Newton 法 350 年史

金泉大介

October 16, 2018

本資料の流れ

はじめに

- Newton 法は方程式を解くための手法の一つであり, 2019 年で生誕 350 年を迎える.
- 入試問題の題材とされることも少なからずある [1].
- 本資料では 350 年の歴史について知る限りまとめてみた.

[1] 京極一樹の数学塾　http://www.k-kyogoku.com/cn137/pg2540.html

創成期

多項式に限定すれば微積分学誕生以前の Newton 法を考えることができる [2].

Briggs, 1633

$$x^3 + A = 3x$$

の解を求めるために逐次反復法を提案する．しかし局所収束性には気づいていなかったようである．

和算

長田直樹．(2011)．関孝和『解隠題之法』について (数学史の研究).

関孝和が 1685 年に執筆した解隠題之法に逐次反復法が現れる．これは関孝和・建部賢明・建部賢弘によって執筆され、1711 年頃に完成した大成算経でも記述されている．

[2] 長田直樹 (2010)．英国と日本における Newton 法 (数学史の研究).

創成期

Newton, 1669

$$\boldsymbol{x^3 - 2x - 5 = 0}$$

の解を求めるために逐次反復法を提案する.

Newton, 1675

$$\boldsymbol{x^n - A = 0}$$

の解を求めるための逐次反復法 (Newton 法) を手紙に記す.

創成期

Raphson, 1690

多項式 $f(x)$ に対して, 根の近似値 x_0 を始点として

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

と近似し, この関数の零点 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ を次の近似値として, 帰納的に

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

とする.

Newton, 1713

プリンキピア第 2 版において,

$$x - e\sin(x) = 0$$

の解を求めるために Newton 法を適用する.

Simpson, 1740

多項式以外の微分可能な関数に対しても Newton 法が適用できることを示した.

局所収束定理

局所収束定理

解の存在を仮定した上で初期値を解の近くに置くことを要求して収束の速さを議論する定理.

Fourier (1818, 1831)

局所収束定理を証明した.

Cajori, F., Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation, Amer. Math. Monthly 18, 29-33, 1911.

半局所収束定理

半局所収束定理

解の存在を仮定せず, 初期値に何らかの条件を課した上で解の存在と反復の収束を示す定理.

Cauchy, 1829

1 次元方程式に対する半局所収束定理を証明した.

Fine(1916), Ostrowski(1936)

n 次元方程式に対する半局所収束定理を証明した.

Kantorovich(1948, 1951)

Banach 空間上で半局所収束定理を証明した.
$\longrightarrow$Newton-Kantorovich の定理と呼ばれる.

その後, Newton-Kantorovich の定理について様々な変種が開発された (Ortega-Rheinboldt, 1970).

半局所収束定理の弱点とその克服

Newton-Kantorovich の定理は Banach 空間上でも使えるのが強みだが, 適用するための条件が多いのが弱点である.

$\Downarrow$ もっと少ない条件で使える半局所収束定理が欲しい!

Krawczyk 法 [3], 区間 Newton 法 [4] (1960 年代以降の研究)
これらの手法は Euclid 空間でのみ使うことができる.

---

[3] Krawczyk, R., Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken, Computing 4, 187-201, 1969.

[4] Moore, R., Interval Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

簡易 Newton 法と Krawczyk 法

広義 Newton 法

g を任意の関数として,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

という反復で $f(x) = 0$ の解を求める方法のこと.

簡易 Newton 法 (広義 Newton 法の特別な場合)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

という反復で $f(x) = 0$ の解を求める方法のこと.
$\longrightarrow$ 収束は遅くなるが, 縮小写像になっている.

広義 Newton 法に対する半局所収束定理は占部によって示された[5].

[5] Urabe, M. (1965). Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 20(2), 120-152.

簡易 Newton 法と Krawczyk 法

平均値形式

大石進一. (2000). 精度保証付き数値計算, コロナ社.

f を微分可能な関数, I を区間, $c := \mathrm{mid}(I)$ とする. $f(I)$ を直接評価するより,

$$f(c) + f'(I)(I - c)$$

を計算したほうが良い場合がある.

簡易 Newton 法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

の右辺に平均値形式を適用したのが Krawczyk 法である.

簡易 Newton 法の応用

構成的逆関数定理

大石進一. (1997). 非線形解析入門, コロナ社.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - y}{f'(x_0)}$$

という反復で $f(x) = y$ の解に収束させることができて, ある条件のもとで解が一意性を持つ.

Newton 法の応用

Newton 法は様々な問題に応用されている.

- 多項式の求根 $\longrightarrow$ Durand-Kerner-Aberth 法 (Newton 法の変形)
- 行列の固有値問題
- ODE, PDE (Kantorovich-Akilov など)
- Nash-Moser の陰関数定理 $\longrightarrow$ 証明に Newton 法が使われた.
- 最適化問題

q-Newton 法

q-Newton 法は q を加えた Newton 法の拡張であり, q-微分を用いて表される [6].

q-Newton 法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{D_q f(x_n)}, \quad D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}.$$

$q \to 1$ としたとき Newton 法に戻る.

q-Newton 法に対する半局所収束定理が q-Newton-Kantorovich の定理である [7].

[6] Rajković, P., Stanković, M., Marinković D., (2002). Mean Value Theorems in q-Calculus. Matematički Vesnik, 54(3-4), 171-178.

[7] Rajković, P. M., Marinković, S. D., Stanković, M. S. (2005). On q-Newton-Kantorovich method for solving systems of equations. Applied Mathematics and Computation, 168(2), 1432-1448.

参考資料

- 西沢清子, 関口晃司, 吉野邦生, フラクタルと数の世界, 海文堂出版, 1991.
- 山本哲郎, 数値解析入門 (増訂版), サイエンス社, 2003.
- 山本哲郎, Newton 法とその周辺, 1985.
- Ypma, T. J. (1995). Historical development of the Newton-Raphson method. SIAM review, 37(4), 531-551.
- Deuflhard, P. (2012). A short history of Newton's method. Documenta Mathematica, Optimization stories, 25-30.