# 多元微积分与级数

by Dait at DEP 00, THU

2021/3/31 - 2022/8/28

## 目录

# 1 多元函数微分

**定义 1.0.1: 向量和多元函数**

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ 向量

$$X := [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}},$$

定义在 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的 $n$ 元函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

$f_1, f_2, \ldots, f_m : \Omega \to \mathbb{R}$ 构成向量值函数 $F = [f_1, f_2, \ldots, f_m]^{\mathrm{T}}$.

## 1.1 偏导数

**定义 1.1.1**

$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的基底，则 $f$ 在 $X_0$ 点关于 $x_i$ 的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(X_0 + t\hat{e}_i) - f(X_0)}{t},$$

$f$ 的全微分

$$\mathrm{d}f(X_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\,\mathrm{d}x_i. \tag{1.1}$$

有时用 $\partial_i f$ 比 $\partial f / \partial x_i$ 更好.

**定理 1.1.1: 可微性判定**

对二元函数 $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ 在 } X_0 \text{ 连续，} \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \text{ 存在}$$

$$\Downarrow$$

$$f \text{ 在 } X_0 \text{ 可微性}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(X) - \left[f(X_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\Delta y\right] = o\left(\|\Delta X\|\right)$$

其中 $\Delta X \equiv [\Delta x, \Delta y]^{\mathrm{T}}$.

## 1.2　方向导数和梯度

**定义 1.2.1**

$f$ 可微，其沿单位向量 $\hat{\ell} = [\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n]$ 方向的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0) := \lim_{t\to 0}\frac{f(X_0 + t\hat{\ell}) - f(X_0)}{t};$$

梯度

$$\nabla f := \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}}.$$

因此方向导数也可以看做

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(X_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)\cos\alpha_i = \nabla f(X_0)\cdot\hat{\ell}. \tag{1.2}$$

## 1.3　高阶偏导数

**定义 1.3.1**

若 $f/x_i$ 对 $x_j$ 的偏导存在，则记二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$$

也可记作 $\partial_{ji} f$.

**定理 1.3.1: 二阶偏导的存在性判定**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ 和 } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ 中一个在 } X_0 \text{ 连续}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

## 1.4　向量值函数微分

**定义 1.4.1: Jacobi 矩阵**

向量值函数 $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{d}F = J_F\,\mathrm{d}X.$$

式中的矩阵称为 Jacobi 矩阵

$$J_F \equiv \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}.$$

$m=n$ 时，对应有 Jacobi 行列式

$$\frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} := \det J_F$$

## 1.5　复合函数微分

**定理 1.5.1**

$G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$, $Y_0=G(X_0)$，则下面三个结论是等价的

(1) $\mathrm{d}(F\circ G)(X_0)=\mathrm{d}F(Y_0)\,\mathrm{d}G(X_0)$;

(2) $J_{F\circ G}(X_0)=J_F(Y_0)J_G(X_0)$;

(3) $\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X_0)=\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(Y_0)\dfrac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(X_0)$.

特别的，当 $k=1$ 即 $F=f$ 为单值函数时

$$\frac{\partial f\circ G}{\partial x_i}(X_0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_j}(Y_0)\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X_0). \tag{1.3}$$

例：$\dfrac{\partial f(x,y,x^2)}{\partial x}=\partial_1 f(x,y,x^2)+2x\,\partial_3 f(x,y,x^2)$

## 1.6　隐函数

**定理 1.6.1: 二元隐函数**

给定 $f(x,y)\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^2)$[I]与点 $P(x_0,y_0)$,

$$f(P)=0 \text{ 且 } \frac{\partial f}{\partial y}(P)\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$y=y(x) \text{ 存在，且 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}.$$

[I]表示 $f$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

证明：$\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=0.$

**定理 1.6.2: 多元隐函数**

给定 $f(X,y)\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^{n+1})$ 与点 $P(X_0,y_0)$,

$$f(P)=0 \text{ 且 } \frac{\partial f}{\partial y}(P)\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$y=y(X) \text{ 存在，且 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_i}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(X,y)}.$$

**定理 1.6.3: 向量值隐函数**

给定 $f_i(X,Y)\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^{n+m}),(i=1,2,\dots,m)$ 与点 $P(X_0,Y_0)$,

$$F(P)=\vec{0} \text{ 且 } \frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}(P)\neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$Y=Y(X) \text{ 存在，且}$$
$$\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}=-\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\right)^{-1}\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}.$$

**定理 1.6.4: 反函数**

给定 $Y=F(X)$，则反函数 $X=F^{-1}(Y)$ 满足

$$J_{F^{-1}}(X)=(J_F(X))^{-1}.$$

**例 1.6.1: 二阶偏导数举例**

给定 $f(x,y,z)=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}&=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\&=-\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z};\\&\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}.\end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3.$$

## 1.7　法与切

给定向量 $\vec{v}=[a,b,c]^{\mathrm{T}}$ 与点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，可以确定

$$\begin{aligned}\text{线}:&\quad \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\\\text{平面}:&\quad a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0\end{aligned}$$

参数方程可以得到显函数表达式

$$\text{线}:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}\qquad\text{平面}:\begin{cases}x=x_0+a_1u+b_1v\\y=y_0+a_2u+b_2v\\z=z_0+a_3u+b_3v\end{cases}$$

$$a=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\quad b=\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\quad c=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}.$$

## 曲面的法线和切平面

### 显函数

$$z=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad\vec{v}=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right]_{(x_0,y_0)}.$$

### 参数方程

$$\begin{cases}x=f_1(u,v)\\ y=f_2(u,v)\\ z=f_3(u,v)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\vec{v}=\left[\frac{D(f_2,f_3)}{D(u,v)},\frac{D(f_3,f_1)}{D(u,v)},\frac{D(f_1,f_2)}{D(u,v)}\right]_{(u_0,v_0)}.$$

### 隐函数

$$f(x,y,z)=0\quad\Rightarrow\quad\vec{v}=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{P_0}=\nabla f(P_0).$$

## 曲线的法平面和切线

### 参数

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\vec{v}=\left[x'(t),y'(t),z'(t)\right].$$

### 隐函数

$$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\vec{v}=\left[\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)},\frac{D(F_1,F_2)}{D(z,x)},\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}\right]_{P_0}$$

## 1.8　Talyor 公式

**定义 1.8.1: Hesse 矩阵**

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ 的 Jacobi 矩阵 (行向量) 为

$$J_f=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

定义 Hesse 矩阵

$$H_f:=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}.$$

**带 Lagrange 余项的 1 阶 Talyor 公式**　$\exists\theta\in(0,1), X_\theta:=X_0+\theta\Delta X$

$$f(X)=f(X_0)+J_f(X_0)\Delta X+\frac{1}{2}\Delta X^{\mathrm{T}}H_f(X_\theta)\Delta X. \tag{1.4}$$

**带 Peano 余项的 2 阶 Talyor 公式**

$$f(X)=f(X_0)+J_f(X_0)\Delta X+\frac{1}{2}\Delta X^{\mathrm{T}}H_f(X_0)\Delta X+\alpha(\Delta X). \tag{1.5}$$

此处 $\alpha(\Delta X)=\dfrac{1}{2}\Delta X^{\mathrm{T}}\tilde{H}_f(X_0+\theta\Delta X)\Delta X=o(\|\Delta X\|^2),\quad \Delta X\to 0$

**$m$ 阶 Talyor 公式**

$$\begin{aligned}f(X)&=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X_0)+\frac{1}{(m+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{m+1} f(X_\theta)\\ &=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(X_0)+o(\|\Delta X\|^m)\end{aligned}$$

例：$f(x,y)=$

$$\begin{aligned}&f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right)\\ &+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Delta x^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\Delta x^2\Delta y+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\Delta x\Delta y^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Delta y^3\right)+\cdots.\end{aligned}$$

最后换回来：$\Delta x=x-x_0, \Delta y=y-y_0$

## 1.9　极值与条件极值

**定理 1.9.1: Fermat 定理**

$$f \text{ 在 } X_0 \text{ 可微，且 } X_0 \text{ 是 } f \text{ 极值点}$$
$$\Downarrow$$
$$X_0 \text{ 是 } f \text{ 驻点，即 } \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

**定理 1.9.2: 极值点的充分条件**

$f$ 在 $X_0$ 二阶连续可微，且 $X_0$ 是 $f$ 驻点

(1) $H_f(X_0)$ 正定 $\Rightarrow$ 极小;

(2) $H_f(X_0)$ 负定 $\Rightarrow$ 极大;

(3) $H_f(X_0)$ 不定 $\Rightarrow$ 不是极值点.

判断正负定方法：(1) 左上行列式; (2) 特征值.

**定理 1.9.3: Lagrange 乘数法**

给定 $k$ 维曲面

$$S = \{X \mid \varphi_i(X) = 0, i = 1, 2, \ldots, n-k\}.$$

定义 Lagrange 函数

$$L(X, \varLambda) := f(X) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \varphi_i(X). \tag{1.6}$$

若 $X_0 \in S$ 为 $f$ 在 $S$ 上的条件极值点，则存在 $\varLambda$ 使得 $(X_0, \Lambda)$ 为 $L$ 的驻点.

### 计算有界闭曲面上的最值

(1) 算出 $f$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的驻点 (求 Hesse 矩阵判定正负定得出是否为极值点)

(2) 选取在曲面内的驻点并求值

(3) 固定曲面边界

## 2 含参积分及广义含参积分

**定义 2.0.1: 含参积分**

含参积分

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x,\quad y\in[c,d].$$

广义含参积分包括无穷积分和瑕积分，有统一形式

$$I(y)=\int_a^{\omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\equiv\lim_{A\to\omega^-}\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

无穷积分 $\omega=+\infty$；瑕积分 $\omega\in\mathbb{R}$ 但 $f$ 在 $\omega$ 邻域内无界 (奇点).

**定义 2.0.2: 一致连续**

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使 $\forall X,Y$ 满足 $|X-Y|<\delta$，有 $|f(X)-f(Y)|<\varepsilon$.

**否定形式：** 存在两点列 $\{X_k\}\{Y_k\}$ 使得 $\forall k\geqslant 1,|f(X_k)-f(Y_k)|\geqslant\varepsilon_0>0$.

**定理 2.0.1: 一致连续的判定**

函数 $f\in\mathscr{C}(\Omega)$ 在有界闭集 $\Omega$ 上连续 $\Rightarrow$ 一致连续.

**定义 2.0.3: 一致收敛**

$\forall\varepsilon>0,\exists N>a$ 使 $\forall A>N,\forall y\in[c,d]$，有 $\left|\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x-I(y)\right|<\varepsilon$.

**定理 2.0.2: 一致收敛的 Weierstrass 判别法**

$$|f(x,y)|\leqslant F(x),\ \int_a^{\omega}F(x)\,\mathrm{d}x\text{ 收敛.}$$
$$\Downarrow$$
$$\int_a^{\omega}f(x,y)\,\mathrm{d}x\text{ 对 }y\text{ 一致收敛.}$$

**定理 2.0.3: 一致收敛的 Dirichlet 判别法**

$$\begin{gathered}\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ 有界；}\\ g(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 单调且 } \lim_{x\to\omega^-} g(x,y)=0\\ \Downarrow\\ \int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ 对 } y \text{ 一致收敛.}\end{gathered}$$

**定理 2.0.4: 一致收敛的 Abel 判别法**

$$\begin{gathered}\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ 对 } y \text{ 一致收敛；}\\ g(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 单调且有界}\\ \Downarrow\\ \int_a^\omega f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ 对 } y \text{ 一致收敛.}\end{gathered}$$

## 2.1 积分号的可交换性

**定理 2.1.1: 连续性**

$f(x,y)$ 连续 $\Rightarrow$ $I(y)$ 连续，即

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

---

$f(x,y)$ 连续且 $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y$ 一致收敛. $\Rightarrow$ $I(y)$ 连续，即

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^\omega \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

**定理 2.1.2: 可微性**

$f(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 连续 $\Rightarrow$ $I(y)$ 可微，且

$$I'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

$f(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 连续且 $\displaystyle\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y$ 一致收敛 $\Rightarrow$ $I(y)$ 可微，且

$$I'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^\omega \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

**定理 2.1.3: 积分性**

$f(x,y)$ 连续 $\Rightarrow$ $I(y)$ 可积，且

$$\int_c^d I(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

$f(x,y)$ 连续且 $\displaystyle\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y$ 一致收敛 $\Rightarrow$ $I(y)$ 可积，且

$$\int_c^d I(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d\int_a^\omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^\omega\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

* 对于含两个广义积分的交换条件更严格

1. $f(x,y)$ 连续
2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x, \int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 分别关于 $y\in[c,C], x\in[a,A]$ 一致收敛
3. $\displaystyle\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ 至少一个存在

则

$$\int_c^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^{+\infty}\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

**例 2.1.1: Gamma 函数**

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

递推公式

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.\\ \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x \cdot \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= -t^x\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cdot x t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

对于 $n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = (n-1)!$.

**余元公式**

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad x \in (0,1).$$

证明略，有 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

**例 2.1.2: Beta 函数**

$$\mathrm{B}(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

与 Gamma 函数的关系为 $\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

**例 2.1.3: Possion 积分**

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**证明**：考虑积分的平方

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =& \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

**例 2.1.4: Dirichlet 积分**

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

**证明：** 令

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x,\quad y\geqslant 0.$$

由 $\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}$ 可被延拓为 $\mathbb{R}^2_{\geqslant 0}$ 上的连续函数，故 $F(y)$ 在 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 上连续.

注意到，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

收敛；$\forall x,y\geqslant 0,|\,\mathrm{e}^{-xy}|\leqslant 1$ 且 $\mathrm{e}^{-xy}$ 关于 $x$ 递减，由 Abel 判别准则可知 $F(y)$ 关于 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

任取 $a>0,\forall x\geqslant 0,y\geqslant a$，可知 $\left|-\sin x\,\mathrm{e}^{-xy}\right|\leqslant \mathrm{e}^{-xy}\leqslant \mathrm{e}^{-ax}$ 有界，由 Weierstrass 判别准则知，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x$$

一致收敛，因此 $F(y)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导

$$\begin{aligned}F'(y)&=-\int_0^{+\infty}\sin x\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\operatorname{Im}\mathrm{e}^{-xy-\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x\\&=-\operatorname{Im}\frac{\mathrm{e}^{-(y+\mathrm{i})x}}{y+\mathrm{i}}\bigg|_0^{+\infty}=-\frac{\mathrm{e}^{-yx}}{y^2+1}\operatorname{Im}(y-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\bigg|_0^{+\infty}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-yx}}{y^2+1}(y\sin x+\cos x)\bigg|_0^{+\infty}=-\frac{1}{1+y^2}.\end{aligned}$$

因为 $a>0$ 任意，故 $\forall y>0$,

$$F'(y)=-\frac{1}{1+y^2},\quad F(y)=-\arctan y+C.$$

又 $y\to+\infty$,

$$|F(y)|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{y}\to 0.$$

故 $\lim\limits_{y\to+\infty}F(y)=C-\dfrac{\pi}{2}=0$，即 $C=\dfrac{\pi}{2}$.

又 $F(y)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，故 $\forall y\geqslant 0,F(y)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan y$. 特别的

$$F(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

# 3 重积分

## 3.1 二重积分

**定理 3.1.1: 累次积分法**

$D=\{(x,y)\mid \alpha(x)\leqslant y\leqslant \beta(x), a\leqslant x\leqslant b\}$，$\alpha(x),\beta(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f\in\mathscr{R}(D)$，且

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

**定理 3.1.2: 变量代换法**

以 $x,y$ 为变量的区域 $D$ 经过变量代换及其逆变换

$$\begin{cases} u=u(x,y),\\ v=v(x,y). \end{cases}\qquad \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0\right).$$

就会变为以 $u,v$ 为变量的区域 $D'$，积分也会变换为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

**例：极坐标** $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

**例：旋转** $x=u\cos\theta-v\sin\theta, y=u\sin\theta+v\cos\theta$.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(u\cos\theta-v\sin\theta,u\sin\theta+v\cos\theta)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

**曲面面积问题**

空间 $O-xyz$ 中曲面的方程为

$$\begin{cases} x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v). \end{cases}\qquad \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\text{列满秩}\right).$$

转化为 $O-uv$ 曲面中的二重积分问题，其中两条曲线切向量

$$\vec{u}=\left[\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right]^{\mathrm{T}},\qquad \vec{v}=\left[\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right]^{\mathrm{T}}$$

则

$$S=\iint_D \|\vec{u}\times\vec{v}\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

若设

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\qquad B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\qquad C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}. \tag{3.1}$$

则 $\vec{u}\times\vec{v}=[A,B,C]^{\mathrm{T}}$，

$$S=\iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.2}$$

另一种方式是利用 $(\vec{u}\times\vec{v})^2=u^2v^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$，

$$E=\vec{u}\cdot\vec{u}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \tag{3.3}$$

$$G=\vec{v}\cdot\vec{v}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \tag{3.4}$$

$$F=\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}. \tag{3.5}$$

$$S=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

特别的，当曲线是显式的，即 $z=z(x,y)$

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

## 3.2　三重积分

**定理 3.2.1: 累次积分法**

$\Omega=\{(x,y,z)\mid \alpha(x,y)\leqslant z\leqslant\beta(x,y),(x,y)\in D\}$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

**定理 3.2.2: 变量代换法**

同样的，对于变量替换

$$\begin{cases} x = x(r,s,t), \\ y = y(r,s,t), \\ z = z(r,s,t). \end{cases} \qquad \left(\frac{D(x,y,z)}{D(r,s,t)} \neq 0\right).$$

有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} \tilde{f}(r,s,t)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,s,t)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

其中 $\tilde{f}(r,s,t) = f(x(r,s,t),y(r,s,t),z(r,s,t))$.

**例：柱坐标**　$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z.$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

**例：球坐标**　$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta.$

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &\quad= \iiint_{\Omega'} f(\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

**例 3.2.1: $n$ 重积分**

定义 $\mathbb{R}^n$ 中单位球

$$\Omega_n = \left\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\right\}$$

的体积

$$V_n = \int\cdots\int_{\Omega_n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{-1}^{1}\int\cdots\int_{D_{n-1}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_n.$$

其中

$$D_{n-1} = \left\{(x_1,\dots,x_{n-1})\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant 1 - x_n^2\right\}.$$

作变换 $x_i = \sqrt{1-x_n^2}\,u_i, (i=1,\dots,n-1)$，则

$$\frac{D(x_1,\dots,x_{n-1})}{D(u_1,\dots,u_{n-1})} = \left(1-x_n^2\right)^{(n-1)/2}.$$

可得

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{-1}^{1}\int\cdots\int_{\Omega_{n-1}} \left(1-x_n^2\right)^{(n-1)/2} \mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1}\,\mathrm{d}x_n \\ &= \int_{-1}^{1} \left(1-x_n^2\right)^{(n-1)/2} V_{n-1}\,\mathrm{d}x_n = 2V_{n-1}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{(n-1)/2}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

令 $x=\sqrt{t}$，则

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1}\int_0^1 (1-t)^{(n-1)/2} t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = V_{n-1}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}\right) \\ &= V_{n-1}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = V_{n-1}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\sqrt{\pi} \\ &= V_1\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\pi^{(n-1)/2} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \end{aligned}$$

我们就得到了“体积”公式

$$V_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!}, & n=2k, \\ \dfrac{2^k\pi^{k-1}}{n!}, & n=2k-1. \end{cases} \tag{3.6}$$

例如 $V_1=2,\quad V_2=\pi,\quad V_3=\frac{4}{3}\pi,\quad V_4=\frac{1}{2}\pi^2,\quad V_5=\frac{8}{15}\pi^2,\dots.$

# 4 曲线积分和曲面积分

**定义 4.0.1: 第一类、第二类曲线积分和曲面积分**

第一类曲线积分

$$\int_L f(X)\,\mathrm{d}\ell = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

第一类曲面积分

$$\int_S f(X)\,\mathrm{d}\sigma = \int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,\|\vec{u}\times\vec{v}\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

第二类曲线积分

$$\int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_A^B X(x,y)\,\mathrm{d}x + Y(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

第二类曲面积分

$$\int_{S^+} \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S^+} X\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + Z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

第二类曲面积分可以化为第一类曲面积分

$$\int_{S^+} \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{V}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

从计算方面来说

$$\int_{S^+} X\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Y\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + Z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \pm\iint_D XA+YB+ZC\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

## 4.1 Green, Gauss, Stokes 公式

**定理 4.1.1: Green 公式**

$X(x,y),Y(x,y)$ 在有界单连通闭区域 $D$ 上连续可微

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} X\,\mathrm{d}y - Y\,\mathrm{d}x,$$
$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y.$$

**定理 4.1.2: Gauss 公式**

$X(x,y), Y(x,y)$ 在有界单连通闭区域 $D$ 上连续可微

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$