

# $q$ -Bessel 関数と $q$ -Airy 関数の精度保証付き数値計算

金泉大介 (早稲田大学, M1, daisuke15@asagi.waseda.jp), 丸野健一 (早稲田大学, kmaruno@waseda.jp)

## 研究背景

- これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算が研究されてきているが, 可積分系で現れる  $q$ -特殊関数 (特殊関数の  $q$  類似) の精度保証付き数値計算に関する研究は我々の知る限り全くない.
- $q$ -特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため,  $q$ -Bessel 関数と  $q$ -Airy 関数の精度保証付き数値計算を行なった.
- $q$  類似は変数  $q$  を加える一般化で,  $q \rightarrow 1$  としたとき元に戻る.

### $q$ -Bessel 関数と $q$ -Airy 関数

以下の乗積で定義される記号を  $q$ -Pochhammer 記号という.  $q$ -特殊関数を表すのに用いられる記号である ( $a \in \mathbb{C}, |q| < 1$ ).

$$(a; q)_n := \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), (a; q)_0 := 1, (a; q)_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n, (a_1, \dots, a_n; q)_\infty := (a_1; q)_\infty \cdots (a_n; q)_\infty.$$

また, 次の関数を  $q$ -超幾何関数という (ただし,  $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, l = 1 + s - r$ ).

$${}_r\phi_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_s; q, z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^r (\alpha_i; q)_n z^n \left[ (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^l}{\prod_{j=1}^s (\beta_j; q)_n (q; q)_n}.$$

$q$ -Bessel 関数とは以下の3つの関数である ( $\nu \in \mathbb{C}, 0 < q < 1$  とする).

$$\begin{aligned} J_\nu^{(1)}(x; q) &= \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_2\phi_1\left(0, 0; q^{\nu+1}; q, -\frac{x^2}{4}\right) \quad (|x| < 2), \\ J_\nu^{(2)}(x; q) &= \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0\phi_1\left(-; q^{\nu+1}; q, -\frac{q^{\nu+1}x^2}{4}\right) \quad (x \in \mathbb{C}), \\ J_\nu^{(3)}(x; q) &= \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} x^\nu {}_1\phi_1(0; q^{\nu+1}; q, qx^2), \quad (x \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

上から順に Jackson の第1種, 第2種  $q$ -Bessel 関数, Hahn-Exton の  $q$ -Bessel 関数という.

$q$ -Airy 関数とは以下の2つの関数である.

$$\text{Ai}_q(x) := {}_1\phi_1(0; -q; q, -x), \quad A_q(x) := {}_0\phi_1(-; 0; q, -qx).$$

左が Hamamoto-Kajiwara-Witte (以下, HKW と略記する) の  $q$ -Airy 関数, 右が Ramanujan の  $q$ -Airy 関数とよばれる.

定義より,  $q$ -Pochhammer 記号と  $q$ -超幾何関数を精度保証付き数値計算すれば  $q$ -Bessel 関数と  $q$ -Airy 関数を精度保証付き数値計算できるということが分かる.

### 提案手法 ( $q$ -Pochhammer 記号と $q$ -超幾何関数)

$(z; q)_\infty$  の精度保証付き数値計算では以下の定理を用いる.

定理 1<sup>a</sup>  
 $z \in \mathbb{C}, 0 < q < 1$  とする. 正の整数  $n$  に対して  $0 < \frac{|z|q^n}{1-q} < \frac{1}{2}$  であるとき,

$$\frac{(z; q)_\infty}{(z; q)_n} = (zq^n; q)_\infty = 1 + r(z; n), \quad |r(z; n)| \leq \frac{2|z|q^n}{1-q} \text{ が成り立つ.}$$

<sup>a</sup>Zhang, R. (2008). Plancherel-Rotach asymptotics for certain basic hypergeometric series. Advances in Mathematics, 217(4), 1588-1613.

$q$ -超幾何関数の精度保証付き数値計算には次の補題を使う.

補題 1  
 $n, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \geq N, 0 < q < 1, c \in \mathbb{C}$  とする.  $|c| \leq q^{-N}$  のとき,

$$\frac{q^n}{|1 - cq^n|} \leq \frac{q^N}{|1 - cq^N|} \text{ が成り立つ.}$$

この補題を使うことで次の定理が示される.

定理 2 ( $r \leq s + 1$  であるときの  $q$ -超幾何関数の剰余項)  
 $T(n) := \frac{\prod_{i=1}^r (\alpha_i; q)_n z^n \left[ (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^l}{\prod_{j=1}^s (\beta_j; q)_n (q; q)_n}$  とおくと,  $|\beta_j| \leq q^{-N}$  のとき,

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} T(n) \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |T(n)| \leq C |T(N)|$$
$$C = \begin{cases} \frac{1}{1-D} & (\text{if } D < 1) \\ \infty & (\text{if } D \geq 1) \end{cases}, \quad D = \prod_{i=1}^r \left( 1 + \frac{|\beta_i - \alpha_i| q^N}{|1 - \beta_i q^N|} \right) E,$$
$$E = \begin{cases} \prod_{i=r+1}^{s+1} \frac{|z| q^{Nl}}{|1 - \beta_i q^N|} & (\text{if } r \leq s) \\ 1 + \frac{q^N |q - \alpha_{s+1}|}{|1 - q^{N+1}|} & (\text{if } r = s + 1) \end{cases}, \beta_{s+1} := 1$$

が成り立つ.

### 実験結果

Ramanujan の  $q$ -Airy 関数  $A_q(x)$  で実験を行った.

数値例:  $q = 0.1, z = 5000$

定理 5 を使った計算結果 (区間): [2110.9185672068706, 2110.9185672071881]

### 実験環境

OS: Ubuntu14.04, メモリ: 15.6GB, コンパイラー: gcc 4.8.4, kv: 0.4.41

CPU: Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz × 8

### 提案手法 ( $x$ の絶対値が大きいときの対策)

定理 1, 2 より  $q$ -超幾何関数と  $q$ -Pochhammer 記号の精度保証付き数値計算ができたことから,  $q$ -Bessel 関数と  $q$ -Airy 関数を精度保証付き数値計算できる. だが, このままだと  $x$  の絶対値が大きいときに結果が inf となりうる. 級数の計算時に  $x^n$  の部分が inf となるからである. 以下,  $x^n$  を消す操作を考える.

Jackson の第2種  $q$ -Bessel 関数には以下を適用する.

定理 3<sup>a</sup>

$$(w; q)_\infty {}_0\phi_1(-; w; q, wz) = {}_1\phi_1(z; 0; q, w)$$

<sup>a</sup>Koelink, H. T. (1993). Hansen-Lommel Orthogonality Relations for Jackson's  $q$ -Bessel Functions. Journal of mathematical analysis and applications, 175(2), 425-437.

Hahn-Exton の  $q$ -Bessel 関数と HKW の  $q$ -Airy 関数には以下を適用する.

定理 4<sup>a, b</sup>

$$(w; q)_\infty {}_1\phi_1(0; w; q, z) = (z; q)_\infty {}_1\phi_1(0; z; q, w)$$

<sup>a</sup>Koornwinder, T. H., & Swarttouw, R. F. (1992). On  $q$ -analogues of the Fourier and Hankel transforms. Transactions of the American Mathematical Society, 333(1), 445-461.  
<sup>b</sup>Daalhuis, A. O. (1994). Asymptotic expansions for  $q$ -gamma,  $q$ -exponential, and  $q$ -Bessel functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 186(3), 896-913.

Ramanujan の  $q$ -Airy 関数  $A_q(x)$  には以下を適用する.

定理 5<sup>a</sup>

$$A_q(x) = \{ (qx, q/x; q^2)_\infty {}_1\phi_1(0; q; q^2, q^2/x) - q(q^2x, 1/x; q^2)_\infty {}_1\phi_1(0; q^3; q^2, q^3/x)/(1 - q) \} / (q; q^2)_\infty$$

<sup>a</sup>Ismail, M. E., & Zhang, C. (2007). Zeros of entire functions and a problem of Ramanujan. Advances in Mathematics, 209(1), 363-380.

級数の中身にあった  $x^n$  がなくなったことから,  $x$  の絶対値が大きいときも  $q$ -Bessel 関数と  $q$ -Airy 関数を精度保証付き数値計算できる.

## 本研究のまとめと今後の課題

- $z \in \mathbb{C}$  で  $q$ -Pochhammer 記号  $(z; q)_\infty$  を精度保証付き数値計算できた.
- $r \leq s + 1$  のときに  $q$ -超幾何関数  ${}_r\phi_s$  を精度保証付き数値計算できた.
- $q$ -Bessel 関数,  $q$ -Airy 関数を精度保証付き数値計算できた.

他の方法でも  $q$ -Bessel 関数,  $q$ -Airy 関数を精度保証付き数値計算できないか?