q-Bessel 関数の積分表示と q-超幾何関数を用いる精度保証付き数値計算法

金泉大介 (早稲田大学 M1)[1], 丸野健一

日本応用数理学会年会, 武蔵野大学

2017 年 9 月 6-8 日

[1] `https://github.com/Daisuke-Kanaizumi/q-special-functions`

本発表の流れ

1. 研究背景
2. Bessel 関数の精度保証付き数値計算法
3. 研究成果
   - q-超幾何関数を基礎とする q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法
   - 積分を用いる q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法
4. 本研究のまとめ
5. 今後の課題

研究背景

- これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算が研究されてきているが (Yamamoto-Matsuda (2005), Oishi (2008), Kashiwagi (kv ライブラリ), Yamanaka-Okayama-Oishi (2017), $\cdots$), 可積分系をはじめとする数理物理で現れる q-特殊関数の精度保証付き数値計算に関する研究は我々の知る限りまだない.
- q-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため, 可積分系でよく現れる q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算を行なった.

精度保証付き数値計算

近似値の計算をすると同時に計算結果の (数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算法のこと. 真値を含む区間を結果として出力する.

q-Bessel 関数とは以下の 3 種類の関数のことである. (ただし $|q| < 1, \nu \in \mathbb{C}$)

$$J_\nu^{(1)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_2\phi_1\left(0,0;q^{\nu+1},q,-\frac{x^2}{4}\right), \ |x| < 2,$$

$$J_\nu^{(2)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0\phi_1\left(-;q^{\nu+1},q,-\frac{q^{\nu+1}x^2}{4}\right), \ x \in \mathbb{C},$$

$$J_\nu^{(3)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} x^\nu \ {}_1\phi_1(0;q^{\nu+1},q,qx^2), \ x \in \mathbb{C},$$

$$(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), \ (a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n,$$

$${}_r\phi_s(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_s;q,z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n z^n \left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r}}{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n(q;q)_n}.$$

上から順に Jackson の第 1 種, 第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数とよばれている. これらは q-Painlevé III 型方程式の特殊解を記述する (Kajiwara-Ohta-Satsuma (1995), Kajiwara-Masuda-Noumi-Ohta-Yamada (2004)).

研究の意義

- q-特殊関数は q-Painlevé 方程式など様々な方程式の解として現れる.
- q-特殊関数の性質を解明するには, q-特殊関数の精度保証付き数値計算法が重要になりうる.
- q-特殊関数の精度保証付き数値計算法の確立を目指して q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算を行ったが, その前に Bessel 関数の精度保証付き数値計算法について見ていく.

Bessel 関数の精度保証付き数値計算法

Bessel 関数の精度保証付き数値計算法としては以下が知られている.

- 数値積分を用いる方法 (Kashiwagi, kv ライブラリ)

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\pi \cos(x\cos t)\sin^{2\nu} t dt$$

- 漸近展開を用いる方法 (Oishi, 2008)
- 交代級数の性質を用いて打切り誤差を評価する方法 (Yamamoto-Matsuda, 2005)

打切り誤差: 無限回やる操作を有限で打ち切ったことによる誤差

先行研究[a] では交代級数の性質を用いる方法を q-Bessel 関数に応用したが, 今回は q-超幾何関数を基礎とする方法と, 積分を用いる方法を提案する.

[a] 金泉 大介, 丸野 健一, q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算, 日本応用数理学会第 13 回研究部会連合発表会, 2017 年 3 月 6 日

q-超幾何関数を基礎とする q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法

$$J_\nu^{(1)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_2\phi_1\left(0,0;q^{\nu+1},q,-\frac{x^2}{4}\right),\ |x|<2,$$

$$J_\nu^{(2)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0\phi_1\left(-;q^{\nu+1},q,-\frac{q^{\nu+1}x^2}{4}\right),\ x\in\mathbb{C},$$

$$J_\nu^{(3)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}x^\nu\ {}_1\phi_1(0;q^{\nu+1},q,qx^2),\ x\in\mathbb{C}.$$

定義から, q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ と q-超幾何関数 ${}_r\phi_s$ を精度保証付き数値計算できれば 3 つの q-Bessel 関数を精度保証付き数値計算できることがわかる. ここからは q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ と q-超幾何関数 ${}_r\phi_s$ を精度保証付き数値計算する方法を考える.

q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算法

$(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算では以下の定理を用いる.

定理 1 [a]

[a] Zhang, R. (2008). Plancherel-Rotach Asymptotics for Certain Basic Hypergeometric Series. Advances in Mathematics, 217(4), 1588-1613.

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. ある $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 < \frac{|z|q^n}{1-q} < \frac{1}{2}$$

であるとき,

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_n} = (zq^n;q)_\infty = 1 + r(z;n),$$
$$|r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}$$

が成り立つ.

次に, q-超幾何関数の精度保証付き数値計算法について考える.

q-超幾何関数 (ただし, $l = 1 + s - r$.)

$$
{}_r\phi_s(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; \beta_1, \cdots, \beta_s; q, z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{r} (\alpha_i; q)_n z^n \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l}{\prod_{j=1}^{s} (\beta_j; q)_n (q; q)_n}
$$

の精度保証付き数値計算 (打切り誤差の評価) には定理 2, 3 を使用する.

定理 2 ($r \le s$ のとき)

$T(n) := \frac{\prod_{i=1}^{r} (\alpha_i;q)_n z^n \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l}{\prod_{j=1}^{s} (\beta_j;q)_n (q;q)_n}$ とおくと, $r \le s$, $|\beta_j| \le q^{-N}$ のとき,

$$
\left|\sum_{n=N}^{\infty} T(n)\right| \le \sum_{n=N}^{\infty} |T(n)| \le C|T(N)|,
$$

$$
C = \begin{cases} \frac{1}{1-D} & (D < 1) \\ \infty & (D \ge 1) \end{cases}, D = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{|\beta_i - \alpha_i| q^N}{|1 - \beta_i q^N|}\right) \prod_{i=r+1}^{s+1} \frac{|z| q^{Nl}}{|1 - \beta_i q^N|}.
$$

ただし, $\beta_{s+1} := 1$.

定理 3 ($r = s + 1$ のとき)

$T(n)$ は定理 2 と同じで, $r = s + 1$, $|\beta_j| \le q^{-N}$ のとき,

$$|\textstyle\sum_{n=N}^{\infty} T(n)| \le \sum_{n=N}^{\infty} |T(n)| \le C|T(N)|,$$

$$C = \begin{cases} \frac{1}{1-D} & (D < 1) \\ \infty & (D \ge 1) \end{cases}, D = |z| \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{|\beta_i - \alpha_i| q^N}{|1 - \beta_i q^N|}\right) E,$$

$$E = 1 + \tfrac{q^N |q - \alpha_{s+1}|}{|1 - q^{N+1}|}.$$

定理 2, 3 の証明には次の補題を用いる.

補題 1

$n, N \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $n \ge N$, $0 < q < 1$, $c \in \mathbb{C}$ とする. $|c| \le q^{-N}$ のとき,

$$\frac{q^n}{|1 - cq^n|} \le \frac{q^N}{|1 - cq^N|}$$

が成り立つ.

補題 1 の証明

$n \geq N, |c| \leq q^{-N}$ に注意する.

$$
\begin{aligned}
|q^{-n} - c|^2 - |q^{-N} - c|^2 =& q^{-2n} - q^{-2N} - 2|c|q^{-n} + 2|c|q^{-N} \\
=& (q^{-n} - q^{-N})(q^{-n} + q^{-N} - 2|c|) \\
\geq& 2(q^{-n} - q^{-N})(q^{-N} - |c|) \ (\because n \geq N) \\
\geq& 0 \ (\because n \geq N, |c| \leq q^{-N}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\therefore |q^{-n} - c| \geq |q^{-N} - c|. \\
\therefore \frac{1}{|q^{-n}-c|} \leq \frac{1}{|q^{-N}-c|}. \\
\therefore \frac{q^n}{|1-cq^n|} \leq \frac{q^N}{|1-cq^N|}.
\end{gathered}
$$

補題が示された. □

定理 2, 3 の証明

$r \le s$ のとき (定理 2), $l = 1 + s - r \ge 1$ であることに注意して,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{T(n+1)}{T(n)}\right| &= \frac{|z|q^{nl}}{1-q^{n+1}}\left|\frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_{n+1}}{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_{n+1}}\right|\left|\frac{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n}{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n}\right| \\
&= \frac{|z|q^{nl}}{1-q^{n+1}}\left|\frac{(1-\alpha_1 q^n)\cdots(1-\alpha_r q^n)}{(1-\beta_1 q^n)\cdots(1-\beta_s q^n)}\right| \\
&= \prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{|\beta_i-\alpha_i|q^n}{|1-\beta_i q^n|}\right)\prod_{i=r+1}^{s+1}\frac{|z|q^{nl}}{|1-\beta_i q^n|} \quad (\because \beta_{s+1}:=1) \\
&\le \prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{|\beta_i-\alpha_i|q^N}{|1-\beta_i q^N|}\right)\prod_{i=r+1}^{s+1}\frac{|z|q^{Nl}}{|1-\beta_i q^N|} \quad (\because n \ge N) \\
&=: D
\end{aligned}$$

(補題 1 は最後の大小比較で用いた)

$\therefore \sum_{n=N}^{\infty}|T(n)| \le$(初項 $|T(N)|$, 公比 D の等比数列の和)$= \frac{|T(N)|}{1-D}$ ($D < 1$ の時に限る) □

定理 2, 3 の証明

$r = s+1$ のとき (定理 3), $l = 1+s-r = 0$ なので

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{T(n+1)}{T(n)}\right| &= \frac{|z|}{1-q^{n+1}} \left|\frac{\prod_{i=1}^{s+1}(\alpha_i;q)_{n+1}}{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_{n+1}}\right| \left|\frac{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_{n}}{\prod_{i=1}^{s+1}(\alpha_i;q)_{n}}\right| \\
&= \frac{|z|}{1-q^{n+1}} \left|\frac{(1-\alpha_1 q^n)\cdots(1-\alpha_{s+1}q^n)}{(1-\beta_1 q^n)\cdots(1-\beta_s q^n)}\right| \\
&= |z| \prod_{i=1}^{s} \left(1+\frac{|\beta_i-\alpha_i|q^n}{|1-\beta_i q^n|}\right)\left(1+\frac{|q-\alpha_{s+1}|q^n}{1-q^{n+1}}\right) \\
&\le |z| \prod_{i=1}^{s} \left(1+\frac{|\beta_i-\alpha_i|q^N}{|1-\beta_i q^N|}\right)\left(1+\frac{|q-\alpha_{s+1}|q^N}{1-q^{N+1}}\right) \quad \because n \ge N \\
&=: D
\end{aligned}
$$

(補題 1 は最後の大小比較で用いた)

$\therefore \sum_{n=N}^{\infty} |T(n)| \le$(初項 $|T(N)|$, 公比 D の等比数列の和)$= \frac{|T(N)|}{1-D}$ ($D < 1$ の時に限る) □

x の絶対値が大きい時の対策

定理 1, 2, 3 より q-超幾何関数と q-Pochhammer 記号の精度保証付き数値計算ができたことから, 3 つの q-Bessel 関数を精度保証付き数値計算できる. だが, このままだと x の絶対値が大きいときに結果の区間幅が `inf` となりうる.

実験環境

OS: Ubuntu14.04LTS, コンパイラー: gcc version 4.8.4
CPU: Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz × 8
メモリ: 15.6GB, kv ライブラリのバージョン: 0.4.41

実験結果 (Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数)

数値例: $q = 0.1$, $x = 40000$, $\nu = 4.5$
精度保証付き数値計算の結果 (区間): [-`inf`, `inf`]

級数の計算時に x^n の部分が `inf` となるからである. 以下, q-Bessel 関数に有用な変換公式を用いて級数から x^n を消す操作を考えることで提案手法の改良を行う.

Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数の別表現

定理 4 (Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数の別表現)[a]

[a] Koelink, H. T. (1993). Hansen-Lommel Orthogonality Relations for Jackson's q-Bessel Functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 175(2), 425-437.

公式:

$$(w;q)_\infty \ {}_0\phi_1(-;w;q,wz) = {}_1\phi_1(z;0;q,w)$$

より, Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数は次の別表現を持つ:

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(x/2)^\nu}{(q;q)_\infty} \ {}_1\phi_1(-x^2/4;0;q,q^{\nu+1}).$$

級数の中身に x^n を持たないような別表現である.

Hahn-Exton の q-Bessel 関数の別表現

定理 5 [a]

[a]Koornwinder, T. H., & Swarttouw, R. F. (1992). On q-Analogues of the Fourier and Hankel Transforms. Transactions of the American Mathematical Society, 333(1), 445-461.

$$(w;q)_\infty \ {}_1\phi_1(0;w;q,z) = (z;q)_\infty \ {}_1\phi_1(0;z;q,w)$$

系 (Hahn-Exton の q-Bessel 関数の別表現)[a]

[a]Daalhuis, A. O. (1994). Asymptotic Expansions for q-Gamma, q-Exponential, and q-Bessel functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 186(3), 896-913.

定理 5 より, Hahn-Exton の q-Bessel 関数は次の別表現を持つ:

$$J_\nu^{(3)}(x;q) = x^\nu \frac{(x^2q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \ {}_1\phi_1(0;x^2q;q,q^{\nu+1}).$$

級数の中身に x^n を持たないような別表現である.

数値実験 (改良前と改良後の比較)

Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数と Hahn-Exton の q-Bessel 関数について数値実験を行い, 改良前と改良後の比較を行った. 実験では C++による精度保証付き数値計算ライブラリである"kv ライブラリ"[2] を使用している.

実験環境

OS: Ubuntu14.04LTS, コンパイラー: gcc version 4.8.4
CPU: Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz × 8
メモリ: 15.6GB, kv ライブラリのバージョン: 0.4.41

実験結果 (Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数)

数値例: $q = 0.1$, $x = 40000$, $\nu = 4.5$
Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数 (区間): [3.631036782934911 5×10^{23}, 3.631036782935779 3×10^{23}]
Hahn-Exton の q-Bessel 関数 (区間):
[-1.138766335782153 1×10^{58},-1.138766335781842 9×10^{58}]
発散が防げたことから, 改良が成功していると言える.

[2] 柏木雅英, kv - C++による精度保証付き数値計算ライブラリ
http://verifiedby.me/kv/index.html

積分を用いる q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法

ここでは Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数が持つ以下の積分表示を扱う [3].

$$
\begin{aligned}
J_\nu^{(2)}(x;q) =& \frac{(q^{2\nu};q)_\infty}{2\pi(q^\nu;q)_\infty}(x/2)^\nu \\
&\times \int_0^\pi \frac{\left(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}, -\frac{ixq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{i\theta}, -\frac{ixq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{-i\theta};q\right)_\infty}{(e^{2i\theta}q^\nu, e^{-2i\theta}q^\nu;q)_\infty}\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

$$
(a_1, a_2, \cdots, a_n;q)_\infty := (a_1;q)_\infty(a_2;q)_\infty\cdots(a_n;q)_\infty,\ \mathrm{Re}\,\nu > 0.
$$

q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ については先ほどの定理 1 を使えば精度保証付き数値計算できるので, あとは無限積の積分をどうするかが問題になる. 被積分関数を積分しやすい形に変形していくことを考える.

[3] Rahman, M. (1987). An Integral Representation and Some Transformation Properties of q-Bessel Functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 125(1), 58-71.

定理 1, 6 を用いて, 被積分関数を変形していく.

定理 1 (再掲)[a]

[a]Zhang, R. (2008). Plancherel-Rotach Asymptotics for Certain Basic Hypergeometric Series. Advances in Mathematics, 217(4), 1588-1613.

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \frac{|z|q^n}{1-q} < \frac{1}{2}$ であるとき,

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_n} = 1 + r(z;n), |r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}$$

が成り立つ.

定理 6 [a]

[a]Zhang, R. (2008). Plancherel-Rotach Asymptotics for Certain Basic Hypergeometric Series. Advances in Mathematics, 217(4), 1588-1613.

定理 1 と同じ仮定で

$$\frac{(z;q)_n}{(z;q)_\infty} = 1 + r(z;n), |r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}$$

が成り立つ.

定理 1, 6 より,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \frac{\left(e^{2\mathrm{i}\theta}, e^{-2\mathrm{i}\theta}, -\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{\mathrm{i}\theta}, -\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{-\mathrm{i}\theta}; q\right)_\infty}{(e^{2\mathrm{i}\theta}q^\nu, e^{-2\mathrm{i}\theta}q^\nu; q)_\infty} \mathrm{d}\theta \\
= \ &\left[1 \pm \frac{2|q^{\nu+n}|}{1-q}\right]\left[1 \pm \frac{2q^n}{1-q}\right]\left[1 \pm \frac{|xq^{(\nu+1)/2}|q^n}{1-q}\right] \\
\times \ &\int_0^{\pi} \frac{\left(e^{2\mathrm{i}\theta}, e^{-2\mathrm{i}\theta}, -\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{\mathrm{i}\theta}, -\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{-\mathrm{i}\theta}; q\right)_n}{(e^{2\mathrm{i}\theta}q^\nu, e^{-2\mathrm{i}\theta}q^\nu; q)_n} \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

と変形できる. ただし $n \in \mathbb{N}$ は

$$\frac{|q^{\nu+n}|}{1-q} < \frac{1}{2}, \frac{q^n}{1-q} < \frac{1}{2}, \frac{|xq^{(\nu+1)/2}|q^n}{2(1-q)} < \frac{1}{2} \text{ (定理 1,6 の仮定)}$$

を満たすものであり,

$$[a \pm b] := [a - b, a + b]$$

とする.

積分を用いる q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法

変形後の積分には C++による精度保証付き数値計算ライブラリである”kv ライブラリ”に組み込まれている精度保証付き数値積分パッケージを使う.

”kv ライブラリ”による精度保証付き数値積分の流れ [a]

[a] 柏木雅英, ベキ級数演算について, http://verifiedby.me/kv/psa/psa.pdf

積分区間を分割する (実験では 10 個に分割)

$\Downarrow$

被積分関数 f に対して剰余項付き Taylor 展開を行う

$\Downarrow$

各区分で f の像を係数が区間である多項式として得る (実験では 10 次に指定)

$\Downarrow$

各区分で得られた多項式を不定積分して原始関数を得る

$\Downarrow$

各区分で区間端の値を代入して定積分の値を区間として得る

今回扱う積分は被積分関数が複素関数なので, 被積分関数を実部と虚部に分けてそれぞれに対して精度保証付き数値積分を行う.

数値実験 (提案手法と Mathematica の比較)

Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数を積分によって精度保証付き数値計算するプログラムを C++で作り, q-超幾何関数による方法と Mathematica11 と比較した. 実験では C++による精度保証付き数値計算ライブラリである"kv ライブラリ"を使用した. Mathematica11 では関数 `QPochhammer`, `QHypergeometricPFQ` を使用した.

実験環境

OS: Ubuntu14.04LTS, コンパイラー: gcc version 4.8.4
CPU: Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz $\times$ 8
メモリ: 15.6GB, kv ライブラリのバージョン: 0.4.41

実験結果 (Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数)

数値例: $\boldsymbol{q = 0.1}$, $\boldsymbol{x = 40000}$, $\boldsymbol{\nu = 4.5}$
精度保証付き数値計算の結果 (q-超幾何関数):[3.631036782934 9115$\times\mathbf{10^{23}}$, 3.6310367829357793$\times\mathbf{10^{23}}$]
精度保証付き数値計算の結果 (積分):[3.6310367814654059$\times\mathbf{10^{23}}$, , 3.6310367844050809$\times\mathbf{10^{23}}$]$+\mathbf{i}$[-147026288186378.6,147026322117959.88]
Mathematica の結果 (近似):3.6310367829353 35$\times\mathbf{10^{23}}$

積分による結果だと Mathematica の結果を包含しているが区間幅が広くなる.

数値実験 (提案手法と Mathematica の比較)

x の絶対値が小さい場合でも実験を行った.

実験結果 (Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数)

数値例: $q = 2^{-53}$, $x = 2^{-53}$, $\nu = 2$
精度保証付き数値計算の結果 (q-超幾何関数):
$[3.0814879110192256 \times 10^{-33}, 3.0814879110199065 \times 10^{-33}]$
精度保証付き数値計算の結果 (積分): $[3.081487911004466 5\times 10^{-33}$, $3.0814879110346906 \times 10^{-33}] + \mathrm{i}[-1.469128504022636 \times 10^{-44}$, $1.4691284493772653 \times 10^{-44}]$
Mathematica の結果 (近似): $3.081487911019578 \times 10^{-33}$

この時も精度保証付き数値計算の結果が Mathematica の結果を包含している.

数値実験 (提案手法と Mathematica の比較)

Mathematica11 を使って Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数を計算する際は QHypergeometricPFQ の代わりに Sum を使うこともできる.

```
q = 2^(-53); nu = 2 ; x = 2^(-53);
N[Sum[(- x*x*q^(nu+1)/4)^n*q^(n*(n-1))/(QPochhammer[q^(nu+1),q,n]
*QPochhammer[q,q,n]),{n,0,Infinity}]*(x/2)^nu*
QPochhammer[q^(nu+1),q,Infinity]/QPochhammer[q,q,Infinity]]
```

実験結果 (Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数)

数値例: $q = 2^{-53}$, $x = 2^{-53}$, $\nu = 2$

精度保証付き数値計算の結果 (q-超幾何関数):

$[3.0814879110192256 \times 10^{-33}, 3.0814879110199065 \times 10^{-33}]$

精度保証付き数値計算の結果 (積分):$[3.081487911004 4665 \times 10^{-33}, 3.0814879110346906 \times 10^{-33}] + \mathrm{i}[-1.469128504022636 \times 10^{-44}, 1.4691284493772653 \times 10^{-44}]$

Mathematica の結果 (近似, Sum を使用):

$3.081487911019578 \times 10^{-33} - 1.67385337691597 \times 10^{-561}\mathrm{i}$

実数値計算なので虚部は 0 のはずだが Mathematica だと虚部 $\neq 0$ になる.

本研究のまとめ

- q-特殊関数を記述するのに用いられる q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ と q-超幾何関数 ${}_r\phi_s$ ($r \leq s+1$ のとき) を精度保証付き数値計算できた.
- q-超幾何関数 ${}_r\phi_s$ を元に q-Bessel 関数を精度保証付き数値計算できた.
- 積分で Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数を精度保証付き数値計算できた.

今後の課題

今回提案した手法は $\nu \to -\infty$ のときは有効ではない.

- 積分表示: $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ の時のみ成り立つ.
- q-超幾何関数を用いる方法: $q^\nu \to \infty$ となってしまう.

Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数

数値例: $q = 2^{-53}$, $x = 2^{-53}$, $\nu = -6.5$
精度保証付き数値計算 (q-超幾何関数): $[1.7976931348623157 \times 10^{308}$, inf$]$

$\nu \to -\infty$ のときに有効な q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法を確立することが今後の課題となる.