极简数学 · 中学篇

第一册

大青花鱼

目录

第一章　从自然数到有理数

1.1　分数、整数、有理数

我们已经学过自然数：$0, 1, 2, 3, \cdots$。自然数是 0 和 1 相加得到的数。从 0 开始，不断加 1，就能得到任何自然数。自然数之间做加法和乘法，得到的还是自然数。

加法和乘法都满足结合律和交换律，乘法满足对加法的分配律。

自然数是自然产生的。当人们发现两头牛和两天有共同之处时，自然数的概念就诞生了。

为了回答类似“三个人分七只鸡”的问题，人们发明了除法。除法是乘法的逆运算。除法产生了分数。自然数可以看作分母是 1 的分数。分数之间可以做加法、乘法和除法，得到的还是分数。

为了回答类似“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的问题，人们发明了减法。减法是加法的逆运算。比如，$3 + 2 = 5$，于是 $3 = 5 - 2$。

既然可以写出 $5 - 2$，那么可不可以写 $0 - 2$ 呢？$0 - 2$ 有什么含义呢？

借用“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的思路，$0 - 2$ 可以表示“本没有鸡蛋，借来两个鸡蛋吃了两个还剩几个”。这里剩下的，是“欠两个鸡蛋”，是一种负债状态。因此，这样的数称为**负数**。

我们一般把 $0-2$ 中的 0 去掉，只记为 -2。-2 满足 $-2+2=0$。对某个数，比如 73 来说，$73+(-2)=73+(0-2)=73-2$。也就是说，一个数加上 -2，就和减去 2 一样。以此类推，可以得到：

$$-1,-2,-3,\cdots$$

它们由 $1,2,3,\cdots$ 前加上减号得到，表示 0 减去 $1,2,3,\cdots$ 的结果，读作"负一"、"负二"、"负三"等等。我们把负数带的减号称为**负号**（读作"负"），和一般减法区别开来。

一般来说，在任何分数前加上负号，也可以得到一个负数，表示 0 减去它的结果。

有没有 -0 呢？-0 就是 $0-0$，也就是 0 自己，所以就没有必要加负号了。

自然数和它们的负数合称**整数**。我们把 $-1,-2,-3,\cdots$ 这些负数称为**负整数**，把原来 $1,2,3,\cdots$ 这些数称为**正整数**，和负整数相对。由于 -0 就是 0，约定 0 既不是正数，也不是负数。于是整数分为正整数、负整数和 0。

分数和它们的负数合称**有理数**，我们把带负号的分数称为**负有理数**或**负分数**，把原来的分数（除了 0）称为**正有理数**或**正分数**。正有理数包括正整数，负有理数也包括负整数，有理数包括整数。

自然数或分数前面加负号得到的负数，叫做它的**相反数**。反过来，一个负整数或负数去掉负号得到的数，也叫做这个它的相反数。约定 0 的相反数就是 0。于是，每个有理数都有唯一的相反数。除了 0 以外，相反数总是成对的。一个有理数的相反数的相反数，就是它自己。

思考 1.1.1. 一个有理数前面加上负号，一定会得到一个负数吗？

加上一个负数，就和减去它的相反数一样。所以，现实问题中遇到和加法对应的具体概念，都可以用减法和负数表示相反或相对的概念。比如，如果把"往东走三步"视作"+3"，那么"往西走两步"就可以视作"-2"。"原

地往东走三步，再往西走两步”，就可以视作“$0+3-2$”。计算得到 1，就表示最终和原来比，往东走了一步。

1.2 有理数的大小

加法不仅可以表达累加的概念，还可以用于比较大小。比如，5 比 3 大，可以理解为 5 是 3 再加自然数 2 得到的，而 3 却没法通过 5 加上一个自然数得到。一般来说，两个不同的自然数或分数，如果其中一个加上某个自然数或分数等于另一个，那么它比另一个数小，另一个数比它大。

用这个方法，我们可以比较有理数的大小。首先，任何负有理数加上它的相反数都得到 0，所以 0 大于任何负有理数。而任何正有理数都大于 0，所以任何正有理数大于任何负有理数。

我们约定大于 0 的数叫做**正数**，小于 0 的数叫做**负数**。正整数、正有理数都是正数，负整数、负有理数都是负数。这样的约定和前面负数的定义是一致的。

负有理数之间如何比较大小呢？举例来说，$0=-3+3=-3+1+2$，所以 $-3+1=0-2=-2$。-2 由 -3 加上自然数 1 得到，所以 -3 小于 -2。进一步分析，我们发现，自然数 1 来源于“3 可以写成 $1+2$”。所以我们可以总结出两个负有理数比较大小的方法：看它们的相反数。相反数中较大的，可以写成较小数加上一个分数，于是，相反数较大的负有理数加上这个分数，就等于相反数较小的负有理数。因此，相反数较大的负有理数比较小，相反数较小的负有理数比较大。

正数和负数可以比较大小。所以，现实问题中涉及到相反或相对的概念比较大小时，可以用有理数表示。比如，今天延安的气温是 3.4 摄氏度，长春的气温是 -8.2 摄氏度，哈尔滨的气温是 -15.1 摄氏度，那么延安气温最高，长春气温比延安低，而哈尔滨气温又比长春低。

1.3 数轴

为了直观表示有理数，我们引入**数轴**的概念。

从左往右画一条直线，在中间取一点表示 0，称为**原点**。选择适当长度作为单位长度，规定右边是**正方向**，往右移动一个单位长度就是“+1”，那么，从原点出发，每隔单位长度取一个点，就可以表示出 $1, 2, 3\cdots$。相对的，往左移动一个单位长度就是“-1”，类似可以表示出 $-1, -2, -3\cdots$。这就是数轴。

数轴上的点，越往右就越大，越往左就越小。正数都在 0 右边，负数都在 0 左边。两个数比较大小，可以在数轴上找到对应的点：靠右的比较大，靠左的比较小。

数轴上的数还可以做加减法。在数轴上找到一个数 a 的位置，然后往右移动 b 个单位长度，就得到了 $a+b$。反之，往左移动 b 个单位长度，就得到了 $a-b$。

数轴上的相反数：3 是从原点往右移动 3 个单位长度到达的点，而 -3 是从原点往左移动 3 个单位长度到达的点。如果先往右移动 3 个单位长度，再往左移动 3 个单位长度，就会回到原点。一般来说，在数轴上先往右再往左（或先往左再往右）走一样多的单位长度，最终自然就回到原点。这说明任何数加上自己的相反数，都得到 0。

思考 1.3.1. 有理数在数轴上吗？怎么在数轴上找到一个有理数？

1.4 乘方

乘法可以更方便地表示若干个相同的数相加。比如，我们用 3×4 表示 $3+3+3+3$。那么，能不能方便地表示若干个相同的数相乘呢？

我们把 3×3 称为 3 乘 2 **次方**，把 $7\times7\times7\times7\times7$ 称为 7 乘 5 次方。

同一个数连乘几次，叫做它乘几次方。连乘的结果，叫做它的几**次方**或几**次幂**。这种运算叫做**乘方**或**乘幂**。

我们把 7 的 5 次方记作 7^5，把 7 称为**底数**，把 5 称为**指数**。这样记法，比 $7\times7\times7\times7\times7$ 更方便。

一个数的 1 次方就是它自己。一个数的 2 次方也叫做它的**平方**。一个数的 3 次方也叫做它的**立方**。

约定任何数的 0 次方是 1。

$7\times7\times7\times7\times7=(7\times7\times7)\times(7\times7)$。用乘方表示这个关系，就是: $7^5=7^3\times7^2$。注意到 $5=3+2$。用日常的话来说，5 个 7 相乘，等于 3 个 7 相乘，再和 2 个 7 相乘。

同底数乘方的积，等于指数之和的乘方。乘方的乘法，可以转化为指数的加法。因此，乘方的除法，也可以转化为指数的减法。

比如，$7^{5-2}=7^3=7^5\div7^2$。

既然乘方的乘除可以转化为指数的加减，那么是否有负指数? 能否定义一个数的负数次方?

如果定义 7^{-3} 为: $7^{-3}\times7^3=7^0=1$，那么 $7^{(-3)}$ 就等于 $\frac{1}{7^3}$。一个数的负几次方，就是 1 除以它的几次方。

显然，0 没有负数次方。

思考 1.4.1.

1. 约定任何数的 0 次方是 1，有什么好处?

2. 负数次方和前面负数的定义矛盾吗?

第二章　从变量到方程（上）

2.1　数和代数

讨论数的性质时，我们常常发现，总结一些普遍的规律，需要用很多话来说清楚。比如：

例子 2.1.1.

$4 = 3 + 1,\ \ 4^2 - 3^2 = 4 + 3.$

$5 = 4 + 1,\ \ 5^2 - 4^2 = 5 + 4.$

$(2 \times 4 + 1)^2 = 8 \times 10 + 1.$

$(2 \times 5 + 1)^2 = 8 \times 15 + 1.$

我们想总结两个对所有数都适用的规律，但只举了几个例子。这种方法不好。

有没有更好的方法呢？

对于第一个规律，我们可以说：如果天元比地元大 1，那么天元的平方减去地元的平方等于天元加地元。对于第二个规律，我们可以说，每个自然数两倍加 1 的平方除以 8 余 1。

我们用“天元”、“地元”、“每个自然数”代替了具体的 4 和 5，以说明这是更普遍的规律，而不是只对 4 和 5 成立的等式。这种思想叫做**代数**的

思想。代数可以让我们暂时忽略具体的数，把重点放在数与数之间的关系上。我们能轻松看出这些关系是普遍的，不依赖特定的数。我们把这样的关系叫做**代数关系**。

为了和数区别，“天元”、“地元”、“每个自然数”等称为**量**。量是对可以运算的概念的称呼。量可以有现实意义，比如物理学里会讨论物理量，也可以没有现实意义，比如数学中代替数的量可以称为数量。

在讨论问题的时候，如果我们认为一个量代替的数不会变化，就说这个量是**常量**；如果会变化，就说它是**变量**。

我们可以变量描述上面两个规律:

$$\text{如果天} = \text{地} + 1,\ \text{那么天}^2 - \text{地}^2 = \text{天} + \text{地}.$$

$$(2 \times \text{甲} + 1)^2 \text{ 除以 } 8 \text{ 余 } 1.$$

为了方便，我们一般用字母命名的变量来指代数。

$$\text{如果}a = b + 1,\ \text{那么}a^2 - b^2 = a + b.$$

$$(2 \times x + 1)^2\text{除以}8\text{余}1.$$

其中变量 a, b, x 可以变成 $3, 4, 5$ 或任何一个自然数。

用变量代替数，可以用简明的语言揭示更复杂、更普遍的规律。

思考 2.1.1.

1. 用代数的方法，说一说怎样比较两个负有理数的大小。

2. 用代数的方法，定义一个数的负数次方。

3. 用代数的方法，描述加法结合律、加法交换律、乘法结合律、乘法交换律和分配律。

2.2 代数式

含有变量的算式叫做**代数式**。为了区别，我们把只有数的算式叫做**数式**。

$a+2$，$1.84\times x-3$，$0.79j^2-\frac{h+1}{n}+5$ 等等都是代数式。

数式既表示计算过程，也表示计算的结果：一个数。把数式中的数用变量代替，我们不再计算结果，只关心计算过程本身。这对我们找出并解释计算过程中的规律很有帮助。掌握了计算的规律后，我们再用具体的数代替变量（称为**取值**或**代入**），就能更快更好地算出结果。

乘号 $\times$ 和 x 或 X 很像，为了避免混淆，一般省略乘号，或用 $\cdot$ 代替乘号。$1.84\times x-3$ 可以写成 $1.84x-3$ 或 $1.84\cdot x-3$

代数式中不同的变量称为**元**。只与一个变量有关的式子叫做**一元式**，和多个变量有关的式子叫做**多元式**。

变量和数通过四则运算得到的代数式，叫做**有理式**。变量和数通过加法、减法和乘法得到的代数式，叫做**整式**。如果除法中涉及了变量，就叫**分式**。有理式中除了整式，就是分式。

例子 2.2.1.

整式：$x^3+5x-3.32$，$a+b^2-2C$，$(b-4)^9$.

分式：$\frac{1-0.9r+v^2}{3B-k}$，$n^2-7+\frac{0.88}{(H-6)^3}$，$t-(t+0.382g)^{-3}$.

我们知道，数的乘法比加减法优先。比如，计算 $4+3\times 6$ 时，我们要先计算 $3\times 6=18$，再计算 $4+18=22$。先计算加法是不对的。代数式特别是整式中，我们也更关心乘法。我们把变量和数相乘的部分称为**项**。$0.54xba$，$-1.24\cdot gb\cdot 1.19\cdot g^2$，$u\cdot 98K$ 各是一项，$10b-V$ 是两项的差。

项是变量和数的乘积。变量之间不一定能运算，但数与数之间可以运

算。我们可以把项中所有的数相乘，放在最前面，叫做项的**系数**。其次，同一个变量多次相乘，可以放在一起，作为连乘，用乘方表示。这样得到更简洁清晰的项。代数式某一项化简后，总是一个数乘以若干个变量的乘幂。

如果某一项是另一项乘以某个（不是零的）数，就说它们是**同类项**。同类项的变量部分相同，因此根据乘法分配律，可以合并，规则是把系数相加。比如，$3.52x^2y$ 可以和 $0.19x^2y$ 合并，得到 $3.71x^2y$。**合并同类项**也是代数式化简的一部分。

一项中所有变量的指数的和，叫做它的**次数**。比如 $3.71x^2y$ 的次数是 3，它可以叫 3 次项。不含变量部分的项叫**常数项**。常数项次数为 0。

整式是变量和数通过加减法和乘法得到的代数式。由于乘法优先计算，可以认为整式是一些项做加减法得到的。合并同类项后，如果只剩下一项，就说它是**单项式**。一般来说剩下不止一项，称为**多项式**。多项式的每一项都是单项式。多项式次数最高的项叫做最高次项。最高次项的次数就叫多项式的次数。如果多项式每一项次数都相等，就称它为**齐次多项式**。

习题 2.2.1.

1. 合并同类项：

- $3 + 9x^3 + 5x - 7x^3 - 3.32 - 1.05x$
- $ab^2 + (c-b)a^2 - ba(b-c) + c(b+a)c + (a-c)b(c+a) - (b+c)bc.$

2. 判断是否是齐次多项式：

- $\frac{(a+b)^3}{a-b}$
- $a^4 - bx^3$
- $a^4b^4\left(\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{a}\right)^4$

2.3 等式和方程

等式就是把两个式子或多个式子用等号连起来。**不等式**就是把两个式子或多个式子用不等号连起来。一般情况，默认是两个式子。

等式可以是真的，也可以是假的。前者也叫等式成立，后者也叫等式不成立。

按大小关系，**不等号**分为两类：大于类和小于类。按是否包含相等关系，不等号分为两类：严格类和可等于类。一共有四个不等号："$<$"（严格小于），"$\leqslant$"（小于等于），"$>$"（严格大于），"$\geqslant$"（大于等于）。

等式的基本性质：两边同时加、减、乘、除同一个量，成立的等式仍然成立。

为了解决生活中的问题，我们学过简单的方程。把未知的数，用变量表示。问题中的相等关系，就变成了含变量的等式，称为**方程**。解决这个问题，求出变量的值，称为**解方程**。变量的值称为**方程的解**。

如果问题中的条件是不等关系，我们就得到了含变量的**不等式**。解决这个问题，求出变量的值，称为**解不等式**。变量的值称为**不等式的解**。

第三章　集合和映射

3.1　集合

我们用集合表示一类事物。把不同性质的事物聚集在一起，合起来考虑，就是**集合**，简称**集**。构成集合的事物称为集合的**元素**。

1. 集合的元素互不相同。
2. 集合的元素没有顺序。
3. 集合的元素是确定的：一个事物要么属于该集合，要么不属于。

某个事物 a 属于集合 A，记作 $a \in A$。某个事物 a 不属于集合 A，记作 $a \notin A$。

例子 3.1.1.

可以在大括号中列出集合的元素，比如：$\{1, 2, 3\}$ 是一个集合，$\{1, 2, 2, 3\}$ 不是集合。

也可以在大括号中用条件描述集合。集合的元素是满足条件的元素，比如：$\{a|a\text{是偶数}\}$。竖线左边是元素的样子，右边是它满足的条件。

还可以直接用文字描述集合，比如：一年的十二个月份是一个集合。

除了以上方式，也可以用示意图、图表、列表等方式表示集合。

没有元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$。

自然数、整数、分数、有理数都是集合。自然数一般简记为 $\mathbb{N}$，分数一

般简记为 $\mathbb{F}$，整数一般简记为 $\mathbb{Z}$，有理数一般简记为 $\mathbb{Q}$。"a 是自然数"可以记为 $a \in \mathbb{N}$。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，就说 A 是 B 的**子集**，记为 $A \subseteq B$，B 是 A 的**母集**，记为 $B \supseteq A$。如果两者不相同，就说 A 是 B 的**真子集**，记为 $A \subset B$，B 是 A 的**真母集**，记为 $B \supset A$。

如果 A 是 B 的子集，那么 B 中不属于 A 的元素也构成一个集合，称为 A 在 B 中的**补集**，记为 $B \backslash A$。讨论问题的时候，我们可能会默认某个集合是问题涉及的所有事物的集合，其他集合都是它的子集。这样的集合一般称为**全集**。全集存在的时候，集合 A 在全集中的补集可以简称为 A 的补集，记为 $\bar{A}$ 或 A^c。

自然数集、整数集、分数集和有理数集有以下关系：

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{Q}$$

以上每个集合中的正数与负数，构成它的子集，一般用上标 $+$ 和 $-$ 标示。比如，$\mathbb{Z}^+$ 就表示正整数集合，$\mathbb{Q}^-$ 就表示负有理数集合。

考虑若干个集合。由属于其中至少一个集合的元素构成的集合，称为这些集合的**并集**；由属于所有集合的元素构成的集合，称为这些集合的**交集**。两个集合 A, B 的并集记为 $A \cup B$，交集记为 $A \cap B$。

几个集合交集为空集，就说它们**不相交**。几个集合中任取两个，都不相交，就说它们两两不相交。如果集合 A 的一些子集两两不相交，而且它们的并集是 A，就说这些集合是 A 的分划。

3.2 判断和集合

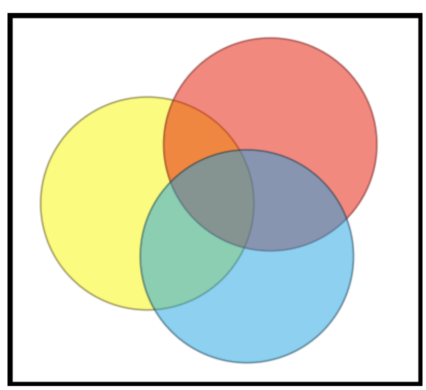
判断和集合有密切的关系。把一个判断涉及的个体看作全集，使判断为真的个体就是全集的一个子集，使判断为假的个体就是它的补集。比如“自然数 n 能被 3 整除”这个判断，涉及了自然数这个全集。使它为真的自然数构成自然数集的子集，使它为假的自然数的集合是前者的补集。

全判断和有判断，也包含了集合的概念。比如，“所有兔子的眼睛都是红的”这个判断中，“所有兔子”可能指世界上所有的兔子，也可能指说话的人面前的几只兔子，因此是含混不清的。只有当我们把兔子的集合确定下来，比如“贵州毕节市黔西县境内的兔子”，这个判断才是清楚无疑的。同样地，“至少有一个学生得了满分”这个判断，也要在明确了学生的集合，比如“黎阳小学 2020 级三班的全体学生”，才是有意义的。

数学中，也有各种判断。为了方便，我们引进两个符号：$\forall$ 和 $\exists$。$\forall$ 表示“任一”、“每个”，$\exists$ 表示“存在”、“至少有一个”。对某个集合 A 中元素的全判断，可以写成 $\forall x \in A, P(x)$；对某个集合 A 中元素的有判断，可以写成 $\exists x \in A, P(x)$。其中 $P(x)$ 表示一个包含变量 x 的判断。

比如，“所有 10 的倍数，个位数都是 0”可以写成：$\forall x \in \mathbb{N}$，$10x$ 的个位数是 0。“至少有一个一位数比 5 大”可以写成：$\exists x \in [0, \ldots, 9], x > 5$。

复合判断也可以用集合的方式表达。



为了更好理解，我们可以用**叠圈图**直观理解集合的关系。

如右图，每个圈表示一个集合，圈内的区域表示属于该集合的元素，圈外的区域表示不属于该集合的元素，也就是该集合（关于全集的）补集。两个圈重叠的部分就表示同时属于两者的元素的集合，也

就是两个集合的交集。而两个圈各自的部分加上重叠的部分，就是至少属于其中之一的元素的集合，也就是两个集合的并集。

叠圈图可以让我们直接看到集合之间的关系。

联言判断是多个判断的全判断。使各个判断为真的个体都构成一个集合 S_i，因此，通过这些集合的集合 I，可以给出使联言判断为真的个体对应的集合:

$$\{x \mid \forall i \in I, x \in S_i\}$$

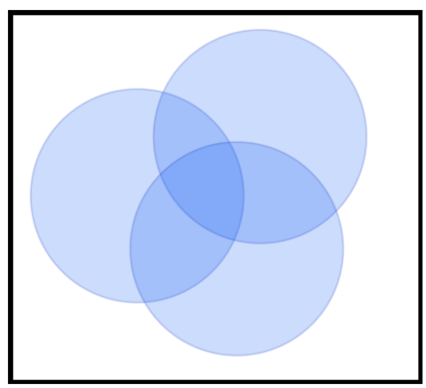
这个集合是各个集合 S_i 的交集，我们将它记为: $\bigcap_{i\in I} S_i$.

或言判断是多个判断的有判断。因此，使或言判断为真的个体对应的集合:

$$\{x \mid \exists i \in I, x \in S_i\}$$

这个集合是各个集合 S_i 的并集，我们将它记为: $\bigcup_{i\in I} S_i$.

右图中，联言判断对应着所有圈交叠的区域（颜色最深的部分），而或言判断对应着所有蓝色的区域的总和。



习题 3.2.1. 验证集合满足以下性质:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup A = A \cap A = A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- 如果 $A \subseteq B$，那么 $A \cap B = A$，$A \cup B = B$
- $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$

- $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

思考 3.2.1. 有个理发师，坚持只给那些不给自己理发的人理发。那么，他是否该给自己理发呢?

3.3 映射

我们用**映射**表示事物之间的对应关系。把一个事物对应到另一个事物，可以理解为事物的变换或对事物进行操作。因此映射也叫做**变换**或**操作**。**函数**是把数量对应到数量的映射。

我们把映射涉及的事物用两个集合记录：**出发集**和**到达集**。映射把出发集的一个元素对应到到达集的一个元素。用变量 x 指代出发集的元素，x 的取值在出发集里变化时，映射对应的元素也在到达集里变化，可以用变量 y 表示。一般称 x 为**自变量**，y 为**应变量**。

如果把映射记作 f，那么可以用 $y = f(x)$ 或 $f : x \mapsto y$ 表达“映射把出发集的元素和到达集的元素对应起来”这件事。

出发集中，某个映射涉及的元素集合称为映射的**定义域**; 到达集里，某个映射涉及的元素集合则称为映射的**值域**。定义域是出发集的子集，值域是到达集的子集。

需要强调的是，映射可以把多个元素对应到同一个元素，但不会把一个元素对应到多个元素。

每个一元式都可以用来定义映射。比如，设定定义域是自然数集 $\mathbb{N}$ 后，代数式 $4 - 0.3x + 9x^2 + \frac{(1-x+2.69x^4)}{0.5x-1.385}$ 就可以定义映射：

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto 4 - 0.3x + 9x^2 + \frac{(1 - x + 2.69x^4)}{0.5x - 1.385}.$$

这里我们把映射的定义域设为自然数集: $\mathbb{N}$。如果把定义域设成另一个集合，比如 $\{1, 2, 3\}$ 或全体偶数，就定义了另一个映射。

确定了定义域后，每个含有变量的判断也可以定义一个映射。比如，设定定义域是 $\{1,2,5,6\}$ 后，“$3n+1$ 能被 5 整除”就可以定义映射：

$$\forall n \in \{1,2,5,6\}, \quad n \mapsto 3n+1 \text{ 能被 } 5 \text{ 整除。}$$

思考 3.3.1. 全判断 $\forall x \in A,\ P(x)$ 和映射 $\forall x \in A,\ x \mapsto P(x)$ 之间存在什么关系?

第四章　有理数的运算

我们已经学过自然数和分数的运算。两个自然数可以做加法、减法和乘法，任两个分数可以做加法、减法、乘法和（不为零的）除法。把自然数、分数扩展到有理数后，两个有理数可以做加法、减法、乘法和不为零的除法。

有理数的运算和自然数、分数相比，多了与负数有关的运算。为了讨论方便，我们首先介绍一个表示负数的方法：每个负数都能表示成 $-a$ 的形式，其中 a 是它的相反数，是一个正数。

4.1　有理数的加减法

我们先来看与负数有关的加减法。按照负数的定义，任何负数 $-a = 0 - a$。所以，一个数加上一个负数，就等于减去它的相反数：

$$b + (-a) = b + (0 - a) = b - a$$

换句话说，一个数减去一个正数，就等于加上它的相反数。另一方面，一个数减去一个负数，也等于加上它的相反数：

$$b - (-a) = b - (0 - a) = b + a$$

两者可以用同一句话描述：**减去一个数，等于加上它的相反数。**

于是，有理数的减法总可以转化为有理数的加法。

再来看两个有理数的加法。如果两者都是正数，就是我们熟悉的分数加法。如果被加数是正数，加数是负数，那么和等于被加数减加数的相反数：

$$b + (-a) = b - a$$

式子中 a 和 b 都是正数。如果 $b > a$，那么和是正数。如果 $b < a$，和是负数，它的相反数是：

$$-(b - a) = 0 - (b - a) = a - b$$

因此和是 $a - b$ 的相反数。
如果被加数是负数，加数是正数，那么和等于加数减被加数的相反数：

$$(-a) + b = 0 - a + b = b - a$$

式子中 a 和 b 都是正数。类似地，如果 $b > a$，那么和是正数。如果 $b < a$，和是负数，相反数是 $a - b$。如果两者都是负数，和也是负数：

$$(-a) + (-b) = 0 - a + (0 - b) = 0 - a - b$$

这个和加上 $a + b$ 等于 0，因此，和是 $a + b$ 的相反数。

看得出，上面讨论中 a 和 b 以及它们的大小关系很重要。为了方便总结，我们引进**绝对值**的概念：

定义 4.1.1. 正数的**绝对值**是它自身，负数的绝对值是它的相反数。0 的绝对值是 0。

按照这个定义，可以把前面讨论的结果简化：

如果两个有理数同为正数（负数），那么它们的和也是正数（负数），绝对值是它们绝对值的和。如果两个有理数一正一负，那么它们的和的正负

与两者绝对值较大者的正负一致，和的绝对值是绝对值较大者减去绝对值较小者的差。

总结两个有理数的加减法：

> 1. 将减法转为加法。
> 2. 任何数与 0 相加都得到自身。
> 3. 计算两个数的绝对值。
> 4. 如果两个数同正负，取绝对值的和，加上对应的正负号。
> 5. 如果两个数一正一负，用较大的绝对值减去较小的绝对值，加上绝对值较大的数的正负号。

习题 4.1.1. 算一算：

$2.56-(-1.9)$，$(-4)+3.29$，$10.8+(-42.15)$.

$-59.76+40.3$，$-2.8-6.6$，$-5.09-(-2.9)$.

$-1.76-(-5.21)-1.874$, $3.202-(-1.94)-1.57$, $2+(-9.18)-(20.354)$.

$3-2-(-8)+(-2.2)$，$-8.1-((-1.6)-1.96+(-3.9+1.203))$.

4.2 有理数的乘除法

讨论有理数的乘除法，可以从最简单的情况开始：$(-1)\times 1$ 和 $(-1)\times(-1)$。按照定义，

$$(-1)\times 1=(0-1)\times 1=0\times 1-1\times 1=0-1=-1.$$

同理，$(-1)\times 0=0$，于是：

$$\begin{aligned}(-1)\times(-1)&=(-1)\times(0-1)\\&=(-1)\times 0-(-1)\times 1\\&=0-(-1)=1.\end{aligned}$$

类似的还有 $1\times(-1)=1$ 以及 $0\times(-1)=0$。所以，-1 的乘法性质可以归纳为“负零得零，负正得负，负负得正”。

同理，把乘数换成一般的数，也有:

$$(-1)\times a=0-a=-a,\quad (-1)\times(-a)=(-1)\times(0-a)=a.$$

也就是说，一个数乘以 -1，总得到它的相反数。任何负数都等于它的绝对值乘以 -1。

因此，两个有理数相乘，乘积的绝对值总是两者绝对值的乘积，只需把 -1 作为因子提出来，然后看 -1 的个数确定乘积的正负就可以了。如果两个数都是正数，那么不需要考虑 -1 的问题。如果两者一正一负，那么有一个 -1，乘积是负数，如果两个数都是负数，有两个 -1，“负负得正”，于是乘积是正数。

如果乘数或被乘数是 0，结果是 0。

除法是乘法的逆运算，我们只需要把涉及负数的除法转为乘法即可。

除数是正有理数 a 的时候，除以 a 等于乘以它的倒数：$\frac{1}{a}$。

除数是负有理数 $-a$ 的时候，我们要找到 $b\div(-a)$，也就是使得 $c\times(-a)=b$ 的数 c。根据前面对乘法的推导，$b\times(-1)\times\frac{1}{a}=c\times a\times\frac{1}{a}=c$，或者说

$$c=b\times\left((-1)\times\frac{1}{a}\right)$$

其中的关键是说明 $(-a)$ 存在倒数：$-\frac{1}{a}$。

$$(-a)\times\left(-\frac{1}{a}\right)=(-a)\times\left((-1)\times\frac{1}{a}\right)=a\times\frac{1}{a}=1.$$

所以无论除数是正有理数还是负有理数，**除以一个数，等于乘以它的倒数**。

于是，有理数的除法总可以转化为有理数的乘法。

综上所述，可以这样总结有理数的乘除法:

1. 将除法转为乘法。
2. 任何数与 0 相乘都得到 0。
3. 计算两个数的绝对值。
4. 如果两个数同正负，取绝对值的乘积。
5. 如果两个数一正一负，取绝对值乘积的相反数。

习题 4.2.1.

算一算:

$4.51 \times (-2.2)$，$(-1.2) \times (-3.9)$，$(-1.8) \times 0.8$.

$1.98 \div (-0.3)$，$-2.8 \div (-0.7)$，$5.2 \div (3 \div (-1.5))$, $(-3) \div (0.5 \times (-2.4))$.

思考:

1. 为什么“任何数与 0 相加都得到自身”?

2. 为什么“任何数与 0 相乘都得到 0”?

3. 为什么说“涉及负数的乘法也满足交换律和分配律”?

第五章　代数式的运算

代数式是含有变量的算式。代数式的运算和数式并没有区别。毕竟，代数式里的变量只是用来代替数的。对代数式做运算，使用和数式运算一样的规则：加法结合律、乘法结合律、加法交换律、乘法交换律，以及乘法对加法的分配律。

5.1　整式的运算

例子 5.1.1. 计算：

1. $(a+b)(a-b)$

解：

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b)\\ &= a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b\\ &= a^2+(-1+1)ab-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

2. $(a^2+ab+b^2)(a-b)$

解:

$$\begin{aligned}(a^2+ab+b^2)(a-b) &= a^2\cdot(a-b)+ab\cdot(a-b)+b^2\cdot(a-b)\\ &= a^2\cdot a-a^2\cdot b+ab\cdot a-ab\cdot b+b^2\cdot a-b^2\cdot b\\ &= a^3+(-1+1)a^2b+(-1+1)ab^2-b^3\\ &= a^3-b^3\end{aligned}$$

与整式有关的计算，一个常见的目标是把式子**展开**，也就是把几个整式的乘积转成一个整式：单项式或多项式。展开整式，可以按照以下步骤操作：

1. 用分配律把整式乘积转为整式中各项的乘积之和。
2. 合并同类项（用到结合律和交换律）。

比如，在第一个例子中，我们首先把 $a-b$ 看成一个整体，把 $a+b$ 看成两项相加。使用分配律，就把 $(a+b)(a-b)$ 转为 $a\cdot(a-b)$ 与 $b\cdot(a-b)$ 的和。接下来，我们把 $a-b$ 看成两项相减，再次使用分配律，就把 $(a+b)(a-b)$ 完全转成若干项的和：

$$a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b$$

接着，我们合并同类项。使用交换律，可以知道 $ab=ba$，所以这两项是同类项，可以合并。合并后，系数是 $-1+1=0$，所以这 ab 项被消去了。剩下的两项无法合并同类项了。于是我们最后得到：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

另一种常见的代数式计算叫做**变量代换**。我们知道，变量是用来代替数的。其实，变量也可以用来代替变量。用变量代替变量，可以变化代数式的形式，很多时候，可以帮助我们更好地理解事物间的关系。

举例来说，我们想展开 $(a-2b+1)(a-2b-1)$，除了像上面的例子一样直接使用分配律然后合并同类项，还有什么别的方法吗？我们可以观察到，这个式子是两个整式的乘积，第一个是 $a-2b$ 与 1 的和，第二个是 $a-2b$ 与 1 的差。于是，我们可以把 $a-2b$ 看成一个整体，把 1 看成一个整体。我们用变量 x 代替 $a-2b$，y 代替 1，那么原式就变成了 $(x+y)(x-y)$，于是等于 x^2-y^2。

我们再把 x 和 y 代替的变量和数代回去，就得到 $(a-2b)^2-1^2$。$1^2=1$，所以我们现在只需要展开 $(a-2b)^2$ 了。

数学中常用的整式等式：

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab\\
&(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab\\
&(a+b)(a-b) = a^2-b^2\\
&(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\
&a^3+b^3 = (a^2-ab+b^2)(a+b)\\
&a^3-b^3 = (a^2+ab+b^2)(a-b)\\
&(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\
&(a+b)(a+c) = a^2+ab+ac+bc\\
&(a+b)(b+c)(c+a)+abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)\\
&a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}
$$

习题 5.1.1. 验证以下等式：
1. $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$.
2. $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.
3. $3(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$
求以下代数式中 x^3 的系数：
1. $(x-2)^5$.

2. $(x^2-x+1)(x^3-x^2+2x-1)$.

5.2 分式的运算

例子 5.2.1. 通分:

1. $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

解:

$$\begin{aligned}\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}&=\frac{(b+c)bc+(a+c)ac+(a+b)ab}{abc}\\&=\frac{a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2}{abc}\end{aligned}$$

2. $\frac{a+2b}{a+b-1}-\frac{a+b+1}{a-b+1}$

解:

$$\begin{aligned}\frac{a+2b}{a+b-1}-\frac{a+b+1}{a-b+1}&=\frac{(a+2b)(a-b+1)-(a+b+1)(a+b-1)}{(a+b-1)(a-b+1)}\\&=\frac{a^2-ab+a+2ab-2b^2+2b-(a^2+2ab+b^2-1)}{(a+b-1)(a-b+1)}\\&=\frac{-ab-3b^2+a+2b+1}{(a+b-1)(a-b+1)}\end{aligned}$$

和分数一样，分式运算常见的目的有约分和通分。约分是把分子和分母中共有的式子消去，让分式更简洁。无法继续约分的分式叫做既约分式。通分是让几个分式的分母相同，以便相加。约分和通分的方法和分数相同。

习题 5.2.1. 验证以下等式:

1. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$.

2. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

求以下代数式中 x 的系数:

1. $(x^2-\frac{1}{x})^5$.

2. $(x-x^2-\frac{1}{x}+1)(x^2+x+3-\frac{2}{x})$.