二重指数関数型積分公式 (DE 公式) による Ramanujan の q-Airy 関数の精度保証付き数値計算 (途中経過)

金泉大介 (丸野研 M1)

丸野研中間発表

2017 年 10 月

本発表の流れ

1. 研究背景
2. Ramanujan の q-Airy 関数
3. 二重指数関数型積分公式 (DE 公式)
4. 提案手法 (途中経過)
5. 本研究のまとめと今後の課題

研究背景

- これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算が研究されてきているが (Yamamoto-Matsuda (2005), Kashiwagi (kv ライブラリ), Oishi (2008), Yamanaka-Okayama-Oishi (2017) 等), 可積分系で現れる q-特殊関数 (特殊関数の q 類似), の精度保証付き数値計算に関する研究は我々の知る限りない.
- q-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため, q-Airy 関数を精度保証付き数値計算した.

q 類似

- 変数 q を加える一般化
- $q \to 1$ としたとき元に戻る

Airy 関数とは Airy の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0$$

の解の一つである以下の関数のことである.

$$\mathrm{Ai}(x) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(t^3/3 + xt\right)\mathrm{d}t$$

精度保証付き数値計算

近似値の計算をすると同時に計算結果の (数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算のこと. 真値を含む区間を結果として出力する.

区間演算

精度保証付き数値計算では" 区間演算" という技術によって数値計算の際に生じる誤差を把握している.

区間演算 [a]

[a]大石進一. (2000). 精度保証付き数値計算, コロナ社.

区間演算を行う際は数を閉区間に置き換えて下記のルールに従い計算している.
($\bar{x}$ が上限, $\underline{x}$ が下限,$[x]=[\underline{x},\bar{x}]$ とする)

- 加算: $[x]+[y]=[\underline{x}+\underline{y},\bar{x}+\bar{y}]$
- 減算: $[x]-[y]=[\underline{x}-\bar{y},\bar{x}-\underline{y}]$
- 乗算: $[x]\times[y]=[\min(\underline{x}\underline{y},\underline{x}\bar{y},\underline{y}\bar{x},\bar{x}\bar{y}),\max(\underline{x}\underline{y},\underline{x}\bar{y},\underline{y}\bar{x},\bar{x}\bar{y})]$
- 除算: $[x]/[y]=[\min(\underline{x}/\underline{y},\underline{x}/\bar{y},\bar{x}/\underline{y},\bar{x}/\bar{y}),\max(\underline{x}/\underline{y},\underline{x}/\bar{y},\underline{y}/\bar{x},\bar{x}/\bar{y})]$
  (ただし $[y]$ は $\mathbf{0}$ を含まない区間とする)

精度保証付き数値計算で扱う誤差

精度保証付き数値計算では数値計算による誤差を扱う.

数値計算による誤差 [a]

[a] 大石進一. (2000). 精度保証付き数値計算, コロナ社.

丸め誤差: 実数を計算機で表現可能な数に置き換えたことによる誤差
打切り誤差: 無限回やる操作を有限で打ち切ったことによる誤差
離散化誤差: 数理モデルを多項式や漸化式に変換した際の誤差

ただし, モデル誤差 (数理モデルそのものの誤差) は扱わない.

q-特殊関数

q-特殊関数は変数 q を加えた特殊関数の拡張版であり,q-微分や q-積分を用いる q-解析学に適合するように定義されている (文字 q を使っただけの関数は除く).

q-微分

$$D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$$

q-積分

$$\int_0^1 f(t) \mathrm{d}_q t := (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n) q^n$$

q-特殊関数は Euler による自然数の分割に関する研究などで初めて現れ, 19 世紀から Jacobi らによって q-解析学の観点から研究されるようになった. これらの時代には q-特殊関数の数学的背景は不明であったが, 1980 年代に Drinfeld-Jimbo によって量子群の理論が導入され, q-特殊関数と q-解析学の本質が解明された [1] [2].

[1] 堀田良之, 渡辺敬一, 庄司俊明, 三町勝久 (2004). 群論の進化, 代数学百科, I, 朝倉書店.
[2] Souichiro Ikebe, Graphics Library of Special Functions.

http://math-functions-1.watson.jp/index.html

Ramanujan の q-Airy 関数

次の関数を Ramanujan の q-Airy 関数という [3]:

$$A_q(z) := {}_0\phi_1(-;0;q,-qz).$$

${}_r\phi_s$ は次のように定義される q-超幾何関数である $(r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, l = 1 + s - r)$:

$${}_r\phi_s(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_s;q,z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n z^n \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l}{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n (q;q)_n}.$$

以下の乗積で定義される記号を q-Pochhammer 記号という $(a \in \mathbb{C}, |q| < 1)$:

$$(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1 - aq^k), \quad (a;q)_0 := 1,\ (a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n.$$

[3] Mourad E. H. Ismail (2005). Asymptotics of q-Orthogonal Polynomials and a q-Airy Function, International Mathematics Research Notices, 2005, 1063-1088.

Ramanujan の q-Airy 関数

先行研究[4] では q-超幾何関数を基礎とする方法により Ramanujan の q-Airy 関数の精度保証付き数値計算を行った.

公式 (Ramanujan の q-Airy 関数の別表現)[a]

[a]Mourad E. H. Ismail, Changgui Zhang. (2007). Zeros of Entire Functions and a Problem of Ramanujan. Advances in Mathematics, 209(1), 363-380.

$$\begin{aligned} A_q(x) =& \{(qx, q/x; q^2)_\infty \, {}_1\phi_1(0; q; q^2, q^2/x) \\ & -q(q^2x, 1/x; q^2)_\infty \, {}_1\phi_1(0; q^3; q^2, q^3/x)/(1-q)\}/(q; q^2)_\infty. \end{aligned}$$

ここでは Ramanujan の q-Airy 関数の持つ次の無限区間積分表示[5] を使う方法を考える.

$$A_q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log q^{-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(z\sqrt{q}e^{\mathrm{i}x}; q\right)_\infty \exp\left(\frac{x^2}{\log q^2}\right) \mathrm{d}x.$$

[4]金泉大介, 丸野健一, q-Bessel 関数と q-Airy 関数の精度保証付き数値計算, 第 46 回数値解析シンポジウム, 2017 年 6 月 28 日-30 日.

[5]Mourad E. H Ismail, Ruiming Zhang (2016). Integral and Series Representations of q-Polynomials and Functions: Part I, arXiv:1604.08441 [math.CA].

二重指数関数型積分公式 (DE 公式)

二重指数関数型積分公式 (DE 公式) とは, 二重指数関数型の変数変換 (DE 変換) と台形公式を組み合わせた数値積分法である [6]. どのような DE 変換を施すかは積分区間と被積分関数 f の持つ優関数, つまり

$$|f(z)| \leq |F(z)| \ (\forall z \in \mathcal{D}_d := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < d < \pi/2\})$$

なる関数 $F(z)$ の種類に応じて使い分けがされている.

[6] Hidetoshi Takahashi, Masatake Mori (1974). Double Exponential Formulas for Numerical Integration. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 9(3), 721-741.

$$\psi_{DE}(t) := \exp(t - \exp(-t))$$

という DE 変換に着目する．この変換については次の定理が知られている．

定理 1[a]

[a]Kenichiro Tanaka, Masaaki Sugihara, Kazuo Murota, Masatake Mori (2007). Function Classes for Double Exponential Integration Formulas. Mathematical Engineering Technical Reports, METR2007-07, University of Tokyo.

$$\mathcal{D}_{DE}(d) := \{z = \psi_{DE}(w) : w \in \mathcal{D}_d\},\ h := \frac{\log(2\pi d N/\beta)}{N}$$

とする．f が $\mathcal{D}_{DE}(d)$ $(d \in (0, \frac{\pi}{2}))$ で正則で，定数 $\beta \in (0, 1], C_1$ に対して

$$|f(z)| \leq C_1 \left| \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\beta-1} \exp(-\beta z) \right| \quad (\forall z \in \mathcal{D}_{DE}(d))$$

が成り立つなら，次を満たす定数 C が存在する:

$$\left| \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x - h \sum_{k=-N}^{N} f(\psi_{DE}(kh))\psi'_{DE}(kh) \right| \leq C \exp(-2\pi d/h).$$

提案手法 (途中経過)

今回扱う Ramanujan の q-Airy 関数の被積分関数 f は
$|f(z)| \leq C_1 \exp(-\beta z^2)$ $\left(\beta = -\frac{1}{2\log q}\right)$ を満たすので次を示せば良い
($\mathcal{D}_{DE}(d), h$ は定理 1 と同じ).

定理 2

f が $\mathcal{D}_{DE}(d)$ $(d \in (0, \frac{\pi}{2}))$ で正則で, 定数 $\tilde{\beta}, \beta \in (0,1], C_1$ に対して

$$|f(z)| \leq C_1 \left| \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\tilde{\beta}-1} \exp(-\beta z^2) \right| \quad (\forall z \in \mathcal{D}_{DE}(d))$$

が成り立つなら, 次を満たす定数 C が存在する:

$$\left| \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x - h \sum_{k=-N}^{N} f(\psi_{DE}(kh))\psi'_{DE}(kh) \right| \leq C \exp(-2\pi d/h).$$

定理 1 の証明を手本に, 定理 2 を示す.

定理 2 の証明には定理 3, 4 を使う (ただし $h := \frac{\log(2\pi d\gamma N/\beta)}{\gamma N}$).

定理 3[a]

[a]Kenichiro Tanaka, Masaaki Sugihara, Kazuo Murota, Masatake Mori (2007). Function Classes for Double Exponential Integration Formulas. Mathematical Engineering Technical Reports, METR2007-07, University of Tokyo.

f を $\mathcal{D}_d$ $(d > 0)$ で正則な関数とし, 正定数 A, B, γ に対して,

$$\mathcal{N}(f, d) := \lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x + \mathrm{i}(d-\epsilon))| + |f(x - \mathrm{i}(d-\epsilon))|)\mathrm{d}x < \infty, \quad (1)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \int_{-(d-\epsilon)}^{d-\epsilon} |f(x + \mathrm{i}y)|\mathrm{d}y = 0 \quad (2)$$

$$|f(x)| \leq A \exp(\gamma|x|) \exp(-B \exp(\gamma|x|)) \ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

が成り立つとき, 次を満たす定数 C が存在する.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - h \sum_{k=-N}^{N} f(kh) \right| \leq C \exp(-2\pi d/h).$$

定理 4[a]

[a]Kenichiro Tanaka, Masaaki Sugihara, Kazuo Murota, Masatake Mori (2007). Function Classes for Double Exponential Integration Formulas. Mathematical Engineering Technical Reports, METR2007-07, University of Tokyo.

正定数 A', B', γ' に対して,

$$|f(z)| \leq |g(z)| \ (\forall z \in \mathcal{D}_d), \tag{4}$$

$$|g(x+\mathrm{i}y)| \leq A' \exp(\gamma'|x|) \exp(-B' \exp(\gamma'|x|)) \ (\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [-d, d]), \tag{5}$$

$$|g(x)| \leq A \exp(\gamma|x|) \exp(-B \exp(\gamma|x|)) (\forall x \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

なる関数 $g \in \mathrm{Cl}(\mathcal{D}_d)$ が存在するとき, $\mathcal{D}_d$ $(d > 0)$ で正則な関数 f と, 正定数 A, B, γ に対して, (1), (2), (3) が成り立つ.

$$\mathcal{N}(f, d) := \lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x+\mathrm{i}(d-\epsilon))| + |f(x-\mathrm{i}(d-\epsilon))|)\mathrm{d}x < \infty, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \int_{-(d-\epsilon)}^{d-\epsilon} |f(x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}y = 0, \tag{2}$$

$$|f(x)| \leq A \exp(\gamma|x|) \exp(-B \exp(\gamma|x|)) \ (\forall x \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

定理 2 の証明 (概略)

$f(\psi_{DE}(z))\psi'_{DE}(z)$ は $\mathcal{D}_d$ で正則なので定理 2 の仮定より次が成り立つ:

$$\begin{aligned}|f(\psi_{DE}(z)\psi'_{DE}(z))| \leq & C_1 \left| \left\{ \frac{\exp z}{\exp z + \exp(\exp(-z))} \right\}^{\tilde{\beta}} \right| \\ & \times |\exp(-\beta \exp(2z) \exp(-2\exp(-z)))| \\ & \times |(\exp(-\exp(-z)) + \exp(-z))(1 + \exp z)| =: g(z)\end{aligned}$$

補題 1

$d \in (0, \pi/2)$, $B > 0$ に対し, $g(z)$ は $B = \beta, \gamma = 1$ で定理 4 を満たす.

補題 1 より, $f(\psi_{DE}(z))\psi'_{DE}(z)$ は $B = \beta$, $\gamma = 1$ のとき定理 3 の仮定を満たすので定理 2 が示される.

補題 1 の証明 (概略)

$z = x + \mathrm{i}y \ (x \in \mathbb{R}, y \in [-d, d])$ として,

$$\begin{aligned} g_1(z) &:= \frac{\exp z}{\exp z + \exp(\exp(-z))} \\ g_2(z) &:= \exp(-\beta \exp(2z) \exp(-2\exp(-z))) \\ g_3(z) &:= (\exp(-\exp(-z)) + \exp(-z))(1 + \exp z) \end{aligned}$$

とおく ($g = g_1^{\tilde{\beta}} g_2 g_3$ が成り立つ). 正定数 $\hat{x}$ が

$$\alpha := \hat{x} - e^{-\hat{x}} > 0, \ \ \delta := \pi/2 - d - 2e^{-\hat{x}} \sin d > 0$$

を満たすとして, (i)$x < 0$ の場合, (ii)$0 \leq x \leq \hat{x}$ の場合, (iii)$x > \hat{x}$ の場合に分けて示す. また, 以下が成立することも注意する:

$$\begin{aligned} |g_1| &\leq \frac{1}{|1 - \exp(e^{-x} \cos y - x)|}, \\ |g_2| &= \exp\left(-\beta \exp\left(2x - 2e^{-x} \cos y\right) \cos\left(y + 2e^{-x} \sin y\right)\right), \\ |g_3| &\leq \left(\exp\left(-e^{-x} \cos y\right) + e^{-x}\right)(1 + \exp x). \end{aligned}$$

補題 1 の証明 (概略)

(i) の場合 ($x < 0$): いま,

$$|g_1| \leq \frac{1}{\exp(e^{-x}\cos d) - 1}, \ |g_3| \leq 4e^{-x}$$

が成立する. また,

$$\exp\left(2x - 2e^{-x}\cos y\right)\cos\left(y + 2e^{-x}\sin y\right) \geq -1$$

より, $|g_2| \leq \exp\beta$ となる. また, $x < 0$ のとき,

$$1 - \exp\left(-e^{-x}\cos d\right) \geq 1/e$$

が成り立つので,

$$|g| = |g_1|^{\tilde{\beta}}|g_2||g_3| \leq 4\exp\left(\beta + \tilde{\beta} - x - \cos(d)e^{-x}\right)$$

となり, (5) が示される. $y = 0$ とすれば (6) も示される.

$$|g(x+\mathrm{i}y)| \leq A' \exp(\gamma'|x|)\exp(-B'\exp(\gamma'|x|)) \ (\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [-d, d]), \tag{5}$$

$$|g(x)| \leq A\exp(\gamma|x|)\exp(-B\exp(\gamma|x|))(\forall x \in \mathbb{R}). \tag{6}$$

補題 1 の証明 (概略)

(ii) の場合 ($\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \hat{\boldsymbol{x}}$): このときは最大値最小値の定理より,

$$|\boldsymbol{g_2}| \leq \boldsymbol{C_2} (= \boldsymbol{A} \exp(\hat{\boldsymbol{x}}) \exp(-\boldsymbol{\beta}))$$

なる定数 $\boldsymbol{C_2}$ が存在する. $\boldsymbol{C_2}$ は次のようになる:

$$\boldsymbol{C_2} = \frac{(\exp\left(-e^{-\hat{x}}\right) + 1)(1 + e^{\hat{x}}) \exp(-\beta/e) e^{\hat{x}}}{e^{\hat{x}} - \exp(e^{-\hat{x}})}.$$

補題 1 の証明 (概略)

(iii) の場合 ($x > \hat{x}$): いま,

$$|g_1| \leq \frac{1}{1 - \exp(-\alpha)}, \ |g_3| \leq 4e^{x}$$

が成立する. また,

$$\exp\left(2x - 2e^{-x}\cos y\right) \geq \exp(x-1), \ \cos\left(y + 2e^{-x}\sin y\right) \geq \cos(\pi/2 - \delta)$$

より, $|g_2| \leq \exp\left(-\frac{\beta\cos(\pi/2-\delta)}{e}\exp x\right)$ となり, (5) が示される. $y = 0$ として $x \to \infty$ としたときの漸近的な挙動を考えれば (6) も示される ($\because g_2 \sim \exp(-\beta\exp x)$)[7].

$$|g(x+\mathrm{i}y)| \leq A'\exp(\gamma'|x|)\exp(-B'\exp(\gamma'|x|)) \ (\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [-d, d]), \tag{5}$$

$$|g(x)| \leq A\exp(\gamma|x|)\exp(-B\exp(\gamma|x|))(\forall x \in \mathbb{R}). \tag{6}$$

[7] この部分については田中健一郎先生（東京大学）に教えていただきました.

こうして定理 2 が示された.

定理 2 (再掲)

$$\mathcal{D}_{DE}(d) := \{z = \psi_{DE}(w) : w \in \mathcal{D}_d\}, \ h := \frac{\log(2\pi d N/\beta)}{N}$$

とする. f が $\mathcal{D}_{DE}(d)$ ($d \in (0, \frac{\pi}{2})$) で正則で, 定数 $\tilde{\beta}, \beta \in (0, 1], C_1$ に対して

$$|f(z)| \leq C_1 \left| \left(\frac{z}{1+z}\right)^{\tilde{\beta}-1} \exp(-\beta z^2) \right| \quad (\forall z \in \mathcal{D}_{DE}(d))$$

が成り立つなら, 次を満たす定数 C が存在する:

$$\left| \int_0^\infty f(x) \mathrm{d}x - h \sum_{k=-N}^{N} f(\psi_{DE}(kh)) \psi'_{DE}(kh) \right| \leq C \exp(-2\pi d/h).$$

次に, 定理 2, 3 における定数 C, 定理 2 における定数 C_1 の評価を行う. 定数 C を評価するには定理 3 の証明過程をたどれば良い.

定数 C の評価

ここで,

$$
\begin{aligned}
(\text{定理 3 の左辺}) &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - h \sum_{k=-N}^{N} f(kh) \right| \\
&\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \right| + h \left| \sum_{|k| \geq N} f(kh) \right| \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となるので, (7) の第 1 項と (7) の第 2 項をそれぞれ評価する.

定数 C の評価

定理 3 の導出には定理 5 が使われた.

定理 5[a]

[a]Frank Stenger (1993). Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. Springer, New York.

$\mathcal{D}_d$ で正則な関数 f が

$$\mathcal{N}(f,d) := \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}(|f(x+\mathrm{i}(d-\epsilon))|+|f(x-\mathrm{i}(d-\epsilon))|)\mathrm{d}x < \infty \quad (1)$$

を満たすなら, 以下が成り立つ:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x - h\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)\right| \le \frac{\exp(-2\pi d/h)}{1-\exp(-2\pi d/h)}\mathcal{N}(f,d). \quad (8)$$

(8) の右辺を評価する.

定数 C の評価

$\frac{\exp(-2\pi d/h)}{1-\exp(-2\pi d/h)}$ の評価には補題 2 を使う.

補題 2[a]

[a] Tomoaki Okayama, Takayasu Matsuo, Masaaki Sugihara (2013). Error Estimates with Explicit Constants for Sinc Approximation, Sinc Quadrature and Sinc Indefinite Integration. Numerische Mathematik 124(2), 361-394.

関数 $\exp(x/\log x)$ が $x = e$ で最小値を持つということを利用すれば,

$$\frac{\exp(-2\pi d/h)}{1-\exp(-2\pi d/h)} \leq C_3 \exp(-2\pi d/h)$$

なる定数 C_3 を決められる.

今の場合, C_3 は次のようになる:

$$C_3 = \frac{1}{1-\exp(-\beta e)}.$$

定数 C の評価

$\mathcal{N}(f,d)$ の評価には補題 3 を使う.

補題 3[a]

[a]Tomoaki Okayama, Takayasu Matsuo, Masaaki Sugihara (2013). Error Estimates with Explicit Constants for Sinc Approximation, Sinc Quadrature and Sinc Indefinite Integration. Numerische Mathematik 124(2), 361-394.

$\mathcal{D}_d$ で正則な関数 f が

$$\lim_{x\to\pm\infty}\int_{-(d-\epsilon)}^{d-\epsilon}|f(x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}y=0 \tag{2}$$

を満たすならば, 以下が成り立つ:

$$\mathcal{N}(f,d)=\lim_{y\to d}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}x+\lim_{y\to -d}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}x.$$

補題 3 と (3) より, $\mathcal{N}(f,d)\leq\frac{4A}{\beta}\exp(-\beta)$ である. (7) の第 1 項が評価された. 次に (7) の第 2 項を評価する.

補題 4[a]

[a]Kenichiro Tanaka, Masaaki Sugihara, Kazuo Murota, Masatake Mori (2007). Function Classes for Double Exponential Integration Formulas. Mathematical Engineering Technical Reports, METR2007-07, University of Tokyo.

定理 3 の仮定のもとで, 以下が成り立つ:

$$h \left| \sum_{|k| \geq N} f(kh) \right| \leq \frac{2A}{\beta\gamma} \exp(-\beta \exp(\gamma N h)).$$

(7) と定理 5, 補題 2, 3, 4 より, N が $2\pi d\gamma N/\beta > e$ を満たすとすれば,

$$C = \frac{2A}{\beta\gamma}(1 + 2\exp(-\beta)/(1 - \exp(-\beta e)))$$

である. A については補題 1 での議論をたどることで次のように評価できる:

$$A \leq \max\left(\frac{C_2 \exp \beta}{\exp \hat{x}}, 4\exp(\beta + \tilde{\beta}), \frac{4}{1 - \exp(-\alpha)} \right) \times C_1.$$

あとは定数 C_1 さえ評価できれば定数 C が評価できて Ramanujan の q-Airy 関数を精度保証付き数値計算できる.

現時点での課題: 定数 C_1 の評価

定理 2 の定数 C_1 を評価するには Ramanujan の q-Airy 関数の積分表示:

$$A_q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \log q^{-1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(z\sqrt{q}e^{\mathrm{i}x}; q\right)_\infty \exp\left(\frac{x^2}{\log q^2}\right) \mathrm{d}x.$$

に現れる $\left(z\sqrt{q}e^{\mathrm{i}\zeta}; q\right)_\infty$ $(\forall \zeta \in \mathcal{D}_{DE}(d))$ を評価しなければならない. この評価には定理 6 を使う.

定理 6 [a]

[a] Ruiming Zhang, Plancherel-Rotach asymptotics for certain basic hypergeometric series, Advances in Mathematics 217 (2008) 1588-1613

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. 正の整数 n に対して

$$0 < \tfrac{|z|q^n}{1-q} < \tfrac{1}{2}$$

であるとき, 次が成り立つ:

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_n} = (zq^n;q)_\infty = 1 + r(z;n), |r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}.$$

現時点での課題: 定数 C_1 の評価

定理 6 より,

$$\begin{aligned}
\left|\left(z\sqrt{q}e^{\mathrm{i}\zeta};q\right)_\infty\right| &\leq \left|\left(z\sqrt{q}e^{\mathrm{i}\zeta};q\right)_n\right| \left(1+\frac{2|z|q^{n+1/2}e^{-y}}{1-q}\right) \\
&\leq (1+|z|\sqrt{q}e^{-y})\cdots(1+|z|q^{n-1/2}e^{-y}) \left(1+\frac{2|z|q^{n+1/2}e^{-y}}{1-q}\right) \\
&= \left(-|z|\sqrt{q}e^{-y};q\right)_n \left(1+\frac{2|z|q^{n+1/2}e^{-y}}{1-q}\right)
\end{aligned}$$

となる. しかし $\zeta \in \mathcal{D}_{DE}(d)$ より $|\operatorname{Im}\zeta| = |y| < \infty$ となるため e^{-y} を評価することができない.

本研究のまとめと今後の課題

本研究のまとめ

- 被積分関数が $|f(z)| \leq C_1 \exp\left(-\beta z^2\right)$ $(0 < \beta \leq 1)$ である時の DE 公式の誤差半径を (途中まで) 導出した.

今後の課題

- DE 公式による方法の完成.
- 他の q-特殊関数にも DE 公式を使えないか?