经典力学

Classical Mechanics

Dait

目 录

第一部分

Newton 力学

Newton 力学研究质点 (组) 在三维 Euclid 空间中的运动.

实验事实

经典力学的基础是一些实验事实.

空间与时间 我们所在的空间是三维 Euclid 空间，最简单的数学模型是 $\mathbb{R}^3$. 时间是一个一维序列，并且两个事件之间的时间间隔可以任意小，最简单的数学模型是 $\mathbb{R}$.

Galileo 相对性原理 存在一些参考系 (reference frame) 称为惯性系 (inertial frame)，其具有以下两个性质：

- 在任何时刻，一切自然规律在所有惯性系中都相同；
- 相对于一个惯性系做匀速直线运动的参考系也是惯性系.

Newton 决定性原理 一个力学系的初始状态 (即各点在初始时刻的位置和速度) 唯一地决定其运动.

第一章 运动学

本章主要讨论质点和质点系统的运动学 (kinematics). 运动学描述系统 (点、物体、点的系统等等) 的运动，而不关心系统为什么会这么运动 (这是动力学的内容).

1.1 Galileo 时空

1.1.1 仿射空间

基于 Galileo 相对性原理，我们需要研究一个“去掉原点的线性空间”.

定义 1.1.1: 仿射空间

一个仿射空间 (affine space) (A, V) 是一个集合 A 和一个与之相伴的线性空间 V. 且存在映射

$$f : A \times V \to A : (a, v) \mapsto a + v, \tag{1.1}$$

满足：

- 右幺 (right identity)：V 中的零向量 0 满足 $\forall a \in A$ 有 $a + 0 = a$;
- 结合律 (associativity)：$\forall u, v \in V, \forall a \in A$ 有 $(a + u) + v = a + (u + v)$;
- 正则性：$\forall a \in A$，映射 $V \to A : v \mapsto a + v$ 是一个双射.

注.

- 仿射空间与线性空间的区别在于其没有原点，所以仿射空间没有定义加法；
- 前两个性质定义了 V 作为加法群在 A 上的右作用，正则性等价于这个作用具有：
  - 传递性 (transitive)：$\forall a, b \in A, \exists v \in V$ 使得 $b = a + v$;
  - 自由 (free)：$u, v \in V$，如果存在 $a \in A$ 使得 $a + u = a + v$，则 $u = v$;
- $\forall v \in V$，v 在 A 上的右作用可定义映射：

  $$g_v : A \to A : a \mapsto a + v$$

  g_v 是一个双射，称为 A 上的一个平移 (translation)，故 V 也叫 A 的平移空间；
- 减法：$\forall a, b \in A$，存在唯一的 $v \in V$ 使得 $b = a + v$. 记 $v = b - a$.

例 1.1.1

V 是一个线性空间，则 (V, V) 是一个仿射空间，其右作用就是线性空间的加法.
V 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个 m 维的线性子空间，$v \in \mathbb{R}^n$，则 $(V + v, V)$ 是一个仿射空间.

后面我们用 $\mathbb{A}^n$ 表示平移空间为 $\mathbb{R}^n$ 的 n 维仿射空间.

定义 1.1.2: 仿射标架

仿射空间 (A,V) 的仿射标架 (affine frame) 是集合 $\{o;v_1,\dots,v_n\}$，其中 $o\in A$ 是原点 (origin)，$(v_1,\dots,v_n)$ 是 V 的一组基. 由定义，$\forall a\in A$ 都可以被唯一地写成

$$a=o+\lambda^1v_1+\cdots+\lambda^nv_n, \tag{1.2}$$

$(\lambda^1,\dots,\lambda^n)$ 是 a 在仿射标架 $\{o;v_1,\dots,v_n\}$ 中的仿射坐标 (affine coordinates).

仿射标架定义了一一映射 $A\to\mathbb{R}^n: a\mapsto(\lambda^1,\dots,\lambda^n)$

1.1.2 Galileo 时空

经典力学的时空模型是 Galileo 时空.

定义 1.1.3: Galileo 时空

Galileo 时空 (spacetime) 是一个拥有 Galileo 结构 (structure) 的四维仿射空间 $(\mathbb{A}^4,\mathbb{R}^4)$：

- 时间 T 是非零线性映射 $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$.
  $\forall a,b\in\mathbb{A}^4$，事件 a 和事件 b 的时间间隔为 $T(b-a)$；
- 若 $T(b-a)=0$，则 a 和 b 是同时的 (simultaneous).
  事件 a 的同时空间是 $\mathbb{A}_a=\{b\in\mathbb{A}^4\,|\,T(b-a)=0\}$，同构于 $\mathbb{A}^3$；
- $\forall a,b\in\mathbb{A}_c$，同时事件 a,b 之间的距离定义为

$$d(a,b)\equiv|a-b|=\sqrt{(a-b,a-b)}, \tag{1.3}$$

  其中 $(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 Euclid 内积. 即每个同时空间 $\mathbb{A}_c$ 相伴的平移空间是一个 Euclid 空间.

例 1.1.2: Galielo 坐标时空

考虑 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ 作为仿射空间，并在 $\mathbb{R}^3$ 的平移空间上赋予通常的 Euclid 度量，则 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ 是一个 Galileo 时空，也记为 $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3$. 时间 T 为投影映射

$$\pi_t:\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_t:(t,\boldsymbol{x})\mapsto t. \tag{1.4}$$

这个仿射空间也叫 Galielo 坐标时空.

定义 1.1.4: Galileo 群

Galileo 群 Gal(3) 是 $\mathbb{A}^4$ 上所有保持 Galileo 结构的仿射变换构成的群. 即 $\forall g\in\mathrm{Gal}(3)$：

- $\forall a,b\in\mathbb{A}^4, T(g(a)-g(b))=T(a-b)$;
- $\forall a,b\in\mathbb{A}_c, d(g(a),g(b))=d(a,b)$;

定理 1.1.1

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ 上的 Galileo 群 $\mathrm{Gal}(3)$ 由以下三类变换的复合生成：
- 匀速运动 $g_1:(t,\boldsymbol{x})\mapsto(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}t)$，其中速度 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$；
- 平移 $g_2:(t,\boldsymbol{x})\mapsto(t+s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s})$，其中 $(s,\boldsymbol{s})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$；
- 转动 $g_3:(t,\boldsymbol{x})\mapsto(t,S\boldsymbol{x})$，其中 $S\in O(3)$

$\forall g\in\mathrm{Gal}(3)$ 都可以被唯一地写成 $g=g_1\circ g_2\circ g_3$.

例 1.1.3

映射 $(t,\boldsymbol{x})\mapsto(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}t^2/2)\notin\mathrm{Gal}(3)$，因为它不是仿射变换.

定理 1.1.2

所有 Galileo 时空都互相同构；特别地，也都同构于 Galileo 坐标时空 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$.

因此如无额外说明，以后提到的 Galileo 时空都指 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$.

1.1.3 Galileo 时空中粒子的运动

当我们不关心对象的内部结构，只关心对象的位置的时候，我们可以用一个点来代表它，称之为粒子 (particle).

定义 1.1.5: 世界线

Galileo 时空中，一个粒子的运动轨迹 (trajectory) 或世界线 (world line) 是 $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3$ 的一个可微[I]截面 $\sigma:\mathbb{R}_t\to\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3$.

更一般的，我们可以用可微映射 $q:I\to\mathbb{R}^3$ 描述单个粒子的运动，其中 I 是 $\mathbb{R}_t$ 的一个区间. 映射 q 的陪域 $\mathbb{R}^3$ 也叫做位形空间 (configuration space).

当位形空间是 $\mathbb{R}^n$ 的时候，我们也将 q 记为 $\boldsymbol{x}$ 或者 $\boldsymbol{x}(t)$.

[I] 此处指总是具有所需要的可微性质.

伽利略时空中单粒子的位形空间即是 $\mathbb{R}^3$.

定义 1.1.6: 速度

若某粒子在 Galileo 时空中的运动由 $\boldsymbol{x}(t)$ 描述，则 $\boldsymbol{x}(t)$ 的一阶导

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.5}$$

是速度 (velocity) 矢量.

例 1.1.4

考虑匀速直线运动 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}t$，$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{v}$ 是一个常映射．匀速直线运动在 Galileo 变换下仍然是匀速直线运动．

定义 1.1.7: 多粒子运动

Galileo 时空中 N 个粒子的运动可以用 $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3$ 中的 N 个截面 $\sigma_1,\ldots,\sigma_N$ 描述．但是为了体现经典力学中的绝对时间，即不同粒子的运动共用一个时间轴 $\mathbb{R}_t$，我们应该用

$$\underbrace{(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3)\times_{\mathbb{R}_t}\cdots\times_{\mathbb{R}_t}(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3)}_{N}$$

中的一个截面来描述这 N 个粒子的运动轨迹．其中 $\times_{\mathbb{R}_t}$ 是 $\mathbb{R}_t$ 上的纤维积 (fiber product)，其定义为

$$(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3)\times_{\mathbb{R}_t}(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3)\equiv\{(t_1,\boldsymbol{x}_1,t_2,\boldsymbol{x}_2)\in(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3)\times(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3)\,|\,t_1=t_2\}\tag{1.6}$$

等价地，Galileo 时空中 N 个粒子的运动可以用映射 $\boldsymbol{x}(t):\mathbb{R}_t\to\mathbb{R}^{3N}$ 或 $\boldsymbol{x}(t):I\to\mathbb{R}^{3N}$ 描述．此时位形空间为 $\mathbb{R}^{3N}$．

1.2　约束系统

定义 1.2.1: 约束

很多时候粒子的位置 $\boldsymbol{x}(t)$ 需要满足额外的方程 $f(\boldsymbol{x})=0$，这些方程叫做对系统的约束 (constraints)．

例 1.2.1: 球面约束

考虑一个被限制在半径为 ℓ 的球面上的粒子，其坐标 $\boldsymbol{x}$ 满足约束

$$|\boldsymbol{x}|^2=\ell^2,$$

这个约束在变换 $(t,\boldsymbol{x})\mapsto(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}t)$ 下变成一个与时间 t 相关的约束，因此其与 Galileo 结构不相容．因为这个约束将球面的球心看作一个特殊的点．

例 1.2.2: 刚性杆约束

考虑被长为 ℓ 的刚性杆连接的两个粒子，其坐标 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$ 满足约束

$$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|^2=\ell^2,$$

这个约束在 Galileo 变换下始终保持同样的形式，因此其与 Galileo 结构相容．

当有约束的时候，选取不同的坐标系可能会让约束简化．

例 1.2.3: 球面约束 · 续

接例 1.2.1，约束在直角坐标系下是关于 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ 三个分量的方程．但若选取球坐标 (r, θ, ϕ) 满足

$$\boldsymbol{x} = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin \sin\theta\phi, r\cos\theta)$$

约束 $|\boldsymbol{x}|^2 = \ell^2$ 在球坐标下变为

$$|r|^2 = \ell^2,$$

与 θ, ϕ 无关．此时粒子的位形空间为区域 $0 \leqslant \theta < \pi$ 和 $0 \leqslant \phi < 2\pi$．

1.2.1 微分流形

有约束的系统的位形空间是一个微分流形．

定义 1.2.2: 拓扑

集合 X 上的拓扑 (topology) $\mathcal{T}$ 是 X 的子集族，其元素称为 X 的开集 (open set)，满足：

- $\varnothing, X$ 是 X 的开集：$\varnothing \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$；
- 有限个 X 的开集之交是 X 的开集：$\forall U_i \in \mathcal{T}, \cup_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$；
- 任意个 X 的开集之并是 X 的开集：$\forall U_i \in \mathcal{T}, \cap_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathcal{T}$．

并称 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间 (topological space)．

在明确了拓扑 $\mathcal{T}$ 后，可以只用 X 表示拓扑空间．

定义 1.2.3: 同胚

两个拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 之间的同胚映射 (homeomorphism)

$$f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y) \tag{1.7}$$

满足：f 是一个双射，且 f 和 f^{-1} 是连续的．

此时称 X, Y 是同胚的 (homeomorphic) 或拓扑同构的 (topological isomorphic)，记作 $X \cong Y$．

定理 1.2.1

同胚是一种等价关系：

- 自反性：$X \cong X$，即任何拓扑空间都与其自身同胚；
- 对称性：$X \cong Y \iff Y \cong X$；
- 传递性：$X \cong Y, Y \cong Z \implies X \cong Z$．

例 1.2.4

在 Euclid 度量空间 $(\mathbb{R}, \rho)$ 中，任何开区间都是同胚的，比如可以找到 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 之间的同胚映射：

$$f:(0,1)\to(1,+\infty):x\mapsto\frac{1}{x}.$$

同时，任何闭区间都是同胚的.

定义 1.2.4: 坐标卡

一个 n 维的坐标卡 (coordinate chart) 是拓扑空间 X 中的一个开集 U 到 $\mathbb{R}^n$ 的开集 V 的同胚映射

$$\phi:U\to V\subset\mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

其中 U 和 V 上各自赋予子空间拓扑.

物理上的坐标系一般指某个坐标卡. 我们也将坐标卡记为 (U,ϕ).

定义 1.2.5: 连接函数

若 $\phi:U_1\to V_1$ 和 $\psi:U_2\to V_2$ 是 X 上的两个坐标卡，且 $U_1\cap U_2\neq\varnothing$，则 ϕ,ψ 之间的连接函数 (transition function) 为

$$\psi\circ\phi^{-1}:\phi(U_1\cap U_2)\mapsto\psi(U_1\cap U_2). \tag{1.9}$$

若 $\psi\circ\phi^{-1}$ 可微，则 ϕ,ψ 是相容或相关的 (compatible). 若 $U_1\cap U_2=\varnothing$，则默认相容.

定义 1.2.6: 图册

对于拓扑空间 X，若存在一族两两相容的坐标卡 $\mathcal{A}=\{U_i\}_{i\in I}$ 使得 $X=\cup_{i\in I}U_i$，则称 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个图册 (atlas).

定理 1.2.2: 图册的等价关系

X 上的两个图册 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ 等价当且仅当其并 $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ 也是 X 上的一个图册.

定义 1.2.7: 微分流形

拓扑空间 X 上的一个微分结构 $\mathcal{D}$ 是 X 上等价图册的类. X 和其上微分结构 $\mathcal{D}$ 构成一个微分流形 (differentiable manifold) $M=(X,\mathcal{D})$.

微分结构 $\mathcal{D}$ 中所有图册的并 $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}=\cup\{\mathcal{A}\,|\,\mathcal{A}\in\mathcal{D}\}$ 叫做 $\mathcal{D}$ 的最大图册. 如果一个微分结构中图册的连接函数都是 C^r 函数 (r 阶导连续)，则称相应的微分流形为 C^r 流形. 特别的，如果连接函数都是 C^∞ 函数 (光滑函数)，我们得到 C^∞ 流形 (光滑流形). 如果微分流形 M 是连通的，则它的一个图册中的每个坐标卡的维数都相同，此时这个维数也就是 M 的维数. 我们考虑的位形空间基本上都是连通流形.

例 1.2.5

(A, V) 是一个 n 维仿射空间．选取仿射标架 $(o; v_1, \dots, v_n)$ 后得到坐标卡

$$\phi : A \to \mathbb{R}^n : a \mapsto (\lambda^1, \dots, \lambda^n),$$

此时坐标卡本身构成一个图册．

例 1.2.6

$\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 $\mathbb{S}^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1.10}$$

上的一个开覆盖 $U_N \cap U_S$，其中 $U_N = \mathbb{S}^2 \backslash \{S = (0, 0, -1)\}$ 和 $U_S = \mathbb{S}^2 \backslash \{N = (0, 0, 1)\}$．可通过球极投影构造如下坐标卡

$$\phi_N : U_N \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{2x}{1+z}, \frac{2y}{1+z}, 1\right); \tag{1.11a}$$

$$\phi_S : U_S \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, -1\right). \tag{1.11b}$$

其连接函数

$$\phi_{NS} \equiv \phi_N \circ \phi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} : (X, Y) \mapsto \left(\frac{2X}{X^2+Y^2}, \frac{2Y}{X^2+Y^2}\right) \tag{1.12}$$

是光滑的．这样我们就得到了 $\mathbb{S}^2$ 上的一个图册，这个图册所属的等价类就是 $\mathbb{S}^2$ 上的一个光滑结构．

我们还可以在 $\mathbb{S}^2$ 上定义另一个图册，它也包含两个坐标卡

$$\phi_1^{-1} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta); \tag{1.13a}$$

$$\phi_2^{-1} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to (\sin\theta\sin\phi, \cos\theta, \sin\theta\cos\phi). \tag{1.13b}$$

这两个坐标卡来源于直角坐标变换成球坐标．可以验证它和之前的图册是等价的．

第二部分

Lagrange 力学

本章讨论动力学 (dynamics). 动力学研究系统如何随时间演化，通常体现为一系列跟系统有关的微分方程 (运动方程)，系统的运动为这组微分方程满足特定边界条件的解. 换句话说，运动学告诉我们系统的运动对应曲线 $q(t) : \mathbb{R}_t \to M$，动力学告诉我们曲线 $q(t)$ 满足的额外条件. 本章将介绍经典力学中的 Lagrange 表述，从最小作用量原理出发导出系统的运动方程.

第二章　变分原理

2.1　最小作用量原理

第三部分

Hamilton 力学