ゼミ発表

金泉大介 (丸野研究室, 精度保証付き数値計算グループ OB)

2019 年 9 月, @柏木研究室, 数学応用数理専攻

本発表の流れ

1. 数値積分関連の質問
2. ODE/PDE 関連の質問
3. 初歩的な質問
4. JSIAM 2019 年会の土産話

数値積分関連の質問

数値積分研究者たちが直面している難点

- 次元の呪い (curse of dimensionality)
- 冪型特異点, 除去可能特異点 → 部分積分で対処
- 無限区間積分
- 振動積分 (Fourier 型積分, Laplace 型積分など)→Ooura-Mori etc.

振動積分に特化した精度保証って行われてますか？(あまり聞かない気がする)
Fourier 基底を使うときに Fourier 型積分が出てきたりしないんですか？

部分積分は

- 大学受験では再帰型積分 (減衰振動など) に対する定石として使われている
- 複素解析では常套手段として使われている (cf: Ablowitz-Fokas chapter 6)
- 平山弘先生が少なくとも 2000 年代から数値積分に応用している [1]

→ これらを念頭に精度保証で部分積分を使う着想に至ったのですか？

平山弘. (1997). 日本応用数理学会論文誌, 7(2), 131-138.
平山弘, 館野裕文, & 平野照比古. (2004). 数理解析研究所講究録 1395: 190-195.

ODE/PDE 関連の質問

- T 先生: 3 次元多様体上で PDE を精度保証したい！
- A くん: 球体, 楕円体上で Henon eq. を精度保証したい！

3 次元多様体上で ODE/PDE を精度保証したという実例ってありますか？

3 次元多様体上で基底を作ったり, Newton-Kantorovich を適用できますか？
(i.e. 関数空間上での議論を多様体に拡張できますか？)

「基底を張る」

Fourier 基底を張る = Fourier 級数で関数近似する

Legendre 基底を張る = Legendre 多項式で多項式近似する

という認識であってますか？

ODE/PDE 関連の質問

Fourier 変換は (精度保証では) Fourier 基底で活用されているが, Laplace 変換を精度保証で活用する事例を聞かない気がする.

Laplace 変換の活用例

Burgers eq.

$\downarrow$

Cole-Hopf 変換 (Laplace 変換から導出できる)

$\downarrow$

heat eq.

cf: Ablowitz-Fokas chapter 6

Laplace 変換で基底を張る流儀ってあったりしますか？

ODE/PDE 関連の質問

関数解析的な手法を使わない ODE の精度保証法が 2 タイプに分類されることを先日の JSIAM で初めて知りました.

- Taylor 級数型 →Lohner 法, kv (PSA), · · · (色々あるらしい)
- spectral method 型 →Urabe-Galerkin[1], radii polynomial approach[2]

→ 解法の使い分けって確立されてますか ?

柏木先生は PSA を数値積分, ODE の精度保証に応用していますが, 調べてみたら平山弘先生は少なくとも 2000 年代から Taylor 級数を数値積分, ODE の解法に応用していて, 並列化もできているようです.
→ 柏木先生は平山先生 (もしくは他の方々) の影響を受けてたりするのかも ?

stiff eq. に対して spectral method を適用するとどうなる ?

stiffness についていろいろ教えていただき, 方程式の非線形性と関係あるのかもしれないということが分かった.

高階 eq. (高階 Painleve 等) だと stiff になりやすいという傾向ってありますか ?

[1] 大石先生の非線形解析入門を参照

[2] Hungria, A., Lessard, J. P., & Mireles-James, J. D. (2014). Math. Comp.

ODE/PDE 関連の質問

- 線型 ODE において stiffness は行列の条件数で決まる
- 前処理 (precondition) は行列の条件数を下げるために使われる

前処理を使って stiff な線形 ODE を解きやすくすることができるのでは？

ODE/PDE 関連の質問

JSIAM 年会で 3 次元 Allen-Cahn eq. の精度保証についてお話をお聞きましたが, メモリが大変そうなので並列化が必要なのかなと思いました.

中尾先生のやり方や優解劣解法って並列化に対応していますか？

JSIAM 年会の 40 分講演で (Laplace, Maxwell のように時間発展しない) PDE の固有値問題が扱われました (招待されるほどなので世界的に流行っているはず).

時間発展する方程式 (KdV, mKdV など) の固有値問題はどう難しくなりますか？(時間発展する方程式だと各時間ごとに近似解を求める必要が出てきて精度保証が難しくなるというのは理解できます)

ODE/PDE 関連の質問

有限要素法 (FEM) のライブラリが乱立している気がします (個人の感想).

- FreeFem++[3] (JSIAM 年会で講習会がありました)
- FEnics Project[4]
- FEMhub[5]

どうやって差別化してるの？

最近は「FEM× 機械学習」みたいな研究もあるらしいです [6].
→ こっち方面の応用もあるのでは？

[3] 有限要素法で学ぶ現象と数理—FreeFem++数理思考プログラミング—, 日本応用数理学会 監修・大塚 厚二・高石 武史著, 共立出版.

[4] Logg, A., Mardal, K. A., & Wells, G. (Eds.). (2012). Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book. Springer Science & Business Media.

[5] http://femhub.com/

[6] https://www.ricos.co.jp/tech-0101_ml_fem_geometry/

ODE/PDE 関連の質問

解法の汎用性

$$\text{FDM} < \text{FEM} < \text{FVM}$$

使えるならみんな FVM を使いたいはず.

- FEM の誤差評価については研究が多い (大石先生の本)
- FVM の誤差評価に関する研究はあまり聞かない気がする
  $\longrightarrow$ 何でだろう？

初歩的な質問

数学関数の精度保証や Type II PSA は Taylor 級数とその剰余項に基づいているが, 剰余項にもいろいろある.

- Peano 型
- Lagrange 型
- Cauchy 型
- Bernoulli 型
- Roche-Schlomilch 型
- 積分型

$\longrightarrow$ 剰余項の使い分けって確立されてますか？ (可積分系の先生に聞かれました)

初歩的な質問

数値線形代数や計算幾何学には「分割統治法」という概念があるそうです.

> 分割統治法（*divide-and-conquer method*）: そのままでは解決できない大きな問題を小さな問題に分割し, その全てを解決することで最終的に最初の問題全体を解決するという問題解決の手法 *(wikipedia)*

Schur 補元, block CG 系 $\in$ 分割統治法

慣習的にはこういう言い方はしない気がしますが, この解釈あってますか？

初歩的な質問

「最適化」 (Optimization) と名のつく言葉が最近増えている気がします.

例: Search Engine Optimization
(検索エンジン最適化, 検索エンジンでサイトを上位に表示させる裏技)

$\longrightarrow$ 数理最適化が応用されてたりするのですか ?
(数理最適化と関係ないなら, この文脈での「最適化」ってどういう意味ですか ?)

初歩的な質問

kv ライブラリは 2019 年 9 月現在 Version 0.4.48 になっている.

- Version 1 はいつ出るのだろうか？
- Version の番号はどうやってつけてる？

JSIAM 2019 年会の土産話

高安-石毛: "Gauss の超幾何微分方程式のモノドロミー行列に対する精度保証"
モノドロミー行列：線型 ODE を特徴づける行列
→ これが分かれば ODE の解が解析接続によりどう変わるかを完全に把握できる.

この話は合流型超幾何, Heun eq. (超幾何の確定特異点 4 つ ver.) にも適用可能だそうです. (Fuchs type なら何でもいけるかも)

今後は多変数超幾何 (Picard-Fuchs type eq.) への適用を目指していて, 超弦理論で現れる Calabi-Yau eq. を念頭に置いているようです.
→ linear stiff eq. らしいです (係数行列の条件数を調べてみると面白いかも)

神保道夫. (2003). 複素関数入門. 岩波書店.

JSIAM 2019 年会の土産話

ポスター発表で dLV (固有値問題に対する可積分アルゴリズム) の話があったので, 色々教えてもらいました.

- dLV で固有ベクトルまでは求まらない
- 固有ベクトルを求めるには Wielandt の逆反復か Jacobi 法を使うしかないようです.

  固有値・固有ベクトルがすべて同時に求まる点で, この方法 *(Jacobi* 法*)* は捨てがたい *(by* 山本先生の数値解析入門*, 2003, p105)*

  国外で *Jacobi* 法の安定性が再評価されている *(by* 山本先生の数値解析入門*, 2003, p105)*

今でも Jacobi 法ブームってありますか ?