中間発表

金泉大介 (M2)

July 29, 2018

本発表の流れ

1. 研究背景
   - 精度保証付き数値計算
   - q-特殊関数
2. 研究成果
   - q-Bessel 関数の実根探索
   - 行列 q-特殊関数の精度保証付き数値計算
3. 今後の課題

研究背景

- これまで様々な特殊関数の零点探索が行われてきたが (Gil-Segura (2014), Segura (2013), $\cdots$), 可積分系などで現れる q-特殊関数 (特殊関数の q 類似) の零点探索はまだない.
- 精度保証付き数値計算により q-Bessel 関数の実根を得ることを目指す.

精度保証付き数値計算

近似値の計算をすると同時に計算結果の (数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算のこと. 真値を含む区間を結果として出力する.

q 類似

- パラメータ q を加える一般化
- $q \to 1$ としたとき元に戻る

研究の意義

特殊関数の零点には様々な応用がある.

- 直交多項式の零点 $\longrightarrow$Gauss 型積分公式
- Bessel 関数の零点 $\longrightarrow$ 新しい数値積分公式 (Ogata-Sugihara)

q-特殊関数の零点探索は q-特殊関数の研究に役立つだけでなく, 新たな積分公式の開発にもつながる可能性がある.

区間演算

精度保証付き数値計算では" 区間演算" という技術により数値計算の際に生じる誤差を把握している.

区間演算

大石進一 (2000). 精度保証付き数値計算, コロナ社.

区間演算を行う際は数を閉区間に置き換えて下記のルールに従い計算している.
($\bar{x}$ が上限, $\underline{x}$ が下限,$[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ とする)

- 加算: $[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$
- 減算: $[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$
- 乗算: $[x] \times [y] = [\min(\underline{xy}, \underline{x}\bar{y}, \underline{y}\bar{x}, \bar{x}\bar{y}), \max(\underline{xy}, \underline{x}\bar{y}, \underline{y}\bar{x}, \bar{x}\bar{y})]$
- 除算: $[x]/[y] = [\min(\underline{x/y}, \underline{x}/\bar{y}, \bar{x}/\underline{y}, \bar{x}/\bar{y}), \max(\underline{x/y}, \underline{x}/\bar{y}, \bar{x}/\underline{y}, \bar{x}/\bar{y})]$
(ただし $[y]$ は $\mathbf{0}$ を含まない区間とする)

精度保証付き数値計算で扱う誤差

精度保証付き数値計算では数値計算による誤差を扱う.

数値計算による誤差

大石進一. (2000). 精度保証付き数値計算, コロナ社.

丸め誤差: 実数を計算機で表現可能な数に置き換えたことによる誤差
打切り誤差: 無限回やる操作を有限で打ち切ったことによる誤差
離散化誤差: 数理モデルを多項式や漸化式に変換した際の誤差

ただし, モデル誤差 (数理モデルそのものの誤差) は扱わない.

q-特殊関数

q-特殊関数はパラメータ q を加えた特殊関数の拡張版であり, q-微分や q-積分を使う q-解析学に適合するように定義される (文字 q を使うだけの関数は除く).

q-微分 (Jackson 微分)

$$D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$$

q-積分 (Jackson 積分)

$$\int_0^1 f(t) \mathrm{d}_q t := (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} f(q^n) q^n$$

堀田良之, 渡辺敬一, 庄司俊明, 三町勝久 (2004). 群論の進化, 代数学百科 I, 朝倉書店.
Souichiro Ikebe, Graphics Library of Special Functions.

http://math-functions-1.watson.jp/index.html

今回は 2 種類の q-Bessel 関数を使って実験する. (ただし $|q| < 1, \nu \in \mathbb{C}$)

$$J_\nu^{(2)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0\phi_1\left(-;q^{\nu+1},q,-\frac{q^{\nu+1}x^2}{4}\right),\ x \in \mathbb{C},$$

$$J_\nu^{(3)}(x;q) := \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}x^\nu\ {}_1\phi_1(0;q^{\nu+1},q,qx^2),\ x \in \mathbb{C},$$

$$(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k),\ (a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n (q\text{-Pochhammer 記号}),$$

$${}_r\phi_s(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_s;q,z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n\left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+s-r} z^n}{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n(q;q)_n}.$$

上から順に Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数とよばれている. これらは q-Painlevé III 型方程式の特殊解を記述する (Kajiwara-Ohta-Satsuma (1995), Kajiwara-Masuda-Noumi-Ohta-Yamada (2004)).

q-超幾何関数 (ただし, $l = 1 + s - r$.)

$$ {}_r\phi_s(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; \beta_1, \cdots, \beta_s; q, z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{r} (\alpha_i; q)_n \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l z^n}{\prod_{j=1}^{s} (\beta_j; q)_n (q; q)_n} $$

の精度保証付き数値計算 (打切り誤差の評価) には次を使用する.

誤差評価 ($r \leq s$ のとき)

$T(n) := \frac{\prod_{i=1}^{r} (\alpha_i;q)_n \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l z^n}{\prod_{j=1}^{s} (\beta_j;q)_n (q;q)_n}$ とおくと, $r \leq s$, $|\beta_j| \leq q^{-N}$ のとき,

$$ \left| \sum_{n=N}^{\infty} T(n) \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |T(n)| \leq C|T(N)| $$

,

$$ C = \begin{cases} \frac{1}{1-D} & (D < 1) \\ \infty & (D \geq 1) \end{cases}, D = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{|\beta_i - \alpha_i| q^N}{|1 - \beta_i q^N|}\right) \prod_{i=r+1}^{s+1} \frac{|z| q^{Nl}}{|1 - \beta_i q^N|}. $$

ただし, $\beta_{s+1} := q$.

q-超幾何関数 (ただし, $l = 1 + s - r$.)

$$ {}_r\phi_s(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; \beta_1, \cdots, \beta_s; q, z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i; q)_n \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l z^n}{\prod_{j=1}^{s}(\beta_j; q)_n (q; q)_n} $$

の精度保証付き数値計算 (打切り誤差の評価) には次を使用する.

誤差評価 ($r = s + 1$ のとき)

$r = s + 1$, $|\beta_j| \le q^{-N}$ のとき,

$$ \left| \sum_{n=N}^{\infty} T(n) \right| \le \sum_{n=N}^{\infty} |T(n)| \le C|T(N)| $$

,

$$ C = \begin{cases} \frac{1}{1-D} & (D < 1) \\ \infty & (D \ge 1) \end{cases}, D = |z| \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{|\beta_i - \alpha_i|q^N}{|1 - \beta_i q^N|}\right) E, $$

$$ E = 1 + \frac{q^N |q - \alpha_{s+1}|}{|1 - q^{N+1}|}. $$

$(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算には次を使う.

Theorem

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. 正の整数 m に対して $0 < \frac{|z|q^m}{1-q} < \frac{1}{2}$ であるとき,

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_m} = 1 + r(z;m), \quad |r(z;m)| \leq \frac{2|z|q^m}{1-q}$$

が成り立つ.

R. Zhang (2008), Plancherel-Rotach Asymptotics for Certain Basic Hypergeometric Series, Advances in Mathematics 217, 1588-1613.

x の絶対値が大きい時の対策

q-超幾何関数と q-Pochhammer 記号の精度保証付き数値計算ができたことから, 2 つの q-Bessel 関数を精度保証付き数値計算できる. だが, このままだと x の絶対値が大きいときに結果の区間幅が `inf` となりうる.

実験環境

OS: Ubuntu14.04LTS, コンパイラー: gcc version 4.8.4
CPU: Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz × 8
メモリ: 15.6GB, kv ライブラリのバージョン: 0.4.41

実験結果 (Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数, Hahn-Exton の q-Bessel 関数)

数値例: $\boldsymbol{q = 0.1}$, $\boldsymbol{x = 40000}$, $\boldsymbol{\nu = 4.5}$
精度保証付き数値計算の結果 (区間): [`-inf`, `inf`]

級数の計算時に x^n の部分が `inf` となるからである. 級数に x^n がない別表現を用いる.

Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数の別表現

Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数の別表現

Koelink, H. (1993). Hansen-Lommel Orthogonality Relations for Jackson's q-Bessel Functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 175, 425-437.

公式:

$$(w;q)_\infty \ {}_0\phi_1(-;w;q,wz) = \ {}_1\phi_1(z;0;q,w)$$

より, Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数は次の別表現を持つ:

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(x/2)^\nu}{(q;q)_\infty} \ {}_1\phi_1(-x^2/4;0;q,q^{\nu+1}).$$

級数の中身に x^n を持たないような別表現である.

Jackson の第 2 種 q-Bessel 関数の別表現

前ページの公式を使っても計算がうまくいかないときは次を使う [1]:

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(x/2)^\nu(\sqrt{q};q)_\infty}{2(q;q)_\infty} \times [f(x/2, q^{(\nu+1/2)/2}; q) + f(-x/2, q^{(\nu+1/2)/2}; q)],$$

$$f(x,a;q) := (\mathrm{i}ax;\sqrt{q})_\infty \, {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} a, & -a, & 0 \\ -\sqrt{q}, & \mathrm{i}ax & \end{matrix}; \sqrt{q}, \sqrt{q}\right).$$

[1] Chen, Y., Ismail, M., Muttalib, K. (1994). Asymptotics of Basic Bessel Functions and q-Laguerre Polynomials, Journal of Computational and Applied Mathematics, 54, 263-272.

Hahn-Exton の q-Bessel 関数の別表現

公式

Koornwinder, T., Swarttouw, R. (1992). On q-Analogues of the Fourier and Hankel Transforms. Transactions of the American Mathematical Society, 333, 445-461.

$$(w;q)_\infty \quad {}_1\phi_1(0;w;q,z) = (z;q)_\infty \quad {}_1\phi_1(0;z;q,w)$$

Hahn-Exton の q-Bessel 関数の別表現

Daalhuis, A. (1994). Asymptotic Expansions for q-Gamma, q-Exponential, and q-Bessel functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 186, 896-913.

定理より, Hahn-Exton の q-Bessel 関数は次の別表現を持つ:

$$J_\nu^{(3)}(x;q) = x^\nu \frac{(x^2q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} \, {}_1\phi_1(0;x^2q;q,q^{\nu+1}).$$

級数の中身に x^n を持たないような別表現である.

Definition

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \quad \text{(Bessel の微分方程式)}$$

の解の一つである次の関数を Bessel 関数と呼ぶ:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+k+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Bessel 関数の零点探索については, 以下の方法が知られている.

- Bessel 関数に対して Newton 法を適用する [2]
- Bessel 関数の比 $\frac{J_\nu(x)}{J_{\nu-1}(x)}$ に対して Newton 法を適用する [3]
- $x_{n+1} = x_n - \arctan\left(\frac{J_\nu(x_n)}{J_{\nu-1}(x_n)}\right)$ を使う [3]

$\arctan$ を使う方法に着目する.

[2] Garcia, A., (2015), Numerical Methods for Physics, 2nd Edition, Pearson.

[3] Gil, A., Segura, J., Temme, N. (2007), Numerical Methods for Special Functions, Society for Industrial and Applied Mathematics.

q-Bessel 関数の実根探索

$$x_{n+1} = x_n - \arctan\left(\frac{J_\nu(x_n)}{J_{\nu-1}(x_n)}\right)$$

は初期値を十分近くとると Bessel 関数の零点に収束するということが知られている.

$$x_{n+1} = x_n - \arctan\left(\frac{J_\nu(x_n;q)}{J_{\nu-1}(x_n;q)}\right)$$

は初期値を十分近くとると q-Bessel 関数の零点に収束するのでは?

実験結果

Jackson の 2 種 q-Bessel 関数, 初期値 $x = 3.3, \nu = 1.5, q = 0.5$

反復の結果 (反復 11 回):

$[3.3617264290813744, 3.3617269953048182]$

反復で得られた区間の下限による値域:

$[2.5272233649654199 \times 10^{-7}, 2.5272239588600865 \times 10^{-7}]$

反復で得られた区間の上限による値域:

$[-1.1332619173690958 \times 10^{-6}, -1.1332618584506411 \times 10^{-6}]$

反復で得られた区間の下限の値域, 上限の値域は正負が異なるため中間値の定理より反復で得られた区間内に少なくとも 1 つ解がある. 零点存在範囲が得られた.

実験結果

Hahn-Exton の q-Bessel 関数, 初期値 $x = 6.5, \nu = 4.5, q = 0.8$

反復の結果 (反復 5 回):
$[0.0958100480490693\mathbf{4}, 2.2425868252899446]$
反復で得られた区間の下限による値域:
$[0.0014753173015071661, 0.0014753173015524919]$
反復で得られた区間の上限による値域:
$[-4.5808580979457512, -4.580858022855625]$

反復で得られた区間の下限の値域, 上限の値域は正負が異なるため中間値の定理より反復で得られた区間内に少なくとも 1 つ解がある. 零点存在範囲が得られた.

q-Bessel 関数の実根探索

$$x_{n+1} = x_n - \arctan\left(\frac{J_\nu(x_n;q)}{J_{\nu-1}(x_n;q)}\right)$$

は初期値を十分近くとると q-Bessel 関数の零点に収束するかもしれないという示唆を得た.

$$x_{n+1} = x_n - \arctan_q\left(\frac{J_\nu(x_n;q)}{J_{\nu-1}(x_n;q)}\right)$$

は初期値を十分近くとると q-Bessel 関数の零点に収束するのでは?

これまで様々な q-特殊関数 (q-Bessel, q-exp, q-sin,$\cdots$) が研究されてきたが, q-arctan に関する研究はない.
→q-arctan をどうやって定義する?

q-arctan の定義 (その 1)

Definition

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}, \quad (a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1). $$

$$ \arctan(x) = x\ {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right), \quad (|x|<1) \quad \text{(Taylor 展開)}, $$

$$ \arctan(x) = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad \arctan(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{4} $$

より，

$$ \arctan_q(x) := \begin{cases} x\ {}_2\phi_1\left(q, q^{\frac{1}{2}}; q^{\frac{3}{2}}; -x^2\right), & (|x|<1), \\ \pm\frac{\pi_q}{4} & (x=\pm 1), \\ \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi_q}{2} - \frac{1}{x}\ {}_2\phi_1\left(q, q^{\frac{1}{2}}; q^{\frac{3}{2}}; -\frac{1}{x^2}\right) \end{cases} $$

と定められる (ただし $\pi_q := \left(\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$, $\quad \Gamma_q(x) := \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}$).

q-arctan の定義 (その 2)

公式

Castellanos, D. (1988), The Ubiquitous Pi. Part I. Math. Mag. 61, 67-98.

$$\arctan(x) = \frac{x}{1+x^2}\ {}_2F_1\left(1, 1; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

上の公式から, q-arctan を

$$\arctan_q(x) := \frac{x}{1+x^2}\ {}_2\phi_1\left(q, q; q^{\frac{3}{2}}; q; \frac{x^2}{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

と定めることもできる.

q-arctan の定義 (q-積分型)

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

なので,

$$\arctan_q^{int}(x) := \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}_q t = x(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1+x^2 q^{2n}}$$

と定義することも可能である.

q-arctan(q-積分型)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1+x^2q^{2n}}$ の打切り誤差を評価する. $T(n) := \frac{q^n}{1+x^2q^{2n}}$ とおくと $x \in \mathbb{R}, n \geq N$ のとき,

$$\left| \frac{T(n+1)}{T(n)} \right| = q \left| \frac{1+x^2q^{2n}}{1+x^2q^{2n+2}} \right| \leq q(1+x^2q^{2N}) =: D$$

であり, $D < 1$ のとき,

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} T(n) \right| \leq \frac{T(N)}{1-D}$$

となる.

数値実験

ここまで導入した 3 つの q-arctan について数値実験を行った.

$x = 1.5,\ q = 0.1$

1 番目:[$\mathbf{25.425717946994236}, \mathbf{25.425717946998969}$]
2 番目:[$\mathbf{1.42175327653972}, \mathbf{1.42175327653992}$]
積分型:[$\mathbf{0.5624109153806648}9, \mathbf{0.5624109153806763}4$]

3 つの q-arctan は一般には異なる値を取る関数たちであることが分かった.

実験結果

q-arctan（積分型）を使って実験を行った.

Jackson の 2 種 q-Bessel 関数, 初期値 $x = 3.3, \nu = 1.5, q = 0.5$

反復の結果 (反復 11 回):
$[3.3617264194240701, 3.361727002402478]$
反復で得られた区間の下限による値域:
$[2.7636118073791531 \times 10^{-7}, 2.7636124059863484 \times 10^{-7}]$
反復で得られた区間の上限による値域:
$[-1.1506353552420116 \times 10^{-6}, -1.1506352954317914 \times 10^{-6}]$

反復で得られた区間の下限の値域, 上限の値域は正負が異なるため中間値の定理より反復で得られた区間内に少なくとも 1 つ解がある. 零点存在範囲が得られた.

実験結果

q-arctan（積分型）を使って実験を行った.

Hahn-Exton の q-Bessel 関数, 初期値 $x = 6.5, \nu = 4.5, q = 0.8$

反復の結果 (反復 4 回):
$[0.5297388404536764\mathbf{7}, 2.2374167684626767]$
反復で得られた区間の下限による値域:
$[0.4980629706212637, 0.4980629710774291\mathbf{4}]$
反復で得られた区間の上限による値域:
$[-4.1153699782227538, -4.1153699110736381]$

反復で得られた区間の下限の値域, 上限の値域は正負が異なるため中間値の定理より反復で得られた区間内に少なくとも 1 つ解がある. 零点存在範囲が得られた.

行列 q-特殊関数の精度保証付き数値計算

行列値関数

統計学などで応用がある.

q-特殊関数

可積分系などの数理物理で重要視される.

↘　↙

行列 q-特殊関数は研究されるべき重要な関数かもしれない [4,5].

$$(A;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(I - Aq^k),\ (A;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(A;q)_n \quad \text{(行列 } q\text{-Pochhammer 記号)}$$

$$\Gamma_q(A) := (q;q)_\infty (q^A;q)_\infty^{-1}(1-q)^{I-A} \quad \text{(行列 } q\text{-gamma 関数)}$$

↓

行列 q-特殊関数の精度保証付き数値計算が重要になりうる.

[4] Salem, A. (2012). On a q-gamma and a q-beta matrix functions. Linear and Multilinear Algebra, 60(6), 683-696.

[5] Salem, A. (2014). The basic Gauss hypergeometric matrix function and its matrix q-difference equation. Linear and Multilinear Algebra, 62(3), 347-361.

$(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算には次を用いた.

Theorem

$z \in \mathbb{C}$, $0 < q < 1$ とする. $m \in \mathbb{N}$ に対して $\frac{|z|q^m}{1-q} < \frac{1}{2}$ であるとき,

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_m} = 1 + r(z;m), \quad |r(z;m)| \le \frac{2|z|q^m}{1-q}.$$

R. Zhang (2008), Plancherel-Rotach Asymptotics for Certain Basic Hypergeometric Series, Advances in Mathematics 217, 1588-1613.

$(A;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算には次を使う.

Theorem

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $0 < q < 1$ とする. $m \in \mathbb{N}$ に対して $\frac{||A||q^m}{1-q} < \frac{1}{2}$ かつ $(A;q)_m$ が正則であるとき,

$$(A;q)_\infty = (A;q)_m(1 + r(A;m)), \quad ||r(A;m)|| \le \frac{2||A||q^m}{1-q}.$$

$(A;q)_m$ が正則なので $(A;q)_\infty = (A;q)_m (Aq^m;q)_\infty$ である.

Lemma

$$(A;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}(-A)^n.$$

Salem, A. (2012). On a q-gamma and a q-beta matrix functions. Linear and Multilinear Algebra, 60(6), 683-696.

補題より,

$$(Aq^m;q)_\infty = 1 + r(A;m), \quad r(A;m) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}(-Aq^m)^n.$$

そして $\frac{||A||q^m}{1-q} < \frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned} ||r(A;m)|| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{||A||q^m}{1-q}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \quad \left(\because \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} \geq n! q^{n(n-1)/2}\right) \\ &< \frac{||A||q^m}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n!} = \frac{||A||q^m\sqrt{e}}{1-q} < \frac{2||A||q^m}{1-q}. \end{aligned}$$

□

$(A;q)_\infty^{-1}$ の精度保証付き数値計算には次を使う ($A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $0<q<1$).

Theorem

$m \in \mathbb{N}$ に対して $\frac{||A||q^m}{1-q} < \frac{1}{2}$ かつ $(A;q)_m$ が正則であるとき,

$$(A;q)_\infty^{-1} = (A;q)_m^{-1}(1+r(A;m)), \quad ||r(A;m)|| \le \frac{2||A||q^m}{1-q}.$$

$(A;q)_m$ が正則なので $(A;q)_\infty^{-1} = (A;q)_m^{-1}(Aq^m;q)_\infty^{-1}$ である.

Lemma

$$(A;q)_\infty^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_n} A^n, \quad ||A|| < 1.$$

Salem, A. (2012). On a q-gamma and a q-beta matrix functions. Linear and Multilinear Algebra, 60(6), 683-696.

補題より,

$$(Aq^m;q)_\infty^{-1} = 1 + r(A;m), \quad r(A;m) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_n}(Aq^m)^n.$$

そして $\frac{||A||q^m}{1-q} < \frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned} ||r(A;m)|| &\leq \frac{||A||q^m}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{||A||q^m}{1-q} \right)^n \quad (\because (q;q)_n \geq (1-q)^n) \\ &< \frac{||A||q^m}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{2||A||q^m}{1-q}. \end{aligned}$$

□

実装上の難点

$(A;q)_m$ の正則性を (高速で) 判定すること

今後の課題

q-Bessel 関数の実根探索

- $x_{n+1} = x_n - \arctan\left(\frac{J_\nu(x_n)}{J_{\nu-1}(x_n)}\right)$ の導出を理解する.
- $x_{n+1} = x_n - \arctan\left(\frac{J_\nu(x_n;q)}{J_{\nu-1}(x_n;q)}\right)$ の収束を理論的に示す.
- 実根の存在は示せたが, 一意性は示せなかった.
  $\longrightarrow$ どうすれば一意性を示せるか? (後期のゼミで発表)

行列 q-特殊関数

- 高次元行列の場合どのように精度保証付き数値計算するか?
- どういう性質を持つか研究する.

上記の内容をまとめて修士論文とすることを目指す.