

微积分  
Calculus

Dait

# 目 录

<b>第一章 多元函数微分</b>	<b>1</b>
1.1 偏导数 . . . . .	1
1.2 方向导数和梯度 . . . . .	2
1.3 高阶偏导数 . . . . .	2
1.4 向量值函数微分 . . . . .	2
1.5 复合函数微分 . . . . .	3
1.6 隐函数 . . . . .	3
1.7 法与切 . . . . .	5
1.8 Talyor 公式 . . . . .	7
1.9 极值与条件极值 . . . . .	8
<b>第二章 含参积分及广义含参积分</b>	<b>9</b>
2.1 积分号的可交换性 . . . . .	10
<b>第三章 重积分</b>	<b>14</b>
3.1 二重积分 . . . . .	14
3.2 三重积分 . . . . .	15
<b>第四章 曲线积分和曲面积分</b>	<b>18</b>
4.1 Green, Gauss, Stokes 公式 . . . . .	18

# 第一章 多元函数微分

## 定义 1.0.1: 向量和多元函数

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  向量

$$X := [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top,$$

定义在  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  上的  $n$  元函数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f_1, f_2, \dots, f_m: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  构成向量值函数  $F = [f_1, f_2, \dots, f_m]^\top$ .

## 1.1 偏导数

### 定义 1.1.1

$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的基底, 则  $f$  在  $X_0$  点关于  $x_i$  的偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\hat{e}_i) - f(X_0)}{t},$$

$f$  的全微分

$$df(X_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) dx_i. \quad (1.1)$$

有时用  $\partial_i f$  比  $\partial f / \partial x_i$  更好.

### 定理 1.1.1: 可微性判定

对二元函数  $f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ 在 } X_0 \text{ 连续, } \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \text{ 存在}$$

$\Downarrow$

$f$  在  $X_0$  可微性

$\Updownarrow$

$$f(X) - \left[ f(X_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\Delta y \right] = o(\|\Delta X\|)$$

其中  $\Delta X \equiv [\Delta x, \Delta y]^\top$ .

## 1.2 方向导数和梯度

### 定义 1.2.1

$f$  可微, 其沿单位向量  $\hat{\ell} = [\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n]$  方向的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\ell}}(X_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + t\hat{\ell}) - f(X_0)}{t};$$

梯度

$$\nabla f := \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^\top.$$

因此方向导数也可以看做

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\ell}}(X_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \cos \alpha_i = \nabla f(X_0) \cdot \hat{\ell}. \quad (1.2)$$

## 1.3 高阶偏导数

### 定义 1.3.1

若  $f/x_i$  对  $x_j$  的偏导存在, 则记二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$$

也可记作  $\partial_{ji}f$ .

### 定理 1.3.1: 二阶偏导的存在性判定

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ 和 } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ 中一个在 } X_0 \text{ 连续} \\ \Downarrow \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \end{aligned}$$

## 1.4 向量值函数微分

## 定义 1.4.1: Jacobi 矩阵

向量值函数  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix};$$

$$dF = J_F dX.$$

式中的矩阵称为 Jacobi 矩阵

$$J_F \equiv \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

$m = n$  时, 对应有 Jacobi 行列式

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} := \det J_F$$

## 1.5 复合函数微分

## 定理 1.5.1

$G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k, Y_0 = G(X_0)$ , 则下面三个结论是等价的

- (1)  $d(F \circ G)(X_0) = dF(Y_0) dG(X_0)$ ;
- (2)  $J_{F \circ G}(X_0) = J_F(Y_0) J_G(X_0)$ ;
- (3)  $\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(X_0) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(Y_0) \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(X_0)$ .

特别的, 当  $k = 1$  即  $F = f$  为单值函数时

$$\frac{\partial f \circ G}{\partial x_i}(X_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(Y_0) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X_0). \quad (1.3)$$

例:  $\frac{\partial f(x, y, x^2)}{\partial x} = \partial_1 f(x, y, x^2) + 2x \partial_3 f(x, y, x^2)$

## 1.6 隐函数

## 定理 1.6.1: 二元隐函数

给定  $f(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)^I$  与点  $P(x_0, y_0)$ ,

$$f(P) = 0 \text{ 且 } \frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$y = y(x) \text{ 存在, 且 } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}.$$

<sup>1</sup>表示  $f$  在  $\mathbb{R}^2$  上连续.

$$\text{证明: } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

### 定理 1.6.2: 多元隐函数

给定  $f(X, y) \in C(\mathbb{R}^{n+1})$  与点  $P(X_0, y_0)$ ,

$$\begin{aligned} f(P) = 0 \text{ 且 } \frac{\partial f}{\partial y}(P) &\neq 0 \\ \downarrow \\ y = y(X) \text{ 存在, 且 } \frac{dy}{dx_i} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(X, y)}. \end{aligned}$$

### 定理 1.6.3: 向量值隐函数

给定  $f_i(X, Y) \in C(\mathbb{R}^{n+m}), (i = 1, 2, \dots, m)$  与点  $P(X_0, Y_0)$ ,

$$\begin{aligned} F(P) = \vec{0} \text{ 且 } \frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(P) &\neq 0 \\ \downarrow \\ Y = Y(X) \text{ 存在, 且 } \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} &= -\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}\right)^{-1} \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}. \end{aligned}$$

### 定理 1.6.4: 反函数

给定  $Y = F(X)$ , 则反函数  $X = F^{-1}(Y)$  满足

$$J_{F^{-1}}(X) = (J_F(X))^{-1}.$$

### 例 1.6.1: 二阶偏导数举例

给定  $f(x, y, z) = 0$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= -\left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \bigg/ \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial y}.\end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = - \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] / \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^3.$$

## 1.7 法与切

给定向量  $\vec{v} = [a, b, c]^\top$  与点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 可以确定

$$\begin{aligned}\text{线:} \quad & \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \\ \text{平面:} \quad & a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0\end{aligned}$$

参数方程可以得到显函数表达式

$$\begin{aligned}\text{线:} \quad & \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{平面:} \quad \begin{cases} x = x_0 + a_1u + b_1v \\ y = y_0 + a_2u + b_2v \\ z = z_0 + a_3u + b_3v \end{cases} \\ a = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

曲面的法线和切平面

显函数

$$z = f(x, y) \implies \vec{v} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right]_{(x_0, y_0)}.$$

参数方程

$$\begin{cases} x = f_1(u, v) \\ y = f_2(u, v) \\ z = f_3(u, v) \end{cases} \implies \vec{v} = \left[ \frac{D(f_2, f_3)}{D(u, v)}, \frac{D(f_3, f_1)}{D(u, v)}, \frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)} \right]_{(u_0, v_0)}.$$

隐函数

$$f(x, y, z) = 0 \implies \vec{v} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{P_0} = \nabla f(P_0).$$

曲线的法平面和切线

参数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \implies \vec{v} = [x'(t), y'(t), z'(t)].$$

隐函数

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \implies \vec{v} = \left[ \frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}, \frac{D(F_1, F_2)}{D(z, x)}, \frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)} \right]_{P_0}$$



## 1.8 Talyor 公式

### 定义 1.8.1: Hesse 矩阵

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  的 Jacobi 矩阵 (行向量) 为

$$J_f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right].$$

定义 Hesse 矩阵

$$H_f := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

带 Lagrange 余项的 1 阶 Talyor 公式  $\exists \theta \in (0, 1), X_\theta := X_0 + \theta \Delta X$

$$f(X) = f(X_0) + J_f(X_0)\Delta X + \frac{1}{2}\Delta X^\top H_f(X_\theta)\Delta X. \quad (1.4)$$

带 Peano 余项的 2 阶 Talyor 公式

$$f(X) = f(X_0) + J_f(X_0)\Delta X + \frac{1}{2}\Delta X^\top H_f(X_0)\Delta X + \alpha(\Delta X). \quad (1.5)$$

此处  $\alpha(\Delta X) = \frac{1}{2}\Delta X^\top \tilde{H}_f(X_0 + \theta \Delta X)\Delta X = o(\|\Delta X\|^2), \quad \Delta X \rightarrow 0$

$m$  阶 Talyor 公式

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X_0) + \frac{1}{(m+1)!} \left( \sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{m+1} f(X_\theta) \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(X_0) + o(\|\Delta X\|^m) \end{aligned}$$

例:  $f(x, y) =$

$$\begin{aligned} &f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) \\ &+ \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Delta y^3 \right) + \cdots \end{aligned}$$

最后换回来:  $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$

## 1.9 极值与条件极值

### 定理 1.9.1: Fermat 定理

$f$  在  $X_0$  可微, 且  $X_0$  是  $f$  极值点  
 $\Downarrow$   
 $X_0$  是  $f$  驻点, 即  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

### 定理 1.9.2: 极值点的充分条件

$f$  在  $X_0$  二阶连续可微, 且  $X_0$  是  $f$  驻点

(1)  $H_f(X_0)$  正定  $\implies$  极小;

(2)  $H_f(X_0)$  负定  $\implies$  极大;

(3)  $H_f(X_0)$  不定  $\implies$  不是极值点.

判断正负定方法: (1) 左上行列式; (2) 特征值.

### 定理 1.9.3: Lagrange 乘数法

给定  $k$  维曲面

$$S = \{X \mid \varphi_i(X) = 0, i = 1, 2, \dots, n - k\}.$$

定义 Lagrange 函数

$$L(X, \Lambda) := f(X) + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \varphi_i(X). \quad (1.6)$$

若  $X_0 \in S$  为  $f$  在  $S$  上的条件极值点, 则存在  $\Lambda$  使得  $(X_0, \Lambda)$  为  $L$  的驻点.

### 计算有界闭曲面上的最值

- (1) 算出  $f$  在  $\mathbb{R}^2$  上的驻点 (求 Hesse 矩阵判定正负定得出是否为极值点)
- (2) 选取在曲面内的驻点并求值
- (3) 固定曲面边界

## 第二章 含参积分及广义含参积分

### 定义 2.0.1: 含参积分

含参积分

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

广义含参积分包括无穷积分和瑕积分, 有统一形式

$$I(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx \equiv \lim_{A \rightarrow \omega^-} \int_a^A f(x, y) dx.$$

无穷积分  $\omega = +\infty$ ; 瑕积分  $\omega \in \mathbb{R}$  但  $f$  在  $\omega$  邻域内无界 (奇点).

### 定义 2.0.2: 一致连续

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使  $\forall X, Y$  满足  $|X - Y| < \delta$ , 有  $|f(X) - f(Y)| < \varepsilon$ .

**否定形式:** 存在两点列  $\{X_k\}\{Y_k\}$  使得  $\forall k \geq 1, |f(X_k) - f(Y_k)| \geq \varepsilon_0 > 0$ .

### 定理 2.0.1: 一致连续的判定

函数  $f \in C(\Omega)$  在有界闭集  $\Omega$  上连续  $\implies$  一致连续.

### 定义 2.0.3: 一致收敛

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > a$  使  $\forall A > N, \forall y \in [c, d]$ , 有  $\left| \int_a^A f(x, y) dx - I(y) \right| < \varepsilon$ .

### 定理 2.0.2: 一致收敛的 Weierstrass 判别法

$$\begin{aligned} |f(x, y)| \leq F(x), \int_a^\omega F(x) dx \text{ 收敛.} \\ \downarrow \\ \int_a^\omega f(x, y) dx \text{ 对 } y \text{ 一致收敛.} \end{aligned}$$

## 定理 2.0.3: 一致收敛的 Dirichlet 判别法

$$\begin{aligned}
 & \int_a^A f(x, y) dx \text{ 有界;} \\
 & g(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 单调且 } \lim_{x \rightarrow \omega^-} g(x, y) = 0 \\
 & \quad \downarrow \\
 & \int_a^\omega f(x, y)g(x, y) dx \text{ 对 } y \text{ 一致收敛.}
 \end{aligned}$$

## 定理 2.0.4: 一致收敛的 Abel 判别法

$$\begin{aligned}
 & \int_a^\omega f(x, y) dx \text{ 对 } y \text{ 一致收敛;} \\
 & g(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 单调且有界} \\
 & \quad \downarrow \\
 & \int_a^\omega f(x, y)g(x, y) dx \text{ 对 } y \text{ 一致收敛.}
 \end{aligned}$$

## 2.1 积分号的可交换性

## 定理 2.1.1: 连续性

$f(x, y)$  连续  $\implies I(y)$  连续, 即

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

$f(x, y)$  连续且  $\int_a^\omega f(x, y) dx$  关于  $y$  一致收敛.  $\implies I(y)$  连续, 即

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\omega f(x, y) dx = \int_a^\omega \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

## 定理 2.1.2: 可微性

$f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  连续  $\implies I(y)$  可微, 且

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx.$$

$f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  连续且  $\int_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  关于  $y$  一致收敛  $\implies I(y)$  可微, 且

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^\omega f(x, y) dx = \int_a^\omega \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx.$$

公式

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\beta(y), y)\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\alpha'(y).$$

### 定理 2.1.3: 积分性

$f(x, y)$  连续  $\implies I(y)$  可积, 且

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

$f(x, y)$  连续且  $\int_a^\omega f(x, y) dx$  关于  $y$  一致收敛  $\implies I(y)$  可积, 且

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \int_a^\omega f(x, y) dx dy = \int_c^\omega \int_a^b f(x, y) dx dy$$

\* 对于含两个广义积分的交换条件更严格

1.  $f(x, y)$  连续
2.  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  分别关于  $y \in [c, C], x \in [a, A]$  一致收敛
3.  $\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx dy, \int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy dx$  至少一个存在

则

$$\int_c^{+\infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_a^{+\infty} \int_c^{+\infty} f(x, y) dy dx$$

### 例 2.1.1: Gamma 函数

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

递推公式

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1. \\ \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x \cdot e^{-t} dt \\ &= -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot x t^{x-1} dt = x \Gamma(x). \end{aligned}$$

对于  $n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = (n-1)!$ .

余元公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad x \in (0, 1).$$

证明略, 有  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

## 例 2.1.2: Beta 函数

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

与 Gamma 函数的关系为  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .

## 例 2.1.3: Poisson 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

证明: 考虑积分的平方

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

## 例 2.1.4: Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

证明: 令

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx, \quad y \geq 0.$$

由  $\frac{\sin x}{x} e^{-xy}$  可被延拓为  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  上的连续函数, 故  $F(y)$  在  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  上连续. 注意到, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛:  $\forall x, y \geq 0, |e^{-xy}| \leq 1$  且  $e^{-xy}$  关于  $x$  递减, 由 Abel 判别准则可知  $F(y)$  关于  $y \in [0, +\infty)$  一致收敛.

任取  $a > 0, \forall x \geq 0, y \geq a$ , 可知  $|\sin x e^{-xy}| \leq e^{-xy} \leq e^{-ax}$  有界, 由 Weierstrass 判别准则知, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx = - \int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx$$

一致收敛, 因此  $F(y)$  在  $[a, +\infty)$  上可导

$$\begin{aligned} F'(y) &= - \int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy} dx = \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} e^{-xy-ix} dx \\ &= - \operatorname{Im} \left. \frac{e^{-(y+i)x}}{y+i} \right|_0^{+\infty} = - \frac{e^{-yx}}{y^2+1} \operatorname{Im}(y-i) e^{-ix} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-yx}}{y^2+1} (y \sin x + \cos x) \Big|_0^{+\infty} = - \frac{1}{1+y^2}. \end{aligned}$$

因为  $a > 0$  任意, 故  $\forall y > 0$ ,

$$F'(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad F(y) = -\arctan y + C.$$

又  $y \rightarrow +\infty$ ,

$$|F(y)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} e^{-xy} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y} \rightarrow 0.$$

故  $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = C - \frac{\pi}{2} = 0$ , 即  $C = \frac{\pi}{2}$ .

又  $F(y)$  在  $[0, +\infty)$  上连续, 故  $\forall y \geq 0, F(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$ . 特别的

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

## 第三章 重积分

### 3.1 二重积分

#### 定理 3.1.1: 累次积分法

$D = \{(x, y) \mid \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), a \leq x \leq b\}$ ,  $\alpha(x), \beta(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $f \in \mathcal{R}(D)$ , 且

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

#### 定理 3.1.2: 变量代换法

以  $x, y$  为变量的区域  $D$  经过变量代换及其逆变换

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \quad \left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \right).$$

就会变为以  $u, v$  为变量的区域  $D'$ , 积分也会变换为

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \, du dv.$$

例: 极坐标  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ .

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho d\theta.$$

例: 旋转  $x = u \cos \theta - v \sin \theta, y = u \sin \theta + v \cos \theta$ .

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D'} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) \, du dv.$$

#### 曲面面积问题

空间  $O - xyz$  中曲面的方程为

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases} \quad \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} \text{ 列满秩} \right).$$



转化为  $O-uv$  曲面中的二重积分问题, 其中两条曲线切向量

$$\vec{u} = \left[ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right]^\top, \quad \vec{v} = \left[ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right]^\top$$

则

$$S = \iint_D \|\vec{u} \times \vec{v}\| \, du dv$$

若设

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}. \quad (3.1)$$

则  $\vec{u} \times \vec{v} = [A, B, C]^\top$ ,

$$S = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du dv \quad (3.2)$$

另一种方式是利用  $(\vec{u} \times \vec{v})^2 = u^2 v^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ ,

$$E = \vec{u} \cdot \vec{u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad (3.3)$$

$$G = \vec{v} \cdot \vec{v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2, \quad (3.4)$$

$$F = \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}. \quad (3.5)$$

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du dv$$

特别的, 当曲线是显式的, 即  $z = z(x, y)$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} \, dx dy.$$

## 3.2 三重积分

### 定理 3.2.1: 累次积分法

$\Omega = \{(x, y, z) \mid \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), (x, y) \in D\}$ , 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_D \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dx dy.$$

### 定理 3.2.2: 变量代换法

同样的, 对于变量替换

$$\begin{cases} x = x(r, s, t), \\ y = y(r, s, t), \\ z = z(r, s, t). \end{cases} \quad \left( \frac{D(x, y, z)}{D(r, s, t)} \neq 0 \right).$$

有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \tilde{f}(r, s, t) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(r, s, t)} \right| dr ds dt.$$

其中  $\tilde{f}(r, s, t) = f(x(r, s, t), y(r, s, t), z(r, s, t))$ .

例：柱坐标  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z$ .

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho \, d\rho d\theta dz.$$

例：球坐标  $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$ .

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz \\ = \iiint_{\Omega'} f(\sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi. \end{aligned}$$

### 例 3.2.1: $n$ 重积分

定义  $\mathbb{R}^n$  中单位球

$$\Omega_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right. \right\}$$

的体积

$$V_n = \int \cdots \int_{\Omega_n} dx_1 \cdots dx_n = \int_{-1}^1 \int \cdots \int_{D_{n-1}} dx_1 \cdots dx_{n-1} dx_n.$$

其中

$$D_{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq 1 - x_n^2 \right. \right\}.$$

作变换  $x_i = \sqrt{1 - x_n^2} u_i, (i = 1, \dots, n-1)$ , 则

$$\frac{D(x_1, \dots, x_{n-1})}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} = (1 - x_n^2)^{(n-1)/2}.$$

可得

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{-1}^1 \int \cdots \int_{\Omega_{n-1}} (1 - x_n^2)^{(n-1)/2} du_1 \cdots du_{n-1} dx_n \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{(n-1)/2} V_{n-1} dx_n = 2V_{n-1} \int_0^1 (1 - x^2)^{(n-1)/2} dx. \end{aligned}$$

令  $x = \sqrt{t}$ , 则

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \int_0^1 (1-t)^{(n-1)/2} t^{-1/2} dt = V_{n-1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \\ &= V_{n-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} = V_{n-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \sqrt{\pi} \\ &= V_1 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \pi^{(n-1)/2} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}. \end{aligned}$$

我们就得到了“体积”公式

$$V_n = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!}, & n = 2k, \\ \frac{2^k \pi^{k-1}}{n!}, & n = 2k - 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

例如  $V_1 = 2$ ,  $V_2 = \pi$ ,  $V_3 = \frac{4}{3}\pi$ ,  $V_4 = \frac{1}{2}\pi^2$ ,  $V_5 = \frac{8}{15}\pi^2, \dots$

## 第四章 曲线积分和曲面积分

定义 4.0.1: 第一类、第二类曲线积分和曲面积分

第一类曲线积分

$$\int_L f(X) d\ell = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

第一类曲面积分

$$\int_S f(X) d\sigma = \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\vec{u} \times \vec{v}\| du dv.$$

第二类曲线积分

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B X(x, y) dx + Y(x, y) dy.$$

第二类曲面积分

$$\int_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{S^+} X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy.$$

第二类曲面积分可以化为第一类曲面积分

$$\int_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{V} \cdot \hat{n} d\sigma.$$

从计算方面来说

$$\int_{S^+} X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy = \pm \iint_D X A + Y B + Z C du dv.$$

### 4.1 Green, Gauss, Stokes 公式

定理 4.1.1: Green 公式

$X(x, y), Y(x, y)$  在有界单连通闭区域  $D$  上连续可微

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy &= \oint_{\partial D} X dy - Y dx, \\ \iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} dx dy &= \oint_{\partial D} X dx + Y dy. \end{aligned}$$

## 定理 4.1.2: Gauss 公式

$X(x, y), Y(x, y)$  在有界单连通闭区域  $D$  上连续可微

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot d\vec{S}.$$