

数理方程与特殊函数

主要整理自姚国武老师讲义

by Dait at THU

2022/2/24 - 2022/6/16

目录

| | | |
|----------|-----------------------------------|-----------|
| 1 | 偏微分方程的定解问题 | 1 |
| 1.1 | 定解问题及适定性 | 2 |
| 1.2 | 一阶线性方程的通解法 | 2 |
| 1.3 | 波动方程的行波解和 d'Alembert 公式 | 3 |
| 1.4 | 二阶线性偏微分方程及标准型 | 8 |
| 1.5 | 叠加原理和齐次化原理 | 9 |
| 2 | 分离变量法 | 11 |
| 2.1 | 特征值和特征函数 | 12 |
| 2.2 | Sturm-Liouville 定理 | 16 |
| 2.3 | 非其次方程 | 19 |
| 3 | 积分变换法 | 22 |
| 3.1 | Fourier 变换 | 22 |
| 3.1.2 | Fourier 正余弦变换 | 23 |
| 3.1.3 | Fourier 变换与分离变量法 | 25 |
| 3.2 | Laplace 变换 | 26 |
| 4 | 基本解方法 | 30 |
| 4.1 | 广义函数 | 30 |
| 4.2 | $Pu = 0$ 型方程的基本解 | 33 |
| 4.3 | Poisson 方程 Green 函数法 | 35 |
| 4.4 | 初值问题的基本解方法 | 41 |

| | |
|--------------------------|----|
| 附录 | 43 |
| A 特征值问题 | 43 |
| B Fourier 和 Laplace | 45 |
| B.1 Fourier 系数 | 46 |
| B.2 Fourier 变换 | 47 |
| B.3 Laplace 变换 | 51 |

1 偏微分方程的定解问题

例 1.0.1: 弦振动

线密度为 ρ 的弦在自身张力 T 的作用下平衡位置在 x 轴，横向位移 $u = u(x, t)$ ，取 (x_1, x_2) 段进行受力分析

$$\begin{aligned} T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 &= 0, \\ T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 &= \rho \delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

限定 $\theta \ll 1$ ，有 $\cos \theta \doteq 1$ ， $\sin \theta \doteq \theta$ ，

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 =: T, \\ T \delta \theta &= \rho \delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

又 $\theta = \partial u / \partial x$ ，得到波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 := \frac{T}{\rho}. \quad (1.1)$$

例 1.0.2: 热传导

由 Fourier 热传导定律，一段时间内流入物体 Ω 的热量为

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial \Omega} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} k \Delta u dV dt,$$

其中 k 为介质的热传导系数， $u = u(x, y, z, t)$ 为各点温度。
另一方面，从比热容 c 的角度看，

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt.$$

其中 ρ 为物体的体密度。

因为上式对任意 $\Omega \times (t_1, t_2)$ 均成立，得到热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad a^2 := \frac{k}{c \rho}. \quad (1.2)$$

1.1 定解问题及适定性

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ 内 m 阶 PDE 形如

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0,$$

其中 $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

定义 1.1.1: 定解条件

确定解中函数的条件称为定解条件, 包括初始条件和边界条件

- I. (Dirichlet) $u|_{x=0} = f, \quad u|_{\partial V} = f;$
- II. (Neumann) $u_t|_{x=0} = f, \quad u_t|_{\partial V} = f;$
- III. (Robin) $(u_t + \sigma u)_{x=0} = f, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)_{\partial V} = f.$

定义 1.1.2: 解

古典解: 符合方程且各阶偏导数连续;
 通解: m 阶 PDE 有 m 个任意函数的解;
 特解: 不包含任何任意函数或任意常数的解;
 适定解: 存在、唯一且稳定.

1.2 一阶线性方程的通解法

方法 1.1: 常数变易法

对于 $u(x, y)$ 的方程

$$u_x + Ax = B.$$

有解

$$\begin{cases} \varphi = \exp\left(-\int A dx\right), \\ \psi = \int B\varphi^{-1} dx \end{cases} \Rightarrow u = \varphi(\psi + g(y)).$$

其中 $g \in \mathcal{C}$.

方法 1.2: 变量代换

$u = u(x, y)$ 的方程

$$au_x + bu_y + cu = f,$$

作变量代换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{cases}$$

变成 $u = u(\xi, \eta)$ 的方程

$$(a\xi_x + b\xi_y)u_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)u_\eta + cu = f.$$

使 $a\xi_x + b\xi_y = 0$, 得到特征方程和特征曲线

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}, \Rightarrow \xi(x, y) = \text{const.} \quad (1.3)$$

剩下

$$(a\eta_x + b\eta_y)u_\eta + cu = f.$$

对 η 积分便可求出通解. 注意: 要 $a\eta_x + b\eta_y \neq 0$, 应有 Jacobi 行列式

$$\det J(\xi, \eta) = \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

1.3 波动方程的行波解和 d'Alembert 公式

一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0.$$

可分解为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

等价于

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = v. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at. \end{cases}$$

方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0, \quad \Rightarrow \quad u = f(\xi) + g(\eta).$$

即行波解

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad f, g \in \mathcal{C}^2. \quad (1.4)$$

定理 1.3.1: d'Alembert 公式

无限长弦自由振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0, x \in \mathbb{R}. \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

将初值问题带入通解

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} &= -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

因此

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (1.5)$$

对于 $\varphi \in \mathcal{C}^2, \psi \in \mathcal{C}$, 解是适定的.

非无限情况, 可以延拓至无限.

例 1.3.1: 延拓

端点固定的半无限边界条件:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

进行奇延拓

$$\varphi_o(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \quad \psi_o(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

问题便适用 d'Alembert 公式, 解

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_0(\xi) d\xi \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & x \geq at, \\ \frac{1}{2} [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & x < at. \end{cases} \end{aligned}$$

端点自由半无限弦 ($u_t(0, t) = 0$) 采用偶延拓; 有界弦: 两端均延拓.

例 1.3.2: 中心对称球面波

中心对称的球面波 $u = u(r)$, 采用球坐标

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

波动方程变为

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) = \frac{a^2}{r} (ru)_{rr}.$$

设 $v = ru$, 则可解得

$$u(r) = \frac{1}{r} [f(r - at) + g(r + at)].$$

掺入边界条件 $\varphi(r), \psi(r)$ 后, 作奇延拓即可.

例 1.3.3: 三维波动方程与球面平均法

一般的三维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z). \end{cases}$$

采用球面平均法, 定义 u 在以 M 为球心、 r 为半径的球面 $S_r(M)$ 上的平均

$$\bar{u}(r, t; M) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{S_r(M)} u(x, y, z, t) dS,$$

略去证明过程，问题转化为中心对称球面波问题

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} = \frac{1}{r} (r\bar{u})_{rr}, \\ (r\bar{u})_{r=0} = 0, \\ \bar{u}(r, 0) = \bar{\varphi}(r), \quad \bar{u}_t(r, 0) = \bar{\psi}(r). \end{cases}$$

奇延拓解，注意： $(r\varphi)_0 = r\varphi_e$,

$$r\bar{u}(r, t) = \frac{1}{2} [(r - at)\bar{\varphi}_e(r - at) + (r + at)\bar{\varphi}_e(r + at)] + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} \rho \bar{\psi}_e(\rho) d\rho.$$

为得到 $u(x, y, z, t)$ ，取极限

$$u(M, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \bar{u}(r, t) = \frac{d}{dt} (t\bar{\varphi}(at)) + t\bar{\psi}(at),$$

上式称为 Poisson 公式.

求解三维波动方程的关键在于计算球面平均

$$\begin{aligned} u(M, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \varphi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \psi dS \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t\varphi \sin \theta d\theta d\phi \right) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t\psi \sin \theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (1.6)$$

例 1.3.4: 二维波动方程与升维法

二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y). \end{cases}$$

采用升维法

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t), \quad \Phi(x, y, z) = \varphi(x, y), \\ U(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \Phi dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \Psi dS \end{aligned}$$

由于 U, Φ, Ψ 取值与 z 无关，故积分区域可投影到 xy 平面上. 记 D_r

是以 (x, y) 为圆心, r 为半径的圆内区域, 在 D_r 上

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2} dA = \frac{r dA}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

故

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \\ & + \frac{1}{2\pi a} \int_{D_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

(1.6) 是在球面上积分, 而 (1.7) 是在圆域上积分.¹

例 1.3.5: 一维波动方程

对一维弦振动方程, 也可升二维, 再将积分投影到 $[x - at, x + at]$ 上.

记 C_r 是以 (x, y) 为圆心, r 为半径的圆, 在 C_r 上

$$d\ell = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} d\xi = \frac{r d\xi}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}}.$$

故

$$\begin{aligned} \int_{D_{at}} \frac{\Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} &= \int_0^{at} \oint_{C_r} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} d\ell dr \\ &= 2 \int_0^{at} \int_{x-r}^{x+r} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} \frac{r d\xi}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}} dr \quad (\text{交换次序}) \\ &= \left(\int_x^{x+at} \int_{\xi-x}^{at} + \int_{x-at}^x \int_{x-\xi}^{at} \right) \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}} d\xi \end{aligned}$$

推出 d'Alembert 公式:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi \right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

¹这个差别在物理上产生了截然不同的效果: 对三维情况, 波的传播既有清晰的前阵面, 也有清晰的后阵面, 可用于传播信号, 这称为 Huygens 原理; 对二维情况, 波的传播有清晰的前阵面, 但没有后阵面, 这称为波的弥漫, 或说这种波具有后效现象, 不适合于传播信号.

1.4 二阶线性偏微分方程及标准型

两个自变量的二阶其次线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0.$$

进行变量代换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad \text{其中 } \det J(\xi, \eta) \neq 0.$$

变成

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta + cu = 0.$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ A_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ A_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2; \\ B_1 &= a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y, \\ B_2 &= a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y, \end{aligned}$$

用矩阵表达即

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}^\top.$$

考虑使 $A_{11} = 0$ 或 $A_{22} = 0$ 则有

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

其判别式

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}.$$

$\Delta > 0$, 双曲型 不妨设 $a_{11} \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \Rightarrow \begin{cases} \xi(x, y) = \text{const} \\ \eta(x, y) = \text{const}' \end{cases} \quad (1.8)$$

继而 $A_{11} = A_{22} = 0$,

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\frac{2\Delta}{a_{11}}\xi_y\eta_y \neq 0, \\ u_{\xi\eta} + \frac{1}{2A_{12}}(B_1u_\xi + B_2u_\eta + cu) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

上式就是双曲型方程的标准型.

若再作变量替换 $p = (\xi + \eta)/2$, $q = (\xi - \eta)/2$, 方程可化为

$$u_{pp} - u_{qq} + \frac{1}{A_{12}}[(B_1 + B_2)u_q + (B_1 - B_2)u_p + cu] = 0. \quad (1.10)$$

$\Delta = 0$, 抛物型 只有一个线性 ODE, 不妨设 $a_{11} \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \Rightarrow \xi(x, y) = \text{const}. \quad (1.11)$$

任取 $\eta(x, y)$, 可得 $A_{11} = A_{12} = 0$

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{22}}(B_1u_\xi + B_2u_\eta + cu) = 0. \quad (1.12)$$

$\Delta < 0$, 椭圆型 ODE 解为复函数, 不妨设 $a_{11} \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}} \Rightarrow \xi(x, y) \pm i\eta(x, y) = \text{const}. \quad (1.13)$$

其中 ξ, η 为实函数, $A_{12} = 0, A_{11} = A_{22} \neq 0$,

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{11}}(B_1u_\xi + B_2u_\eta + cu) = 0. \quad (1.14)$$

1.5 叠加原理和齐次化原理

定义算子为从函数类到函数类的映射 \mathcal{T} .

定理 1.5.1: 叠加原理

线性算子 \mathcal{L} 可与 \lim, \sum, \int 等运算符交换.

齐次化原理也称冲量原理, 源于求解有外力的弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

利用叠加原理, 解 $u = u_0 + w$; 其中 u_0 表示 $f \equiv 0$ 的齐次化解; w 表示 $\varphi, \psi \equiv 0$ 的解, 即纯受迫振动.

考虑时间段 $(\tau, \tau + \delta\tau)$ 内, 位移分布 $w(x, t) =: v(x, t; \tau) \delta\tau$, 外力冲量 $f(x, \tau) \delta\tau$, 有

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ v|_{t=\tau} = 0 \quad v_t|_{t=\tau} = f(x, \tau). \end{cases} \Rightarrow v(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi.$$

叠加得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (1.15)$$

定理 1.5.2: 齐次化原理

定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \mathcal{P}u + f(\mathbf{x}, t), \\ u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

其中 \mathcal{P} 为常系数线性偏微分算子, 有解

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t v(\mathbf{x}, t; \tau) d\tau,$$

v 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^m v}{\partial t^m} = \mathcal{P}v, \\ v|_{t=\tau} = \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=\tau} = \cdots = \frac{\partial^{m-2} v}{\partial t^{m-2}}\bigg|_{t=\tau} = 0, \\ \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=\tau} = f(\mathbf{x}, \tau). \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

当 $\mathbf{x} \in V \subsetneq \mathbb{R}^n$ 时, 还应加上其次边界条件

$$\mathcal{P}u|_{\partial V} = 0, \quad \mathcal{P}v|_{\partial V} = 0.$$

2 分离变量法

回忆一些典型 ODE 方程的基本解法

方法 2.1: 二阶常系数其次方程

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (2.1)$$

其特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的解 $\lambda_{1,2}$

- I. $\Delta > 0$, $y = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x}$;
- II. $\Delta = 0$, $\lambda_{1,2} = \lambda$, $y = (A + Bx) e^{\lambda x}$;
- III. $\Delta < 0$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $y = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x}$.

方法 2.2: 二阶非其次方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \quad (2.2)$$

二阶非其次方程根据叠加定理, 其解 $y = y_0 + y_s$; 其中 y_0 为 $f(x) \equiv 0$ 时的其次通解, y_s 为特解.

若 y_1, y_2 为对应的其次方程线性无关解, 则可求出一特解

$$y_s(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)}{y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_1'(\xi)y_2(\xi)} f(\xi) d\xi, \quad \forall x_0. \quad (2.3)$$

特解满足其次边界条件

$$y_s(x_0) = 0, \quad y_s'(x_0) = 0.$$

方法 2.3: Euler 方程

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x). \quad (2.4)$$

令 $x = e^t$, $u(t) = y(e^t) = y(x)$ 方程变为

$$u'' + (a-1)u' + bu = f(e^t). \quad (2.5)$$

2.1 特征值和特征函数

在讨论分离变量前，先引入 Fourier 级数的概念.

定义 2.1.1: Fourier 级数

$f(x)$ 周期为 2ℓ ，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\text{FS } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right). \quad (2.6)$$

其中 Fourier 系数

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

定理 2.1.1: Parseval 等式

若 $f \in \mathcal{L}^2[-\ell, \ell]$ 即平方可积，则

$$\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

定理 2.1.2: Dirichlet 收敛定理

若

1. f, f' 连续或分段连续，至多有有限个第一类间断点；
2. f 至多有有限个极值点；

则

$$\text{FS } f(x) = \begin{cases} (f(x^+) + f(x^-)) / 2, & x \in (-\ell, \ell) \\ (f(-\ell^+) + f(\ell^-)) / 2, & x = \pm \ell \end{cases}$$

在 f 连续点处， $\text{FS } f = f$.

例 2.1.1: 有界弦问题

有界弦

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

假设变量是可以分离的, 即 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 则引入特征值 λ

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda.$$

要使 $X'' + \lambda X = 0$ 且 $X(0) = X(L) = 0$ 仅有

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

进而 $T'' + a^2 \lambda T = 0$

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{L}.$$

因此原方程应有形式解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.7)$$

C_n, D_n 由初始条件确定

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = \psi(x). \end{aligned}$$

恰好对应 Fourier 正弦系数 φ_n^s, ψ_n^s

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx =: \varphi_n^s, \\ D_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx =: \frac{L}{n\pi a} \psi_n^s. \end{aligned}$$

至于形式解是否符合条件, 不是考试涉及的范围.

例 2.1.2: 圆域 Laplace 方程

圆域上的 Laplace 方程, 采用极坐标

$$\begin{cases} \Delta_2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r < r_0 \\ u(r_0, \theta) = \varphi(\theta) \end{cases}$$

还应包括自然条件, 即

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} |u(r, \theta)| < \infty.$$

和周期边界条件

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi).$$

分离变量 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ \Theta'' + \lambda \Theta = 0. \end{cases}$$

由周期条件, 特征值 $\lambda = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

再解 R 的 Euler 方程, 可得

$$R_n(r) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln r, & n = 0 \\ c_n r^n + d_n r^{-n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

再由自然条件 $|R(0)| < \infty$, 可知 $d_i \equiv 0$, 进而

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

结合边界条件 $u(r_0, \theta) = \varphi(\theta)$, 求得系数

$$a_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta, \quad b_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \sin n\vartheta \, d\vartheta.$$

因此

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \, d\vartheta +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) (\cos n\vartheta \cos n\theta + \sin n\vartheta \sin n\theta) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \cos n(\theta - \vartheta) \right] d\vartheta \end{aligned}$$

又由 Euler 公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} k^n e^{in\theta} = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - k e^{i\theta}} = \frac{1 - k \cos \theta}{1 + k^2 - 2k \cos \theta}.$$

故得到圆域内的 Poisson 公式

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) \varphi(\vartheta)}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \vartheta)} d\vartheta \quad (2.8)$$

积分内式子称为 Poisson 核.

例 2.1.3: 圆域 Neumann 问题

圆域上的 Neumann 问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & r < R \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=R} = \varphi(\theta) \end{cases}$$

由 Green 公式

$$\int_{D_R} \Delta u \, dx dy = \oint_{r=R} \frac{\partial u}{\partial n} d\ell = R \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = 0.$$

剩下的证明留给读者

2.2 Sturm-Liouville 定理

例 2.2.1: 有限杆热传导

设杆温度 $u = u(x, t)$, 则定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u_t(L, t) + hu(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

其中热交换常数 $h > 0$.

分离常数 $u(x, t) = X(x)T(t)$,

$$\begin{cases} X'' + \beta^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(L) + hX(L) = 0. \end{cases} \Rightarrow \beta + h \tan \beta L = 0.$$

$$\Rightarrow X_n(x) = \sin \beta_n x, \quad T_n(t) = C_n e^{-\beta_n^2 a^2 t}.$$

可以验证 X_n 是正交的, 即

$$\langle X_m, X_n \rangle = \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

形式解

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\beta_n^2 a^2 t} \sin \beta_n x.$$

再根据初始条件

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \beta_n x = \varphi(x).$$

在后面可以看到, 这是广义 Fourier 级数, 其系数

$$C_n = \frac{\langle \varphi, \sin \beta_n x \rangle}{\langle \sin \beta_n x, \sin \beta_n x \rangle} = \frac{\int_0^L \varphi(x) \sin \beta_n x dx}{\int_0^L \sin^2 \beta_n x dx}.$$

定义 2.2.1: 加权内积

定义在 $[a, b]$ 上的实函数 f, g 的 ρ -加权内积

$$\langle f, g \rangle_\rho := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x) dx.$$

其中权函数 $\rho \geq 0$ 分段连续且零点孤立.

加权平方可积函数空间

$$\mathcal{L}_\rho^2[a, b] := \left\{ f \mid \|f\|_\rho < \infty \right\}.$$

定理 2.2.1: 广义 Fourier 级数

若 f_1, f_2, \dots 在 \mathcal{L}_ρ^2 中完备且加权正交, 则 $\forall f \in \mathcal{L}_\rho^2$ 有广义 Fourier 级数展开

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x), \quad a_i = \frac{\langle f, f_i \rangle_\rho}{\|f_i\|_\rho^2}.$$

且有 Parserval 等式

$$\|f\|_\rho^2 = \sum_{i=1}^n \left\langle f, \frac{f_i}{\|f_i\|_\rho} \right\rangle_\rho^2.$$

定义 2.2.2: Sturm-Liouville 方程

定义域 $[a, b]$, 常见一维特征值问题都可以化为

$$(k(x)f'(x))' - q(x)f(x) + \lambda\rho(x)f(x) = 0.$$

其中 λ 为参数, k, q, ρ 为实函数.

记

$$\mathcal{L}[f] := -\frac{(kf')' - qf}{\rho}.$$

则

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho - \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho = [k(fg' - f'g)]_a^b.$$

好的边界条件可以使上式等于 0.

正则 Sturm-Liouville 问题

$$\mathcal{L}[f](x) = \lambda f(x).$$

正则条件:

$$k \in \mathcal{C}^2[a, b], \quad q, \rho \in \mathcal{C}[a, b]; \quad k, \rho > 0.$$

保证了 Sturm-Liouville 方程在 $[a, b]$ 上没有奇点.

边界条件:

$$\text{可分: } \begin{cases} c_1 f(a) + c_2 f'(a) = 0, \\ d_1 f(b) + d_2 f'(b) = 0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{周期: } \begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases}$$

这些边界条件是好的, 可使 \mathcal{L} 是对称算子, 即

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho = \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho.$$

定理 2.2.2: Sturm-Liouville 定理 1

正则 Sturm-Liouville 问题

1. 有可数多个实特征值

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

2. 特征函数加权 ρ - 正交;

3. 特征值的特征子空间至多 2 维,
可分边界条件下, 特征子空间为 1 维;

4. 特征函数构成 \mathcal{L}_ρ^2 上完备的正交基底.

奇异 Sturm-Liouville 问题: 不满足正则条件或区间无界; 但若

a 或 b 是 $k(x)$ 的一级零点, 是 $q(x)$ 的至多一级极点,

定理结论依旧成立!

定理 2.2.3: Sturm-Liouville 定理 2

若正则 Sturm-Liouville 问题还满足 $q \geq 0$; 可分边界条件下还需满足 $c_1 c_2 \leq 0, d_1 d_2 \geq 0$.

1. 所有特征值非负；
特别的，存在 0 特征值 (对应特征函数 1) 的充要条件是 $q \equiv 0$ 且两端为第二类边界条件；
2. 若正则条件为周期条件，那么其对应于每一个非最小特征值 λ_0 的特征值有两个相互正交的特征函数。

例 2.2.2: 扇形域 Dirichlet 问题

扇形域上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & r \in (1, e), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \\ u(1, \theta) = u(e, \theta) = 0, \\ u(r, 0) = 0, & u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = g(r). \end{cases}$$

化为 Sturm-Liouville 型

$$(rR')' + \frac{\lambda}{r}R = 0,$$

对应 $k = r$, $q = 0$, $\rho = \frac{1}{r}$, 因此 $\lambda > 0$, 进而

$$\begin{aligned} \lambda_n &= (n\pi)^2, \quad R_n(r) = \sin(n\pi \ln r), \quad n = 1, 2, \dots \\ \Theta_n(\theta) &= A_n e^{n\pi\theta} + B_n e^{-n\pi\theta}. \end{aligned}$$

再结合 u 的边界条件即可解出。

2.3 非其次方程

对非齐次方程，有时可靠直觉找出特解 v ，但对一般的非齐次方程，需要借助齐次化原理转化为其次方程：

方法 2.4: 齐次化原理法

设 \mathcal{D}_t 中关于 2 阶导数的系数为 1

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x, t), & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

由 10 页的定理 1.5.2 知, 有解

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t - \tau; \tau) d\tau$$

v 满足

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x v + \mathcal{D}_t v = 0, & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, & v_t|_{t=0} = f(x, \tau). \end{cases}$$

方法 2.5: 广义 Fourier 展开法

对于

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x, t), & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

1. 首先分离变量, 求出 $f \equiv 0$ 对应的特征值问题

$$\mathcal{D}_x X = -\lambda X.$$

解出特征值 $\{\lambda_n\}$ 和本征函数 $\{X_n(x)\}$, 注意 n 的取值是否含 0.

2. 根据 Sturm-Liouville 定理判断 $\{X_n\}$ 的完备性, 展开

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum T_n(t) X_n(x), & f(x) &= \sum f_n(t) X_n(x), \\ \varphi(x) &= \sum \varphi_n X_n(x), & \psi(x) &= \sum \psi_n X_n(x). \end{aligned}$$

求解

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t T_n(t) - \lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(t) = \varphi_n, \quad T'_n(t) = \psi_n. \end{cases}$$

3. 解出 $T_n(t)$, 得 $u(x, t)$

方法 2.6: 一般的非齐次问题

对于一般的非齐次问题

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x, t), & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = g_1(t), & (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = g_2(t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

首先将非齐次边界条件齐次化, 寻找 $v(x, t)$ 满足

$$(\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = g_1(t), \quad (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = g_2(t).$$

显然 v 不唯一, 若无法直觉看出, 可设为 x 的线性函数

$$v(x, t) = A(t)x + B(t),$$

整理得

$$\begin{cases} (\alpha_1 a - \beta_1)A(t) + \alpha_1 B(t) = g_1(t), \\ (\alpha_2 b + \beta_2)A(t) + \alpha_2 B(t) = g_2(t). \end{cases}$$

便可解出 A, B 若无解还可设为 x 的二次函数.

这样便可将 u 分解为 $u = v + w$, 而 w 的边界条件是齐次化的:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x w + \mathcal{D}_t w = f(x, t) - \mathcal{D}_x v - \mathcal{D}_t v, & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 w - \beta_1 w_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 w + \beta_2 w_x)_{x=b} = 0, \\ w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0}, & w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0}. \end{cases}$$

这在前面已解决.

3 积分变换法

定义 3.0.1: 积分变换

积分变换

$$\mathcal{T}[f](\xi) = \int_a^b f(x)K(x, \xi) dx.$$

其中 K 是核函数 (kernel).

3.1 Fourier 变换

定义 3.1.1: Fourier 变换

定义 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) \equiv \mathcal{F}[f](\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

及其逆变换

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Fourier 变换的相关性质见第 47 页的附录内容.

例 3.1.1: 无限长杆热传导

无限长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \hat{u}_t = -a^2 \xi^2 \hat{u} + \hat{f}, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\varphi). \end{cases}$$

因此

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-a^2 \xi^2 t} \left[\int_0^t \hat{f}(\xi, \tau) e^{a^2 \xi^2 \tau} d\tau + \hat{\varphi}(\xi) \right].$$

再用 Fourier 逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\int_0^t \hat{f}(\xi, \tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau \right] + \mathcal{F}^{-1} [\hat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}] \\ &= \int_0^t \mathcal{F}^{-1} [\hat{f}(\xi, \tau)] * \mathcal{F}^{-1} [e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)}] d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)] * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-a^2\xi^2t}\right] \\
&= \int_0^t f(x, t) * \frac{e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau + \\
& \quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) e^{-(x-\eta)^2/4a^2t} d\eta \\
&= \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta, \tau) e^{-(x-\eta)^2/4a^2(t-\tau)} d\eta d\tau + \\
& \quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) e^{-(x-\eta)^2/4a^2t} d\eta.
\end{aligned}$$

以上只是形式解.

3.1.2 Fourier 正余弦变换

对于定义在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的函数, 可将其奇偶延拓至 \mathbb{R} 后再作 Fourier 变换

定义 3.1.2: Fourier 正余弦变换

正余弦变换分别为

$$\begin{aligned}
\hat{f}_s(\xi) &\equiv \mathcal{F}_s[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x) \sin \xi x dx; \\
\hat{f}_c(\xi) &\equiv \mathcal{F}_c[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx.
\end{aligned}$$

其反变换

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\xi) \sin \xi x d\xi =: \mathcal{F}_s^{-1}[\hat{f}_s(\xi)] \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\xi) \cos \xi x d\xi =: \mathcal{F}_c^{-1}[\hat{f}_c(\xi)]
\end{aligned}$$

变换的性质见第 49 页的附录内容.

例 3.1.2: 半无限长杆热传导

半无限长杆热传导方程问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = \varphi(x) \end{cases}$$

自然边界条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_t(x, t) = 0$$

若用 Fourier 正弦变换, 则会出现 $u(0, t)$, 此边界条件没有给出, 因此只能用余弦变换, 记 $U(\xi, t) = \mathcal{F}_c[u(x, t)]$

$$\begin{aligned} U_t(\xi, t) &= a^2 [u_x(x, t) \cos \xi x - \xi u(x, t) \sin \xi x]_0^{+\infty} - a^2 \xi^2 U(\xi, t) \\ &= -a^2 \varphi(t) - a^2 \xi^2 U(\xi, t). \end{aligned}$$

故

$$U(\xi, t) = -a^2 \int_0^t \varphi(\tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{2a^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t \varphi(\tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau \right] \cos \xi x d\xi \\ &= -\frac{2a^2}{\pi} \int_0^t \varphi(\tau) \left[\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} \cos \xi x d\xi \right] d\tau \\ &= -a \int_0^t \varphi(\tau) \frac{e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau. \end{aligned}$$

例 3.1.3: 半无限长弦振动

半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u_x(0, t) = f(t), \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

自然边界条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_t(x, t) = 0$.

$$U_{tt}(\xi, t) = -a^2 f(t) - a^2 \xi^2 U(\xi, t).$$

其次方程通解 $\cos a\xi t$, $\sin a\xi t$, 运用 (2.3) 和边界条件 $U(\xi, 0) = U_t(\xi, 0) = 0$

$$\begin{aligned} U(\xi, t) &= \int_0^t -a^2 f(\tau) \frac{\cos a\xi \tau \sin a\xi t - \cos a\xi t \sin a\xi \tau}{\cos a\xi \tau (\sin a\xi \tau)' - (\cos a\xi \tau)' \sin a\xi \tau} d\tau \\ &= -\frac{a}{\xi} \int_0^t f(\tau) \sin a\xi(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{a}{\xi} \int_0^t f(\tau) \sin a\xi(t - \tau) d\tau \right] \cos \xi x d\xi \\ &= -2a \int_0^t f(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi} \sin a\xi(t - \tau) e^{i\xi x} d\xi d\tau \end{aligned}$$

由

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin a\xi}{\xi} \right] = \frac{H(x+a) - H(x-a)}{2}.$$

其中 $H(x)$ 为 Heaviside 跳跃函数, 故

$$u(x, t) = -a \int_0^{t-x/a} f(\tau) d\tau. \quad x < at$$

3.1.3 Fourier 变换与分离变量法

无界区域是否有相应的分离变量法?

例 3.1.4: 无界长杆热传导

无界长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

分离变量 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 特征值

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda a^2 T = 0$$

讨论知 $\lambda = \xi^2 \geq 0$

$$X = e^{i\xi x}, \quad T = e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

故

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) X(x, \xi) T(t, \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{i\xi x} e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi. \end{aligned}$$

边界条件

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{i\xi x} d\xi \equiv \mathcal{F}^{-1}[A] = \varphi(x),$$

故 $\varphi(x)$ 是 $A(\xi)$ 的 Fourier 变换.

可见对无界区间上的问题, 分离变量法依然适用, 只是特征值是连续分布的.

3.2 Laplace 变换

定义 3.2.1: Laplace 变换

定义 Laplace 变换

$$\bar{f}(\xi) = \mathcal{L}[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\xi x} dx, \quad \operatorname{Re} \xi > \sigma_0.$$

其逆变换

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(\xi)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \bar{f}(\xi) e^{\xi x} d\xi, \quad x \geq 0.$$

注意 Laplace 变换存在条件需要 $\exists M, \sigma_0$ 使得

$$|f(x)| < M e^{\sigma_0 x}, \quad \forall x > 0.$$

其逆变换中 $\sigma > \sigma_0$; 注意, Laplace 变换的积分中本身不包含 $\mathbb{R}_{<0}$ 的部分, 一般认为 $f(< 0) \equiv 0$.

定理 3.2.1: 第一展开定理

设 $F(\xi)$ 在 ∞ 邻域内有 Laurent 展开式

$$F(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\xi^n},$$

则

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad x \geq 0$$

定理 3.2.2: 第二展开定理

设 $F(\xi) = A(\xi)/B(\xi)$ 是有理函数, $\deg A < \deg B$, $B(\xi)$ 只有单零点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 且是 $F(\xi)$ 的单极点, 则

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{k=1}^n \frac{A(\xi_k)}{B'(\xi_k)} e^{\xi_k x} = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(\xi) e^{\xi x}, \xi_k].$$

若 $F(\xi)$ 满足

1. 在 \mathbb{C} 上除了有限个奇点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 外解析;
2. 在半平面 $\text{Re } \xi > \sigma_0$ 上解析;
3. $\exists M > 0, R > 0$ 使得当 $|\xi| > R$ 时

$$|F(\xi)| \leq \frac{M}{|\xi|},$$

则对于 $x \geq 0$ 有

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(\xi) e^{\xi x}, \xi_k].$$

例 3.2.1: 有限杆热传导

有限杆热传导

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & u(L, t) = A, \\ u(x, 0) = B. \end{cases}$$

关于 t 作 Laplace 变换, 记 $U(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)](s)$

$$sU(x, s) - u(x, 0) = U_{xx}(x, s),$$

由 $u(x, 0) = B$,

$$U(x, s) = c_1 \cosh \sqrt{s}x + c_2 \sinh \sqrt{s}x + \frac{B}{s}.$$

再由 $U_x(0, s) = 0$, $U(L, s) = A/s$

$$U(x, s) = \frac{(A - B) \cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} + \frac{B}{s}.$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(A - B) \cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} \right] (t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B}{s} \right] (t) \\ &= (A - B) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} \right] (t) + B. \end{aligned}$$

括号内函数的孤立奇点¹应使得 $\cosh \sqrt{s}L = 0$

$$s_n = - \left[\frac{(2n - 1)\pi}{2L} \right]^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

由

$$\begin{aligned} u(x, t) &= B + (A - B) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left[\frac{\cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} e^{st}, s_n \right] \right\} \\ &= A + \frac{4(A - B)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - 1} \cos \left[\frac{(2n - 1)\pi}{2L} x \right] \exp \left[- \frac{(2n - 1)^2 \pi^2}{4L^2} t \right]. \end{aligned}$$

¹注意, 0 不是此函数的孤立奇点, 不能用留数算出. 逆变换结果中的 1 是围道积出来的. 详情可见附录

例 3.2.2: 有限长弦受迫振动

有限长弦受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = 0, & u_t(L, t) = A \sin \omega t \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

关于 t 作 Laplace 变换, 记 $U(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)](s)$

$$s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) = a^2 U_{xx}(x, s).$$

结合 $U_x(L, s) = A\omega/(s^2 + \omega^2)$

$$U(x, s) = \frac{Aa\omega}{s(s^2 + \omega^2)} \sinh \frac{xs}{a} \operatorname{sech} \frac{Ls}{a}.$$

其所有的孤立奇点: 可去奇点 0; 一级奇点 $\pm i\omega_k$,

$$\omega_k := \begin{cases} \omega, & k = 0 \\ \frac{2k-1}{2L}\pi a, & k \geq 1 \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}[U(x, s) e^{st}, i\omega_k] + \operatorname{Res}[U(x, s) e^{st}, -i\omega_k] \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}[U(x, s) e^{st}, i\omega_k] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{Aa\omega}{s(s + i\omega)} \sinh \frac{xs}{a} \operatorname{sech} \frac{Ls}{a} e^{st} \right]_{i\omega} + \\ &\quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{Aa\omega}{s(s^2 + \omega^2)} \sinh \frac{xs}{a} \cdot \frac{a}{L} \operatorname{csch} \frac{Ls}{a} e^{st} \right]_{i\omega_k} \\ &= \frac{Aa}{\omega} \sinh \frac{\omega x}{a} \sec \frac{\omega L}{a} \sin \omega t + \\ &\quad 16Aa\omega^2 L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)[4\omega^2 L^2 - (2k-1)^2 \pi^2 a^2]} \sin \frac{\omega_k x}{a} \sin \omega_k t. \end{aligned}$$

4 基本解方法

4.1 广义函数

定义 4.1.1: δ 函数

源于物理中对集中分布物理量的数学描述. 满足

$$\int_a^b f(x)\delta(x) dx = \begin{cases} f(x), & 0 \in (a, b) \\ 0, & 0 \notin (a, b) \end{cases}$$

因此 $f * \delta(\xi) = f(\xi)$.

定理 4.1.1: δ 复合函数

设 $u(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 且在实轴上只有单零点 x_1, x_2, \dots, x_n , 则

$$\delta(u(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(x - x_k)}{|u'(x_k)|}. \quad (4.1)$$

比如 $\delta(ax) = \delta(x)/a$.

广义函数

定义 4.1.2: 线性泛函

函数空间 \mathcal{V} 到数域 \mathbb{F} 的映射 \mathcal{T} , 若

$$\mathcal{T}(au + bv) = a\mathcal{T}u + b\mathcal{T}v$$

$\forall a, b \in \mathbb{F}, u, v \in \mathcal{V}$ 均成立, 则 \mathcal{T} 是 \mathcal{V} 上的线性泛函, 即广义函数. \mathcal{V} 上所有线性泛函构成一个线性空间, 称作 \mathcal{V} 的对偶空间 \mathcal{V}^* .

例 4.1.1: 支撑集

记实函数 f 的支撑集

$$\text{supp } f := \{x \mid f(x) \neq 0\}. \quad (4.2)$$

并记

$$\mathcal{L}_0(\mathbb{R}) := \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty, \text{supp } f \text{ 有界} \right\}$$

则 $\forall f \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R})$, f 确定了 $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 上一个线性泛函:

$$\mathcal{T}_f[\varphi(x)] \equiv \langle f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

定理 4.1.2: 广义函数的导数

定义函数空间

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) := \{f \mid f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } f \text{ 有界}\} \quad (4.4)$$

广义函数 $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$, 定义其 n 阶导数

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle := (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (4.5)$$

特别的

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x) dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

泛函意义下, 任意一个广义函数都是无穷阶可导的.

定理 4.1.3: 广义函数的卷积

给定 $f, g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ 的卷积 $f * g(x)$ 也是广义函数

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle. \quad (4.6)$$

一般的, 对常系数微分算子 \mathcal{D}

$$\mathcal{D}(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * \mathcal{D}g.$$

定理 4.1.4: 广义函数的 Fourier 变换

速降函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \mid \lim_{x \rightarrow \infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}. \quad (4.7)$$

比如 $\varphi(x) = p(x) e^{-ax^2}$, $p(x)$ 是多项式, $a > 0$, 则 $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
 给定广义函数 $f \in \mathcal{S}^*$, f 的 Fourier 变换及其逆变换也是广义函数, 定义为

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle &= \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \rangle &= \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Fourier 变换作用转移到基本函数上, 它们保持着经典意义下的基本性质.

定理 4.1.5: 广义函数序列的收敛性

设广义函数列 $\{f_i\}$ 及广义函数 f , 若对基本函数空间的 φ 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

则称 f_n 弱收敛到 f , 本笔记记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \doteq f(x)$.

定理 4.1.6

若基本函数空间为 \mathcal{S} , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \doteq f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \doteq f'(x).$$

定理 4.1.7: 高维广义函数

与一维类似, 函数空间

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\equiv \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f \mid f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \text{supp } f \text{ 有界}\}, \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &:= \left\{ \varphi \left| \lim_{|X| \rightarrow \infty} |X|^m \frac{\partial^k \varphi(X)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} = 0, \quad \forall m, k \in \mathbb{Z}^+ \right. \right\}\end{aligned}$$

对函数空间 \mathcal{V} 上的线性泛函 f

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(X) \varphi(X) dX, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}$$

构成 \mathcal{V}^* .

广义函数 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 的偏导数定义为

$$\left\langle \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \varphi \right\rangle := (-1)^k \left\langle f, \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} \right\rangle$$

特别的, $f = \delta$ 时

$$\left\langle \frac{\partial^k \delta}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \frac{\partial^k \varphi(\mathbf{0})}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}.$$

例 4.1.2: δ 函数与 Laplace 算子

$$\delta(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \Delta_2 \ln r, & n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)S_n} \Delta_n \frac{1}{r^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (4.9)$$

其中 $r = |\mathbf{x}|$, S_n 为 n 维单位球的表面积. 特别的, $S_3 = 4\pi$.

广义函数的卷积

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \langle f(X), \langle g(Y), \varphi(X+Y) \rangle \rangle.$$

4.2 $Pu = 0$ 型方程的基本解

讨论用基本解方法求解方程

$$\mathcal{P}u(M) = f(M), \quad M \in \mathbb{R}^n,$$

其中, \mathcal{P} 是常系数线性偏微分算子.

视 f, u 为广义函数, 它们在广义函数空间里可以自由地进行各种运算和交换. 通过这种方式得到的解叫广义函数解, 简称作**广义解**. 如果解是一个正则广义函数, 甚至还有足够的光滑性, 那么这种解是经典解.

定义 4.2.1: $\mathcal{P}u = 0$ 型方程的基本解

方程

$$\mathcal{P}U(M) = \delta(M) \quad (4.10)$$

的解 $U(M)$ 称作 $\mathcal{P}u = 0$ 型方程的基本解.

对一般的函数 f , 其对应的解是一般的源所产生的物理场. 故基本解也叫点源函数.

若 $Pu = 0$ 型方程有基本解 $U(M)$, 令

$$u(M) := U * f(M) = \int U(M - N) f(N) dN. \quad (4.11)$$

由积分叠加原理

$$Pu(M) = \int P U(M - N) f(N) dN = \int \delta(M - N) f(N) dN = f(M).$$

即 u 满足方程 $Pu = f$.

例 4.2.1

求下面方程的基本解:

$$y' + ay = f(x), \quad a > 0$$

基本解 U 满足

$$U' + aU = \delta(x),$$

即

$$\frac{d}{dx}(U e^{ax}) = \delta(x) e^{ax} = \delta(x), \quad \Rightarrow \quad U(x) = H(x) e^{-ax}.$$

因此原方程的解

$$y(x) = U * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\xi) e^{-a\xi} f(x - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^x f(\xi) e^{-a(x-\xi)} d\xi.$$

例 4.2.2: 3 维 Helmholtz 方程

求 3 维 Helmholtz 方程的基本解:

$$\Delta_3 u + cu = 0$$

由于只有一个点源, 方程具有对称性, 可设方程有球对称基本解 $U(r)$,

当 $r > 0$ 时, $\delta(r) = 0$,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + cU = \frac{1}{r} \left[\frac{d^2}{dr^2} (rU) + crU \right] = 0,$$

当 $c = 0$ 时, 化为 Laplace 方程

$$(rU)'' = 0, \quad \Rightarrow \quad U(r) = \frac{A}{r} + B.$$

记 B_r 为半径为 r 的球内部分, 则

$$\int_{B_r} \Delta U \, dV = \int_{B_r} \delta(x, y, z) \, dV = 1.$$

由 Green 公式

$$\int_{B_r} \Delta U \, dV = \oint_{\partial B_r} \frac{\partial U}{\partial n} \, dS = -\frac{A}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad U(r) = -\frac{1}{4\pi r}.$$

当 $c < 0$ 时, 记 $k := \sqrt{-c}$

$$(rU)'' - k^2 rU = 0, \quad \Rightarrow \quad U = A \frac{e^{-kr}}{r} + B \frac{e^{kr}}{r}.$$

由积分条件

$$\int_{B_r} \Delta U - k^2 U \, dV = \oint_{\partial B_r} \frac{\partial U}{\partial n} \, dS - k^2 \int_{B_r} U \, dV = 1,$$

且

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial B_r} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{e^{k\rho}}{\rho} \right)_r r^2 \sin \theta \, d\theta d\phi - k^2 \int_{B_r} \frac{e^{k\rho}}{\rho} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta d\phi \\ &= 4\pi(kr - 1)e^{kr} - 4\pi \left[(k\rho - 1)e^{k\rho} \right]_0^r = -4\pi. \end{aligned}$$

故 $-4\pi(A + B) = 1$, 即

$$U(r) = -\frac{e^{-kr}}{4\pi r}, \quad -\frac{e^{kr}}{4\pi r}.$$

当 $c > 0$ 时, 记 $k := \sqrt{c}$

$$U = A \frac{\cos kr}{r} + B \frac{\sin kr}{r}.$$

$\sin kr/r$ 在 \mathbb{C} 上是整函数, 无奇异性, 不能作为基本解. 积分 $-4\pi A = 1$

$$U(r) = -\frac{\cos kr}{4\pi r}.$$

4.3 Poisson 方程 Green 函数法

首先引入 Green 公式.

定理 4.3.1: Green 公式

设非空有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 满足边界 $\partial\Omega$ 光滑, 则
 $\forall u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, 有

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dV = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dV; \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dV = \oint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS. \quad (4.13)$$

证明: 由散度定理

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (4.14)$$

取 $\mathbf{A} = v \nabla u$, 可得式 (4.12):

$$\oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS \equiv \oint_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) \, dV = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v \nabla^2 u) \, dV.$$

将 u, v 互换位置并与原式相减, 即得式 (4.13). \square

Poisson 方程第 I 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M \in V \subseteq \mathbb{R}^3 \\ u|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases} \quad (4.15)$$

物理上看, 这是静电场的基本问题: 空间区域 V 内有电荷体密度 $\rho = -\varepsilon f$, 边界上电位已知为 φ , 求 V 内电位 u .

由叠加原理, $u = v + w$, v, w 分别满足

$$\begin{cases} \Delta v = -f(M), \\ v|_{\partial V} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta w = 0, \\ w|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases}$$

其中 v 表示在边界接地条件下体内电荷产生的电场, w 表示由边界约束引起的电场.

定义 4.3.1: Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数

定解问题

$$\begin{cases} \Delta G(M; N) = -\delta(M - N), \\ G|_{\partial V} = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

的解 $G(M; N)$ 称为 Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数.

物理上看, Green 函数就是边界接地条件下, 置于 V 内 N 点电荷为 $+\varepsilon$ 的点源在 V 内 M 点产生的电场, 仍然是一个基本解.

$$u(M) = \int_V f(N)G(M; N) dN - \oint_{\partial V} \varphi(N) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (4.17)$$

证明:

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_V u(N) \delta(M - N) dN = - \int_V u(N) \Delta G(M; N) dN \\ &= - \int_V u \Delta G dN + \int_V G \Delta u dN - \int_V G \Delta u dN \quad (\text{Green-II}) \\ &= \oint_{\partial V} G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} dS + \int_V G f dN \\ &= - \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial G}{\partial n} dS + \int_V G f dN. \quad \square \end{aligned}$$

Fourier 方法是求 Green 函数的基本方法, 但对于一些特殊的区域, 可以采用一些特殊方法, 如镜像法.

方法 4.1: 镜像法

分解 $G = U + g$, U 满足 $\Delta U = -\delta(M - N)$, 可取

$$U = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln r, & n = 2 \\ \frac{1}{4\pi r}, & n = 3 \end{cases}$$

而 g 满足

$$\begin{cases} \Delta g = 0, \\ g|_{\partial V} = -U, \end{cases}$$

是 N 的点电荷在边界上的感应电荷产生的电场.

区域外的点源在 V 内产生的电场满足 Laplace 方程, 可以将边界感

应电荷产生的电场 g 看作区域外某些虚设电荷产生的等效电场, 这种来源于物理效应的方法叫镜像法.

例 4.3.1: 镜像法应用 · 半空间

求上半空间 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数.

V 内 $N(\xi, \eta, \zeta)$ 点的正电荷 ε 在空间 (x, y, z) 产生的电场为

$$U_0 = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}},$$

可虚设电荷 $-\varepsilon$ 于 N 关于 $z=0$ 平面对称的点 $M_1(\xi, \eta, -\zeta)$, 产生的电场

$$U_1 = \frac{-1}{4\pi \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}},$$

在边界上 $U_0|_{z=0} = -U_1|_{z=0}$

$$G = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}} \right]$$

边界方向导数

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\zeta=0} = - \left. \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{-z}{2\pi [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

故对于上半空间 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z > 0 \\ u|_{z=0} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

解的 Poisson 公式

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

二维情况

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

例 4.3.2: 镜像法应用 · 球域

求半径为 R 的球域内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta_3 G(M; N) = -\delta(M - N), & 0 \leq r < R \\ G|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\rho=R} = \frac{R^2 - r^2}{4\pi R(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}.$$

故球内 Dirichlet 问题, 解的 Poisson 形式

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & 0 \leq r < R \\ u|_{r=R} = \varphi(\theta, \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{S_R} \frac{(R^2 - r^2)\varphi(\theta_0, \phi_0) dS_0}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}.$$

Fourier 法 Fourier 法是求 Green 函数的基本方法, 主要思想是按照特征函数作广义 Fourier 展开, 包括分离变量与积分变换.

例 4.3.3: Fourier 法应用

求矩形区域 $\Omega = [0, L] \times [0, M]$ 上第 I 类边值 Poisson 方程的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta_2 G(x, y; \xi, \eta) = -\delta(x - \xi, y - \eta), & x, \xi \in [0, L]; y, \eta \in [0, M] \\ G(0, y) = G(L, y) = G(x, 0) = G(x, M) = 0, \end{cases}$$

有特征值

$$G(x, y) = \sum_{m,n} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{M}.$$

系数

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{M} \right)^2 \right] C_{mn} &= \frac{4}{LM} \int_0^M \int_0^L \delta(x - \xi, y - \eta) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{M} dx dy \\ &= \frac{4}{LM} \sin \frac{m\pi \xi}{L} \sin \frac{n\pi \eta}{M}. \end{aligned}$$

后略.

例 4.3.4: Fourier 法应用 · 有限高

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & x > 0, y \in [0, a] \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u(x, a) = \psi(x), \\ u(0, y) = 0, \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= - \left[\int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\eta=0} d\xi + \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\eta=a} d\xi \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\xi - \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=a} d\xi \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \sum_{n=1}^{\infty} 4n \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \xi \sin \omega x}{n^2 \pi^2 + a^2 \omega^2} d\omega \cdot \cos \frac{n\pi \eta}{a} \cos \frac{n\pi y}{a}; \\ u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} 4n \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \xi \sin \omega x}{n^2 \pi^2 + a^2 \omega^2} [\varphi(\xi) - (-1)^n \psi(\xi)] d\omega d\xi \cdot \cos \frac{n\pi y}{a}. \end{aligned}$$

*Poisson 方程第 II, III 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M \in V \subseteq \mathbb{R}^n \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\partial V} = \varphi(M), & \alpha, \beta \neq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

相应的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(M - N), & M, N \in V \subseteq \mathbb{R}^n \\ \left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \right)_{\partial V} = 0, & \alpha, \beta \neq 0. \end{cases}$$

原问题的解

$$u(M) = \int_V f(N) G(M; N) dN + \frac{1}{\beta} \oint_{\partial V} \varphi(N) G(M; N) dS \quad (4.19)$$

$$= \int_V f(N) G(M; N) dN - \frac{1}{\alpha} \oint_{\partial V} \varphi(N) \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (4.20)$$

$\beta = 0$ 即第 I 边值问题. $\alpha = 0$ 即第 II 边值问题, 但此时表示内部有热源而边界绝热的稳恒温度场, 这是不可能的, 因此需要修正为

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(M - N) + \frac{1}{v}, \\ \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial V} = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \Delta G = -\delta(M - N), \\ \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial V} = -\frac{1}{s}, \end{cases}$$

其中 v, s 为 V 的体积和表面积. 有解

$$u(M) = \int_V f(N)G(M; N) dN + \oint_{\partial V} \varphi(N)G(M; N) dS + \text{const.} \quad (4.21)$$

相容性条件

$$\int_V f(M) dM + \oint_{\partial V} \varphi(M) dS = 0. \quad (4.22)$$

4.4 初值问题的基本解方法

本节主要用基本解方法来求解发展方程, 如 $u_t = \mathcal{P}u$ 型方程

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{P}u + f(M, t), & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(M, 0) = \varphi(M). \end{cases} \quad (4.23)$$

这里所涉及的 \mathcal{P} 是关于空间变量 M 的常系数线性偏微分算子.

定义 4.4.1: $u_t = \mathcal{P}u$ 型方程初值问题的基本解

基本解 $U(M, t)$ 满足

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{P}U, & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(M, 0) = \delta(M). \end{cases} \quad (4.24)$$

有

$$u(M, t) = U(M, t) * \varphi(M) + \int_0^t U(M, t - \tau) * f(M, \tau) d\tau. \quad (4.25)$$

证明过程略.

以及 $u_{tt} = \mathcal{P}u$ 型方程

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{P}u + f(M, t), & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M). \end{cases} \quad (4.26)$$

定义 4.4.2: $u_{tt} = \mathcal{P}u$ 型方程初值问题的基本解

基本解 $U(M, t)$ 满足

$$\begin{cases} U_{tt} = \mathcal{P}U, & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(M, 0) = 0, \quad U_t(M, 0) = \delta(M). \end{cases} \quad (4.27)$$

有

$$u(M, t) = U * \psi + \frac{\partial}{\partial t}(U * \varphi) + \int_0^t U(M, t - \tau) * f(M, \tau) d\tau. \quad (4.28)$$

*** 混合问题的 Green 函数** 对于发展方程的混合问题通常用分离变量法或积分变换法求解, 当然也可以用 Green 函数 (点源函数) 法.

例 4.4.1: 一维波动方程的混合问题

一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Green 函数 $G(x, t; \xi)$ 满足

$$\begin{cases} G_{tt} = a^2 G_{xx}, & x, \xi \in (0, L), t > 0 \\ G(0, t) = G(L, t) = 0 \\ G(x, 0) = 0, \quad G_t(x, 0) = \delta(x - \xi) \end{cases}$$

利用 Fourier 方法可得

$$G(x, t; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a} \sin \frac{n\pi \xi}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L},$$

进而解

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^L \psi(\xi) G d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \varphi(\xi) G d\xi + \\ & \int_0^t \int_0^L f(\xi, \tau) G(x, t - \tau; \xi) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (4.29)$$

附录

A 特征值问题

$$1. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$2. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$3. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$4. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$5. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = -hL \tan \gamma > 0,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$6. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = -hL \cot \gamma > 0,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos \frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$7. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - h_1 X'(0) = 0 \\ X(L) + h_2 X'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \tan L\gamma = \frac{(h_1 + h_2)\gamma}{h_1 h_2 \gamma^2 - 1},$$

$$\lambda_n = \gamma_n^2, \quad X_n = \sin \gamma_n x + h_1 \gamma_n \cos \gamma_n x, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$8. \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases}$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n = A \cos nx + B \sin nx, \quad n = 0, 1, \dots$$

B Fourier 和 Laplace

定义实函数 f, g 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的内积

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx.$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0. \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x + \cos(n+m)x \, dx = \pi \delta_{nm}; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x \, dx = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x - \cos(n+m)x \, dx = \pi \delta_{nm}. \end{aligned}$$

因此

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots\}$$

构成 $[-\pi, \pi]$ 上一组完备的基底，归一化之

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$

用这一组基可将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \langle f, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \langle f, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

利用 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

对于其他周期 $T = \lambda$, $k = 2\pi/\lambda$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inkx}, \quad c_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-inkx} \, dx.$$

而当 $f(x)$ 不是周期函数时, 就不能用 Fourier 变换.

然而, 若认为 $\lambda = 2N$ 充分大, $\xi = nk$,

$$f(x) = \sum_{\xi} \left[\frac{k}{2\pi} \int_{-N}^N f(x) e^{-i\xi x} dx \right] e^{i\xi x}.$$

再让 $N \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$, 定义

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

以及

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

这就是 Fourier 变换.

B.1 Fourier 系数

对于多项式的 Fourier 系数涉及的积分, 只需要利用分部积分将 x^k 不断微分降幂,

1. $\int x \cos ax dx = \frac{x \sin ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2} + \text{const.}$
2. $\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} + \text{const.}$
3. $\int x^2 \cos ax dx = \frac{x^2 \sin ax}{a} + \frac{2x \cos ax}{a^2} - \frac{2 \sin ax}{a^3} + \text{const.}$
4. $\int x^2 \sin ax dx = -\frac{x^2 \cos ax}{a} + \frac{2x \sin ax}{a^2} + \frac{2 \cos ax}{a^3} + \text{const.}$
5. $\int x^3 \cos ax dx = \frac{x^3 \sin ax}{a} + \frac{3x^2 \cos ax}{a^2} - \frac{6x \sin ax}{a^3} - \frac{6 \cos ax}{a^4} + \text{const.}$
6. $\int x^3 \sin ax dx = -\frac{x^3 \cos ax}{a} + \frac{3x^2 \sin ax}{a^2} + \frac{6x \cos ax}{a^3} - \frac{6 \sin ax}{a^4} + \text{const.}$

降幂顺序, 正弦系数的符号 $-, +, +, -$, 余弦系数的符号 $+, +, -, -$; 系数均是 $1, n, n(n-1), \dots$ 形式; 正弦函数 \cos 打头, 余弦 \sin 打头, 然后正余弦交替.

对于指数函数的 Fourier 系数, 只需记住

$$\mathcal{I} := \int e^{ax} \cos bx dx = e^{ax} \cdot \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const};$$

$$\mathcal{J} := \int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const.}$$

证明： 分部积分

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{b} \int e^{ax} \, d \sin bx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \mathcal{J}; \\ \mathcal{J} &= -\frac{1}{b} \int e^{ax} \, d \cos bx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \mathcal{I}.\end{aligned}$$

即可解得上式.

从双曲函数的角度

$$\begin{aligned}\int \cosh ax \cos bx \, dx &= \frac{a \sinh ax \cos bx + b \cosh ax \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const}, \\ \int \cosh ax \sin bx \, dx &= \frac{a \sinh ax \sin bx - b \cosh ax \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const}, \\ \int \sinh ax \cos bx \, dx &= \frac{a \cosh ax \cos bx + b \sinh ax \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const}, \\ \int \sinh ax \sin bx \, dx &= \frac{a \cosh ax \sin bx - b \sinh ax \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const}.\end{aligned}$$

对数函数乘正弦函数分部积分后会出现 $\text{Si } x$, 反三角函数更是没有积分结果, 因此靠上面的公式可以解决绝大部分 Fourier 系数的习题.

B.2 Fourier 变换

Fourier 变换的性质 ^{II}

1. 线性 $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g].$

2. 微分

$$\mathcal{F}[f'] = i\xi \hat{f}.$$

3. 积分

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(\eta) \, d\eta\right] = \frac{1}{i\xi} \hat{f}.$$

其中积分式的 Fourier 变换存在, 且 $\hat{f}(0) = 0$.

4. $\hat{f}(\xi)$ 微分

$$\hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}[-ixf](\xi).$$

^{II}定义见第 22 页 3.0.1.

5. $\hat{f}(\xi)$ 积分

$$\int_{-\infty}^{\xi} \hat{f}(\zeta) d\zeta = \mathcal{F} \left[\frac{f(x)}{-ix} \right] (\xi) + C_1, \quad (\text{B.1})$$

$$\int_{\xi}^{+\infty} \hat{f}(\zeta) d\zeta = \mathcal{F} \left[\frac{f(x)}{ix} \right] (\xi) + C_2. \quad (\text{B.2})$$

6. 位移性质

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-ia\xi},$$

$$\hat{f}(\xi - \alpha) = \mathcal{F}[f(x) e^{i\alpha x}](\xi).$$

7. 相似

$$\mathcal{F}[f(kx)](\xi) = \frac{1}{|k|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{k}\right).$$

8. 卷积^{III}

$$\mathcal{F}[f * g] = \hat{f} \hat{g}.$$

9. 象函数卷积

$$\hat{f} * \hat{g} = 2\pi \mathcal{F}[fg]$$

10. 反射

$$\mathcal{F}[\hat{f}(\xi)](x) = 2\pi f(-x).$$

因此 Fourier 逆变换

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

在 f 连续点处 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)](x) = f(x)$.

高维下 Fourier 变换的性质是相似的.

^{III} f, g 的卷积

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) g(x - \eta) d\eta.$$

且有 $f * g = g * f$.

Fourier 正余弦变换的性质 ^{IV}

1. 微分

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s[f'](\xi) &= f(x) \sin \xi x \Big|_{x=0}^{+\infty} - \xi \mathcal{F}_c[f](\xi); \\
\mathcal{F}_c[f'](\xi) &= f(x) \cos \xi x \Big|_{x=0}^{+\infty} + \xi \mathcal{F}_s[f](\xi); \\
\mathcal{F}_s[f''](\xi) &= [f'(x) \sin \xi x - \xi f(x) \cos \xi x]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2 \mathcal{F}_s[f](\xi); \\
\mathcal{F}_c[f''](\xi) &= [f'(x) \cos \xi x - \xi f(x) \sin \xi x]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2 \mathcal{F}_c[f](\xi).
\end{aligned}$$

2. 积分

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s \left[\int_0^x f(\eta) d\eta \right] (\xi) &= \frac{1}{\xi} \mathcal{F}_c[f](\xi); \\
\mathcal{F}_c \left[\int_0^x f(\eta) d\eta \right] (\xi) &= -\frac{1}{\xi} \mathcal{F}_s[f](\xi).
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

3. 象函数微分

$$\begin{aligned}
\hat{f}'_s &= -\mathcal{F}_c[xf] & \hat{f}''_s &= -\mathcal{F}_s[x^2f] \\
\hat{f}'_c &= \mathcal{F}_s[xf] & \hat{f}''_c &= -\mathcal{F}_c[x^2f].
\end{aligned}$$

4. 相似

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s[f(kx)](\xi) &= \frac{1}{k} \hat{f}_s \left(\frac{\xi}{|k|} \right), \\
\mathcal{F}_c[f(kx)](\xi) &= \frac{1}{|k|} \hat{f}_c \left(\frac{\xi}{|k|} \right)
\end{aligned}$$

5. 反射

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s[\hat{f}_s(x)](\xi) &= -\frac{\pi}{2} f(-\xi), \\
\mathcal{F}_c[\hat{f}_c(x)](\xi) &= \frac{\pi}{2} f(-\xi).
\end{aligned}$$

^{IV}定义见第 23 页 3.1.2.

Fourier 变换函数表

1. $\mathcal{F}[\delta(x)] = 1, \quad \mathcal{F}[\delta^{(n)}(x)] = (i\xi)^n;$
2. $\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(\xi), \quad \mathcal{F}[x^n] = 2\pi i^n \delta^{(n)}(\xi);$
3. $\mathcal{F}[e^{iax}] = 2\pi \delta(\xi - a);$
4. $\mathcal{F}[\cos ax] = \pi [\delta(\xi - a) + \delta(\xi + a)];$
5. $\mathcal{F}[\sin ax] = -i\pi [\delta(\xi - a) - \delta(\xi + a)];$
6. $\mathcal{F}[\cos ax^2] = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left(\cos \frac{\xi^2}{4a} + \sin \frac{\xi^2}{4a} \right);$
7. $\mathcal{F}[\sin ax^2] = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left(\cos \frac{\xi^2}{4a} - \sin \frac{\xi^2}{4a} \right);$
8. $\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2 + \xi^2};$
9. $\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a};$
10. $\mathcal{F}[e^{-iax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{i(\xi^2/4a - \pi/4)};$
11. $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = -i\pi \operatorname{sgn} \xi;$
12. $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^n}\right] = -i\pi \frac{(-i\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sgn} \xi, \quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2}\right] = -\pi \xi \operatorname{sgn} \xi;$
13. $\mathcal{F}[|x|^\alpha] = -2\Gamma(\alpha+1) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |\xi|^{-1-\alpha};$
14. $\mathcal{F}[H(x)] = \frac{1}{i\xi} + \pi \delta(\xi);$
15. $\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \operatorname{sinc} \frac{\xi}{2};$ (系数应该是错的)
16. $\mathcal{F}[\operatorname{sinc} x] = \Pi\left(\frac{\xi}{2}\right)$ (系数应该是错的)

Heaviside 阶梯函数

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

B.3 Laplace 变换

Laplace 变换的性质 注: $x < 0$ 函数值取 0.

1. 线性

2. 微分

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'] &= \xi \bar{f} - f(0); \\ \mathcal{L}[f''] &= \xi^2 \bar{f} - \xi f(0) - f'(0); \\ \mathcal{L}[f^{(n)}] &= \xi^n \bar{f} - \left(\xi^{n-1} f(0) + \xi^{n-2} f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0) \right).\end{aligned}$$

3. 积分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\eta) d\eta\right] = \frac{1}{\xi} \bar{f}.$$

4. 像函数微分

$$\bar{f}' = \mathcal{L}[-xf].$$

5. 像函数积分

$$\int_{\xi}^{+\infty} \bar{f}(\xi) d\xi = \mathcal{L}\left[\frac{f}{x}\right].$$

积分路径 $\operatorname{Re} \xi > \sigma_0$.

6. 复频移与时滞

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(x) e^{\alpha x}] &= \bar{f}(\xi - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C} \\ \mathcal{L}[f(x - a)] &= \bar{f} e^{-a\xi}, \quad a \geq 0\end{aligned}$$

7. 相似

$$\mathcal{L}[f(kx)] = \frac{1}{k} \bar{f}\left(\frac{\xi}{k}\right), \quad k > 0$$

8. 卷积

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

9. 像函数卷积

$$\mathcal{L}[fg](\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \bar{f}(\zeta) \bar{g}(\xi - \zeta) d\zeta,$$

其中 $\xi > \max(\sigma_f, \sigma_g)$

Laplace 变换函数表

$$1. \mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n;$$

$$2. \mathcal{L}[\operatorname{sgn} t] = \mathcal{L}[\mathrm{H}(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[t \mathrm{H}(t)] = \frac{1}{s^2};$$

$$3. \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right] = \frac{1}{\sqrt{s}};$$

$$4. \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a};$$

$$5. \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2};$$

$$6. \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2};$$