsto x + 2$ 的图像的关系。 x 是不等式 $\frac{8}{x} > x + 2$ 的一个解，当且仅当点 $(x, \frac{8}{x})$ 在点 $(x, x + 2)$ 上方。如果我们画出两个函数的图像，并找到反比例函数在 $x \mapsto \frac{8}{x}$ 在一次函数 $x \mapsto x + 2$ 图像上方的部分，那么这部分的点的横坐标，就是不等式的解。

观察两者图像可知，解集大致对应第三象限中曲线和直线交点左侧的部分，以及第一象限中曲线和直线交点左侧的部分。具体交点的位置，我们可以通过解方程 $\frac{8}{x} = x + 2$ 得到。而这个方程可以转化为一元二次方程。

把 $\frac{8}{x} = x + 2$ 两边乘以 x ，再把常数项 8 移到右边，就得到方程：

$$0 = x^2 + 2x - 8.$$

这是一个一元二次方程，解为：

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2$$

它们分别对应点 $(-4, -2)$ 和 $(2, 4)$ （注意不是 $(-4, 0)$ 和 $(2, 0)$ ）。这两个点就是第三、第一象限中曲线和直线交点的位置。因此，我们可以得出结论：不等式的解集是 $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$ 。

习题 6.3.1. 解以下不等式：

1. $3x^2 - 8x + 4 < 0$
2. $2x^2 + 8x + 9 \geq 7x + 10$
3. $\frac{2}{x} < 6x - 7$