楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算メモ

金泉大介 (丸野研究室)

2017 年 9 月

1. 研究背景
2. 楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算

研究背景

- これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算が研究されてきているが, 可積分系で現れる q-特殊関数 (特殊関数の"q 類似"), 楕円特殊関数の精度保証付き数値計算に関する研究は我々の知る限りほとんどない.
- q-特殊関数, 楕円特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため, 楕円超幾何関数を精度保証付き数値計算した.

精度保証付き数値計算

近似値の計算をすると同時に計算結果の (数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算のこと. 真値を含む区間を結果として出力する.

楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算

楕円超幾何関数は次のように定義される. ($0 < p < 1, 0 < q < 1$ を仮定する.)

$$ {}_rE_{r-1}(a_1, \cdots, a_r; b_1, \cdots, b_{r-1}; p, q; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{r} (a_i; p, q)_n z^n}{\prod_{j=1}^{r-1} (b_j; p, q)_n (q; p, q)_n}. $$

$(z; p, q)_n$ は有限の楕円 Pochhammer 記号で以下のように定義される.

$$ (z; p, q)_n := \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} \theta(zq^k; p) \ (n = 1, 2, \cdots) \\ 1/\prod_{k=0}^{-n-1} \theta(zq^{n+k}; p) \ (n = -1, -2, \cdots) \\ 1 \ (n = 0) \end{cases}. $$

ただし, $\theta(z; q) := (z; q)_\infty (qz^{-1}; q)_\infty$.

楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算

$$ {}_rE_{r-1}(a_1,\cdots,a_r;b_1,\cdots,b_{r-1};p,q;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{r}(a_i;p,q)_n z^n}{\prod_{j=1}^{r-1}(b_j;p,q)_n(q;p,q)_n}. $$

楕円超幾何関数の性質

Gasper, G., Rahman, M., (2004), Basic Hypergeometric Series, Cambridge University Press.

- 収束半径が 1 より大きくなることもある.
- $(z;p,q)_n$ は $p \to 0$ のとき $(z;q)_n$ に戻るので, $p \to 0$ としたとき, ${}_rE_{r-1} \to {}_r\phi_{r-1}$ となる.
- 公比が有理型二重周期関数になる.

本研究では公比を使って剰余項を評価する方法を楕円超幾何関数 ${}_2E_1$ に応用し, 楕円超幾何関数 ${}_2E_1$ を足掛かりに, 楕円特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立することを目指した.

$$T(n) := \frac{(a_1;p,q)_n(a_2;p,q)_n z^n}{(b_1;p,q)_n(q;p,q)_n}$$

とおいて, $n \geq N$ のときの $\left|\frac{T(n+1)}{T(n)}\right|$ の評価を考える.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{T(n+1)}{T(n)}\right| &= |z| \left|\frac{(b_1;p,q)_{n+1}(q;p,q)_{n+1}}{(b_1;p,q)_n(q;p,q)_n}\right| \left|\frac{(a_1;p,q)_n(a_2;p,q)_n}{(a_1;p,q)_{n+1}(a_2;p,q)_{n+1}}\right| \\
&= |z| \left|\frac{\theta(b_1q^n;p)\theta(q^{n+1};p)}{\theta(a_1q^n;p)\theta(a_2q^n;p)}\right| \\
&= |z| \left|\frac{(b_1q^n;p)_\infty(q^{n+1};p)_\infty}{\left(\frac{p}{a_1q^n};p\right)_\infty \left(\frac{p}{a_2q^n};p\right)_\infty}\right| \left|\frac{\left(\frac{p}{b_1q^n};p\right)_\infty \left(\frac{p}{q^{n+1}};p\right)_\infty}{(a_1q^n;p)_\infty(a_2q^n;p)_\infty}\right|
\end{aligned}$$

$\left|\frac{(b_1q^n;p)_\infty(q^{n+1};p)_\infty}{(a_1q^n;p)_\infty(a_2q^n;p)_\infty}\right|$ の評価から考えよう.

$n \geq N$ であるときの $\left|(b_1 q^n; p)_\infty (q^{n+1}; p)_\infty\right|$ の評価には定理 1 を使う.

定理 1

Ruiming Zhang, Plancherel-Rotach asymptotics for certain basic hypergeometric series, Advances in Mathematics 217 (2008) 1588-1613

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. 正の整数 m に対して $0 < \frac{|z|q^m}{1-q} < \frac{1}{2}$ であるとき,

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_m} = (zq^m; q)_\infty = 1 + r(z;m), \ |r(z;m)| \leq \frac{2|z|q^m}{1-q}$$

が成り立つ.

定理 1 と $n \geq N$ より,

$$|(b_1 q^n; p)_\infty (q^{n+1}; p)_\infty| \leq \left(1 + \frac{2|b_1|q^N p^m}{1-p}\right)\left(1 + \frac{2q^{N+1}p^m}{1-p}\right)|(b_1 q^n; p)_m (q^{n+1}; p)_m|$$

となる.

$n \geq N$ のとき $\frac{1}{|(a_1q^n;p)_\infty(a_2q^n;p)_\infty|}$ の評価には定理 2 を使う.

定理 2

Ruiming Zhang, Plancherel-Rotach asymptotics for certain basic hypergeometric series, Advances in Mathematics 217 (2008) 1588-1613

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. 正の整数 m に対して $0 < \frac{|z|q^m}{1-q} < \frac{1}{2}$ であるとき,

$$\frac{(z;q)_m}{(z;q)_\infty} = \frac{1}{(zq^m;q)_\infty} = 1 + r(z;m),\ |r(z;m)| \leq \frac{2|z|q^m}{1-q}$$

が成り立つ.

定理 2 と $n \geq N$ より,

$$\left|\frac{1}{(a_1q^n;p)_\infty(a_2q^n;p)_\infty}\right| \leq \frac{\left(1+\frac{2|a_1|q^Np^m}{1-p}\right)\left(1+\frac{2|a_2|q^Np^m}{1-p}\right)}{|(a_1q^n;p)_m(a_2q^n;p)_m|}$$

となる.

楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算

ここまで,

$$
\begin{gathered}
|(b_1q^n;p)_\infty(q^{n+1};p)_\infty| \leq \\
\left(1+\frac{2|b_1||q^N p^m}{1-p}\right)\left(1+\frac{2q^{N+1}p^m}{1-p}\right)|(b_1q^n;p)_m(q^{n+1};p)_m| \\
\left|\frac{1}{(a_1q^n;p)_\infty(a_2q^n;p)_\infty}\right| \leq \frac{\left(1+\frac{2|a_1|q^N p^m}{1-p}\right)\left(1+\frac{2|a_2|q^N p^m}{1-p}\right)}{|(a_1q^n;p)_m(a_2q^n;p)_m|}
\end{gathered}
$$

であることが分かった.
$|(b_1q^n;p)_m(q^{n+1};p)_m|$, $\frac{1}{|(a_1q^n;p)_m(a_2q^n;p)_m|}$ の評価について考える.

楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算

まず,

$$
\begin{aligned}
|(b_1q^n;p)_m| =& |(1-b_1q^n)\cdots(1-b_1q^np^{m-1})| \\
=& |(b_1q^n-1)\cdots(b_1q^np^{m-1}-1)| \\
\leq& |(b_1q^N-1)\cdots(b_1q^Np^{m-1}-1)| \ (\because q^n \leq q^N) \\
=& |(1-b_1q^N)\cdots(1-b_1q^Np^{m-1})| \\
=& |(b_1q^N;p)_m|
\end{aligned}
$$

となることから $|(b_1q^n;p)_m|$ が評価できる.
(同様に $|(q^{n+1};p)_m| \leq |(q^{N+1};p)_m|$)

$\frac{1}{|(a_1q^n;p)_m(a_2q^n;p)_m|}$ の評価には以下の補題を用いる.

補題 1

$n, N \in \mathbb{N}, n \geq N, 0 < q < 1, c \in \mathbb{C}$ とする. $q^N \leq |c|$ のとき,

$$\frac{1}{|c-q^n|} \leq \frac{1}{|c-q^N|}$$

が成り立つ.

(証明)

$$\begin{aligned}
|c-q^n|^2 - |c-q^N|^2 =& q^{2n} - q^{2N} - 2|c|q^n + 2|c|q^N \\
=& (q^n - q^N)(q^n + q^N) - 2|c|(q^n - q^N) \\
=& (q^n - q^N)(q^n + q^N - 2|c|) \\
\geq& 0 \ (\because n \geq N, q^N \leq |c|)
\end{aligned}$$

$$\therefore |c-q^n| \geq |c-q^N|$$
$$\therefore \frac{1}{|c-q^n|} \leq \frac{1}{|c-q^N|}$$

補題が示された. □

楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算

$q^N \leq \left|\frac{1}{a_1}\right|$ のとき

$$\frac{1}{|(a_1q^n;p)_m|} = \frac{1}{|(1-a_1q^n)\cdots(1-a_1q^np^{m-1})|}$$
$$= \frac{\left|a_1^{-m}\right| p^{-m(m-1)/2}}{\left|\left(\frac{1}{a_1}-q^n\right)\cdots\left(\frac{p^{1-m}}{a_1}-q^n\right)\right|}$$
$$\leq \frac{\left|a_1^{-m}\right| p^{-m(m-1)/2}}{\left|\left(\frac{1}{a_1}-q^N\right)\cdots\left(\frac{p^{1-m}}{a_1}-q^N\right)\right|}$$

(補題 1 は最後の大小比較のところで用いた)

同様に, $q^N \leq \left|\frac{1}{a_2}\right|$ のとき

$$\frac{1}{|(a_2q^n;p)_m|} \leq \frac{\left|a_2^{-m}\right| p^{-m(m-1)/2}}{\left|\left(\frac{1}{a_2}-q^N\right)\cdots\left(\frac{p^{1-m}}{a_2}-q^N\right)\right|}$$

が成り立つ.

楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算

ここまで, 楕円超幾何関数 ${}_2E_1$ の公比の絶対値,

$$\left|\frac{T(n+1)}{T(n)}\right| = |z| \left|\frac{(b_1q^n;p)_\infty (q^{n+1};p)_\infty}{\left(\frac{p}{a_1q^n};p\right)_\infty \left(\frac{p}{a_2q^n};p\right)_\infty}\right| \left|\frac{\left(\frac{p}{b_1q^n};p\right)_\infty \left(\frac{p}{q^{n+1}};p\right)_\infty}{(a_1q^n;p)_\infty (a_2q^n;p)_\infty}\right|$$

のうち, $\left|\frac{(b_1q^n;p)_\infty (q^{n+1};p)_\infty}{(a_1q^n;p)_\infty (a_2q^n;p)_\infty}\right|$ の評価ができた.

ここからは $\left|\frac{\left(\frac{p}{b_1q^n};p\right)_\infty \left(\frac{p}{q^{n+1}};p\right)_\infty}{\left(\frac{p}{a_1q^n};p\right)_\infty \left(\frac{p}{a_2q^n};p\right)_\infty}\right|$ の評価を考える.

定理 1,2

Ruiming Zhang, Plancherel-Rotach asymptotics for certain basic hypergeometric series, Advances in Mathematics 217 (2008) 1588-1613

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする．正の整数 m に対して $0 < \frac{|z|q^m}{1-q} < \frac{1}{2}$ であるとき，

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_m} = (zq^m;q)_\infty = 1 + r_1(z;m),\ |r_1(z;m)| \le \frac{2|z|q^m}{1-q}$$
$$\frac{(z;q)_m}{(z;q)_\infty} = \frac{1}{(zq^m;q)_\infty} = 1 + r_2(z;m),\ |r_2(z;m)| \le \frac{2|z|q^m}{1-q}$$

が成り立つ．

いま，n は $n \ge N$ なる任意の自然数なので，$0 < \frac{|p|q^{-n-1}p^m}{1-p} < \frac{1}{2}$，
$0 < \frac{|p/b_1|q^{-n}p^m}{1-p} < \frac{1}{2}$，$0 < \frac{|p/a_2|q^{-n}p^m}{1-p} < \frac{1}{2}$，$0 < \frac{|p/a_1|q^{-n}p^m}{1-p} < \frac{1}{2}$ を満たす正の整数 m をとることはできない．そのため，

$$\left| \frac{\left(\frac{p}{b_1 q^n};p\right)_\infty \left(\frac{p}{q^{n+1}};p\right)_\infty}{\left(\frac{p}{a_1 q^n};p\right)_\infty \left(\frac{p}{a_2 q^n};p\right)_\infty} \right|$$

の評価に定理 1, 定理 2 を適用できない．定理 1,2 を適用できるように変形することを考える．

楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算

変形には定理 3, 4 を使う.

定理 3

Salem, A. (2014). Expansions and Asymptotics Associated with Basic Hypergeometric Functions and Modified q-Bessel Functions. Georgian Mathematical Journal, 21(2), 233-241.

$$
{}_1\phi_1(q^a;0;q,xq) = x^{-a}\ {}_1\phi_1(q^a;0;q,q/x),
$$
$$
x \to \infty,\ \mathrm{Re}(a) > 0,\ x \in \mathbb{R},\ |q| < 1.
$$

定理 4 (Euler)

Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R. (1999). Special Functions, Cambridge University Press.

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}(-x)^n}{(q;q)_n} = (x;q)_\infty,\ |q| < 1.
$$

分子にある q-Pochhammer 記号の評価をする．まず, 定理 4 より,

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{p}{b_1 q^n}\right)_\infty\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k(k-1)/2}}{(p;p)_k}\left(-\frac{p}{b_1 q^n}\right)^k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k(k-1)/2}(1-p)^k}{(p;p)_k}\left(-\frac{p}{(1-p)b_1 q^n}\right)^k\right|.
\end{aligned}
$$

ここで, 補題 2 を使う．

補題 2

Zhang, R. Plancherel-Rotach Asymptotics for q-Series, arXiv:math/0612216 [math.CA]

$$(1-q)^k \le (q;q)_k \le 1/(q;q)_\infty,\ \ 0 < q < 1, k \in \mathbb{N}_{\ge 0}$$

補題 2 と定理 3 より, ($B = \frac{p}{(1-p)b_1q^n}$, $C = p(1-p)b_1q^n$)

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k(k-1)/2}(1-p)^k}{(p;p)_k} (-B)^k\right| &\leq \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k(k-1)/2}(p;p)_k}{(p;p)_k} (-B)^k\right| \\
&= \left|{}_1\phi_1\left(p;0;p,\frac{p}{(1-p)b_1q^n}\right)\right| \\
&\leq \frac{C}{p}\left|{}_1\phi_1(p;0;p,C)\right| (\because \text{定理 } 3) \\
&= \frac{C}{p}\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{k(k-1)/2}(p;p)_k}{(p;p)_k} (-C)^k\right| \\
&\leq \frac{C}{p(p;p)_\infty}\left|(C;p)_\infty\right| (\because \text{定理 } 4)
\end{aligned}
$$

同様に, 次が成り立つ:

$$
\left|\left(\frac{p}{q^{n+1}}\right)_\infty\right| \leq \frac{(1-p)q^{n+1}}{(p;p)_\infty}(p(1-p)q^{n+1};p)_\infty
$$

楕円超幾何関数の精度保証付き数値計算

ここで，定理 1 より，定理 1 の仮定が満たされるように $l \in \mathbb{N}$ を取ると，

$$\begin{aligned} |(p(1-p)b_1q^n;p)_\infty| &\leq (1+2|b_1|q^Np^{l+1})|(p(1-p)b_1q^n;p)_l| \\ |(p(1-p)b_1q^n;p)_l| &\leq |(p(1-p)b_1q^N;p)_l| \ (\because n \geq N) \end{aligned}$$

が成り立つ．同様にして，

$$|(p(1-p)q^{n+1};p)_\infty| \leq (1+2q^{N+1}p^{l+1})|(p(1-p)q^{N+1};p)_l| \ (\because n \geq N)$$

も成り立つ．

次に, $1/\left(\frac{p}{a_1q^n};p\right)_\infty$, $1/\left(\frac{p}{a_2q^n};p\right)_\infty$ を評価する. 定理 3, 4 と補題 2 より,

$$
\begin{aligned}
\left|1/\left(\frac{p}{a_1q^n};p\right)_\infty\right| &= 1/\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{k(k-1)/2}}{(p;p)_k}\left(-\frac{p}{a_1q^n}\right)^k\right| \quad (\because \text{定理 } 4)\\
&= \frac{(p;p)_\infty}{(p;p)_\infty\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{k(k-1)/2}}{(p;p)_k}\left(-\frac{p}{a_1q^n}\right)^k\right|}\\
&\le \frac{1}{(p;p)_\infty\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{k(k-1)/2}(p;p)_k}{(p;p)_k}\left(-\frac{p}{a_1q^n}\right)^k\right|}\\
&= \frac{1}{(p;p)_\infty\left|{}_1\phi_1\left(p;0;p,\frac{p}{a_1q^n}\right)\right|}\\
&= \frac{1}{(p;p)_\infty|a_1|q^n\left|{}_1\phi_1\left(p;0;p,pa_1q^n\right)\right|} \quad (\because \text{定理 } 3).
\end{aligned}
$$

と評価できる. 補題 2 は 3 行目の大小比較で使用した.

さらに，$_1\phi_1$ を評価していくと，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|{}_1\phi_1(p;0;p,pa_1q^n)|} &= \frac{1}{\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{k(k-1)/2}(p;p)_k}{(p;p)_k}\left(-pa_1q^n\right)^k\right|} \\
&\le \frac{1}{\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{k(k-1)/2}}{(p;p)_k}\left(-p(1-p)a_1q^n\right)^k\right|} \quad (\because \text{補題 } 2) \\
&= \frac{1}{|(p(1-p)a_1q^n;p)_\infty|} \quad (\because \text{定理 } 4)
\end{aligned}
$$

となる．そして定理 2 より，定理 2 の仮定が満たされるように $l \in \mathbb{N}$ を取ると，

$$
\frac{1}{|(p(1-p)a_1q^n;p)_\infty|} \le (1+2|a_1|p^{l+1}q^N)/\left|(p(1-p)a_1q^n;p)_l\right|
$$

と評価される．$1/\left|(p(1-p)a_1q^n;p)_l\right|$ を評価する．

$1/|\,(p(1-p)a_1q^n;p)_l\,|$ の評価には補題 1 を用いる.

補題 1 (再掲)

$n,N\in\mathbb{N}, n\ge N, 0<q<1, c\in\mathbb{C}$ とする. $q^N\le|c|$ のとき,

$$\frac{1}{|c-q^n|}\le\frac{1}{|c-q^N|}$$

が成り立つ.

$q^N\le\frac{1}{|a_1|p(1-p)}$ のとき, 補題 1 より,

$$\begin{aligned}1/|\,(p(1-p)a_1q^n;p)_l\,| &= \frac{|a_1(1-p)|^{-l}p^{-l(l+1)/2}}{\left|\left(\frac{1}{p(1-p)a_1}-q^n\right)\cdots\left(\frac{1}{p^l(1-p)a_1}-q^n\right)\right|}\\ &\le\frac{|a_1(1-p)|^{-l}p^{-l(l+1)/2}}{\left|\left(\frac{1}{p(1-p)a_1}-q^N\right)\cdots\left(\frac{1}{p^l(1-p)a_1}-q^N\right)\right|}\\ &=1/|\,(p(1-p)a_1q^N;p)_l\,|\end{aligned}$$

となる. $1/\left(\frac{p}{a_2q^n};p\right)_\infty$ も同様に評価する.