

数学物理方法

Methods of Mathematics and Physics

Dait

# 目 录

<b>第一章</b>	<b>偏微分方程的定解问题</b>	<b>1</b>
1.1	定解问题及适定性 . . . . .	2
1.2	一阶线性方程的通解法 . . . . .	2
1.3	波动方程的行波解和 d'Alembert 公式 . . . . .	3
1.4	二阶线性偏微分方程及标准型 . . . . .	7
1.5	叠加原理和齐次化原理 . . . . .	8
<b>第二章</b>	<b>分离变量法</b>	<b>10</b>
2.1	特征值和特征函数 . . . . .	11
2.2	Sturm-Liouville 定理 . . . . .	14
2.3	非齐次方程 . . . . .	18
<b>第三章</b>	<b>积分变换法</b>	<b>20</b>
3.1	Fourier 变换 . . . . .	20
3.1.1	Fourier 正余弦变换 . . . . .	21
3.1.2	Fourier 变换与分离变量法 . . . . .	23
3.2	Laplace 变换 . . . . .	23
<b>第四章</b>	<b>基本解方法</b>	<b>27</b>
4.1	广义函数 . . . . .	27
4.2	$Pu = 0$ 型方程的基本解 . . . . .	30
4.3	Poisson 方程 Green 函数法 . . . . .	32
4.4	初值问题的基本解方法 . . . . .	36
<b>附录 A</b>	<b>附录</b>	<b>38</b>
A.1	特征值问题 . . . . .	38
A.2	Fourier 和 Laplace . . . . .	39
A.2.1	Fourier 系数 . . . . .	40
A.2.2	Fourier 变换 . . . . .	41
A.2.3	Laplace 变换 . . . . .	44

# 第一章 偏微分方程的定解问题

## 例 1.0.1: 弦振动

线密度为  $\rho$  的弦在自身张力  $T$  的作用下平衡位置在  $x$  轴, 横向位移  $u = u(x, t)$ , 取  $(x_1, x_2)$  段进行受力分析

$$\begin{aligned}T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 &= 0, \\T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 &= \rho \delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

限定  $\theta \ll 1$ , 有  $\cos \theta \doteq 1$ ,  $\sin \theta \doteq \theta$ ,

$$\begin{aligned}T_1 &= T_2 =: T, \\T \delta \theta &= \rho \delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

又  $\theta = \partial u / \partial x$ , 得到波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 := \frac{T}{\rho}. \quad (1.1)$$

## 例 1.0.2: 热传导

由 Fourier 热传导定律, 一段时间内流入物体  $\Omega$  的热量为

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial \Omega} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} k \Delta u dV dt,$$

其中  $k$  为介质的热传导系数,  $u = u(x, y, z, t)$  为各点温度.

另一方面, 从比热容  $c$  的角度看,

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt.$$

其中  $\rho$  为物体的体密度.

因为上式对任意  $\Omega \times (t_1, t_2)$  均成立, 得到热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad a^2 := \frac{k}{c \rho}. \quad (1.2)$$

## 1.1 定解问题及适定性

$V \subseteq \mathbb{R}^n$  内  $m$  阶 PDE 形如

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0,$$

其中  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . 在本笔记中, 偏微分  $\partial u / \partial x$  可以简记为  $u_x$ .

### 定义 1.1.1: 定解条件

确定解中函数的条件称为定解条件, 包括初始条件和边界条件

- I. (Dirichlet)  $u|_{x=0} = f, \quad u|_{\partial V} = f;$
- II. (Neumann)  $u_t|_{x=0} = f, \quad u_t|_{\partial V} = f;$
- III. (Robin)  $(u_t + \sigma u)|_{x=0} = f, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)|_{\partial V} = f.$

### 定义 1.1.2: 解相关的术语

古典解: 符合方程且各阶偏导数连续;  
 通解:  $m$  阶 PDE 有  $m$  个任意函数的解;  
 特解: 不包含任何任意函数或任意常数的解;  
 适定解: 存在、唯一且稳定.

## 1.2 一阶线性方程的通解法

### 方法 1.2.1: 常数变易法

对于  $u(x, y)$  的方程

$$u_x + Ax = B.$$

有解

$$\begin{cases} \varphi = \exp\left(-\int A \, dx\right), \\ \psi = \int B\varphi^{-1} \, dx \end{cases} \implies u = \varphi(\psi + g(y)).$$

其中  $g \in \mathcal{C}$ .

### 方法 1.2.2: 变量代换

$u = u(x, y)$  的方程

$$au_x + bu_y + cu = f,$$

作变量代换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \implies \begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{cases}$$

变成  $u = u(\xi, \eta)$  的方程

$$(a\xi_x + b\xi_y)u_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)u_\eta + cu = f.$$

使  $a\xi_x + b\xi_y = 0$ , 得到特征方程和特征曲线

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}, \implies \xi(x, y) = \text{const.} \quad (1.3)$$

剩下

$$(a\eta_x + b\eta_y)u_\eta + cu = f.$$

对  $\eta$  积分便可求出通解. 注意: 要  $a\eta_x + b\eta_y \neq 0$ , 应有 Jacobi 行列式不为 0

$$\det J(\xi, \eta) = \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

### 1.3 波动方程的行波解和 d'Alembert 公式

#### 例 1.3.1: 行波解

一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0.$$

可分解为

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

定义

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at. \end{cases}$$

方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0, \implies u = f(\xi) + g(\eta).$$

即行波解

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad f, g \in \mathcal{C}^2. \quad (1.4)$$

## 定理 1.3.1: d'Alembert 公式

无限长弦自由振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0, x \in \mathbb{R}. \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

将初值问题带入通解

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} &= -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

因此

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (1.5)$$

对于  $\varphi \in \mathcal{C}^2, \psi \in \mathcal{C}$ , 解是适定的.

非无限情况, 可以延拓至无限.

## 例 1.3.2: 延拓

端点固定的半无限边界条件:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

对  $\varphi, \psi$  进行奇延拓

$$\varphi_o(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

问题便适用 d'Alembert 公式, 解

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi_o(x - at) + \varphi_o(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_o(\xi) d\xi \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & x \geq at, \\ \frac{1}{2} [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & x < at. \end{cases} \end{aligned}$$

端点自由半无限弦 ( $u_t(0, t) = 0$ ) 采用偶延拓;

有界弦: 两端均延拓.

## 例 1.3.3: 中心对称球面波

中心对称的球面波  $u = u(r)$ , 采用球坐标

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

波动方程变为

$$u_{tt} = a^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) = \frac{a^2}{r} (ru)_{rr}.$$

设  $v = ru$ , 则可解得

$$u(r) = \frac{1}{r} [f(r - at) + g(r + at)].$$

掺入边界条件  $\varphi(r), \psi(r)$  后, 作奇延拓即可.

## 例 1.3.4: 三维波动方程与球面平均法

一般的三维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z). \end{cases}$$

采用球面平均法, 定义  $u$  在以  $M$  为球心、 $r$  为半径的球面  $S_r(M)$  上的平均

$$\bar{u}(r, t; M) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{S_r(M)} u(x, y, z, t) dS,$$

略去证明过程, 问题转化为中心对称球面波问题

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} = \frac{1}{r} (r\bar{u})_{rr}, \\ (r\bar{u})_{r=0} = 0, \\ \bar{u}(r, 0) = \bar{\varphi}(r), \quad \bar{u}_t(r, 0) = \bar{\psi}(r). \end{cases}$$

奇延拓解, 注意:  $(r\varphi)_o = r\varphi_e$ ,

$$r\bar{u}(r, t) = \frac{1}{2} [(r - at)\bar{\varphi}_e(r - at) + (r + at)\bar{\varphi}_e(r + at)] + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} \rho \bar{\psi}_e(\rho) d\rho.$$

为得到  $u(x, y, z, t)$ , 取极限

$$u(M, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \bar{u}(r, t) = \frac{d}{dt} (t\bar{\varphi}(at)) + t\bar{\psi}(at),$$

上式称为 Poisson 公式.

求解三维波动方程的关键在于计算球面平均

$$\begin{aligned} u(M, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \varphi \, dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \psi \, dS \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t \varphi \sin \theta \, d\theta d\phi \right) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t \psi \sin \theta \, d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (1.6)$$

### 例 1.3.5: 二维波动方程与升维法

二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y). \end{cases}$$

采用升维法

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t), \quad \Phi(x, y, z) = \varphi(x, y), \\ U(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \Phi \, dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \Psi \, dS \end{aligned}$$

由于  $U, \Phi, \Psi$  取值与  $z$  无关, 故积分区域可投影到  $xy$  平面上. 记  $D_r$  是以  $(x, y)$  为圆心,  $r$  为半径的圆内区域, 在  $D_r$  上

$$dS = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)^2} dA = \frac{r \, dA}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

故

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta) \, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a} \int_{D_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta) \, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

注. (1.6) 是在球面上积分, 而 (1.7) 是在圆域上积分. 这个差别在物理上产生了截然不同的效果: 对三维情况, 波的传播既有清晰的前阵面, 也有清晰的后阵面, 可用于传播信号, 这称为 Huygens 原理; 对二维情况, 波的传播有清晰的前阵面, 但没有后阵面, 这称为波的弥漫, 或者说这种波具有后效现象, 不适合于传播信号.

### 例 1.3.6: 一维波动方程

对一维弦振动方程, 也可升二维, 再将积分投影到  $[x - at, x + at]$  上. 记  $C_r$  是以  $(x, y)$  为圆心,  $r$  为半径的圆, 在  $C_r$  上

$$d\ell = \sqrt{1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2} d\xi = \frac{r \, d\xi}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}}.$$



故

$$\begin{aligned} \int_{D_{at}} \frac{\Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} &= \int_0^{at} \oint_{C_r} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} d\ell dr \\ &= 2 \int_0^{at} \int_{x-r}^{x+r} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} \frac{r d\xi}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}} dr \\ &= \left( \int_x^{x+at} \int_{\xi-x}^{at} + \int_{x-at}^x \int_{x-\xi}^{at} \right) \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}} d\xi \end{aligned}$$

推出 d'Alembert 公式:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi \right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

## 1.4 二阶线性偏微分方程及标准型

两个自变量的二阶其次线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0.$$

进行变量代换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad \text{其中 } \det J(\xi, \eta) \neq 0.$$

变成

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta + cu = 0.$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ A_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ A_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2; \\ B_1 &= a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y, \\ B_2 &= a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y, \end{aligned}$$

用矩阵表达即

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}^\top.$$

考虑使  $A_{11} = 0$  或  $A_{22} = 0$  则有

$$a_{11} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

其判别式

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}.$$

$\Delta > 0$ , 双曲型 不妨设  $a_{11} \neq 0$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \implies \begin{cases} \xi(x, y) = \text{const} \\ \eta(x, y) = \text{const}' \end{cases} \quad (1.8)$$

继而  $A_{11} = A_{22} = 0$ ,

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\frac{2\Delta}{a_{11}} \xi_y \eta_y \neq 0, \\ u_{\xi\eta} + \frac{1}{2A_{12}} (B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + cu) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

上式就是双曲型方程的标准型.

若再作变量替换  $p = (\xi + \eta)/2$ ,  $q = (\xi - \eta)/2$ , 方程可化为

$$u_{pp} - u_{qq} + \frac{1}{A_{12}} [(B_1 + B_2) u_q + (B_1 - B_2) u_p + cu] = 0. \quad (1.10)$$

$\Delta = 0$ , 抛物型 只有一个线性 ODE, 不妨设  $a_{11} \neq 0$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \implies \xi(x, y) = \text{const}. \quad (1.11)$$

任取  $\eta(x, y)$ , 可得  $A_{11} = A_{12} = 0$

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{22}} (B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + cu) = 0. \quad (1.12)$$

$\Delta < 0$ , 椭圆型 ODE 解为复函数, 不妨设  $a_{11} \neq 0$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}} \implies \xi(x, y) \pm i\eta(x, y) = \text{const}. \quad (1.13)$$

其中  $\xi, \eta$  为实函数,  $A_{12} = 0, A_{11} = A_{22} \neq 0$ ,

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{11}} (B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + cu) = 0. \quad (1.14)$$

## 1.5 叠加原理和齐次化原理

定义算子为从函数类到函数类的映射  $\mathcal{T}$ .

### 定理 1.5.1: 叠加原理

线性算子  $\mathcal{L}$  可与  $\lim, \sum, \int$  等运算符交换.

齐次化原理也称冲量原理, 源于求解有外力的弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

利用叠加原理, 解  $u = u_0 + w$ ; 其中  $u_0$  表示  $f \equiv 0$  的齐次化解;  $w$  表示  $\varphi, \psi \equiv 0$  的解, 即纯受迫振动.

考虑时间段  $(\tau, \tau + \delta\tau)$  内, 位移分布  $w(x, t) =: v(x, t; \tau) \delta\tau$ , 外力冲量  $f(x, \tau) \delta\tau$ , 有

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ v|_{t=\tau} = 0 \quad v_t|_{t=\tau} = f(x, \tau). \end{cases} \implies v(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi.$$

叠加得

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.15)$$

### 定理 1.5.2: 齐次化原理

定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \mathcal{P}u + f(\mathbf{x}, t), \\ u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

其中  $\mathcal{P}$  为常系数线性偏微分算子, 有解

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t v(\mathbf{x}, t; \tau) d\tau,$$

$v$  满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^m v}{\partial t^m} = \mathcal{P}v, \\ v|_{t=\tau} = \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=\tau} = \cdots = \frac{\partial^{m-2} v}{\partial t^{m-2}}\bigg|_{t=\tau} = 0, \\ \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=\tau} = f(\mathbf{x}, \tau). \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

当  $\mathbf{x} \in V \subsetneq \mathbb{R}^n$  时, 还应加上其次边界条件

$$\mathcal{P}u|_{\partial V} = 0, \quad \mathcal{P}v|_{\partial V} = 0.$$

## 第二章 分离变量法

回忆一些典型 ODE 方程的基本解法

### 方法 2.0.1: 二阶常系数齐次方程

形如

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (2.1)$$

其特征方程  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  的解  $\lambda_{1,2}$

I.  $\Delta > 0$ ,  $y = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x}$ ;

II.  $\Delta = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \lambda$ ,  $y = (A + Bx) e^{\lambda x}$ ;

III.  $\Delta < 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $y = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x}$ .

### 方法 2.0.2: 二阶非齐次方程

形如

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \quad (2.2)$$

二阶非齐次方程根据叠加定理, 其解  $y = y_0 + y_s$ ; 其中  $y_0$  为  $f(x) \equiv 0$  时的齐次通解,  $y_s$  为特解.

若  $y_1, y_2$  为对应的齐次方程线性无关解, 则可求出一特解

$$y_s(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)}{y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_1'(\xi)y_2(\xi)} f(\xi) d\xi, \quad \forall x_0. \quad (2.3)$$

特解满足齐次边界条件

$$y_s(x_0) = 0, \quad y_s'(x_0) = 0.$$

### 方法 2.0.3: Euler 方程

形如

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x). \quad (2.4)$$

令  $x = e^t$ ,  $u(t) = y(e^t) = y(x)$  方程变为

$$u'' + (a-1)u' + bu = f(e^t). \quad (2.5)$$

## 2.1 特征值和特征函数

在讨论分离变量前, 先引入 Fourier 级数的概念.

### 定义 2.1.1: Fourier 级数

$f(x)$  周期为  $2\ell$ , 则  $f(x)$  的 Fourier 级数

$$\text{FS } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right). \quad (2.6)$$

其中 Fourier 系数

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx; \\ b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \end{aligned}$$

### 定理 2.1.1: Parseval 等式

若  $f \in \mathcal{L}^2[-\ell, \ell]$  即平方可积, 则

$$\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

### 定理 2.1.2: Dirichlet 收敛定理

若

1.  $f, f'$  连续或分段连续, 至多有有限个第一类间断点;
2.  $f$  至多有有限个极值点;

则

$$\text{FS } f(x) = \begin{cases} (f(x^+) + f(x^-)) / 2, & x \in (-\ell, \ell) \\ (f(-\ell^+) + f(\ell^-)) / 2, & x = \pm\ell \end{cases}$$

在  $f$  连续点处,  $\text{FS } f = f$ .

### 例 2.1.1: 有界弦问题

有界弦

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

假设变量是可以分离的, 即  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , 则引入特征值  $\lambda$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda.$$

要使  $X'' + \lambda X = 0$  且  $X(0) = X(L) = 0$  仅有

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

进而  $T'' + a^2 \lambda T = 0$

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{L}.$$

因此原方程应有形式解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.7)$$

$C_n, D_n$  由初始条件确定

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = \psi(x). \end{aligned}$$

恰好对应 Fourier 正弦系数  $\varphi_n^s, \psi_n^s$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx =: \varphi_n^s, \\ D_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx =: \frac{L}{n\pi a} \psi_n^s. \end{aligned}$$

至于形式解是否符合条件, 不是考试涉及的范围.

### 例 2.1.2: 圆域 Laplace 方程

圆域上的 Laplace 方程, 采用极坐标

$$\begin{cases} \Delta_2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & r < r_0 \\ u(r_0, \theta) = \varphi(\theta) \end{cases}$$

还应包括自然条件, 即

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} |u(r, \theta)| < \infty.$$

和周期边界条件

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi).$$

分离变量  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ \Theta'' + \lambda \Theta = 0. \end{cases}$$

由周期条件, 特征值  $\lambda = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

再解  $R$  的 Euler 方程, 可得

$$R_n(r) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln r, & n = 0 \\ c_n r^n + d_n r^{-n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

再由自然条件  $|R(0)| < \infty$ , 可知  $d_i \equiv 0$ , 进而

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

结合边界条件  $u(r_0, \theta) = \varphi(\theta)$ , 求得系数

$$a_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta, \quad b_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \sin n\vartheta \, d\vartheta.$$

因此

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \, d\vartheta + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) (\cos n\vartheta \cos n\theta + \sin n\vartheta \sin n\theta) \, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta - \vartheta) \right] \, d\vartheta \end{aligned}$$

又由 Euler 公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} k^n e^{in\theta} = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - k e^{i\theta}} = \frac{1 - k \cos \theta}{1 + k^2 - 2k \cos \theta}.$$

故得到圆域内的 Poisson 公式

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) \varphi(\vartheta)}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \vartheta)} \, d\vartheta \quad (2.8)$$

积分内式子称为 Poisson 核.

## 例 2.1.3: 圆域 Neumann 问题

圆域上的 Neumann 问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & r < R \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=R} = \varphi(\theta) \end{cases}$$

由 Green 公式

$$\int_{D_R} \Delta u \, dx dy = \oint_{r=R} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\ell = R \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \, d\theta = 0.$$

剩下的证明留给读者

## 2.2 Sturm-Liouville 定理



## 例 2.2.1: 有限杆热传导

设杆温度  $u = u(x, t)$ , 则定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u_t(L, t) + hu(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

其中热交换常数  $h > 0$ .

分离常数  $u(x, t) = X(x)T(t)$ ,

$$\begin{cases} X'' + \beta^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(L) + hX(L) = 0. \end{cases} \implies \beta + h \tan \beta L = 0.$$

$$\implies X_n(x) = \sin \beta_n x, \quad T_n(t) = C_n e^{-\beta_n^2 a^2 t}.$$

可以验证  $X_n$  是正交的, 即

$$\langle X_m, X_n \rangle = \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

形式解

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\beta_n^2 a^2 t} \sin \beta_n x.$$

再根据初始条件

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \beta_n x = \varphi(x).$$

在后面可以看到, 这是广义 Fourier 级数, 其系数

$$C_n = \frac{\langle \varphi, \sin \beta_n x \rangle}{\langle \sin \beta_n x, \sin \beta_n x \rangle} = \frac{\int_0^L \varphi(x) \sin \beta_n x dx}{\int_0^L \sin^2 \beta_n x dx}.$$

## 定义 2.2.1: 加权内积

定义在  $[a, b]$  上的实函数  $f, g$  的  $\rho$ -加权内积

$$\langle f, g \rangle_\rho := \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx.$$

其中权函数  $\rho \geq 0$  分段连续且零点孤立.

加权平方可积函数空间

$$\mathcal{L}_\rho^2[a, b] := \left\{ f \mid \|f\|_\rho < \infty \right\}.$$

**定理 2.2.1: 广义 Fourier 级数**

若  $f_1, f_2, \dots$  在  $\mathcal{L}_\rho^2$  中完备且加权正交, 则  $\forall f \in \mathcal{L}_\rho^2$  有广义 Fourier 级数展开

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x), \quad a_i = \frac{\langle f, f_i \rangle_\rho}{\|f_i\|_\rho^2}.$$

且有 Parserval 等式

$$\|f\|_\rho^2 = \sum_{i=1}^n \left\langle f, \frac{f_i}{\|f_i\|_\rho} \right\rangle_\rho^2.$$

**定义 2.2.2: Sturm-Liouville 方程**

定义域  $[a, b]$ , 常见一维特征值问题都可以化为

$$(k(x)f'(x))' - q(x)f(x) + \lambda\rho(x)f(x) = 0.$$

其中  $\lambda$  为参数,  $k, q, \rho$  为实函数. 记

$$\mathcal{L}[f] := -\frac{(kf')' - qf}{\rho}.$$

则

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho - \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho = [k(fg' - f'g)]_a^b.$$

好的边界条件可以使上式等于 0.

**定义 2.2.3: 正则 Sturm-Liouville 问题**

正则 Sturm-Liouville 问题

$$\mathcal{L}[f](x) = \lambda f(x).$$

正则条件: 保证 Sturm-Liouville 方程在  $[a, b]$  上没有奇点.

$$k \in \mathcal{C}^2[a, b], \quad q, \rho \in \mathcal{C}[a, b]; \quad k, \rho > 0.$$

好的边界条件:

$$\text{可分: } \begin{cases} c_1 f(a) + c_2 f'(a) = 0, \\ d_1 f(b) + d_2 f'(b) = 0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{周期: } \begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases}$$

可使  $\mathcal{L}$  是对称算子, 即

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho = \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho.$$

## 定理 2.2.2: Sturm-Liouville 定理 1

正则 Sturm-Liouville 问题

1. 有可数多个实特征值

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

2. 特征函数加权  $\rho$ -正交;
3. 特征值的特征子空间至多 2 维,  
可分边界条件下, 特征子空间为 1 维;
4. 特征函数构成  $\mathcal{L}_\rho^2$  上完备的正交基底.

奇异 Sturm-Liouville 问题: 不满足正则条件或区间无界; 但若

$a$  (或  $b$ ) 是  $k(x)$  的一级零点, 是  $q(x)$  的至多一级极点

时, 称  $a$  (或  $b$ ) 是方程的正则奇点. 定理结论依旧成立!

## 定理 2.2.3: Sturm-Liouville 定理 2

若正则 Sturm-Liouville 问题还满足  $q \geq 0$ ; 可分边界条件下还需满足  $c_1 c_2 \leq 0, d_1 d_2 \geq 0$ .

1. 所有特征值非负;  
特别地, 存在 0 特征值 (对应特征函数 1) 的充要条件是  $q \equiv 0$  且两端为第二类边界条件;
2. 若正则条件为周期条件, 那么其对应于每一个非最小特征值  $\lambda_0$  的特征值有两个相互正交的特征函数.

## 例 2.2.2: 扇形域 Dirichlet 问题

扇形域上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & r \in (1, e), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \\ u(1, \theta) = u(e, \theta) = 0, \\ u(r, 0) = 0, & u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = g(r). \end{cases}$$

化为 Sturm-Liouville 型

$$(rR')' + \frac{\lambda}{r}R = 0,$$

对应  $k = r, q = 0, \rho = \frac{1}{r}$ , 因此  $\lambda > 0$ , 进而

$$\begin{aligned} \lambda_n &= (n\pi)^2, \quad R_n(r) = \sin(n\pi \ln r), \quad n = 1, 2, \dots \\ \Theta_n(\theta) &= A_n e^{n\pi\theta} + B_n e^{-n\pi\theta}. \end{aligned}$$

再结合  $u$  的边界条件即可解出.

## 2.3 非齐次方程

对非齐次方程, 有时可靠直觉找出特解  $v$ , 但对一般的非齐次方程, 需要借助齐次化原理转化为齐次方程:

### 方法 2.3.1: 齐次化原理法

设  $\mathcal{D}_t$  中关于 2 阶导数的系数为 1

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x, t), & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

由 9 页的定理 1.5.2 知, 有解

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t - \tau; \tau) d\tau$$

$v$  满足

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x v + \mathcal{D}_t v = 0, & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, & v_t|_{t=0} = f(x, \tau). \end{cases}$$

### 方法 2.3.2: 广义 Fourier 展开法

对于

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x, t), & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

1. 首先分离变量, 求出  $f \equiv 0$  对应的特征值问题

$$\mathcal{D}_x X = -\lambda X.$$

解出特征值  $\{\lambda_n\}$  和本征函数  $\{X_n(x)\}$ , 注意  $n$  的取值是否含 0.

2. 根据 Sturm-Liouville 定理判断  $\{X_n\}$  的完备性, 展开

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum T_n(t) X_n(x), & f(x) &= \sum f_n(t) X_n(x), \\ \varphi(x) &= \sum \varphi_n X_n(x), & \psi(x) &= \sum \psi_n X_n(x). \end{aligned}$$

求解

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t T_n(t) - \lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(t) = \varphi_n, & T'_n(t) = \psi_n. \end{cases}$$

3. 解出  $T_n(t)$ , 得  $u(x, t)$

## 方法 2.3.3: 一般地非齐次问题

对于一般地非齐次问题

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x, t), & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = g_1(t), & (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = g_2(t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

首先将非齐次边界条件齐次化, 寻找  $v(x, t)$  满足

$$(\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = g_1(t), \quad (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = g_2(t).$$

显然  $v$  不唯一, 若无法直觉看出, 可设为  $x$  的线性函数

$$v(x, t) = A(t)x + B(t),$$

整理得

$$\begin{cases} (\alpha_1 a - \beta_1)A(t) + \alpha_1 B(t) = g_1(t), \\ (\alpha_2 b + \beta_2)A(t) + \alpha_2 B(t) = g_2(t). \end{cases}$$

便可解出  $A, B$  若无解还可设为  $x$  的二次函数.

这样便可将  $u$  分解为  $u = v + w$ , 而  $w$  的边界条件是齐次化的:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x w + \mathcal{D}_t w = f(x, t) - \mathcal{D}_x v - \mathcal{D}_t v, & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 w - \beta_1 w_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 w + \beta_2 w_x)_{x=b} = 0, \\ w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0}, & w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0}. \end{cases}$$

这在前面已解决.

## 第三章 积分变换法

### 定义 3.0.1: 积分变换

积分变换

$$\mathcal{T}[f](\xi) = \int_a^b f(x)K(x, \xi) dx.$$

其中  $K$  是核函数 (kernel).

### 3.1 Fourier 变换

#### 定义 3.1.1: Fourier 变换

定义 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) \equiv \mathcal{F}[f](\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

及其逆变换

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Fourier 变换的相关性质见第 41 页的附录内容.

#### 例 3.1.1: 无限长杆热传导

无限长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \hat{u}_t = -a^2 \xi^2 \hat{u} + \hat{f}, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\varphi). \end{cases}$$

因此

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-a^2 \xi^2 t} \left[ \int_0^t \hat{f}(\xi, \tau) e^{a^2 \xi^2 \tau} d\tau + \hat{\varphi}(\xi) \right].$$

再用 Fourier 逆变换

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \int_0^t \hat{f}(\xi, \tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau \right] + \mathcal{F}^{-1} [\hat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}] \\
 &= \int_0^t \mathcal{F}^{-1} [\hat{f}(\xi, \tau)] * \mathcal{F}^{-1} [e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)}] d\tau + \mathcal{F}^{-1} [\hat{\varphi}(\xi)] * \mathcal{F}^{-1} [e^{-a^2 \xi^2 t}] \\
 &= \int_0^t f(x, \tau) * \frac{e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) e^{-(x-\eta)^2/4a^2 t} d\eta \\
 &= \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta, \tau) e^{-(x-\eta)^2/4a^2(t-\tau)} d\eta d\tau + \\
 &\quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) e^{-(x-\eta)^2/4a^2 t} d\eta.
 \end{aligned}$$

以上只是形式解.

### 3.1.1 Fourier 正余弦变换

对于定义在  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  上的函数, 可将其奇偶延拓至  $\mathbb{R}$  后再作 Fourier 变换

#### 定义 3.1.2: Fourier 正余弦变换

正弦变换分别为

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_s(\xi) &\equiv \mathcal{F}_s[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x) \sin \xi x dx; \\
 \hat{f}_c(\xi) &\equiv \mathcal{F}_c[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx.
 \end{aligned}$$

其反变换

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\xi) \sin \xi x d\xi =: \mathcal{F}_s^{-1}[\hat{f}_s(\xi)] \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\xi) \cos \xi x d\xi =: \mathcal{F}_c^{-1}[\hat{f}_c(\xi)]
 \end{aligned}$$

变换的性质见第 42 页的附录内容.

#### 例 3.1.2: 半无限长杆热传导

半无限长杆热传导方程问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = \varphi(x) \end{cases}$$

自然边界条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_t(x, t) = 0$$

若用 Fourier 正弦变换, 则会出现  $u(0, t)$ , 此边界条件没有给出, 因此只能用余弦变换, 记  $U(\xi, t) = \mathcal{F}_c[u(x, t)]$

$$\begin{aligned} U_t(\xi, t) &= a^2[u_x(x, t) \cos \xi x - \xi u(x, t) \sin \xi x]_0^{+\infty} - a^2 \xi^2 U(\xi, t) \\ &= -a^2 \varphi(t) - a^2 \xi^2 U(\xi, t). \end{aligned}$$

故

$$U(\xi, t) = -a^2 \int_0^t \varphi(\tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{2a^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^t \varphi(\tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau \right] \cos \xi x d\xi \\ &= -\frac{2a^2}{\pi} \int_0^t \varphi(\tau) \left[ \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} \cos \xi x d\xi \right] d\tau \\ &= -a \int_0^t \varphi(\tau) \frac{e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau. \end{aligned}$$

### 例 3.1.3: 半无限长弦振动

半无界弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u_x(0, t) = f(t), \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

自然边界条件  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_t(x, t) = 0$ .

$$U_{tt}(\xi, t) = -a^2 f(t) - a^2 \xi^2 U(\xi, t).$$

其次方程通解  $\cos a\xi t$ ,  $\sin a\xi t$ , 运用 (2.3) 和边界条件  $U(\xi, 0) = U_t(\xi, 0) = 0$

$$\begin{aligned} U(\xi, t) &= \int_0^t -a^2 f(\tau) \frac{\cos a\xi \tau \sin a\xi t - \cos a\xi t \sin a\xi \tau}{\cos a\xi \tau (\sin a\xi \tau)' - (\cos a\xi \tau)' \sin a\xi \tau} d\tau \\ &= -\frac{a}{\xi} \int_0^t f(\tau) \sin a\xi(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{a}{\xi} \int_0^t f(\tau) \sin a\xi(t-\tau) d\tau \right] \cos \xi x d\xi \\ &= -2a \int_0^t f(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi} \sin a\xi(t-\tau) e^{i\xi x} d\xi d\tau \end{aligned}$$

由

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\sin a\xi}{\xi} \right] = \frac{H(x+a) - H(x-a)}{2}.$$



其中  $H(x)$  为 Heaviside 跳跃函数, 故

$$u(x, t) = -a \int_0^{t-x/a} f(\tau) d\tau, \quad x < at$$

### 3.1.2 Fourier 变换与分离变量法

无界区域是否有相应的分离变量法?

#### 例 3.1.4: 无界长杆热传导

无界长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

分离变量  $u(x, t) = X(x)T(t)$  特征值

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda a^2 T = 0$$

讨论知  $\lambda = \xi^2 \geq 0$

$$X = e^{i\xi x}, \quad T = e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

故

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) X(x, \xi) T(t, \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{i\xi x} e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi. \end{aligned}$$

边界条件

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{i\xi x} d\xi \equiv \mathcal{F}^{-1}[A] = \varphi(x),$$

故  $\varphi(x)$  是  $A(\xi)$  的 Fourier 变换.

可见对无界区间上的问题, 分离变量法依然适用, 只是特征值是连续分布的.

## 3.2 Laplace 变换

#### 定义 3.2.1: Laplace 变换

定义 Laplace 变换

$$\bar{f}(\xi) = \mathcal{L}[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\xi x} dx, \quad \operatorname{Re} \xi > \sigma_0.$$

其逆变换

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(\xi)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(\xi) e^{\xi x} d\xi, \quad x \geq 0.$$

注意 Laplace 变换存在条件需要  $\exists M, \sigma_0$  使得

$$|f(x)| < M e^{\sigma_0 x}, \quad \forall x > 0.$$

其逆变换中  $\sigma > \sigma_0$ ; 注意, Laplace 变换的积分中本身不包含  $\mathbb{R}_{<0}$  的部分, 一般认为  $f(< 0) \equiv 0$ .

### 定理 3.2.1: 第一展开定理

设  $F(\xi)$  在  $\infty$  邻域内有 Laurent 展开式

$$F(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\xi^n},$$

则

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad x \geq 0$$

### 定理 3.2.2: 第二展开定理

设  $F(\xi) = A(\xi)/B(\xi)$  是有理函数,  $\deg A < \deg B$ ,  $B(\xi)$  只有单零点  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  且是  $F(\xi)$  的单极点, 则

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{k=1}^n \frac{A(\xi_k)}{B'(\xi_k)} e^{\xi_k x} = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(\xi) e^{\xi x}, \xi_k].$$

若  $F(\xi)$  满足

1. 在  $\mathbb{C}$  上除了有限个奇点  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  外解析;
2. 在半平面  $\text{Re } \xi > \sigma_0$  上解析;
3.  $\exists M > 0, R > 0$  使得当  $|\xi| > R$  时

$$|F(\xi)| \leq \frac{M}{|\xi|},$$

则对于  $x \geq 0$  有

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(\xi) e^{\xi x}, \xi_k].$$

## 例 3.2.1: 有限杆热传导

有限杆热传导

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & u(L, t) = A, \\ u(x, 0) = B. \end{cases}$$

关于  $t$  作 Laplace 变换, 记  $U(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)](s)$ 

$$sU(x, s) - u(x, 0) = U_{xx}(x, s),$$

由  $u(x, 0) = B$ ,

$$U(x, s) = c_1 \cosh \sqrt{s}x + c_2 \sinh \sqrt{s}x + \frac{B}{s}.$$

再由  $U_x(0, s) = 0$ ,  $U(L, s) = A/s$ 

$$U(x, s) = \frac{(A - B) \cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} + \frac{B}{s}.$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{(A - B) \cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} \right] (t) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{B}{s} \right] (t) \\ &= (A - B) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} \right] (t) + B. \end{aligned}$$

括号内函数的孤立奇点<sup>1</sup>应使得  $\cosh \sqrt{s}L = 0$ 

$$s_n = - \left[ \frac{(2n - 1)\pi}{2L} \right]^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

由

$$\begin{aligned} u(x, t) &= B + (A - B) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res} \left[ \frac{\cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} e^{st}, s_n \right] \right) \\ &= A + \frac{4(A - B)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - 1} \cos \left[ \frac{(2n - 1)\pi}{2L} x \right] \exp \left[ - \frac{(2n - 1)^2 \pi^2}{4L^2} t \right]. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>注意, 0 不是此函数的孤立奇点, 不能用留数算出. 逆变换结果中的 1 是围道积出来的. 详情可见附录

## 例 3.2.2: 有限长弦受迫振动

有限长弦受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = 0, & u_t(L, t) = A \sin \omega t \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

关于  $t$  作 Laplace 变换, 记  $U(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)](s)$

$$s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) = a^2 U_{xx}(x, s).$$

结合  $U_x(L, s) = A\omega/(s^2 + \omega^2)$

$$U(x, s) = \frac{Aa\omega}{s(s^2 + \omega^2)} \sinh \frac{xs}{a} \operatorname{sech} \frac{Ls}{a}.$$

其所有的孤立奇点: 可去奇点 0; 一级奇点  $\pm i\omega_k$ ,

$$\omega_k := \begin{cases} \omega, & k = 0 \\ \frac{2k-1}{2L}\pi a, & k \geq 1 \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}[U(x, s) e^{st}, i\omega_k] + \operatorname{Res}[U(x, s) e^{st}, -i\omega_k] \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}[U(x, s) e^{st}, i\omega_k] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{Aa\omega}{s(s + i\omega)} \sinh \frac{xs}{a} \operatorname{sech} \frac{Ls}{a} e^{st} \right]_{i\omega} + \\ &\quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{Aa\omega}{s(s^2 + \omega^2)} \sinh \frac{xs}{a} \cdot \frac{a}{L} \operatorname{csch} \frac{Ls}{a} e^{st} \right]_{i\omega_k} \\ &= \frac{Aa}{\omega} \sinh \frac{\omega x}{a} \sec \frac{\omega L}{a} \sin \omega t + \\ &\quad 16Aa\omega^2 L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)[4\omega^2 L^2 - (2k-1)^2 \pi^2 a^2]} \sin \frac{\omega_k x}{a} \sin \omega_k t. \end{aligned}$$

## 第四章 基本解方法

### 4.1 广义函数

#### 定义 4.1.1: $\delta$ 函数

源于物理中对集中分布物理量的数学描述. 满足

$$\int_a^b f(x)\delta(x) dx = \begin{cases} f(x), & 0 \in (a, b) \\ 0, & 0 \notin (a, b) \end{cases}$$

因此  $f * \delta(\xi) = f(\xi)$ .

#### 定理 4.1.1: $\delta$ 复合函数

设  $u(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  且在实轴上只有单零点  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则

$$\delta(u(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(x - x_k)}{|u'(x_k)|}. \quad (4.1)$$

比如  $\delta(ax) = \delta(x)/a$ .

### 广义函数

#### 定义 4.1.2: 线性泛函

函数空间  $\mathcal{V}$  到数域  $\mathbb{F}$  的映射  $\mathcal{T}$ , 若

$$\mathcal{T}(au + bv) = a\mathcal{T}u + b\mathcal{T}v$$

$\forall a, b \in \mathbb{F}, u, v \in \mathcal{V}$  均成立, 则  $\mathcal{T}$  是  $\mathcal{V}$  上的线性泛函, 即广义函数.  $\mathcal{V}$  上所有线性泛函构成一个线性空间, 称作  $\mathcal{V}$  的对偶空间  $\mathcal{V}^*$ .

#### 例 4.1.1: 支撑集

记实函数  $f$  的支撑集

$$\text{supp } f := \{x \mid f(x) \neq 0\}. \quad (4.2)$$

并记

$$\mathcal{L}_0(\mathbb{R}) := \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty, \text{supp } f \text{ 有界} \right\}$$

则  $\forall f \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R})$ ,  $f$  确定了  $\mathcal{C}(\mathbb{R})$  上一个线性泛函:

$$\mathcal{T}_f[\varphi(x)] \equiv \langle f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

#### 定理 4.1.2: 广义函数的导数

定义函数空间

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) := \{ f \mid f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } f \text{ 有界} \} \quad (4.4)$$

广义函数  $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ , 定义其  $n$  阶导数

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle := (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (4.5)$$

特别地,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x) dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

泛函意义下, 任意一个广义函数都是无穷阶可导的.

#### 定理 4.1.3: 广义函数的卷积

给定  $f, g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$  的卷积  $f * g(x)$  也是广义函数

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \left\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle. \quad (4.6)$$

一般地, 对常系数微分算子  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * \mathcal{D}g.$$

#### 定理 4.1.4: 广义函数的 Fourier 变换

速降函数空间  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \mid \lim_{x \rightarrow \infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}. \quad (4.7)$$

比如  $\varphi(x) = p(x)e^{-ax^2}$ ,  $p(x)$  是多项式,  $a > 0$ , 则  $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

给定广义函数  $f \in \mathcal{S}^*$ ,  $f$  的 Fourier 变换及其逆变换也是广义函数, 定义为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle &= \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \rangle &= \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Fourier 变换作用转移到基本函数上, 它们保持着经典意义下的基本性质.

**定理 4.1.5: 广义函数序列的收敛性**

设广义函数列  $\{f_i\}$  及广义函数  $f$ , 若对基本函数空间的  $\varphi$  都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

则称  $f_n$  弱收敛到  $f$ , 本笔记记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \doteq f(x)$ .

**定理 4.1.6**

若基本函数空间为  $\mathcal{S}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \doteq f(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \doteq f'(x).$$

**定理 4.1.7: 高维广义函数**

与一维类似, 函数空间

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\equiv \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f \mid f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \text{supp } f \text{ 有界}\}, \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &:= \left\{ \varphi \left| \lim_{|X| \rightarrow \infty} |X|^m \frac{\partial^k \varphi(X)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = 0, \quad \forall m, k \in \mathbb{Z}^+ \right. \right\} \end{aligned}$$

对函数空间  $\mathcal{V}$  上的线性泛函  $f$

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(X) \varphi(X) dX, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}$$

构成  $\mathcal{V}^*$ .

广义函数  $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$  的偏导数定义为

$$\left\langle \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \varphi \right\rangle := (-1)^k \left\langle f, \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\rangle$$

特别地,  $f = \delta$  时

$$\left\langle \frac{\partial^k \delta}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \frac{\partial^k \varphi(\mathbf{0})}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

**例 4.1.2:  $\delta$  函数与 Laplace 算子**

$$\delta(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \Delta_2 \ln r, & n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)S_n} \Delta_n \frac{1}{r^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (4.9)$$

其中  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $S_n$  为  $n$  维单位球的表面积. 特别地,  $S_3 = 4\pi$ .

广义函数的卷积

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \langle f(X), \langle g(Y), \varphi(X+Y) \rangle \rangle.$$

## 4.2 $\mathcal{P}u = 0$ 型方程的基本解

讨论用基本解方法求解方程

$$\mathcal{P}u(M) = f(M), \quad M \in \mathbb{R}^n,$$

其中,  $\mathcal{P}$  是常系数线性偏微分算子.

视  $f, u$  为广义函数, 它们在广义函数空间里可以自由地进行各种运算和交换. 通过这种方式得到的解叫广义函数解, 简称作**广义解**. 如果解是一个正则广义函数, 甚至还有足够的光滑性, 那么这种解是经典解.

**定义 4.2.1:**  $\mathcal{P}u = 0$  型方程的基本解

方程

$$\mathcal{P}U(M) = \delta(M) \quad (4.10)$$

的解  $U(M)$  称作  $\mathcal{P}u = 0$  型方程的基本解.

对一般的函数  $f$ , 其对应的解是一般的源所产生的物理场. 故基本解也叫点源函数.

若  $\mathcal{P}u = 0$  型方程有基本解  $U(M)$ , 令

$$u(M) := U * f(M) = \int U(M - N) f(N) dN. \quad (4.11)$$

由积分叠加原理

$$\mathcal{P}u(M) = \int \mathcal{P}U(M - N) f(N) dN = \int \delta(M - N) f(N) dN = f(M).$$

即  $u$  满足方程  $\mathcal{P}u = f$ .

**例 4.2.1**

求下面方程的基本解:

$$y' + ay = f(x), \quad a > 0$$

基本解  $U$  满足

$$U' + aU = \delta(x),$$

即

$$\frac{d}{dx}(U e^{ax}) = \delta(x) e^{ax} = \delta(x), \implies U(x) = H(x) e^{-ax}.$$

因此原方程的解

$$y(x) = U * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\xi) e^{-a\xi} f(x - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^x f(\xi) e^{-a(x-\xi)} d\xi.$$



## 例 4.2.2: 3 维 Helmholtz 方程

求 3 维 Helmholtz 方程的基本解:

$$\Delta_3 u + cu = 0$$

由于只有一个点源, 方程具有对称性, 可设方程有球对称基本解  $U(r)$ , 当  $r > 0$  时,  $\delta(r) = 0$ ,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) + cU = \frac{1}{r} \left[ \frac{d^2}{dr^2} (rU) + crU \right] = 0,$$

当  $c = 0$  时, 化为 Laplace 方程

$$(rU)'' = 0, \implies U(r) = \frac{A}{r} + B.$$

记  $B_r$  为半径为  $r$  的球内部分, 则

$$\int_{B_r} \Delta U \, dV = \int_{B_r} \delta(x, y, z) \, dV = 1.$$

由 Green 公式

$$\int_{B_r} \Delta U \, dV = \oint_{\partial B_r} \frac{\partial U}{\partial n} \, dS = -\frac{A}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 1, \implies U(r) = -\frac{1}{4\pi r}.$$

当  $c < 0$  时, 记  $k := \sqrt{-c}$

$$(rU)'' - k^2 rU = 0, \implies U = A \frac{e^{-kr}}{r} + B \frac{e^{kr}}{r}.$$

由积分条件

$$\int_{B_r} \Delta U - k^2 U \, dV = \oint_{\partial B_r} \frac{\partial U}{\partial n} \, dS - k^2 \int_{B_r} U \, dV = 1,$$

且

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial B_r} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{e^{k\rho}}{\rho} \right)_r r^2 \sin \theta \, d\theta d\phi - k^2 \int_{B_r} \frac{e^{k\rho}}{\rho} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta d\phi \\ &= 4\pi(kr - 1)e^{kr} - 4\pi[(k\rho - 1)e^{k\rho}]_0^r = -4\pi. \end{aligned}$$

故  $-4\pi(A + B) = 1$ , 即

$$U(r) = -\frac{e^{-kr}}{4\pi r}, -\frac{e^{kr}}{4\pi r}.$$

当  $c > 0$  时, 记  $k := \sqrt{c}$

$$U = A \frac{\cos kr}{r} + B \frac{\sin kr}{r}.$$

$\sin kr/r$  在  $\mathbb{C}$  上是整函数, 无奇异性, 不能作为基本解. 积分  $-4\pi A = 1$

$$U(r) = -\frac{\cos kr}{4\pi r}.$$

### 4.3 Poisson 方程 Green 函数法

首先引入 Green 公式.

#### 定理 4.3.1: Green 公式

设非空有界开集  $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$  满足边界  $\partial\Omega$  光滑, 则  
 $\forall u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , 有

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dV = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dV; \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dV = \oint_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS. \quad (4.13)$$

证明. 由散度定理

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (4.14)$$

取  $\mathbf{A} = v \nabla u$ , 可得式 (4.12):

$$\oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS \equiv \oint_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) \, dV = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v \nabla^2 u) \, dV.$$

将  $u, v$  互换位置并与原式相减, 即得式 (4.13).  $\square$

#### Poisson 方程第 I 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M \in V \subseteq \mathbb{R}^3 \\ u|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases} \quad (4.15)$$

物理上看, 这是静电场的基本问题: 空间区域  $V$  内有电荷体密度  $\rho = -\varepsilon f$ , 边界上电位已知为  $\varphi$ , 求  $V$  内电位  $u$ .

由叠加原理,  $u = v + w$ ,  $v, w$  分别满足

$$\begin{cases} \Delta v = -f(M), \\ v|_{\partial V} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta w = 0, \\ w|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases}$$

其中  $v$  表示在边界接地条件下体内电荷产生的电场,  $w$  表示由边界约束引起的电场.

#### 定义 4.3.1: Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数

定解问题

$$\begin{cases} \Delta G(M; N) = -\delta(M - N), \\ G|_{\partial V} = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

的解  $G(M; N)$  称为 Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数.

物理上看, Green 函数就是边界接地条件下, 置于  $V$  内  $N$  点电荷为  $+\varepsilon$  的点源在  $V$  内  $M$  点产生的电场, 仍然是一个基本解.

$$u(M) = \int_V f(N)G(M; N) dN - \oint_{\partial V} \varphi(N) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (4.17)$$

证明.

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_V u(N) \delta(M - N) dN = - \int_V u(N) \Delta G(M; N) dN \\ &= - \int_V u \Delta G dN + \int_V G \Delta u dN - \int_V G \underline{\Delta u} dN \quad (\text{Green-II}) \\ &= \oint_{\partial V} G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} dS + \int_V G f dN \\ &= - \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial G}{\partial n} dS + \int_V G f dN. \end{aligned}$$

□

Fourier 方法是求 Green 函数的基本方法, 但对于一些特殊的区域, 可以采用一些特殊方法, 如镜像法.

#### 方法 4.3.1: 镜像法

分解  $G = U + g$ ,  $U$  满足  $\Delta U = -\delta(M - N)$ , 可取

$$U = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln r, & n = 2 \\ \frac{1}{4\pi r}, & n = 3 \end{cases}$$

而  $g$  满足

$$\begin{cases} \Delta g = 0, \\ g|_{\partial V} = -U, \end{cases}$$

是  $N$  的点电荷在边界上的感应电荷产生的电场.

区域外的点源在  $V$  内产生的电场满足 Laplace 方程, 可以将边界感应电荷产生的电场  $g$  看作区域外某些虚设电荷产生的等效电场, 这种来源于物理效应的方法叫镜像法.

#### 例 4.3.1: 镜像法应用 · 半空间

求上半空间 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数.

$V$  内  $N(\xi, \eta, \zeta)$  点的正电荷  $\varepsilon$  在空间  $(x, y, z)$  产生的电场为

$$U_0 = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}},$$

可虚设电荷  $-\varepsilon$  于  $N$  关于  $z = 0$  平面对称的点  $M_1(\xi, \eta, -\zeta)$ , 产生的电场

$$U_1 = \frac{-1}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}},$$

在边界上  $U_0|_{z=0} = -U_1|_{z=0}$

$$G = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}} \right],$$

边界方向导数

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\zeta=0} = - \left. \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{-z}{2\pi [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

故对于上半空间 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z > 0 \\ u|_{z=0} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

解的 Poisson 公式

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

二维情况

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

#### 例 4.3.2: 镜像法应用 · 球域

求半径为  $R$  的球域内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta_3 G(M; N) = -\delta(M - N), & 0 \leq r < R \\ G|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\rho=R} = \frac{R^2 - r^2}{4\pi R(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}.$$

故球内 Dirichlet 问题, 解的 Poisson 形式

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & 0 \leq r < R \\ u|_{r=R} = \varphi(\theta, \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{S_R} \frac{(R^2 - r^2) \varphi(\theta_0, \phi_0) dS_0}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}.$$

**Fourier 法** Fourier 法是求 Green 函数的基本方法, 主要思想是按照特征函数作广义 Fourier 展开, 包括分离变量与积分变换.

## 例 4.3.3: Fourier 法应用

求矩形区域  $\Omega = [0, L] \times [0, M]$  上第 I 类边值 Poisson 方程的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta_2 G(x, y; \xi, \eta) = -\delta(x - \xi, y - \eta), & x, \xi \in [0, L]; y, \eta \in [0, M] \\ G(0, y) = G(L, y) = G(x, 0) = G(x, M) = 0, \end{cases}$$

有特征值

$$G(x, y) = \sum_{m, n} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{M}.$$

系数

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{M} \right)^2 \right] C_{mn} &= \frac{4}{LM} \int_0^M \int_0^L \delta(x - \xi, y - \eta) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{M} dx dy \\ &= \frac{4}{LM} \sin \frac{m\pi \xi}{L} \sin \frac{n\pi \eta}{M}. \end{aligned}$$

后略.

## 例 4.3.4: Fourier 法应用 · 有限高

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & x > 0, y \in [0, a] \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u(x, a) = \psi(x), \\ u(0, y) = 0, \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= - \left[ \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\eta=0} d\xi + \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\eta=a} d\xi \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\xi - \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=a} d\xi \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \sum_{n=1}^{\infty} 4n \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \xi \sin \omega x}{n^2 \pi^2 + a^2 \omega^2} d\omega \cdot \cos \frac{n\pi \eta}{a} \cos \frac{n\pi y}{a}; \\ u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} 4n \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \xi \sin \omega x}{n^2 \pi^2 + a^2 \omega^2} [\varphi(\xi) - (-1)^n \psi(\xi)] d\omega d\xi \cdot \cos \frac{n\pi y}{a}. \end{aligned}$$

\*Poisson 方程第 II, III 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M \in V \subseteq \mathbb{R}^n \\ \left( \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\partial V} = \varphi(M), & \alpha, \beta \neq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

相应的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(M - N), & M, N \in V \subseteq \mathbb{R}^n \\ \left( \alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \right)_{\partial V} = 0, & \alpha, \beta \neq 0. \end{cases}$$

原问题的解

$$u(M) = \int_V f(N)G(M; N) dN + \frac{1}{\beta} \oint_{\partial V} \varphi(N)G(M; N) dS \quad (4.19)$$

$$= \int_V f(N)G(M; N) dN - \frac{1}{\alpha} \oint_{\partial V} \varphi(N) \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (4.20)$$

$\beta = 0$  即第 I 边值问题.  $\alpha = 0$  即第 II 边值问题, 但此时表示内部有热源而边界绝热的稳恒温度场, 这是不可能的, 因此需要修正为

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(M - N) + \frac{1}{v}, \\ \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial V} = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \Delta G = -\delta(M - N), \\ \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial V} = -\frac{1}{s}, \end{cases}$$

其中  $v, s$  为  $V$  的体积和表面积. 有解

$$u(M) = \int_V f(N)G(M; N) dN + \oint_{\partial V} \varphi(N)G(M; N) dS + \text{const.} \quad (4.21)$$

相容性条件

$$\int_V f(M) dM + \oint_{\partial V} \varphi(M) dS = 0. \quad (4.22)$$

## 4.4 初值问题的基本解方法

本节主要用基本解方法来求解发展方程, 如  $u_t = \mathcal{P}u$  型方程

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{P}u + f(M, t), & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(M, 0) = \varphi(M). \end{cases} \quad (4.23)$$

这里所涉及的  $\mathcal{P}$  是关于空间变量  $M$  的常系数线性偏微分算子.

**定义 4.4.1:**  $u_t = \mathcal{P}u$  型方程初值问题的基本解

基本解  $U(M, t)$  满足

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{P}U, & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(M, 0) = \delta(M). \end{cases} \quad (4.24)$$

有

$$u(M, t) = U(M, t) * \varphi(M) + \int_0^t U(M, t - \tau) * f(M, \tau) d\tau. \quad (4.25)$$

证明过程略.

以及  $u_{tt} = \mathcal{P}u$  型方程

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{P}u + f(M, t), & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M). \end{cases} \quad (4.26)$$

定义 4.4.2:  $u_{tt} = \mathcal{P}u$  型方程初值问题的基本解

基本解  $U(M, t)$  满足

$$\begin{cases} U_{tt} = \mathcal{P}U, & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(M, 0) = 0, \quad U_t(M, 0) = \delta(M). \end{cases} \quad (4.27)$$

有

$$u(M, t) = U * \psi + \frac{\partial}{\partial t}(U * \varphi) + \int_0^t U(M, t - \tau) * f(M, \tau) d\tau. \quad (4.28)$$

\* 混合问题的 Green 函数 对于发展方程的混合问题通常用分离变量法或积分变换法求解, 当然也可以用 Green 函数 (点源函数) 法.

例 4.4.1: 一维波动方程的混合问题

一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Green 函数  $G(x, t; \xi)$  满足

$$\begin{cases} G_{tt} = a^2 G_{xx}, & x, \xi \in (0, L), t > 0 \\ G(0, t) = G(L, t) = 0 \\ G(x, 0) = 0, \quad G_t(x, 0) = \delta(x - \xi) \end{cases}$$

利用 Fourier 方法可得

$$G(x, t; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a} \sin \frac{n\pi\xi}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L},$$

进而解

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^L \psi(\xi) G d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \varphi(\xi) G d\xi + \\ & \int_0^t \int_0^L f(\xi, \tau) G(x, t - \tau; \xi) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (4.29)$$

# 附录 A 附录

## A.1 特征值问题

$$1. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$2. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$3. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$4. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$5. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \implies \gamma = -hL \tan \gamma > 0,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$6. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \implies \gamma = -hL \cot \gamma > 0,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos \frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$



$$7. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - h_1 X'(0) = 0 \\ X(L) + h_2 X'(L) = 0 \end{cases} \implies \tan L\gamma = \frac{(h_1 + h_2)\gamma}{h_1 h_2 \gamma^2 - 1},$$

$$\lambda_n = \gamma_n^2, \quad X_n = \sin \gamma_n x + h_1 \gamma_n \cos \gamma_n x, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$8. \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases}$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n = A \cos nx + B \sin nx, \quad n = 0, 1, \dots$$

## A.2 Fourier 和 Laplace

**Fourier 级数** 定义实函数  $f, g$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的内积

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx.$$

注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0. \quad (\text{A.1a})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x + \cos(n+m)x \, dx = \pi \delta_{nm}; \quad (\text{A.1b})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x \, dx = 0; \quad (\text{A.1c})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x - \cos(n+m)x \, dx = \pi \delta_{nm}. \quad (\text{A.1d})$$

因此

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots\}$$

构成  $[-\pi, \pi]$  上一组完备的基底, 归一化之

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$

用这一组基可将周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$  展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \langle f, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

**Fourier 变换** 利用  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , 可得到 Fourier 级数的复数形式:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

对于其他周期  $T = \lambda$ ,  $k = 2\pi/\lambda$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inkx}, \quad c_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-inkx} dx.$$

当  $f(x)$  不是周期函数时, 就不能用 Fourier 级数展开. 然而, 若认为其周期  $\lambda = 2N$  充分大, 令  $\xi = nk$ ,

$$f(x) = \sum_{\xi} \left[ \frac{k}{2\pi} \int_{-N}^N f(x) e^{-i\xi x} dx \right] e^{i\xi x}.$$

再让  $N \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow 0$ , 定义

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

以及

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

这就是 Fourier 变换.

### A.2.1 Fourier 系数

下面简要介绍不同函数的 Fourier 系数如何计算.

**多项式函数** 只需要利用分部积分将  $x^k$  不断微分降幂,

$$\begin{aligned} \int x \cos ax dx &= \frac{x \sin ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2} + \text{const.} \\ \int x \sin ax dx &= -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} + \text{const.} \\ \int x^2 \cos ax dx &= \frac{x^2 \sin ax}{a} + \frac{2x \cos ax}{a^2} - \frac{2 \sin ax}{a^3} + \text{const.} \\ \int x^2 \sin ax dx &= -\frac{x^2 \cos ax}{a} + \frac{2x \sin ax}{a^2} + \frac{2 \cos ax}{a^3} + \text{const.} \\ \int x^3 \cos ax dx &= \frac{x^3 \sin ax}{a} + \frac{3x^2 \cos ax}{a^2} - \frac{6x \sin ax}{a^3} - \frac{6 \cos ax}{a^4} + \text{const.} \\ \int x^3 \sin ax dx &= -\frac{x^3 \cos ax}{a} + \frac{3x^2 \sin ax}{a^2} + \frac{6x \cos ax}{a^3} - \frac{6 \sin ax}{a^4} + \text{const.} \end{aligned}$$

注. 可以证明, 按照降幂顺序, 系数的规律是:

- 正弦系数的符号  $-, +, +, -, \dots$ , 余弦系数的符号  $+, +, -, -, \dots$ ;
- 共有  $n+1$  项, 系数分别为

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{n}{a^2}, \quad \frac{n(n-1)}{a^3}, \quad \dots, \quad \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

- 正弦函数  $\cos$  打头, 余弦  $\sin$  打头, 然后正余弦交替.

**三角函数** 积分结果已经在 (A.1) 中给出.

**指数函数** 对于指数函数的 Fourier 系数, 只需记住

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &:= \int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \cdot \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const}; \\ \mathcal{J} &:= \int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const}.\end{aligned}$$

证明. 分部积分

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{b} \int e^{ax} \, d \sin bx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \mathcal{J}; \\ \mathcal{J} &= -\frac{1}{b} \int e^{ax} \, d \cos bx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \mathcal{I}.\end{aligned}$$

即可解得上式. □

**双曲函数** 有

$$\begin{aligned}\int \cosh ax \cos bx \, dx &= \frac{a \sinh ax \cos bx + b \cosh ax \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const}, \\ \int \cosh ax \sin bx \, dx &= \frac{a \sinh ax \sin bx - b \cosh ax \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const}, \\ \int \sinh ax \cos bx \, dx &= \frac{a \cosh ax \cos bx + b \sinh ax \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const}, \\ \int \sinh ax \sin bx \, dx &= \frac{a \cosh ax \sin bx - b \sinh ax \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const}.\end{aligned}$$

**对数函数** 对数函数乘正弦函数分部积分后会出现  $\text{Si } x$ .

**反三角函数** 反三角函数更是没有积分结果.

## A.2.2 Fourier 变换

**Fourier 变换的性质** Fourier 变换的定义见第 20 页定义 3.0.1.

1. 线性

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g];$$

2. 微分

$$\mathcal{F}[f'] = i\xi \hat{f}.$$

3. 积分

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(\eta) \, d\eta\right] = \frac{1}{i\xi} \hat{f}.$$

其中积分式的 Fourier 变换存在, 且  $\hat{f}(0) = 0$ .

4.  $\hat{f}(\xi)$  微分

$$\hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}[-ixf](\xi).$$

5.  $\hat{f}(\xi)$  积分

$$\int_{-\infty}^{\xi} \hat{f}(\zeta) d\zeta = \mathcal{F} \left[ \frac{f(x)}{-ix} \right] (\xi) + C_1, \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{\xi}^{+\infty} \hat{f}(\zeta) d\zeta = \mathcal{F} \left[ \frac{f(x)}{ix} \right] (\xi) + C_2. \quad (\text{A.3})$$

## 6. 位移性质

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-ia\xi},$$

$$\hat{f}(\xi - \alpha) = \mathcal{F}[f(x) e^{i\alpha x}](\xi).$$

## 7. 相似

$$\mathcal{F}[f(kx)](\xi) = \frac{1}{|k|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{k}\right).$$

8. 卷积<sup>I</sup>

$$\mathcal{F}[f * g] = \hat{f}\hat{g}.$$

## 9. 象函数卷积

$$\hat{f} * \hat{g} = 2\pi \mathcal{F}[fg]$$

## 10. 反射

$$\mathcal{F}[\hat{f}(\xi)](x) = 2\pi f(-x).$$

因此 Fourier 逆变换

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

在  $f$  连续点处  $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)](x) = f(x)$ .

高维下 Fourier 变换的性质是相似的.

**Fourier 正余弦变换的性质** <sup>II</sup>

## 1. 微分

$$\mathcal{F}_s[f'](\xi) = f(x) \sin \xi x|_{x=0}^{+\infty} - \xi \mathcal{F}_c[f](\xi);$$

$$\mathcal{F}_c[f'](\xi) = f(x) \cos \xi x|_{x=0}^{+\infty} + \xi \mathcal{F}_s[f](\xi);$$

$$\mathcal{F}_s[f''](\xi) = [f'(x) \sin \xi x - \xi f(x) \cos \xi x]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2 \mathcal{F}_s[f](\xi);$$

$$\mathcal{F}_c[f''](\xi) = [f'(x) \cos \xi x - \xi f(x) \sin \xi x]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2 \mathcal{F}_c[f](\xi).$$

## 2. 积分

$$\mathcal{F}_s \left[ \int_0^x f(\eta) d\eta \right] (\xi) = \frac{1}{\xi} \mathcal{F}_c[f](\xi);$$

$$\mathcal{F}_c \left[ \int_0^x f(\eta) d\eta \right] (\xi) = -\frac{1}{\xi} \mathcal{F}_s[f](\xi).$$

其中  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0$ .

---

<sup>I</sup> $f, g$  的卷积

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) g(x - \eta) d\eta.$$

且有  $f * g = g * f$ .

<sup>II</sup>定义见第 21 页 3.1.2.

## 3. 象函数微分

$$\begin{aligned}\hat{f}'_s &= -\mathcal{F}_c[xf] & \hat{f}''_s &= -\mathcal{F}_s[x^2f] \\ \hat{f}'_c &= \mathcal{F}_s[xf] & \hat{f}''_c &= -\mathcal{F}_c[x^2f].\end{aligned}$$

## 4. 相似

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[f(kx)](\xi) &= \frac{1}{k} \hat{f}_s\left(\frac{\xi}{|k|}\right), \\ \mathcal{F}_c[f(kx)](\xi) &= \frac{1}{|k|} \hat{f}_c\left(\frac{\xi}{|k|}\right)\end{aligned}$$

## 5. 反射

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[\hat{f}_s(x)](\xi) &= -\frac{\pi}{2} f(-\xi), \\ \mathcal{F}_c[\hat{f}_c(x)](\xi) &= \frac{\pi}{2} f(-\xi).\end{aligned}$$

## Fourier 变换函数表

1.  $\mathcal{F}[\delta(x)] = 1, \quad \mathcal{F}[\delta^{(n)}(x)] = (i\xi)^n;$
2.  $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\xi), \quad \mathcal{F}[x^n] = 2\pi i^n \delta^{(n)}(\xi);$
3.  $\mathcal{F}[e^{iax}] = 2\pi\delta(\xi - a);$
4.  $\mathcal{F}[\cos ax] = \pi[\delta(\xi - a) + \delta(\xi + a)];$
5.  $\mathcal{F}[\sin ax] = -i\pi[\delta(\xi - a) - \delta(\xi + a)];$
6.  $\mathcal{F}[\cos ax^2] = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left( \cos \frac{\xi^2}{4a} + \sin \frac{\xi^2}{4a} \right);$
7.  $\mathcal{F}[\sin ax^2] = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left( \cos \frac{\xi^2}{4a} - \sin \frac{\xi^2}{4a} \right);$
8.  $\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2 + \xi^2};$
9.  $\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a};$
10.  $\mathcal{F}[e^{-iax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{i(\xi^2/4a - \pi/4)};$
11.  $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = -i\pi \operatorname{sgn} \xi;$
12.  $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^n}\right] = -i\pi \frac{(-i\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sgn} \xi, \quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2}\right] = -\pi\xi \operatorname{sgn} \xi;$
13.  $\mathcal{F}[|x|^\alpha] = -2\Gamma(\alpha+1) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |\xi|^{-1-\alpha};$
14.  $\mathcal{F}[H(x)] = \frac{1}{i\xi} + \pi\delta(\xi);$
15.  $\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \operatorname{sinc} \frac{\xi}{2};$  (系数应该是错的)
16.  $\mathcal{F}[\operatorname{sinc} x] = \Pi\left(\frac{\xi}{2}\right)$  (系数应该是错的)

Heaviside 阶梯函数

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

### A.2.3 Laplace 变换

**Laplace 变换的性质** 注:  $x < 0$  函数值取 0.

1. 线性
2. 微分

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'] &= \xi \bar{f} - f(0); \\ \mathcal{L}[f''] &= \xi^2 \bar{f} - \xi f(0) - f'(0); \\ \mathcal{L}[f^{(n)}] &= \xi^n \bar{f} - (\xi^{n-1} f(0) + \xi^{n-2} f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)).\end{aligned}$$

3. 积分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\eta) d\eta\right] = \frac{1}{\xi} \bar{f}.$$

4. 像函数微分

$$\bar{f}' = \mathcal{L}[-xf].$$

5. 像函数积分

$$\int_{\xi}^{+\infty} \bar{f}(\xi) d\xi = \mathcal{L}\left[\frac{f}{x}\right].$$

积分路径  $\operatorname{Re} \xi > \sigma_0$ .

6. 复频移与时滞

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(x) e^{\alpha x}] &= \bar{f}(\xi - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C} \\ \mathcal{L}[f(x - a)] &= \bar{f} e^{-a\xi}, \quad a \geq 0\end{aligned}$$

7. 相似

$$\mathcal{L}[f(kx)] = \frac{1}{k} \bar{f}\left(\frac{\xi}{k}\right), \quad k > 0$$

8. 卷积

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

9. 像函数卷积

$$\mathcal{L}[fg](\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(\zeta) \bar{g}(\xi - \zeta) d\zeta,$$

其中  $\xi > \max(\sigma_f, \sigma_g)$

### Laplace 变换函数表

1.  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n;$
2.  $\mathcal{L}[\operatorname{sgn} t] = \mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[tH(t)] = \frac{1}{s^2};$
3.  $\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right] = \frac{1}{\sqrt{s}};$
4.  $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a};$
5.  $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2};$
6.  $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2};$