q-Bessel 関数の積分表示と q-超幾何関数を用いる精度保証付き数値計算法

金泉 大介 [1], 丸野 健一 [2]

[1] 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

[2] 早稲田大学基幹理工学部応用数理学科

e-mail : daisuke15@asagi.waseda.jp

e-mail : kmaruno@waseda.jp

1 概要

可積分系などの数理物理の世界には，多様な特殊関数が住んでいるが, それらの中には性質が十分に理解されていないものも多くある．多様な特殊関数の性質を探索する手段の一つとして，様々な力学系の問題に適用され強力なツールとなりつつある精度保証付き数値計算が考えられる.

精度保証付き数値計算とは近似値の計算をすると同時に計算結果の (数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算のことである [1]. 計算する際は数を区間に置き換えて計算し, 真値を含む区間を結果として出力する. これにより真値が含まれる区間を知ることができるだけでなく, 区間の幅から計算に混入した誤差を把握できる.

本講演では，可積分系などの数理物理で現れる様々な特殊関数（つまり可積分な微分方程式または差分方程式の解）の精度保証付き数値計算法の確立を目指すため，q-特殊関数の精度保証付き数値計算についての研究結果を報告する．これまで Bessel 関数などの精度保証付き数値計算はなされているが [2, 3, 4], 可積分系などの数理物理で頻繁に現れる q-特殊関数の精度保証付き数値計算に関する研究はなされていない. q-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため, q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算を行った．本講演では Jackson の第 1 種, 第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法について報告する.

2 q-超幾何関数と q-Bessel 関数

以下の記号を q-Pochhammer 記号という [5]:

$$(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k),\ (a;q)_0 := 1,$$
$$(a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n,\ (a\in\mathbb{C}, |q|<1).$$

また, 次の関数を q-超幾何関数という [5]:

$$\begin{aligned}&{}_r\phi_s(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_s;q,z)\\ &:= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n z^n\left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l}{\displaystyle\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n(q;q)_n},\\ &r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ l=1+s-r.\end{aligned}$$

次の 3 つを q-Bessel 関数という [5, 6, 7]:

$$\begin{aligned}J_\nu^{(1)}(x;q) =&\frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\\ &\times{}_2\phi_1\left(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_\nu^{(2)}(x;q) =&\frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\\ &\times{}_0\phi_1\left(\text{-};q^{\nu+1};q,-\frac{q^{\nu+1}x^2}{4}\right),\end{aligned}$$

$$J_\nu^{(3)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}x^\nu\ {}_1\phi_1(0;q^{\nu+1};q,qx^2).$$

上から順に Jackson の第 1 種, 第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数と呼ばれる.

Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数は $\mathrm{Re}\,\nu>0$ のとき以下の積分表示を持つ [8]:

$$\begin{aligned}J_\nu^{(2)}(x;q) =&\frac{(q^{2\nu};q)_\infty}{2\pi(q^\nu;q)_\infty}(x/2)^\nu\\ &\times\int_0^\pi\frac{(e^{2\mathrm{i}\theta},e^{-2\mathrm{i}\theta},f_+,f_-;q)_\infty}{(e^{2\mathrm{i}\theta}q^\nu,e^{-2\mathrm{i}\theta}q^\nu;q)_\infty}\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

$$(a_1,\cdots,a_n;q)_\infty := (a_1;q)_\infty\cdots(a_n;q)_\infty,$$
$$f_\pm := -\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{\pm\mathrm{i}\theta}.$$

3 提案手法

交代級数の性質を用いた [9] とは違い, 今回の提案手法は q-Bessel 関数の積分表示 [8] と q-超幾何関数の精度保証付き数値計算を基礎にしている. q-超幾何関数の精度保証付き数値計算には次の定理を用いる.

定理 1.

$$T(n) := \frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n z^n \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l}{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n(q;q)_n}$$

とおくと, $r \leq s+1$, $|\beta_j| \leq q^{-N}$ のとき,

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} T(n)\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |T(n)| \leq C|T(N)|$$

$$C = \begin{cases} \frac{1}{1-D} & (D<1) \\ \infty & (D \geq 1) \end{cases}, \quad D = \prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{|\beta_i-\alpha_i|q^N}{|1-\beta_i q^N|}\right)E,$$

$$E = \begin{cases} \prod_{i=r+1}^{s+1}\frac{|z|q^{Nl}}{|1-\beta_i q^N|} & (\text{if } r \leq s) \\ 1+\frac{q^N|q-\alpha_{s+1}|}{|1-q^{N+1}|} & (\text{if } r = s+1) \end{cases}$$

$$\beta_{s+1} := 1$$

が成り立つ. 証明は講演にて発表する.

また, q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算には次の定理を用いる.

定理 2. [10] $z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \frac{|z|q^n}{1-q} < \frac{1}{2}$ であるとき,

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_n} = (zq^n;q)_\infty = 1+r(z;n), \quad |r(z;n)| \leq \frac{2|z|q^n}{1-q}$$

が成り立つ.

q-超幾何関数を基礎とする方法では定理 1, 2 を用いる. 積分を用いる方法では被積分関数を定理 2 によって変形したのち, kv ライブラリ [4] に組み込まれている精度保証付き数値積分パッケージを使う.

4 数値実験

数値実験は Workstation (Ubuntu14.04LTS, Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz × 8, 15.6GB メモリ) 上で行われ, 精度保証付き数値計算ライブラリ kv-0.4.41[4] を使用した. 交代級数の性質を用いた先行研究 [9] と Mathematica 11 での計算結果との比較を行った.

Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数において, $q = 0.1, x = 0.4, \nu = 4.5$ としたときの結果は次のとおりである..

精度保証付き数値計算の結果:(q-超幾何関数)
[0.000803967435962559, 0.000803967435962679]
精度保証付き数値計算の結果 (積分):
[0.00080396743595, 0.00080396743598] + i
×[−8.4180071049×10^{-15}, 8.4180083481×10^{-15}]
精度保証付き数値計算の結果 (交代級数)
[0.000803967435962566, 0.000803967435962671]
Mathematica(近似):0.000803967435962619 2

q-超幾何関数による結果が Mathematica の結果を包含している上に, 積分を用いた場合の結果より区間幅が小さくなっている.

$q = 0.1, x = 40000, \nu = 4.5$ としたときの結果は次のとおりである (ただし, x の絶対値が大きいため, 交代級数の性質を用いる方法は適用できない).

精度保証付き数値計算の結果:(q-超幾何関数)
[`-inf`, `inf`]
精度保証付き数値計算の結果 (積分):
[3.631036781465×10^{23}, 3.631036784406×10^{23}]
+i[−1.470262881864×10^{14}, 1.47026322118×10^{14}]
Mathematica(近似):3.631036782935335×10^{23}

q-超幾何関数を用いる方法では区間幅が `inf` となる. この難点の克服法, 詳細, 他の実験結果などは講演にて発表する.

. . . .

参考文献

[1] 大石進一: 精度保証付き数値計算 (コロナ社, 2000).

[2] 大石進一: 電子情報通信学会技術研究報告. NLP, 非線形問題, 108 (2008) 55-57.

[3] N. Yamamoto and N. Matsuda: Trans. Jap. Soc. Indust. Appl. Math., 15 (2005) 347-359.

[4] kv-C++による精度保証付き数値計算ライブラリ, http://verifiedby.me/kv/.

[5] G. Gasper and M. Rahman: Basic Hypergeometric Series (Cambridge University Press, 2004).

[6] W. Hahn: Z. Angew. Math. Mech., 33 (1953) 270-272.

[7] H. Exton: Jnanabha, 8 (1978) 49-56.

[8] M. Rahman: J. Math. Anal. Appl, 125 (1987) 58-71.

[9] 金泉 大介, 丸野 健一, q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算, 日本応用数理学会第 13 回研究部会連合発表会, 2017 年 3 月 6 日

[10] R. Zhang: Adv. Math., 217 (2008) 1588-1613.