乗積公式と積分による q-gamma 関数の精度保証付き数値計算

Daisuke Kanaizumi (金泉大介, 早稲田大学, M1)[1,2]

2017 年度応用数学合同研究集会 龍谷大学

2017 年 12 月 14-16 日

[1] https://github.com/Daisuke-Kanaizumi/q-special-functions

[2] This is a joint work with Kenichi Maruno and Masahide Kashiwagi (developer of kv library)

本発表の流れ

研究背景

- これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算が研究されてきているが (Yamamoto-Matsuda (2005), Oishi (2008), Kashiwagi (kv ライブラリ), Yamanaka-Okayama-Oishi (2017), $\cdots$), 可積分系等で現れる q-特殊関数 (特殊関数の q 類似) の精度保証付き数値計算法はまだない.
- q-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため, q-gamma 関数の精度保証付き数値計算を行なった.

精度保証付き数値計算

近似値の計算をすると同時に計算結果の (数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算法のこと. 真値を含む区間を結果として出力する.

q 類似

- パラメータ q を加える一般化
- $q \to 1$ としたとき元に戻る

区間演算

精度保証付き数値計算では" 区間演算" という技術によって数値計算の際に生じる誤差を把握している.

区間演算 [a]

[a] 大石進一. (2000). 精度保証付き数値計算, コロナ社.

区間演算を行う際は数を閉区間に置き換えて下記のルールに従い計算している. ($\bar{x}$ が上限, $\underline{x}$ が下限,$[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ とする)

- 加算: $[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$
- 減算: $[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$
- 乗算: $[x] \times [y] = [\min(\underline{xy}, \underline{x\bar{y}}, \underline{y\bar{x}}, \bar{x}\bar{y}), \max(\underline{xy}, \underline{x}\bar{y}, \underline{y}\bar{x}, \bar{x}\bar{y})]$
- 除算: $[x]/[y] = [\min(\underline{x}/\underline{y}, \underline{x}/\bar{y}, \bar{x}/\underline{y}, \bar{x}/\bar{y}), \max(\underline{x/y}, \underline{x}/\bar{y}, \underline{y}/\bar{x}, \bar{x}/\bar{y})]$ (ただし $[y]$ は 0 を含まない区間とする)

精度保証付き数値計算で扱う誤差

精度保証付き数値計算では数値計算による誤差を扱う.

数値計算による誤差 [a]

[a] 大石進一. (2000). 精度保証付き数値計算, コロナ社.

丸め誤差: 実数を計算機で表現可能な数に置き換えたことによる誤差
打切り誤差: 無限回やる操作を有限で打ち切ったことによる誤差
離散化誤差 (数理モデルを多項式や漸化式に変換した際の誤差)

ただし, モデル誤差 (数理モデルそのものの誤差) は扱わない.

q-特殊関数

q-特殊関数はパラメータ q を加えた特殊関数の拡張版であり, q-微分や q-積分を使う q-解析学に適合するように定義される (文字 q があるだけの関数は除く)[3].

q-微分

$$D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$$

q-積分

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}_q t := (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^n)q^n$$

q-解析学: 極限をなるべく使わない解析学の一つ [4]

[3]堀田良之, 渡辺敬一, 庄司俊明, 三町勝久. (2004). 群論の進化, 代数学百科 I, 朝倉書店.
[4]Kac, V., Cheung, P. (2001). Quantum Calculus. Springer Science & Business Media.

研究の意義

- q-特殊関数は q-Painlevé 方程式など様々な方程式の解として現れる [5,6,7].
- q-特殊関数の性質 (零点, 不動点, 漸近的挙動など) を研究するには, q-特殊関数の精度保証付き数値計算法が重要になりうる.
- 既存公式の数値的検証にも使える.

---

[5] Kajiwara, K., Masuda, T., Noumi, M., Ohta, Y., Yamada, Y. (2004). Hypergeometric Solutions to the q-Painlevé Equations. International Mathematics Research Notices, 2004(47), 2497-2521.

[6] Kemp, A. W. (1997). On Modified q-Bessel Functions and Some Statistical Applications. Advances in Combinatorial Methods and Applications to Probability and Statistics, 451-463. Birkhäuser Boston.

[7] 何健志, 筧三郎, 北根靖史. (2007). 離散確率過程と q-超幾何関数. 日本応用数理学会論文誌, 17(4), 463-468.

q-gamma 関数

q-gamma 関数は次のように定義される[8].

$$\Gamma_q(z) := (1-q)^{1-z}\frac{(q;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}, \quad 0 < q < 1.$$

$(z;q)_\infty$ は q-Pochhammer 記号とよばれ, 次のように定義される.

$$(z;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-zq^k), \quad (z;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(z;q)_n,$$

定義から, q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ を精度保証付き数値計算できれば, q-gamma 関数の精度保証付き数値計算ができるということが分かる. ここからは q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算法を考える.

[8] Gasper, G., Rahman, M. (2004). Basic Hypergeometric Series. Cambridge University Press.

q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算法

q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算法として

- $(z;q)_\infty$ を交代級数に変換して打切り誤差を評価する方法
- $(z;q)_\infty$ の近似と誤差半径を利用する方法

を開発した．交代級数を用いる方法から見ていく．

$(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算法 (交代級数を使用)

定義 (q-指数関数)

$$e_q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n}, \quad |z| < 1.$$

定理 (Euler)

$$e_q(z) = \frac{1}{(z;q)_\infty}$$

定理 (Karpelevich)

$$e_q(z) = \frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n (1 - zq^n)}$$

上の 2 式より $|z| < 1$ のとき, 次の等式が成り立つ [9].

$$\frac{(z;q)_\infty}{(q;q)_\infty} = 1 \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n (1 - zq^n)}.$$

[9] Olshanetsky, M. A., Rogov, V. B. (1995). The Modified q-Bessel Functions and the q-Bessel-Macdonald Functions. arXiv preprint q-alg/9509013

$$\frac{(z;q)_\infty}{(q;q)_\infty} = 1/\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n(1-zq^n)}$$

より，$(q;q)_\infty$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n(1-zq^n)}$ を精度保証付き数値計算すれば $(z;q)_\infty$ を精度保証付き数値計算できる.

$(q;q)_\infty$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n(1-zq^n)}$ の精度保証付き数値計算には以下を使用した.

定理 (Leibniz)

数列 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ を満たす単調減少な正数列ならば，交代級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n p_n$ は収束する.

系 (交代級数の打切り誤差)

$s := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n p_n,\ s_N := \sum_{n=0}^{N}(-1)^n p_n$ とおくと次が成り立つ:

$$|s - s_N| \le p_{N+1}.$$

交代級数の性質が適用できるように $(q;q)_\infty$ を変形していくことを考える.

$(q;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算

$(q;q)_\infty$ は Euler 関数とよばれることもあり，Euler 等によって数論の分野で研究されている関数である．Euler によって以下のような変形公式が導かれている．

定理 (Euler の五角数定理)

$|q|<1$ のとき，

$$(q;q)_\infty = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+q^n)q^{n(3n-1)/2}$$

が成り立つ．

この公式を使って精度保証付き数値計算を行うことを試みたが，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+q^n)q^{n(3n-1)/2}$ については前述の交代級数の性質を適用できない，つまり，級数の中身を d_n とおいたときに d_n の絶対値が単調減少しないということが分かった．そこで Euler の五角数定理の別表現を用いることにした．

$(q;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算

Euler の五角数定理には次の別表現があり, 定理 A, B を用いて導出できる.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+q^n)q^{n(3n-1)/2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-q^{2n+1})q^{n(3n+1)/2}.$$

定理 A (Shanks の公式)

Shanks, D. (1951). A Short Proof of an Identity of Euler. Proceedings of the American Mathematical Society, 2(5), 747-749.

$$1+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n(1+q^n)q^{n(3n-1)/2}=(q;q)_N\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n q^{Nn+n(n+1)/2}}{(q;q)_n}$$

定理 B (Andrews, Merca)

Andrews, G., Merca, M. (2012). The Truncated Pentagonal Number Theorem. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 119(8), 1639-1643.

$$\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n(1-q^{2n+1})q^{n(3n+1)/2}=(q;q)_N\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n q^{Nn+n(n+1)/2}}{(q;q)_n}$$

$(q;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算

$N \to \infty$ とすると,
(定理 A の右辺)

$$= (q;q)_N \left(1 - \frac{q^{N+1}}{(q;q)_1} + \cdots + \frac{(-1)^N q^{N^2+N(N+1)/2}}{(q;q)_N}\right) \to (q;q)_\infty,$$

(定理 B の右辺)

$$= (q;q)_N \left(1 - \frac{q^{N+1}}{(q;q)_1} + \cdots + \frac{(-1)^{N-1} q^{N(N-1)+N(N-1)/2}}{(q;q)_{N-1}}\right) \to (q;q)_\infty$$

となることから,
$\lim_{N\to\infty}$(定理 A の左辺)$= \lim_{N\to\infty}$(定理 A の右辺)
$= \lim_{N\to\infty}$(定理 B の右辺)$= \lim_{N\to\infty}$(定理 B の左辺).

$$\therefore 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+q^n)q^{n(3n-1)/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-q^{2n+1})q^{n(3n+1)/2}.$$

- Euler の五角数定理の別表現で現れた

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-q^{2n+1})q^{n(3n+1)/2}$$

に対して, 前述の交代級数の性質を適用できる.

- $(q;q)_\infty$ の打切り誤差を評価できる.
- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n(1-zq^n)}$ にも前述の交代級数の性質を適用できて, 打切り誤差を評価できる.

$$\frac{(z;q)_\infty}{(q;q)_\infty}=1/\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n(1-zq^n)}.$$

本手法のまとめと課題

- $-1<z<1$ のとき $(z;q)_\infty$ を精度保証付き数値計算することができた.
- $z\in\mathbb{C}$ でも $(z;q)_\infty$ を精度保証付き数値計算できないか？
- 2 つめの提案手法ではこの点を克服する.

q-Pochhammer 記号 $(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算法

$(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算では以下の定理 1, 2 が使える.

定理 1 [a]

[a] Zhang, R. (2008). Plancherel-Rotach Asymptotics for Certain Basic Hypergeometric Series. Advances in Mathematics, 217(4), 1588-1613.

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. ある $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 < \frac{|z|q^n}{1-q} < \frac{1}{2}$$

であるとき, 以下が成り立つ:

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_n} = 1 + r(z;n), \quad |r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}.$$

定理 1 は

$$(z;q)_n \times (\text{中心 } 1, \text{ 半径 } r(z;n) \text{ の近傍})$$

という形の評価である.

定理 2 は $(z;q)_\infty$ の近似と誤差を与える定理である.

定理 2 [a]

[a] Gabutti, B., Allasia, G. (2008). Evaluation of q-Gamma Function and q-Analogues by Iterative Algorithms. Numerical Algorithms, 49(1), 159-168.

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とし, $N \in \mathbb{N}$ を十分大なる数とすると以下が成り立つ:

$$(z;q)_\infty - T_{m-1,N}(z) = (z;q)_N \sum_{j=0}^{\infty} d_{m+j}(zq^N)^{m+j}, \tag{1}$$

$$d_k = \frac{qq^2\cdots q^{k-1}(1-q)^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} \le q^{k(k-1)/2}, \tag{2}$$

$$T_{m,N}(z) = (z;q)_N \sum_{k=0}^{m} d_k(zq^N)^k. \tag{3}$$

定理 2 で $|zq^N| < 1$ を仮定すれば以下が成り立つ:

$$|(z;q)_\infty - T_{m-1,N}(z)| \le \left| (z;q)_N \frac{|zq^N|^m q^{m(m-1)/2}}{1-|zq^N|} \right|.$$

数値実験 (定理 1, 2 の比較)

定理 1, 2 により q-Pochhammer 記号を精度保証付き数値計算するプログラムを C++で作り, 計算結果を比較した. 実験では C++による精度保証付き数値計算ライブラリである"kv ライブラリ"[10] を使用している.

実験環境

OS: Ubuntu14.04LTS, コンパイラー: gcc version 4.8.4
CPU: Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz × 8
メモリ: 15.6GB, kv ライブラリのバージョン: 0.4.42

実験結果 ($q = 0.1, z = 15$)

精度保証の結果 (定理 1): [5.8509835632983984,5.8509835632985006]
精度保証の結果 (定理 2): [5.8509835632983975,5.8509835632985015]

この場合では大きな違いはない.

[10] 柏木雅英, kv - C++による精度保証付き数値計算ライブラリ

http://verifiedby.me/kv/index.html

数値実験 (定理 1, 2 の比較)

今度は $q \to 1$ としてみる.

実験結果 ($q = 0.9, z = 15$)

精度保証の結果 (定理 1): [411.89219387077093,418.50918051346912]
精度保証の結果 (定理 2): [415.2006871920434,415.20068719219541]

定理 1 を使う方が区間幅が広がってしまう. これは定理 1 で $q \to 1$ としたとき, 定理の仮定が満たされるように $n \to \infty$ となって計算量が増えてしまうためである. $q \to 1$ のときは定理 2 を使って計算を行うことにする.

定理 1 (再掲)[a]

[a] Zhang, R. (2008). Plancherel-Rotach Asymptotics for Certain Basic Hypergeometric Series. Advances in Mathematics, 217(4), 1588-1613.

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \frac{|z|q^n}{1-q} < \frac{1}{2}$ であるとき, 以下が成り立つ:

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_n} = 1 + r(z;n), \quad |r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}.$$

$q \to 1, |z| \to \infty$ である場合の対策

定理 2 より, $q \to 1$ としたときに q-Pochhammer 記号を精度保証付き数値計算できるようになったが, $q \to 1, |z| \to \infty$ としたときに q-gamma 関数が精度保証付き数値計算できるようになったわけではない.

実験結果 ($z = -100 + 100\mathrm{i}, q = 0.99$)

精度保証の結果: ゼロ除算発生

$$\Gamma_q(z) := (1-q)^{1-z} \frac{(q;q)_\infty}{(q^z;q)_\infty}, \quad 0 < q < 1.$$

この数値例では $\frac{1}{(q^z;q)_\infty}$ でゼロ除算が発生している. 対策について考える.

$q \to 1, |z| \to \infty$ である場合の対策

$q \to 1, |z| \to \infty$ としたときには次を用いる.

定理 3 (q-gamma 関数の乗積公式, $n \in \mathbb{N}$)[a]

[a]Gasper, G., Rahman, M. (2004). Basic Hypergeometric Series. Cambridge University Press.

$$\Gamma_q(nz)\Gamma_r(1/n)\Gamma_r(2/n)\cdots\Gamma_r((n-1)/n) \tag{4}$$

$$= \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)^{nz-1}\Gamma_r(z)\Gamma_r(z+1/n)\cdots\Gamma_r(z+(n-1)/n), \quad r = q^n \tag{5}$$

q^n とすることで q を 1 から遠ざけて, z/n とすることで z を小さくしている.

数値実験 (改良前と改良後の比較)

定理 3 により q-gamma 関数を精度保証付き数値計算するプログラムを C++で自作し, 改良前の計算結果を比較した.

実験結果 ($z = -100 + 100i, q = 0.99, n = 20$)

改良後の結果: ([3.520226006915545$\times 10^{-275}$,3.524544135898255 2$\times 10^{-275}$])+([-1.741771549163063$\times 10^{-274}$,-1.741339620898937 1$\times 10^{-274}$])i

改良前の結果: ゼロ除算発生

Mathematica(近似): 3.522378546643906$\times 10^{-275}$-1.741556211443174$\times 10^{-274}$i

計算に成功していることから, 改良が成功しているといえる.

積分による方法

ここでは q-gamma 関数の持つ次の積分表示 [11] を扱う.

$$\frac{1}{\Gamma_q(z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{-z} \mathrm{d}t}{(-t(1-q);q)_\infty}.$$

積分による q-gamma 関数の精度保証付き数値計算を行う前に, 先行研究である gamma 関数の精度保証付き数値計算法について見ていく.

[11] Ismail, M. E. (1981). The Basic Bessel Functions and Polynomials. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 12(3), 454-468.

先行研究 (積分による gamma 関数の精度保証付き数値計算)

積分による gamma 関数の精度保証付き数値計算は次の流れで行われた.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx.$$

積分による gamma 関数の精度保証付き数値計算 [a]

[a] 橋本崇希, 柏木雅英, 複素 Gamma 関数の精度保証付き数値計算, 日本応用数理学会年会, 武蔵野大学, 2017 年 9 月 6-8 日

積分表示を実部と虚部に分割する.

↓

積分区間を $[0,1], [1,T], [T,\infty]$ の 3 つに分けて積分計算を行う $(T>1)$.

↓

$[0,1]$ では中身を級数に直して項別積分し, $[1,T]$ では kv ライブラリの精度保証付き数値積分パッケージを使う.

↓

$[T,\infty]$ では厳密に積分値の求められる関数で被積分関数を評価する.

この方法を参考に, 積分による q-gamma 関数の精度保証付き数値計算を行う.

積分による方法

q-gamma 関数の積分表示を実部と虚部に分けると次のようになる $(z = x + \mathrm{i}y)$.

$$\frac{1}{\Gamma_q(z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\left(\int_0^\infty \frac{t^{-x}\cos(y\log t)\mathrm{d}t}{(-t(1-q);q)_\infty} - \mathrm{i}\int_0^\infty \frac{t^{-x}\sin(y\log t)\mathrm{d}t}{(-t(1-q);q)_\infty}\right).$$

実部と虚部で積分区間を $[0,1],[1,T],[T,\infty]$ の 3 つに分けて積分計算を行う $(T > 1)$. ここからは実部の積分計算について見ていく (虚部も同様). また, $1 \le x \le 2$ を仮定する. 関数等式:

$$\Gamma_q(z+1) = \frac{1-q^z}{1-q}\Gamma_q(z)$$

より, x が他の範囲にある場合でも精度保証付き数値計算できるため $1 \le x \le 2$ を仮定してこの範囲での評価を考えれば良い.

積分による方法

$[0,1]$ では, 補助的に以下の関数を用いる.

定義 (q-指数関数)

Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. (1999). Special Functions, Cambridge University Press.

$$e_q(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n}, \quad |z| < 1.$$

定理 4 (Euler)

Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. (1999). Special Functions, Cambridge University Press.

$$e_q(z) = \frac{1}{(z;q)_\infty}$$

定理 4 を使って被積分関数を変形し, 項別積分を行なう.

積分による方法

定理 4 を使って項別積分, 部分積分すると,

$$\int_0^1 \frac{t^{-x}\cos(y\log t)}{(-t(1-q);q)_\infty}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-(1-q))^n}{(q;q)_n} \frac{n-x+1}{(n-x+1)^2+y^2}$$

となる. $S(n) = \frac{(-(1-q))^n}{(q;q)_n} \frac{n-x+1}{(n-x+1)^2+y^2}$ とおくと公比は $n \geq N$ のとき,

$$\begin{aligned} \left|\frac{S(n+1)}{S(n)}\right| &= \frac{1-q}{1-q^{n+1}} \frac{n-x+2}{n-x+1} \frac{(n-x+1)^2+y^2}{(n-x+2)^2+y^2} \\ &\leq \frac{1-q}{1-q^{N+1}} \left(1 + \frac{1}{N-x+1}\right) =: D \end{aligned}$$

となる. $D < 1$ のとき打ち切り誤差を以下のように評価できる:

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} S(n)\right| \leq (\text{初項 } |S(N)|,\ \text{公比 } D \text{ の等比数列の和}) = \frac{|S(N)|}{1-D}.$$

$[1, T]$ で積分する際は被積分関数:

$$\frac{t^{-x}\cos(y\log t)}{(-t(1-q);q)_\infty}$$

にある q-Pochhammer 記号を積分しやすい形に変形する．変形には定理 5 を使う．

定理 5 [a]

[a] Zhang, R. (2008). Plancherel-Rotach Asymptotics for Certain Basic Hypergeometric Series. Advances in Mathematics, 217(4), 1588-1613.

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする．ある $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 < \frac{|z|q^n}{1-q} < \frac{1}{2}$$

であるとき, 以下が成り立つ:

$$\frac{(z;q)_n}{(z;q)_\infty} = 1 + r(z;n), \quad |r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}.$$

積分による方法

定理 5 を使うと被積分関数は

$$\frac{t^{-x}\cos(y\log t)}{(-t(1-q);q)_\infty} \in \frac{t^{-x}\cos(y\log t)}{(-t(1-q);q)_n}\left[1 \pm \frac{2|t(1-q)|q^n}{1-q}\right]$$

と変形できる．変形後に現れる $n \in \mathbb{N}$ は

$$0 < \frac{2|t(1-q)|q^n}{1-q} < \frac{1}{2} \quad \text{(定理 5 の仮定)}$$

を満たすように取る．また,

$$[a \pm b] := [a-b, a+b]$$

と定める.

積分による方法

変形後の積分には C++による精度保証付き数値計算ライブラリである”kv ライブラリ”に組み込まれている精度保証付き数値積分パッケージを使う.

”kv ライブラリ”による精度保証付き数値積分の流れ [a]

[a] 柏木雅英, ベキ級数演算について, http://verifiedby.me/kv/psa/psa.pdf

積分区間を分割する (実験では 90 個に分割)

$\Downarrow$

被積分関数 f に対して剰余項付き Taylor 展開を行う

$\Downarrow$

各区分で f の像を係数が区間である多項式として得る (実験では 90 次に指定)

$\Downarrow$

各区分で得られた多項式を不定積分して原始関数を得る

$\Downarrow$

各区分で区間端の値を代入して定積分の値を区間として得る

$[T,\infty]$ での被積分関数の評価は $x\in[1,2]$ と定理 5 より次のようになる:

$$\frac{t^{-x}\cos(y\log t)}{(-t(1-q);q)_\infty}\in\left[-\frac{1-2tq^n/(1-q)}{t^2(1+t(1-q))^n},\frac{1+2tq^n/(1-q)}{t(1+t(1-q)q^{n-1})^n}\right].$$

上限と下限をそれぞれ不定積分すると[12] 次のようになる:

$$\int\frac{1+2tq^n/(1-q)}{t(1+t(1-q)q^{n-1})^n}\mathrm{d}t=\left(1-(q-1)tq^{n-1}\right)^{-n}$$
$$\times\left(\frac{2\left(tq^{n+1}-tq^n-q\right)}{(n-1)(q-1)^2}-\frac{\left(\frac{q^{1-n}}{t-qt}+1\right)^n{}_2F_1\left(n,n;n+1;\frac{q^{1-n}}{(q-1)t}\right)}{n}\right),$$
$$-\int\frac{1-2tq^n/(1-q)}{t^2(1+t(1-q))^n}\mathrm{d}t=(-qt+t+1)^{-n}\left(\frac{1}{t-qt}+1\right)^n$$
$$\times\left(2(n+1)tq^n{}_2F_1\left(n,n;n+1;\frac{1}{(q-1)t}\right)\right.$$
$$\left.+n(q-1){}_2F_1\left(n,n+1;n+2;\frac{1}{(q-1)t}\right)\right)/\{n(n+1)(q-1)t\}.$$

[12]不定積分には Mathematica の `Integrate` を用いた.

数値実験 (積分)

q-gamma 関数を積分によって精度保証付き数値計算するプログラムを C++で自作し, 数値実験を行った. 実験には C++による精度保証付き数値計算ライブラリである"kv ライブラリ"を使用している.

実験環境

OS: Ubuntu14.04LTS, コンパイラー: gcc version 4.8.4
CPU: Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz × 8
メモリ: 15.6GB, kv ライブラリのバージョン: 0.4.42

実験結果 ($z = 1.2 + \mathbf{i}, q = 0.1$)

精度保証の結果 (積分):([0.48702750125220128,2.2700419350688224])+([-0.46939808387927973,1.1606835821327298])$\mathbf{i}$
Mathematica (近似): 0.865915330766597+0.04780558270549618$\mathbf{i}$

本研究のまとめと今後の課題

本研究のまとめ

- q-gamma 関数を記述する q-Pochhammer 記号を精度保証付き数値計算した.
- 乗積公式と積分によって q-gamma 関数を精度保証付き数値計算した.

今後の課題

- 積分による方法では区間幅の広がりを抑えることができなかった.
- 被積分関数の評価をさらに厳しくすることで改良できないか？