q-Bessel 関数と q-Airy 関数の精度保証付き数値計算

金泉大介 [1)]　丸野健一 [2)]

1) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

2) 早稲田大学基幹理工学部応用数理学科

概要

本講演では Jackson の第 1 種, 第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数, Hamamoto-Kajiwara-Witte の q-Airy 関数, Ramanujan の q-Airy 関数の精度保証付き数値計算法について述べる.

Verified Numerical Computation of q-Bessel Functions and q-Airy Functions

Daisuke Kanaizumi[1)]　Ken-ichi Maruno[2)]

1) Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Fundamental Science Engineering, Waseda University

2) Department of Applied Mathematics, School of Fundamental Science Engineering, Waseda University

Abstract

In this presentation, verified numerical computation of Jackson‘s 1st and 2nd q-Bessel function, Hahn-Exton’s q-Bessel function, Hamamoto-Kajiwara-Witte’s q-Airy function and Ramanujan’s q-Airy function is discussed.

1　はじめに

可積分系など数理物理では微分方程式や差分方程式の解として様々な特殊関数が現れ，それらの特殊関数の性質を理解することが重要となる．例えば，２階の非線形常微分方程式である Painlevé 方程式は一般には初等関数の範囲では解くことができず，解は Painlevé 超越関数と呼ばれる特殊関数で与えられ，特別なパラメーターの場合にはよく知られている特殊関数となる．１９９０年代から離散可積分系の研究が爆発的になされ，離散 Painlevé 方程式の研究が大いに進展した．離散 Painlevé 方程式のパラメータが特別な場合には特殊関数の一般化である q-特殊関数が解として現れるように，離散化によって特殊関数の世界はさらに大きく広がる [1]．このように，可積分系，離散可積分系の世界には，豊富な特殊関数が住んでおり，数理物理の様々な分野で多様な特殊関数が登場する．しかしながら，現時点では Painlevé 超越関数のような特殊関数の性質の十分な理解には程遠いのが現状である．可積分系などの数理物理で現れる多様な特殊関数の性質を探索する１つの手段として，近年，様々な力学系の問題に適用され強力なツールとなりつつある精度保証付き数値計算を用いることが考えられるが，これまでそのような観

点で精度保証付き数値計算を用いた研究は我々の知る限りはないようである．本講演では，可積分系などの数理物理で現れる様々な特殊関数（つまり可積分な微分方程式または差分方程式の解）の精度保証付き数値計算法の確立を目指すための第一歩として，q-特殊関数の精度保証付き数値計算についての研究結果を報告する．

精度保証付き数値計算とは近似値の計算をすると同時に計算結果の (数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算のことである [2]. 計算する際は数を区間に置き換えて計算 (区間演算) し, 真値を含む区間を結果として出力する. これにより真の計算結果が含まれる区間を知ることができるだけでなく, 区間の幅から計算に混入した誤差を把握できる.

これまで Bessel 関数などの標準的な特殊関数の精度保証付き数値計算はなされているが [3, 4, 5, 6], 可積分系などの数理物理で現れる q-特殊関数 (特殊関数にパラメーター q を加えた一般化であり，$q \to 1$ としたときに通常の特殊関数となる関数) の精度保証付き数値計算に関する研究はなされていない. q-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため, q-Bessel 関数, q-Airy 関数の精度保証付き数値計算を行った. 本講演では Jackson の第 1 種, 第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数, Hamamoto-Kajiwara-Witte の q-Airy 関数, Ramanujan の q-Airy 関数の精度保証付き数値計算法について報告する.

2 q-Bessel 関数と q-Airy 関数の精度保証付き数値計算

以下の乗積で定義される記号を q-Pochhammer 記号という [7]:

$$(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), \quad (a;q)_0 := 1,\ (a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n\ (a \in \mathbb{C}, |q|<1). \tag{1}$$

また, 次の関数を q-超幾何関数という (ただし, $r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ l = 1+s-r$)[7]:

$${}_r\phi_s(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_s;q,z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n z^n \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l}{\displaystyle\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n (q;q)_n}. \tag{2}$$

q-Bessel 関数とは以下の 3 つの関数である [7, 8, 9]:

$$J_\nu^{(1)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_2\phi_1\left(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}\right),\ (|x|<2), \tag{3}$$

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0\phi_1\left(-;q^{\nu+1};q,-\frac{q^{\nu+1}x^2}{4}\right),\ (x \in \mathbb{C}), \tag{4}$$

$$J_\nu^{(3)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} x^\nu\ {}_1\phi_1(0;q^{\nu+1};q,qx^2),\ (x \in \mathbb{C}). \tag{5}$$

上から順に Jackson の第 1 種, 第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数とよばれている. これらは q-Painlevé III 型方程式の特殊解となることが知られている [10, 11].

q-Airy 関数とは以下の 2 つの関数である [12, 13]:

$$\mathrm{Ai}_q(x) := {}_1\phi_1(0;-q;q,-x), \tag{6}$$

$$A_q(x) := {}_0\phi_1(-;0;q,-qx). \tag{7}$$

(6) 式が Hamamoto-Kajiwara-Witte の q-Airy 関数, (7) 式が Ramanujan の q-Airy 関数である. $\mathrm{Ai}_q(x)$ は q-Painlevé II 型方程式の特殊解を記述する [12]. $A_q(x)$ はもともと Ramanujan が研究していた関数だが, 直交多項式の研究において再発見された [13].

(3), (4), (5), (6), (7) 式から, q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ と q-超幾何関数 ${}_r\phi_s$ の精度保証付き数値計算を行うことができれば，q-Bessel 関数と q-Airy 関数の精度保証付き数値計算を行うことができるということがわかる．本講演では，q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ と q-超幾何関数 ${}_r\phi_s$ の精度保証付き数値計算法について解説し，それを用いた q-Bessel 関数と q-Airy 関数の精度保証付き数値計算法を示す.

２０１７年日本応用数理学会研究部会連合発表会において著者らが発表した q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法は基本的には Yamamoto & Matsuda[4] が Bessel 関数の精度保証付き数値計算で用いた方法を拡張したものであったが，今回の方法は q-超幾何関数の精度保証付き数値計算を基礎にしている.

q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算には次の定理を用いる.

定理 1. [14] $z \in \mathbb{C}$, $0<q<1$ とする. 正の整数 n に対して

$$0 < \tfrac{|z|q^n}{1-q} < \tfrac{1}{2}$$

であるとき,

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_n} = (zq^n;q)_\infty = 1 + r(z;n), \quad |r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}$$

が成り立つ.

q-超幾何関数の精度保証付き数値計算には次の定理を用いる.

定理 2. $T(n) := \frac{\prod_{i=1}^r (\alpha_i;q)_n z^n \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l}{\prod_{j=1}^s (\beta_j;q)_n (q;q)_n}$ とおくと, $r \le s+1$, $|\beta_j| \le q^{-N}$ のとき,

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} T(n)\right| \le \sum_{n=N}^{\infty} |T(n)| \le C|T(N)|$$

$$C = \begin{cases} \frac{1}{1-D} & (\text{if } D<1) \\ \infty & (\text{if } D \ge 1) \end{cases}, \quad D = \prod_{i=1}^{r}\left(1 + \frac{|\beta_i - \alpha_i|q^N}{|1-\beta_i q^N|}\right)E,$$

$$E = \begin{cases} \prod_{i=r+1}^{s+1} \frac{|z|q^{Nl}}{|1-\beta_i q^N|} & (\text{if } r \le s) \\ 1 + \frac{q^N|q-\alpha_{s+1}|}{|1-q^{N+1}|} & (\text{if } r = s+1) \end{cases}$$

$$\beta_{s+1} := 1$$

が成り立つ.

q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ と q-超幾何関数 ${}_r\phi_s$ が精度保証付き数値計算できることから q-Bessel 関数と q-Airy 関数を精度保証付き数値計算することができる. 提案手法の詳細, 数値計算例，問題点等については講演で述べる.

参考文献

[1] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada: Geometric aspects of Painlevé equations, J. Phys. A: Math. and Theor., 50 (2017) 073001.

[2] 大石進一: 精度保証付き数値計算 (コロナ社，2000).

[3] 大石進一: ベッセル関数とハンケル関数の精度保証付き数値計算, 電子情報通信学会技術研究報告. NLP, 非線形問題, 108 (2008) 55-57.

[4] N. Yamamoto and N. Matsuda: Validated computation for Bessel functions with multiple-precision. Trans. Jap. Soc. Indust. Appl. Math., 15 (2005) 347-359.

[5] M. Kashiwagi: kv - a C++ Library for Verified Numerical Computation, `http://verifiedby.me/kv/index-e.html`

[6] F. Johansson: Computing hypergeometric functions rigorously, arXiv:1606.06977 (2016).

[7] G. Gasper and M. Rahman: Basic Hypergeometric Series (Cambridge University Press, 2004).

[8] W. Hahn: Die mechanische Deutung einer geometrischen Differenzgleichung, Zeitschr. angew. Math. Mech., 33 (1953) 270-272.

[9] H. Exton: A basic analogue of the Bessel-Clifford equation, Jnanabha, 8 (1978) 49-56.

[10] K. Kajiwara, Y. Ohta and J. Satsuma: Casorati determinant solutions for the discrete Painlevé III equation, J. Math. Phys., 36 (1995) 4162-4174.

[11] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada: Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations, Int. Math. Res. Notices, 2004 (2004) 2497-2521.

[12] T. Hamamoto, K. Kajiwara and N. S. Witte: Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equation of type $(A_1 + A_1')^{(1)}$, Int. Math. Res. Notices, 2006 (2006) 84619.

[13] M. E. Ismail: Asymptotics of q-orthogonal polynomials and a q-Airy function, Int. Math. Res. Notices, 2005 (2005) 1063-1088.

[14] R. Zhang: Plancherel-Rotach asymptotics for certain basic hypergeometric series, Adv. Math., 217 (2008) 1588-1613.