q-Bessel 関数と q-Airy 関数の精度保証付き数値計算

金泉大介(早稲田大学, M1, daisuke15@asagi.waseda.jp), 丸野健一 (早稲田大学, kmaruno@waseda.jp)

研究背景

- これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算が研究されてきているが, 可積分系で現れるq-特殊関数(特殊関数のq類似)の精度保証付き数値計算に関する研究は我々の知る限り全くない.
- q-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため, q-Bessel関数とq-Airy関数の精度保証付き数値計算を行なった.
- q類似は変数qを加える一般化で, $q \to 1$としたとき元に戻る.

q-Bessel 関数と q-Airy 関数

以下の乗積で定義される記号をq-Pochhammer記号という. q-特殊関数を表すのに用いられる記号である ($a \in \mathbb{C}, |q| < 1$.).

$$(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), (a;q)_0 := 1,\ (a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n, (a_1,\cdots,a_n;q)_\infty := (a_1;q)_\infty\cdots(a_n;q)_\infty.$$

また, 次の関数をq-超幾何関数という (ただし, $r,s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ l = 1+s-r$.).

$${}_r\phi_s(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_s;q,z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n z^n\left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l}{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n(q;q)_n}.$$

q-Bessel 関数とは以下の3つの関数である ($\nu \in \mathbb{C}, 0 < q < 1$とする).

$$J_\nu^{(1)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_2\phi_1\left(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}\right)\ (|x|<2),$$

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0\phi_1\left(-;q^{\nu+1};q,-\frac{q^{\nu+1}x^2}{4}\right)\ (x\in\mathbb{C}),$$

$$J_\nu^{(3)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}x^\nu\ {}_1\phi_1(0;q^{\nu+1};q,qx^2),\ (x\in\mathbb{C}).$$

上から順にJacksonの第1種, 第2種q-Bessel関数, Hahn-Extonのq-Bessel関数という.
q-Airy 関数とは以下の2つの関数である.

$$\mathrm{Ai}_q(x) :=\ {}_1\phi_1(0;-q;q,-x),\ A_q(x) :=\ {}_0\phi_1(-;-q;q,-qx).$$

左がHamamoto-Kajiwara-Witte (以下, HKW と略記する) のq-Airy関数, 右がRamanujanのq-Airy関数とよばれる.
定義より, q-Pochhammer記号とq-超幾何関数を精度保証付き数値計算すればq-Bessel関数とq-Airy関数を精度保証付き数値計算できるということが分かる.

提案手法 (q-Pochhammer記号とq-超幾何関数)

$(z;q)_\infty$の精度保証付き数値計算では以下の定理を用いる.

定理1[a]
$z\in\mathbb{C}, 0<q<1$とする. 正の整数nに対して$0<\frac{|z||q^n|}{1-q}<\frac{1}{2}$であるとき,

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_n} = (zq^n;q)_\infty = 1 + r(z;n),\ |r(z;n)| \leq \frac{2|z||q^n|}{1-q}$$ が成り立つ.

[a]Zhang, R. (2008). Plancherel-Rotach asymptotics for certain basic hypergeometric series. Advances in Mathematics, 217(4), 1588-1613.

q-超幾何関数の精度保証付き数値計算には次の補題を使う.

補題1
$n,N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n\geq N$, $0<q<1$, $c\in\mathbb{C}$とする. $|c|\leq q^{-N}$のとき,

$$\frac{q^n}{|1-cq^n|} \leq \frac{q^N}{|1-cq^N|}$$ が成り立つ.

この補題を使うことで次の定理が示される.

定理2 ($r\leq s+1$であるときのq-超幾何関数の剰余項)

$$T(n) := \frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n z^n\left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l}{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n(q;q)_n}$$ とおくと, $|\beta_j|\leq q^{-N}$のとき,

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty}T(n)\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty}|T(n)| \leq C|T(N)|$$

$$C = \begin{cases}\frac{1}{1-D} & (\text{if } D<1)\\ \infty & (\text{if } D\geq 1)\end{cases},\quad D = \prod_{i=1}^{r}\left(1+\frac{|\beta_i-\alpha_i||q^N|}{|1-\beta_i q^N|}\right)E,$$

$$E = \begin{cases}\prod_{i=r+1}^{s+1}\frac{|z||q^{Nl}|}{|1-\beta_i q^N|} & (\text{if } r\leq s)\\ 1+\frac{q^N|q-\alpha_{s+1}|}{|1-q^{N+1}|} & (\text{if } r=s+1)\end{cases},\beta_{s+1} := 1$$

が成り立つ.

提案手法 (xの絶対値が大きいときの対策)

定理1,2 より q-超幾何関数とq-Pochhammer記号の精度保証付き数値計算ができたことから, q-Bessel 関数とq-Airy 関数を精度保証付き数値計算できる. だが, このままだとxの絶対値が大きいときに結果がinfとなりうる. 級数の計算時にx^nの部分がinfとなるからである. 以下, x^nを消す操作を考える.

Jackson の第2種 q-Bessel 関数には以下を適用する.

定理3[a]

$$(w;q)_\infty\ {}_0\phi_1(-;w;q,wz) =\ {}_1\phi_1(z;0;q,w)$$

[a]Koelink, H. T. (1993). Hansen-Lommel Orthogonality Relations for Jackson's q-Bessel Functions. Journal of mathematical analysis and applications, 175(2), 425-437.

Hahn-Exton の q-Bessel 関数と HKW の q-Airy 関数には以下を適用する.

定理4[ab]

$$(w;q)_\infty\ {}_1\phi_1(0;w;q,z) = (z;q)_\infty\ {}_1\phi_1(0;z;q,w)$$

[a]Koornwinder, T. H., & Swarttouw, R. F. (1992). On q-analogues of the Fourier and Hankel transforms. Transactions of the American Mathematical Society, 333(1), 445-461.
[b]Daalhuis, A. O. (1994). Asymptotic expansions for q-gamma, q-exponential, and q-Bessel functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 186(3), 896-913.

Ramanujan の q-Airy 関数 $A_q(x)$には以下を適用する.

定理5[a]

$$\begin{aligned}A_q(x) =& \{(qx,q/x;q^2)_\infty\ {}_1\phi_1(0;q;q^2,q^2/x)\\ &-q(q^2x,1/x;q^2)_\infty\ {}_1\phi_1(0;q^3;q^2,q^3/x)/(1-q)\}/(q;q^2)_\infty\end{aligned}$$

[a]Ismail, M. E., & Zhang, C. (2007). Zeros of entire functions and a problem of Ramanujan. Advances in Mathematics, 209(1), 363-380.

級数の中身にあったx^nがなくなったことから, xの絶対値が大きいときもq-Bessel 関数とq-Airy 関数を精度保証付き数値計算できる.

実験結果

Ramanujan の q-Airy 関数 $A_q(x)$で実験を行った.
数値例: $q=0.1$, $z=5000$
定理5を使った計算結果 (区間): [2110.9185672068706, 2110.9185672071881]

実験環境

OS: Ubuntu14.04, メモリ: 15.6GB, コンパイラー: gcc 4.8.4, kv: 0.4.41
CPU: Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz × 8

本研究のまとめと今後の課題

- $z\in\mathbb{C}$でq-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$を精度保証付き数値計算できた.
- $r\leq s+1$のときにq-超幾何関数${}_r\phi_s$を精度保証付き数値計算できた.
- q-Bessel 関数, q-Airy 関数を精度保証付き数値計算できた.

他の方法でもq-Bessel 関数, q-Airy 関数を精度保証付き数値計算できないか?