# 极简数学·中学篇
# 第五册

大青花鱼

# 目录

# 第一章　圆

学习反比例函数和二次函数时，我们发现，就算是简单代数式定义的函数，它的图像也是我们无法手动画出的曲线。曲线是比直线更复杂的形状。为了给我们今后研究各种曲线打下基础，以下我们研究一种简单的曲线：圆。

## 1.1　圆的基本性质

我们已经学过圆的概念。公理体系中，我们这样定义圆：平面上到定点 $O$ 距离为定长的点的集合，是一个圆。给定线段 $XY$，到 $O$ 的距离和 $AB$ 等长的点构成一个圆。$O$ 叫做**圆心**，$XY$ 叫做圆的**半径**，长度一般记为 $r$，不至于混淆的时候，半径的长也简称为半径。

圆心为 $O$、半径为 $r$ 的圆，一般记为圆 $(O, r)$ 或 $\odot(O, r)$。圆心 $O$ 和另一点 $P$ 确定的圆，一般记为圆 $(O, P)$ 或 $\odot(O, P)$。如果不在意半径，不至于混淆的情况下，也可以简记为圆 $O$。

平面上的点到 $O$ 的距离小于 $r$，就说它在圆内；如果等于 $r$，就说它在圆上；如果大于 $r$，就说它在圆外。

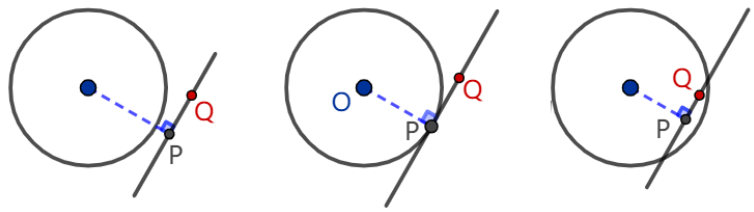
关于圆，我们有以下公理：

- 直线和圆有两个交点，当且仅当直线有部分在圆内。

- 给定点 $A$、$B$ 和线段 $EF$、$GH$，如果 $|EF|+|GH| > |AB| > ||EF|-|GH||$，那么总存在两点 $P$、$Q$，使得 $|AP| = |EF|$、$|PB| = |GH|$，$|AQ| = |EF|$、$|QB| = |GH|$。$P$、$Q$ 分别在直线 $AB$ 两侧。

第一个公理说明直线与圆相交的条件，第二个公理则说明圆与圆相交的条件。

考虑直线 $l$ 和圆 $\odot(O,r)$。过 $O$ 作直线 $m \perp l$，记垂足为 $P$，$|OP| = d$。




1. 如果 $d > r$，那么 $P$ 在圆外。对 $l$ 上任意其他点 $Q$，根据勾股定理，$|OQ|^2 = |OP|^2 + |PQ|^2 > |OP|^2$，因此 $|OQ| > |OP| > r$。这说明 $l$ 上的点都在圆外。我们说直线 $l$ 与圆 $O$ **相离**。反之，如果直线与圆相离，那么 $P$ 在圆外，因此 $d > r$。
2. 如果 $d = r$，那么 $P$ 在圆上。对 $l$ 上任意其他点 $Q$，根据勾股定理，$|OQ|^2 = |OP|^2 + |PQ|^2 > |OP|^2$，因此 $|OQ| > |OP| = r$。这说明 $l$ 上其他点都在圆外。直线和圆恰有一个公共点。我们说直线 $l$ 与圆 $O$ **相切**，称 $P$ 为**切点**。反之，如果直线与圆相切于点 $Q$，那么 $|OQ| = r$。反设 $Q$ 不是 $P$，那么根据勾股定理，$|OP|^2 = |OQ|^2 - |PQ|^2 < |OQ|^2$，这说明 $P$ 在圆内。根据第一个公理，圆 $O$ 和 $l$ 有两个交点，矛盾！因此 $Q$ 就是 $P$，$d = r$。
3. 如果 $d < r$，那么 $P$ 在圆内。根据第一个公理，直线和圆有两个交点 $A$、$B$。我们说直线与圆**相交**，或直线**割圆**于 $A$、$B$。反之，如果直线和圆有两个交点，那么根据第一个公理，直线有部分在圆内。设 $Q$ 在圆内，那么根据勾股定理，$|OP|^2 = |OQ|^2 - |PQ|^2 < |OQ|^2$，这说明 $P$ 在圆内，即 $d < r$。

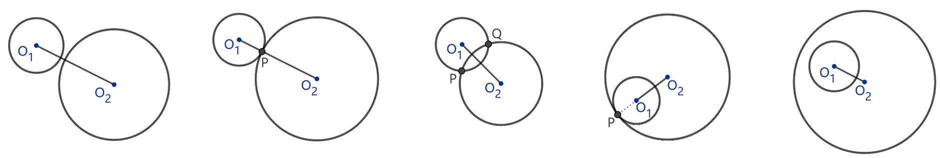
从以上的讨论可以看出，圆心到直线的垂足 $P$，以及 $OP$，是判断直线和圆

关系的重要依据。

设直线割圆于两点 $A$、$B$，根据第一个公理，线段 $AB$（除端点）在圆内。我们把线段 $AB$ 称为圆的一条**弦**。连接圆上一点 $A$ 和圆心 $O$，延长 $AO$，根据第一个公理，它和圆有另一个交点 $B$，称为点 $A$ 的**对径点**。$AB$ 称为圆的**直径**。直径是过圆心的弦。它的长度是半径的两倍。不至于混淆的时候，直径的长也简称为直径。

给定圆上两点 $A$、$B$，考虑弦 $AB$ 的垂直平分线 $l$，圆心 $O$ 显然在 $l$ 上。也就是说，**恰有一条直径垂直平分每条弦**。

考虑两个圆：$\odot(O_1, r_1)$ 和 $\odot(O_2, r_2)$，设两个圆心的距离是：$|O_1O_2| = s$，那么，两个圆的关系可能有以下几种：




1. $s > r_1 + r_2$. 用反证法可以证明，两个圆没有公共点。我们说两圆**相离**。
2. $s = r_1 + r_2$. 考虑线段 $O_1O_2$，上面有一点 $P$ 使得 $|O_1P| = r_1$，于是 $|PO_2| = |O_1O_2| - |O_1P| = r_2$。这说明两个圆有一个公共点。如果点 $Q$ 不在线段 $O_1O_2$ 上，则 $|O_1Q| + |QO_2| > |O_1O_2|$。于是 $Q$ 不可能是公共点。也就是说，两个圆恰有一个共同点，在圆心连线上。我们说两圆**外切**。
3. $|r_1 - r_2| < s < r_1 + r_2$. 根据第二个公理，$\odot(O_1, r_1)$ 和 $\odot(O_2, r_2)$ 恰有两个公共点，分别在圆心连线两侧。我们说两圆**相交**。
4. $s = |r_1 - r_2|$. $r_1 > r_2$ 时，$s = r_1 - r_2$。考虑直线 $O_1O_2$，上面有一点 $P$，使得 $|O_1P| = r_1$，且和 $O_2$ 在 $O_1$ 同一边。于是 $|O_2P| = |O_1P| - |O_1O_2| = r_2$。这说明两个圆有一个公共点。如果点 $Q$ 不在线段 $O_1O_2$ 上，则 $|O_1O_2| + |QO_2| < |O_1Q|$。于是 $Q$ 不可能是公共点。也就是说，两个圆恰有一个共同点，在圆心连线上。$r_1 > r_2$ 时，通过类似推理可以得到同样的结论。我们说两圆**内切**。

5. $s < |r_1 - r_2|$. 用反证法可以证明，两个圆没有公共点。如果 $r_1 > r_2$，我们说 $\odot(O_1, r_1)$ **内含** $\odot(O_2, r_2)$，$\odot(O_2, r_2)$ **容于** $\odot(O_1, r_1)$；反之亦然。

要注意的是，如果仅知道两圆恰有一个公共点，我们无法判断到底是第二还是第四种情形；如果仅知道两圆没有公共点，我们无法判断到底是第一还是第五种情形。第二和第四种情形可以统称为两圆**相切**，第一和第五种情形可以统称为两圆**相离**。

**习题 1.1.1.** 补充：

*1.* 设直线割圆于两点 $A$、$B$，证明线段 $AB$（除端点）在圆内。

*2.* 完成两圆关系的第一和第五种情形中的证明。

*3.* 阐明两圆关系的第四种情形中，$r_1 > r_2$ 情况下的推理过程。

## 1.2　圆和旋转

怎么画一个圆? 我们用圆规画圆。如果已知圆心和圆上一点，我们将圆规尖定在要画的圆心处，将笔头接触圆上的点，然后轻轻旋转，笔头就画出一个圆。如果已知圆心和半径线段，我们首先张开圆规，圆规尖和笔头分别对齐半径两端，然后保持圆规形状不变，将圆规尖定在要画的圆心处，让笔头接触纸面，轻轻旋转，笔头就画出一个圆。

可以看出，圆和旋转有天然的关系。旋转是由角定义的操作，把平面中的点映射到另一点。给定角 $AOB$，可以这样定义**旋转**:

**定义 1.2.1.** 给定角 $AOB$，平面中一点 $P$ 关于 $\angle AOB$ 旋转的结果，是唯一使得 $\angle POQ = \angle AOB$ 且 $|OP| = |OQ|$ 的点 $Q$。

$O$ 称为旋转的**中心**。任何点 $P$ 绕中心旋转，结果都在圆 $(O, P)$ 上。

可以看到，给定一个圆 $(O, P)$，从点 $P$ 出发，旋转不同的角度，就得到圆上其它的点。用圆规画圆时，从零角出发，随着角度不断增大，直到周

角，我们沿逆时针经历了圆上所有的点（注意：这里约定角度的范围是 $0°$ 到 $369°$）。也就是说，我们认为零角到周角的角按角度和圆上的点之间有一一映射。换句话说，数轴上 0 和 360 之间的数，和圆上的点之间有一一映射。我们把它称作**圆映射**，记为 $\gamma_{(O,P)}$。

通过 $\gamma_{(O,P)}$，我们可以把对圆的研究，改为对数轴上线段的研究。这样就把曲线上的问题转为了直线上的问题。比如，既然 $[0,360)$ 对应整个圆，那么 $[0,180]$ 就对应半个圆，$[0,60]$ 就对应六分之一个圆，等等。我们把闭区间对应的圆的部分称为**圆弧**。

同一圆上两个圆弧分别对应 $[a_1,a_1+x]$ 和 $[a_2,a_2+x]$，这两个圆弧有什么不同吗? 观察圆的图像可知，并没有不同。也就是说，圆弧的形状只和它对应数轴上区间的长度有关，和它所在的位置无关。只要对应的区间一样长，那么圆弧就全等，可以相互覆盖。换句话说，圆弧只要等长，就是全等的。于是，线段所满足的公理，对同一个圆上的圆弧也成立。

和线段一样，圆弧也有起点和终点。比如 $[0,60]$ 对应的圆弧，起点就是 $P$，终点是 60 度角 $POQ$ 的终边和圆的交点 $Q$。如果圆弧对应的区间长度超过 180，就说它是**优弧**；如果圆弧对应的区间长度小于 180，就说它是**劣弧**；如果等于 180，就说它是**半圆**。优弧比半圆长，劣弧比半圆短。

从直线和圆相交的角度来看，圆上两点表示这两点确定的直线将圆分为两个圆弧。这两个圆弧并起来就是圆，所以要么一个是优弧、一个是劣弧，要么两者都是半圆（这时直线过圆心）。

同一个圆上，明确了起点 $A$ 和终点 $B$，就唯一确定了圆弧 $\overset{\frown}{AB}$。如果只说了两点 $A$、$B$，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 一般指劣弧或起点为 $A$ 终点为 $B$ 的圆弧。如果要指优弧，一般会特别强调。

**习题 1.2.1.** 证明：

*1.* 同一个圆中，直径是最长的弦。

*2.* 任意线段经过旋转得到等长的线段。任意三角形经过旋转得到同角全等的三角形。

## 1.3　圆心角和圆周角

根据圆映射的定义，每个圆弧都对应一个顶点在圆心，大小介于零角和周角之间的角，称为它的**圆心角**。圆弧还可以对应另一类角。给定起点为 $A$，终点为 $B$ 的圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和圆上一点 $P$，则角 $APB$ 称为一个**圆周角**。每个圆弧只对应一个圆心角，但可以对应很多个圆周角。

同一段圆弧的圆心角和圆周角之间, 有什么关系呢? 如右图, 连接 $PO$，延长交圆于对径点 $Q$。由于 $\triangle AOP$ 是等腰三角形，$\angle OAP + \angle OPA = 0$，同理，$\angle OBP + \angle OPB = 0$。于是

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle AOQ + \angle QOB \\ &= \angle OAP + \angle APO + \angle PBO + \angle OPB \\ &= 2\angle APO + 2\angle OPB = 2\angle APB\end{aligned}$$

也就是说, 圆心角是圆周角的两倍大小, 圆周角是圆心角的一半大小。由于每段圆弧只对应一个圆心角，无论 $P$ 取圆上哪个点，只要不在弧上，圆周角 $APB$ 都是圆心角的一半大小。

如果点 $P$ 在弧上, $\angle APB$ 和 $\angle AOB$ 是什么关系呢? 如果点在弧上, 它对应的就是构成圆的另一段弧，于是它是另一段弧对应的圆心角的一般大小。另一段弧对应的圆心角是周角减去 $\angle AOB$，所以

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AOB.$$

**定理 1.3.1. 圆周角定理** 给定圆 $O$ 上的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 及圆上的点 $P$, 如果 $P \notin \overset{\frown}{AB}$，那么:

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

如果 $P \in \overset{\frown}{AB}$，那么:

$$\angle APB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB.$$

对径点和圆心形成平角，因此，根据圆周角定理，对径点对应的圆周角是直角。或者说，半圆对应的圆周角是直角。

要注意的是，讨论圆心角时，我们约定角的范围是零角到周角。讨论圆周角和其他角时，为了方便，我们会切换到负平角到正平角的范围。

同一个圆里，圆上的点 $A$、$B$ 对应的圆心角 $\angle AOB$ 和点 $C$、$D$ 对应的圆心角 $\angle COD$ 相等，那么根据“边角边”，圆心 $O$ 和它们构成的三角形满足：$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。弦 $AB$ 和 $CD$ 也等长。不仅如此，根据圆映射，圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 也等长。事实上，$\overset{\frown}{CD}$ 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 关于某个角旋转的结果。我们把这个结论称为“等角对等弦”、“等角对等弧”。

反之，如果两个圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长，那么它们对应的区间也一样长。这说明它们对应的圆心角一样大。圆心角既然相等，那么弦 $AB$ 和 $CD$ 也等长。更进一步，设 $P$ 是圆上不属于两弧的点，那么圆周角 $\angle APB$ 和 $\angle CPD$ 一样大。我们把这个结论称为“等弧对等弦”、“等弧对等角”。

反过来，如果圆 $O$ 上两条弦 $AB$ 和 $CD$ 等长，那么根据“边边边”，$\triangle AOB \simeq \triangle COD$。于是圆心角相等，所以劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{CD}$ 等长。我们把这个结论称为“等弦对等角”、“等弦对等弧”。

总的来说，在同一个圆里，两点对应的弦长相等当且仅当对应的（劣弧）弧长相等，当且仅当对应的圆心角相等，当且仅当对应的圆周角相等。弦、弧、圆心角、圆周角，都是用来描述圆的部分和整体关系的方法。

给定圆上两点 $A$、$B$，它们对应的垂直平分线 $l$ 平分 $\angle AOB$，即把 $\angle AOB$ 分成两个相同大小的圆心角。因此，设 $l$ 和圆交于 $P$、$Q$，则它们也分别平分所在的圆弧（称为弧的中点）。我们把这一系列结论总称为垂径定理：

**定理 1.3.2. 垂径定理** 给定圆上两点，则恰有圆的一条直径垂直平分两点对应的弦，同时平分对应的圆心角和两个圆弧。

垂径定理也可以说成：过圆 $O$ 的弦 $AB$ 中点的直径与弦 $AB$ 垂直，同

时平分 $\angle AOB$ 和弧 $\overset{\frown}{AB}$。

**习题 1.3.1.** 给定圆 $O$，弦 $AB$ 中点记为 $M$，$|MO|$ 称为弦 $AB$ 的**弦心距**。

*1.* 证明：圆心角相等，当且仅当对应的弦心距相等。

*2.* 设直线 $MO$ 与圆 $O$ 交于 $P$、$Q$ 两点，证明：$|MP|\cdot|MQ| = |MA|\cdot|MB|$.

## 1.4 圆内接四边形

我们对圆上一点、两点引出的形状都有了初步了解，现在来看圆上多个点对应的形状。首先来看三个点的情形。

设 $A$、$B$、$C$ 是圆 $(O,r)$ 上（相异的）三点，则线段 $AB$、$BC$、$AC$ 的垂直平分线都过圆心 $O$。因此，$O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心（这里附带说明了圆上相异三点必然不共线），$|OA| = |OB| = |OC| = r$。反之，设有（非退化的）$\triangle ABC$，以它的外心 $O$ 为圆心，以 $|OA|$ 为半径，就可以画出一个圆，过顶点 $A$、$B$、$C$。这说明，**不共线的三点恰好对应一个圆**。或者说，**不共线的三点确定一个圆**。我们把这个圆称为三角形的**外接圆**（“外心”即“外接圆圆心”简称），把三角形称为圆的**内接三角形**。

在三个点的基础上再加一个点 $D$，四个点 $A$、$B$、$C$、$D$ 能否恰好对应一个圆呢？显然，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的外接圆未必是同一个圆。所以，四个点不总是在同一个圆上。换句话说，要让四个点共圆，这四个点必须满足一定的条件。

如右图上情形，设 $A$、$B$、$C$、$D$ 圆 $(O,r)$ 上（相异的）四点，考察它们对应的圆弧。我们发现，$\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 是整个圆的两部分，因此，它们对应的圆心角之和是周角。根据圆周角定理，$\angle ABC + \angle CDA = 180°$。同理，$\angle BCD + \angle DAB = 180°$。

我们还可以发现，圆周角 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 都对应 $\overset{\frown}{BC}$，因此根据“等弧

对等角”, $\angle BAC=\angle BDC$。同理可得: $\angle ACB=\angle ADB$, $\angle CAD=\angle CBD$, $\angle DBA=\angle DCA$。从这些等角关系出发，如果对角线 $AC$ 和 $BD$ 交于点 $P$，那么 $\triangle APB\backsim\triangle CPD$、$\triangle BPC\backsim\triangle DPA$。

如果 $A$、$B$、$C$、$D$ 顺序改变，如右图下情形，那么 $\overset{\frown}{ABC}$ 和 $\overset{\frown}{CDA}$ 对应同一段圆弧 $\overset{\frown}{AC}$。这时 $\angle ABC+\angle CDA=0°$，或者说 $\angle ABC=\angle ADC$。同理，$\angle BAD=\angle BCD$。综合两种情况，**圆内接凸四边形对角之和是平角**，**圆内接凹四边形对角相等**。我们把这样的四边形 $ABCD$ 称为**凹四边形**，把前一种情况中的四边形 $ABCD$ 称为**凸四边形**。凸四边形包含我们学过的平行四边形、梯形和筝形，它的内角都是正的。凹四边形的内角总有负的。无论是凸四边形还是凹四边形，内角和总是零角。

四边形 $ABCD$ 有一对边相交，像一只蝴蝶。我们把这样的四边形叫做**蝶形**。可以看到，如果把相交的对边 $AB$、$CD$ 看作对角线，把对角线 $AC$、$BD$ 看作对边，我们就得到一个凸四边形 $ACBD$。因此，观察相同的圆弧对应的圆周角可以发现，我们仍然有 $\angle BAC=\angle BDC$、$\angle ACB=\angle ADB$，$\angle CAD=\angle CBD$，$\angle DBA=\angle DCA$。如果对角线 $AC$ 和 $BD$ 交于点 $P$，仍然有 $\triangle APB\backsim\triangle CPD$、$\triangle BPC\backsim\triangle DPA$。

以上是圆内接四边形边和角的性质，反过来，满足什么性质的四边形是圆内接四边形呢?

## 1.5 圆内接多边形

从四边形的情况来看，顶点的位置顺序对形状很重要。如果顶点 $A$、$B$、$C$、$D$ 按顺时针或逆时针顺序排列，那么四边形 $ABCD$ 是凸四边形，否则，四边形 $ABCD$ 可能是凹四边形。

对一般的圆内接多边形，我们只研究最简单的一类: 顶点按逆时针顺序排列的多边形。具体来说，设圆 $O$ 上有 $n$ 个点: $A_1,A_2,\cdots,A_n$，从 $A_1$ 出发

构造圆映射 $\gamma_{(O,A_1)}$, 把 $[0,360)$ 映射到圆周, 那么 0 对应 $A_1$。设 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 分别对应 $n$ 个点，那么 $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n$。这样定义的圆内接多边形: $A_1A_2\cdots A_n$ 就是我们研究的对象。这样定义的多边形，每个内角都在零角和平角之间。这样的多边形叫做**凸多边形**。

对于大于等于 3 的整数 $n$，凸 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。具体来说，每个顶点和相邻两个顶点的连线是 $n$ 边形的边，和其余 $n-3$ 个顶点的连线是对角线。因此每个点是 $n-3$ 条对角线的端点。另一方面，每条对角线对应两个顶点，因此一共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。

凸多边形的内角和是否有规律呢? 我们知道三角形的内角和是平角, 凸四边形的内角和是两个平角（或者说周角，如果把角度约定在负平角和正平角之间，则减去一个周角变成零角)。边数继续增多时，我们定义凸 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的内角和为:

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n + \angle A_{n-1}A_nA_1 + \angle A_nA_1A_2$$

如果我们不把角度限定在负平角和正平角之间，可以猜测：凸 $n$ 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

如果凸多边形是圆内接多边形, 我们可以这样证明: $n$ 个顶点把圆分为 $n$ 段圆弧。每个顶点张成的内角，对应了其中 $n-2$ 段圆弧。如果考虑所有 $n$ 个内角对应的圆弧，则每段圆弧计入 $n-2$ 次（圆弧两端是内角顶点的时候不计入，其它情况下都计入)。也就是说，$n$ 个内角和对应 $n-2$ 个整圆。这些内角都是圆周角，因此它们的和是 $n-2$ 个整圆对应的圆周角，即 $n-2$ 个平角。我们的猜想至少对圆内接多边形是正确的。

对一般凸多边形的情况，我们可以通过不断“裁剪”三角形来证明。我们还记得，凸四边形可以裁成两个三角形，因此它的内角和是两个三角形的内角和。从另一个角度来看, 我们通过裁掉一个三角形, 把凸四边形变成了三角形。对一般的凸 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 来说，由于它的每个内角都介于

零角和平角之间，我们可以考虑裁掉某个角，把它变成 $n-1$ 边形。比如，沿着线段 $A_1A_3$ 剪一刀，就把 $A_1A_2\cdots A_n$ 分成了三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。

**定理 1.5.1.** 凸 $n$ 边形的内角和是 $n-2$ 个平角。

**证明.** 用归纳法证明。命题 $P(n)$：凸 $n+2$ 边形的内角和是 $n$ 个平角。我们要证明 $P(n)$ 对所有正整数 $n$ 成立。
$n=1$ 时，由于三角形内角和是平角，$P(1)$ 成立。
假设 $P(n)$ 成立，下面证明 $P(n+1)$ 成立。
设有凸 $n+3$ 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，将它裁成三角形 $A_1A_2A_3$ 和 $n-1$ 边形 $A_1A_3\cdots A_n$。前者的内角和是平角。根据 $P(n)$，后者的内角和是 $n$ 个平角，因此，$A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的内角和是 $n+1$ 个平角。于是 $P(n+1)$ 成立。
因此对所有正整数 $n$，命题 $P(n)$ 成立。

满足什么条件时，凸多边形是圆内接多边形呢? 最直接的条件，自然是平面上有一个圆，使多边形顶点都在圆上。或者说，能找到一点，到多边形各个顶点距离相等。

如果难以直接找到这样的点，可以查看多边形各边和各条对角线的垂直平分线。如果多边形是圆内接多边形，它的边和对角线都是圆的弦，垂径定理说明其垂直平分线过圆心。具体来说，可以考察两条边（或对角线）的垂直平分线的交点。这点如果到各个顶点距离相等，那么多边形内接于以它为圆心的圆，否则多边形不是圆内接多边形。

有一种特殊的凸多边形必然是圆内接多边形：**正多边形**。正多边形是各边等长，各内角相等的多边形。正三角形、正方形都是正多边形。正多边形的内角角度是 $\frac{180(n-2)}{n}^\circ$

**习题 1.5.1.**

*1.* 平行四边形、矩形、正方形、梯形、筝形，哪些总是圆内接多边形? 哪些可以是圆内接多边形? 要满足什么条件?

*2.* 设有整数 $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$, 圆内接 $n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中, $\angle A_iA_kA_j$ 和 $\angle A_iA_lA_j$ 有什么关系?

## 1.6　弧长和面积

# 第二章　圆和三角形

## 2.1　圆幂

## 2.2　切线和割线

## 2.3　垂心和外接圆

## 2.4　内切圆和旁切圆

## 2.5　九点圆

# 第三章　三角函数

## 3.1　锐角的三角函数

## 3.2　三角函数的图像和性质

## 3.3　三角函数和三角形

# 第四章　从或许到确定

## 4.1　事件和试验

## 4.2　计数和概率

## 4.3　组合和排列

# 第五章　三段论

## 5.1　大前提、小前提和结论

## 5.2　直言三段论