**修 士 論 文 概 要 書**

Summary of Master’s Thesis

Date of submission: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_ (MM/DD/YYYY)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 専攻名（専門分野）  Department | 数学応用数理専攻 | 氏 名  Name | 金泉大介 | 指 導  教 員  Advisor | 丸野健一　　　　印  Seal |
| 研究指導名  Research guidance | 非線形システム  研究 | 学籍番号  Student ID number | 5117A011-3 |
|
| 研究題目  Title | *q*-特殊関数の精度保証付き数値計算と零点探索 | | | | |

**研究背景**

18 世紀から19 世紀にかけての自然科学の発展の中で現実の問題を記述する微分方程式の解を特殊関数とよぶようになったようである. これらの特殊関数の多くはGauss の超幾何関数のパラメータが特殊な場合, あるいは極限として与えられることが分かり, 漸化式, 積分表示式,加法及び乗法公式, 母関数, 漸近展開などが研究されてきた. 20 世紀になると微分方程式のモノドロミー群やLie 群の表現などを用いて特殊関数に統一的な視点を与える理論が整備され, Gauss の超幾何関数を特殊な場合として含む新しい特殊関数が次々と生まれてきている. また計算機の発達に伴って特殊関数を数値計算で扱う研究も進展している.

おおざっぱには特殊関数は三角関数の高級な親戚といえるだろう. 例えばBessel関数や超幾何関数は三角関数を特別な場合として含んでいる. 近年は整数論においてKurokawa等によって三角関数の多重化である多重三角関数が研究されている. 三角関数は古来より三角法として天文学や航海術に用いられ, 近代にいたってFourier 級数理論の発達により, 数学, 物理学, 工学の諸分野で様々に応用されている. 特殊関数は三角関数よりも複雑な基礎理論の上に成り立っているが, それだけ多様な性質を持ち, 特殊関数を使いこなすことで理工学上の多くの問題に厳密な手法を与えることができる. 今日の科学が三角関数抜きにしては成り立たないことは自明であるが, 特殊関数も同様にいやそれ以上に有効な道具になるのである.

可積分系などの数理物理の世界には，多様な特殊関数が住んでいるが, それらの中には性質が十分に理解されていないものも多くある．多様な特殊関数の性質を探索する手段の一つとして，様々な力学系の問題に適用され強力なツールとなりつつある精度保証付き数値計算が考えられる.

精度保証付き数値計算とは近似値の計算をすると同時に計算結果の(数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算のことである. 計算する際は数を区間に置き換えて計算し, 真値を含む区間を結果として出力する. これにより真値が含まれる区間を知ることができるだけでなく,区間の幅から計算に混入した誤差を把握できる.

本論文では，可積分系などの数理物理で現れる様々な特殊関数（つまり可積分な微分方程式または差分方程式の解）の精度保証付き数値計算法の確立を目指し，*q*-特殊関数(特殊関数の*q*-類似) の精度保証付き数値計算についての研究結果を報告する．これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算法が開発されてきたが, 可積分系などの数理物理で現れる*q*-特殊関数の精度保証付き数値計算法はまだない. *q*-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するため, 可積分系で現れるJacksonの第2種*q*-Bessel 関数, Hahn-Extonの*q*-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法について研究を行い, 交代級数の性質を用いる方法, C++による精度保証付き数値計算ライブラリであるkv ライブラリの精度保証付き数値積分パッケージを用いる方法, 二重指数関 数型積分公式 (DE 公式) を用いる方法と漸近展開を用いる方法を提案し，その有効範囲を議論する. また, *q*-Bessel関数の零点を精度保証付き数値計算する手法に関する研究成果も報告する.

**提案手法**

*q*-Bessel関数は*q*-超幾何関数と*q*-Pochhammer記号を用いて定義されるので, *q*-超幾何関数と*q*-Pochhammer記号を精度保証付き数値計算すればよい. *q*-超幾何関数の精度保証付き数値計算するために打切り誤差の評価を本論文で行った. *q*-Pochhammer記号の精度保証付き数値計算には打切り誤差に関する定理[Z]を使う. 以上の準備の下で*q*-Bessel関数を精度保証付き数値計算するが, 上記の方法でうまくいかない場合は*q*-Bessel関数の別表現[K, CIY, D]を用いて計算する. kv ライブラリの精度保証付き数値積分パッケージを用いる方法では定理[Z]を使って被積分関数を変形する.

次に零点探索の手法について述べる. Bessel関数の零点探索ではBessel関数にNewton法を適用する方法[G], Bessel関数の比にNewton法を適用する方法[GST]が知られている. しかし*q*-Bessel関数の導関数を計算する技術はないため, Newton法を適用できない. そこでNewton法の代わりに*q*-Newton法[RSM]の適用を試みたが零点が得られる前に零除算が発生してしまうことがある. そこで本論文では*q*-Newton法の改良を提案する.

**参考文献**

[Z] R. Zhang (2008): Adv. Math., 217, 1588-1613.

[K] H. Koelink (1993): J. Math. Anal. Appl., 175, 425-437.

[CIY] Y. Chen, M. Ismail and K. Muttalib (1994): J. Comput. Appl. Math., 54, 263-272.

[D] A. Daalhuis (1994): *J. Math. Anal. Appl.*, 186, 896{913.

[G] A. Garcia (2015): Numerical Methods for Physics, Pearson.

[GST] A. Gil, J. Segura and M. Temme (2007): Numerical Methods for Special Functions,

Society for Industrial and Applied Mathematics.

[RSM] P. Rajkovi\_c, M. Stankovi\_c and S. Marinkovi\_c (2002): Mat. Vesnik, 54, 171-178.