q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法

金泉大介 (早稲田大学 B4), 丸野健一

学生研究発表会, 東京大学

2017 年 3 月 5 日

研究背景

- これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算が研究されてきているが (Yamamoto (2005), Oishi (2008), Kashiwagi (2013), $\cdots$), 可積分系をはじめとする数理物理で現れる q-特殊関数の精度保証付き数値計算に関する研究は我々の知る限りまだない.
- q-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため, 可積分系でよく現れる q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算を行なった.

精度保証付き数値計算

近似値の計算をすると同時に計算結果の (数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算法のこと.

q-特殊関数

- q-特殊関数は特殊関数の q 類似である.
- q 類似は変数 q を加える一般化で, $q \to 1$ としたとき元に戻る.

q-Bessel 関数

q-Bessel 関数とは以下の 3 つの関数のことである. (ただし $|q| < 1, \nu \in \mathbb{C}$)

$$J_\nu^{(1)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{x^2}{4}\right)^n}{(q^{\nu+1};q)_n(q;q)_n}, (|x| < 2) \tag{1}$$

$$J_\nu^{(2)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n-1)}\left(\frac{x^2 q^{\nu+1}}{4}\right)^n}{(q^{\nu+1};q)_n(q;q)_n}, (x \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

$$J_\nu^{(3)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2} x^{2n}}{(q^{\nu+1};q)_n(q;q)_n}, (x \in \mathbb{C}) \tag{3}$$

$$(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k),\ (a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)$$

上から順に Jackson の第 1 種, 第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数とよばれている. これらは q-Painlevé III 型方程式の特殊解を記述する (Kajiwara-Ohta-Satsuma (1995), Kajiwara-Masuda-Noumi-Ohta-Yamada (2004)).

研究の意義

- いろいろな特殊関数を解に持つ Painlevé 方程式では計算機によって極の位置を把握する研究がなされている (Novokshenov (2009), $\cdots$).
- q-Painlevé 方程式の性質を解明するには, q-特殊関数の精度保証付き数値計算法が重要になりうる.

Bessel 関数の精度保証付き数値計算法 (Yamamoto, 2005) を q-Bessel 関数に応用し, q-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立することを目指した.