

电动力学  
Electrodynamics

Dait

# 目 录

前 言	viii
主要符号表	ix
<b>第一章 静电学</b>	<b>1</b>
1.1 Coulomb 定律 . . . . .	1
1.2 电场 . . . . .	2
1.3 标量势 . . . . .	5
1.4 电荷的表面分布 . . . . .	6
1.5 电场的能量 . . . . .	8
1.6 数学内容 . . . . .	9
1.6.1 Green 定理 . . . . .	10
1.6.2 唯一性定理 . . . . .	11
1.6.3 Green 函数法求解 Poisson 方程 . . . . .	11
1.6.4* 变分法 . . . . .	13
1.6.5* 松弛法 . . . . .	14
<b>第二章 静电学中的边界条件问题</b>	<b>16</b>
2.1 电像法 . . . . .	16
2.1.1 球面边界的电像法 . . . . .	17
2.1.2 球边界的 Green 函数 . . . . .	19
2.2 正交函数展开法 . . . . .	21
2.2.1 分离变量法 . . . . .	22
2.2.2 二维边界问题 . . . . .	24
2.3* 有限元分析法 . . . . .	26
2.4 球坐标系中的正交函数 . . . . .	26
2.4.1 Legendre 多项式 . . . . .	26
2.4.2 连带 Legendre 函数、球谐函数 . . . . .	29
2.5 柱坐标系中的正交函数 . . . . .	30
2.5.1 Bessel 函数 . . . . .	31
2.6 Green 函数展开法解 Poisson 方程 . . . . .	32
2.6.1 球坐标系下 Green 函数的展开 . . . . .	33
2.6.2 柱坐标系下 Green 函数的展开 . . . . .	35

2.6.3 Green 函数的本征函数展开式 . . . . .	36
2.7 * 混合边界条件 . . . . .	37
<b>第三章 宏观介质静电学</b>	<b>38</b>
3.1 多极矩展开 . . . . .	38
3.1.1 能量的多极矩展开 . . . . .	40
3.2 电介质 . . . . .	41
3.2.1 含电介质的边值问题 . . . . .	43
3.2.2 分子极化率和电极化率 . . . . .	44
3.2.3 电介质中的静电能 . . . . .	46
<b>第四章 静磁学、时变场</b>	<b>47</b>
4.1 磁感应强度、电流密度 . . . . .	47
4.2 Biot-Savart 定律 . . . . .	48
4.3 矢量势 . . . . .	51
4.4 磁矩 . . . . .	52
4.4.1 磁矩的力、力矩和能量 . . . . .	54
4.5 宏观介质静磁学 . . . . .	55
4.5.1 静磁学中的边界条件问题 . . . . .	57
4.6 Faraday 电磁感应定律 . . . . .	59
4.7 磁场的能量 . . . . .	60
4.7.1 * 自感和互感 . . . . .	61
4.8 * 似稳场 . . . . .	61
<b>第五章 Maxwell 方程组</b>	<b>62</b>
5.1 Maxwell 位移电流 . . . . .	62
5.2 Maxwell 方程组 . . . . .	62
5.2.1 标量势和矢量势 . . . . .	63
5.2.2 波动方程的 Green 函数 . . . . .	65
5.2.3 推迟势和推迟场 . . . . .	67
5.3 宏观电磁场 . . . . .	68
5.4 电磁场的能量、动量和角动量 . . . . .	71
5.4.1 色散介质中的 Poynting 定律 . . . . .	73
5.4.2 * 谐振场的 Poynting 定律 . . . . .	74
5.5 电磁场的变换性质、空间反演和时间反演 . . . . .	75
<b>第六章 平面电磁波</b>	<b>77</b>
6.1 非导电介质中的平面波 . . . . .	77
6.2 偏振 . . . . .	79
6.3 反射与透射 . . . . .	83
6.4 色散 . . . . .	86
6.5 * 在电离层和磁层中的传播模型 . . . . .	89

6.6 群速度 . . . . .	89
6.7 $D$ 和 $E$ 之间的因果关系 . . . . .	90
<b>第七章 波导</b>	<b>93</b>
7.1 导体表面和内部的场 . . . . .	93
7.2 柱形波导和谐振腔 . . . . .	95
7.3 波导 . . . . .	96
7.3.1 矩形波导 . . . . .	98
7.3.2 圆波导 . . . . .	100
7.3.3 介质加载波导 . . . . .	102
7.3.4 波导中的能流和衰减 . . . . .	103
7.4 边界条件的扰动 . . . . .	104
7.5 谐振腔 . . . . .	104
7.6 腔内的功率损失 . . . . .	105
<b>第八章 多极辐射</b>	<b>106</b>
8.1 局域振荡源 . . . . .	106
8.2 电偶极辐射 . . . . .	107
8.3 磁偶极子和电四极子 . . . . .	108
<b>第九章 相对论电动力学</b>	<b>109</b>
9.1 狹义相对论 . . . . .	110
9.1.1 Lorentz 变换 . . . . .	110
9.1.2 相对论动力学 . . . . .	112
9.2 相对论电动力学 . . . . .	114
9.2.1 电磁场张量 . . . . .	115
9.2.2 相对论势 . . . . .	117
<b>第十章 运动电荷的辐射</b>	<b>118</b>
10.1 Liénard-Wiechert 势 . . . . .	118
<b>附录 A 矢量分析</b>	<b>119</b>
A.1 矢量代数 . . . . .	119
A.2 微积分 . . . . .	119
A.2.1 微分 . . . . .	119
A.2.2 积分 . . . . .	121
A.3 曲线坐标系 . . . . .	121
A.3.1 Lamé 系数 . . . . .	121
A.3.2 球坐标系 . . . . .	122
A.3.3 柱坐标系 . . . . .	123
A.4 Dirac 函数 . . . . .	124
A.5 向量场理论 . . . . .	125

<b>附录 B 特殊函数</b>	<b>126</b>
B.1 Legendre 多项式 . . . . .	126
B.2 Bessel 函数 . . . . .	127

# 插 图

图 1.1 立体角元 . . . . .	3
图 1.2 无限大平板的静电场 . . . . .	4
图 1.3 无限长直线的静电场 . . . . .	4
图 1.4 半圆与直线微元的一一映射 . . . . .	4
图 1.5 带电导体球的电势 . . . . .	6
图 1.6 表面电荷分布 . . . . .	6
图 1.7 电偶层 . . . . .	7
图 1.8 有限差分法示意图 . . . . .	14
图 2.1 平面边界的电像法 . . . . .	17
图 2.2 接地导体球和点电荷 . . . . .	17
图 2.3 正负电荷近似匀强电场 . . . . .	19
图 2.4 两半球具有不同电势的导体球 . . . . .	20
图 2.5 矩形区域边界条件 . . . . .	23
图 2.6 二维矩形井边界条件 . . . . .	24
图 2.7 二维极坐标边界条件 . . . . .	25
图 2.8 前几个 Legendre 多项式 . . . . .	27
图 2.9 锥形孔 . . . . .	28
图 2.10 前几个 Bessel 函数 . . . . .	31
图 2.11 圆柱形边界条件 . . . . .	32
图 2.12 同心球边界条件 . . . . .	34
图 3.1 电介质中的电荷 . . . . .	43
图 4.1 第一、二类完全椭圆积分 . . . . .	52
图 4.2 磁滞回线 . . . . .	56
图 4.3 极高磁导率材料表面的 $\mathbf{H}$ 表现 . . . . .	56
图 6.1 线偏振 ( $\delta = 0$ ) . . . . .	79
图 6.2 圆偏振 ( $\delta = +90^\circ$ ) . . . . .	79
图 6.3 椭圆偏振 . . . . .	80
图 6.4 入射波、反射波和透射波 . . . . .	83
图 6.5 Stokes 倒逆关系示意图 . . . . .	84

图 6.6 垂直极化波和平行极化波 . . . . .	84
图 7.1 矩形波导 . . . . .	98
图 7.2 矩形波导的前几个 TE 模式 . . . . .	99
图 7.3 矩形波导的 TM <sub>11</sub> 模式 . . . . .	100
图 7.4 圆波导 . . . . .	100
图 7.5 $J_m(x)$ 和 $J'_m(x)$ 的零点分布 . . . . .	102
图 7.6 部分填充介质的矩形波导 . . . . .	102
图 9.1 Michelson-Morley 光学干涉仪的实验装置图 . . . . .	109
图 9.2 Compton 散射示意图 . . . . .	113
图 9.3 $S$ 系和 $S'$ 系中导线与电荷示意图 . . . . .	114
图 A.1 球坐标系 . . . . .	122

# 表 格

表 6.1 典型偏振的 Stokes 参数 . . . . .	81
表 7.1 $J_m(x)$ 和 $J'_m(x)$ 的零点 . . . . .	102

# 前　　言

这门课属于是我本科期间学的最好的一门课之一了 (百分制成绩 99, 等级制 A<sup>+</sup>).

**声明** 本课内容基于

- Jackson, Classical Electrodynamics.
- Griffiths, Introduction to Electrodynamics.

其中, 除附录 A 矢量分析和第九章相对论电动力学是参考 Griffiths 书外, 其余均参考 Jackson 书.

本笔记将 Jackson 书中的 Chap. 2, 3: Boundary-Value Problems in Electrostatics: I, II 合并为了第二章: 静电学中的边界条件问题.

本笔记一切公式均采取国际单位制 (Système International d'Unités, SI), 没有例外.

**绪论** 在 Jackson 书的 Introduction 中, 着重强调了以下关键词:

- 力 (force) 与场 (field)
- 经典 (classical) 与量子 (quantum)
- 线性 (linear) 与非线性 (nonlinear)
- 数学上的理想化 (mathematical idealization) 与真实的物理 (truly physics)
- 时空 (spacetime)
- 宏观 (macroscopic) 与微观 (microscopic)

# 主要符号表

$\mathbf{r}$  位置矢量

$x, y, z$  直角坐标下位置矢量的分量

# 第一章 静电学

本章主要为一些基础性内容，分为两部分：

1. 第一部分介绍了静电学 (electrostatics) 里的一些基本概念、定义等。所谓静，即电荷分布和场均与时间无关 (time-independent).
2. 第二部分主要是一些数学内容，如 Green 定理、Green 函数等。

在历史上，静电学是作为一门研究宏观现象 (macroscopic phenomena) 的科学而发展起来的，在其中会涉及到一些理想化的概念，如点电荷 (point charge) 模型。在描述一个点上的电场时，要注意它是宏观上足够小，微观上足够大的一个点。

## 1.1 Coulomb 定律

静电学的全部内容都出于 Coulomb 定律 (Coulomb's law) 的定量描述，Coulomb 用一系列实验证明：当两个小带电体  $q_1, q_2$  的距离  $r \gg$  其本身的线度时，二者在空气 (真空) 中的作用力：

- 与每个带电体的电荷量  $q_i$  成正比；
- 与带电体之间距离的平方  $r^2$  成反比；
- 方向沿着这两个电荷的连线；
- 如果这两个带电体带异种电荷，则为吸引力；如果带同种电荷，则为排斥力。

此外，从实验上还证明了，某一小带电体周围的若干个其他小带电体产生的、作用在该小带电体上的总力，是各两体 Coulomb 力的矢量和。

### 定理 1.1.1: Coulomb 定律

真空中的静止点电荷  $q_1$  相对  $q_2$  的位置为  $\mathbf{r}$ ，则  $q_1$  受到  $q_2$  的静电力为：

$$\mathbf{F} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

其中  $k_e$  是实验测定的系数。SI 单位制中

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987\,551\,792\,3(14) \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2,$$

其中  $\epsilon_0 = 8.854\,187\,812\,8(13) \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$  是真空介电常数 (vacuum permittivity)。

## 1.2 电场

### 定义 1.2.1: 电场

电场 (electric field)  $\mathbf{E}$  的强度定义为特定位置的单位电荷所受的力:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (1.2)$$

**注.** 与定义不同, 将带有单位电荷的小带电体放在特定位置所测量得到的力未必是电场强度, 因为它的存在可能显著地改变了原场的分布. 因此必须采取极限的方法, 即测定当小带电体的电荷量越来越小时, 作用在其上的力与其电荷量的比值.<sup>1</sup>

**推论.** 由 Coulomb 定律, 原点处的点电荷  $q$  在  $\mathbf{r}$  处激发的电场  $\mathbf{E}$  为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}; \quad (1.3)$$

### 定理 1.2.1: 线性叠加原理

实验得知, 一系列离散 (discrete) 点电荷  $q_1, \dots, q_n$  在空间中同一点  $\mathbf{r}$  处激发的电场可以线性叠加 (linear superposition)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad (1.4)$$

如果电荷是连续 (continuous) 分布的, 可以用电荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  描述, 则求和变成积分:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (1.5)$$

式中  $dV' = dx'dy'dz'$  是在  $\mathbf{r}'$  处的一个三维体积元.

**推论.** 利用 Dirac  $\delta$  函数, 电荷密度也可以用来描述分立的点电荷系统:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.6)$$

**注.** 若已知  $\rho(\mathbf{r})$ , 我们可以根据积分 (1.5) 求解静电场分布, 但是这并不总是最方便的方法, 下面我们介绍 Gauss 定律.

### 定理 1.2.2: Gauss 定律

对于分立的点电荷系, 电场  $\mathbf{E}$  在一个封闭曲面  $\partial V$  上的通量 (flux) 为  $V$  内的所有电荷  $q_i$  求和:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_V q_i, \quad (1.7)$$

<sup>1</sup>由于电荷是分立的, 这种数学极限在物理上不可能实现. 这也是宏观电磁学中数学理想化的一个例子.

对于电荷密度为  $\rho(\mathbf{r})$  的连续分布电荷来说,

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (1.8)$$

证明. 如图 1.1 所示, 对于一个点电荷  $q$ , 其场强在一个面元  $dA$  上的通量

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

其中  $d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} dA$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  是曲面上的点  $\mathbf{r}$  向外的单位法向矢量;  $\theta$  是  $\mathbf{r}$  与  $\hat{\mathbf{n}}$  的夹角,  $d\Omega$  是  $dA$  对点电荷所张的立体角 (solid angle) 元, 其大小等于  $dA$  在单位球面上中心投影的面积.

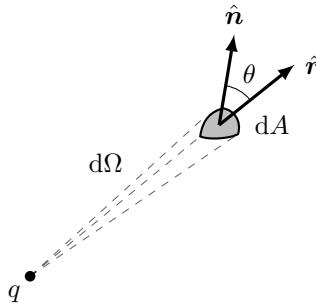


图 1.1: 立体角元

当  $q$  在  $V$  内时,  $d\Omega$  对于全空间的积分为  $4\pi$ ; 而  $q$  在  $V$  外时,  $d\Omega$  会相互抵消, 净积分为 0. 因此点电荷场强在一个封闭曲面  $\partial V$  上的通量为

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \begin{cases} q/\epsilon_0, & q \text{ 在 } V \text{ 内} \\ 0, & q \text{ 在 } V \text{ 外} \end{cases}$$

若有多个点电荷, 则通量为各点电荷电场通量之和, 即证.  $\square$

**推论.** 根据推导过程, Gauss 定律依赖于:

- 电荷间作用力满足平方反比定律;
- 作用力是有心力;
- 不同电荷效应可以线性叠加.

因此, 对于 Newton 引力场来说, Gauss 定律也成立.

$$\oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi GM.$$

**注.** 尽管 Gauss 定律总是对的, 但并不总是有用. 只有在满足一些对称性条件时, 电场的通量才比较容易求.

### 例 1.2.1: 无限大平板的静电场

无限大平板带有均匀面电荷密度  $\sigma$ , 由对称性, 空间中任意一点处的电场一定是垂直平面向向外的, 对一个截面为  $A$  的横跨平面的 Gauss 小药盒 (pillbox) 使用 Gauss 定律

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \implies \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}.$$

$\hat{n}$  为指向远离平面的单位法向量.

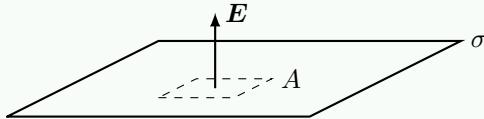


图 1.2: 无限大平板的静电场

### 例 1.2.2: 无限长直线

无限长直线有均匀线电荷密度  $\lambda$ , 由对称性, 电场是垂直直线向外的, 对一个高  $L$  半径  $\rho$  的同轴圆柱使用 Gauss 定律

$$E \cdot 2\pi\rho L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \implies \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} \hat{\rho}.$$

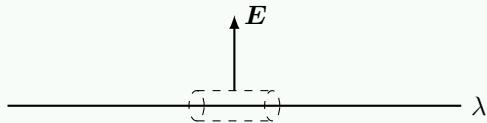


图 1.3: 无限长直线的静电场

可以证明, 均匀带电半圆在圆心处的电场与距离为半径的无限长直线的电场相同, 因为可以构造二者微元的一一映射, 如图 1.4 所示.

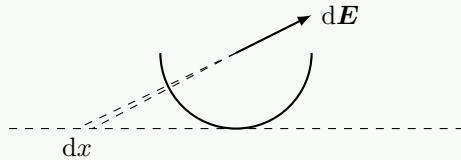


图 1.4: 半圆与直线微元的一一映射

### 定理 1.2.3: Gauss 定律的微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.9)$$

证明. 由散度定理 (A.22),  $\mathbf{E} \cdot \hat{n}$  的面积分可以写成  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  的体积分. 结合 Gauss 定律 (1.8), 可得

$$\int_V \left( \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV \equiv 0$$

该式对任意  $V$  均成立. 由此被积分式为零.  $\square$

### 1.3 标量势

由恒等式<sup>II</sup>

$$\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

可将电场 (1.5) 写成梯度的形式:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left( \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV' \right)$$

#### 定义 1.3.1: 标量势

定义标量势 (或电势、电位, potential) 满足

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \quad (1.10)$$

显然满足上式的  $\Phi$  并不唯一, 但它们之间仅相差一个常量, 因此在讨论电位时我们需要提前选定某一参考点 (通常是无穷远处) 电位为 0.  $\Phi$  的最简单的形式是:

$$\Phi(\mathbf{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV'. \quad (1.11)$$

**推论.** 在电场  $\mathbf{E}$  下将试探电荷  $q$  从  $A$  点移动到  $B$  点时, 克服电场力而对电荷所做的功

$$W = - \int_A^B q \mathbf{E} \cdot d\ell = q(\Phi_B - \Phi_A).$$

上式表明  $q\Phi$  可解释为试探电荷在电场中的势能.

**静电场的旋度** 由 (A.18) 梯度的旋度为  $\mathbf{0}$ , 可得除 Gauss 定律 (1.8) 外的另一个微分方程:

#### 定理 1.3.1: 静电场无旋

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (1.12)$$

也可从任意闭合路径的电场线积分为 0 得到.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} dA = \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\ell \equiv 0.$$

#### 定义 1.3.2: 导体

导体 (conductor) 是易于传导电荷的物质, 其内部存在大量自由电荷 (free charge).

**推论.** 稳定时, 导体内部不会存在静电场或静电电荷 (因为自由电荷在电场下会快速移动到导体表面达到平衡态), 并且导体表面和内部都是等势的.

<sup>II</sup> 在同时存在多个变量时, 需要用下标指定  $\nabla$  作用的变量. 约定:  $\nabla$  不带下标时, 默认作用在  $\mathbf{r}$  上; 特别地, 当作用在  $\mathbf{r}'$  上时,  $\nabla_{\mathbf{r}'}$  可简记为  $\nabla'$ .

## 例 1.3.1: 带电导体球的电势

半径为  $R$  的均匀导体球携带电荷  $q$ , 易得这些电荷均匀地分布在导体球表面. 由 Gauss 定律, 电场分布

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \mathbf{0}, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, & r > R \end{cases}$$

参考点设置为无穷远处, 则电势

$$\Phi(r) = - \int_{+\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, & r > R \end{cases}$$

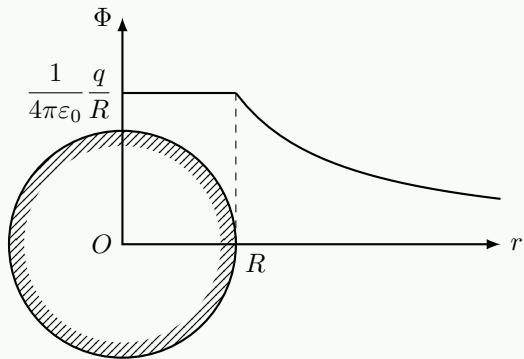


图 1.5: 带电导体球的电势

## 1.4 电荷的表面分布

考察面电荷密度为  $\sigma$  的表面, 表面法向单位矢量  $\hat{\mathbf{n}}$  从表面的一侧 (1) 指向另一侧 (2), 根据 Gauss 定律, 电场法向分量在表面两侧是不连续的:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.13)$$

而电场切向分量是连续的:

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}. \quad (1.14)$$

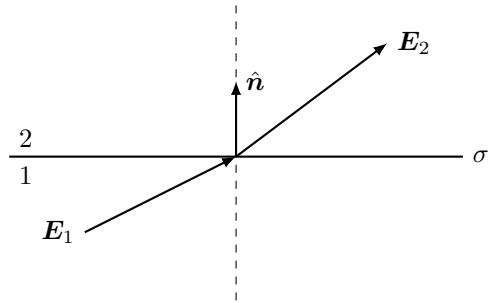


图 1.6: 表面电荷分布

式 (1.13) 也可以写成电位在表面上的分布：由  $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\nabla\Phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\partial\Phi/\partial n$ ,

$$-\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1.15)$$

可以证明，在体电荷和面电荷分布上，电位分布是连续的。但是对于点电荷、线电荷或电偶层 (dipole layers)，电位分布是不连续的！

#### 例 1.4.1: 电偶层

两个面电荷密度为  $\sigma$ 、间距为  $d$  的电偶层，

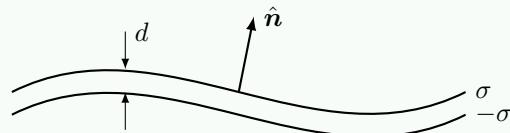


图 1.7: 电偶层

当  $d \rightarrow 0$  时，电位

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' + d(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}|} dA' \\ &\simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \sigma(\mathbf{r}') d(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dA' \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \sigma(\mathbf{r}') d(\mathbf{r}') d\Omega,\end{aligned}$$

上式用到了三维 Taylor 展开 (注意上式是对  $\mathbf{r}'$  求导)，

$$\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} = \frac{1}{r} + \mathbf{a} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) + \dots, \quad a \ll r.$$

定义层矩 (surface-dipole-moment density)

$$D(\mathbf{r}) := d(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}), \quad (1.16)$$

可得

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S D(\mathbf{r}') d\Omega. \quad (1.17)$$

因此电位在电偶层两边会发生跳变

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{D}{\varepsilon_0}. \quad (1.18)$$

## 1.5 电场的能量

取无穷远点为参考点，一系列点电荷  $q_1, \dots, q_n$  所带的静电势能 (electrostatic potential energy) 可通过归纳法得出：

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (1.19)$$

对于连续分布的电荷：

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \iint_V \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'.$$

注意上式没有要求  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ ，可代入式 (1.11)，

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) dV. \quad (1.20)$$

可对上式进行变形，由式 (1.9) 和 (1.10)， $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -\epsilon_0 \nabla^2 \Phi$ ，

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \Phi \nabla^2 \Phi dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \left[ \oint_{\partial V} \Phi \nabla \Phi \cdot d\mathbf{A} - \int_V |\nabla \Phi|^2 dV \right]$$

由于  $V$  是整个空间，故边界（无穷远处）的  $\Phi = 0$ ，因此我们用场的形式表示静电势能

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV \quad (1.21)$$

并可定义能量密度 (energy density)

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2. \quad (1.22)$$

观察表达式，式 (1.21) 当然恒为正，但式 (1.5) 却不一定。原因在于：式 (1.5) 仅包含了互能（电荷间相互作用的静电势能），而式 (1.21) 包含了互能和自能（构成点电荷自身所需要的能量）。为了解释这一点，考虑两个点电荷  $q_1, q_2$  的能量密度

$$w = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \left[ \frac{q_1^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^4} + 2 \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right].$$

前两项是自能项，在  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$  或  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$  处发散；最后一项是互能项，在全空间的积分正是静电势能的形式。

### 例 1.5.1: 导体的能量密度

由式 (3.24c)，导体内的电场  $\mathbf{E}_{in} = \mathbf{0}$ ，故导体的法向电场  $E = \sigma/\epsilon_0$ ，能量密度

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}.$$

**导体系统、电容** 考虑一系列导体构成的系统，导体所带电荷分别为  $Q_1, \dots, Q_n$ ，由线性关系，导体表面电势

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j,$$

$p_{ij}$  取决于导体的几何关系，这相当于一个矩阵，取逆即

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j. \quad (1.23)$$

- $C_{ii}$  即导体的电容 (capacitance), 其物理意义是: 当导体保持在单位电位、所有其他导体都保持在零电位时的导体的总电荷;
- $C_{ij}$  是感应系数 (coefficients of induction), 表示两个导体系统的电容.

#### 例 1.5.2: 平板电容器

平板电容器的极板面积为  $A$ , 间距为  $d$ . 则电荷  $Q = \sigma A$ , 由例 1.2.1 可得电压  $V = Ed = \sigma d / \epsilon_0$ , 故电容为

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (1.24)$$

#### 例 1.5.3: 球形电容器

内外半径分别为  $r, R$  的球形电容器, 内球带电  $Q$ , 电压

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),$$

故电容为

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{Rr}{R-r}. \quad (1.25)$$

#### 例 1.5.4: 同轴线缆的电容

内外半径分别为  $r, R$  的同轴线缆单位长度的电容

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R/r)}. \quad (1.26)$$

导体系统的势能

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} V_i V_j.$$

## 1.6 数学内容

#### 定义 1.6.1: Poisson 方程和 Laplace 方程

结合式 (1.9) 和 (1.10), 便会得到 Poisson 方程

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.27)$$

特别地,  $\rho \equiv 0$  时, 变成 Laplace 方程

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.28)$$

求解电势  $\Phi$  分布就要求解 Poisson 方程 (1.27). 但是只有  $V$  内的条件是不够的, 边界  $\partial V$  上的电位也会影响  $V$  内的电场和电势分布.

### 1.6.1 Green 定理

**定理 1.6.1: Green 定理**

Green 公式

$$\int_V (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_{\partial V} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dA, \quad (1.29a)$$

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_{\partial V} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dA. \quad (1.29b)$$

证明. 对  $\phi \nabla \psi$  应用散度定理 (A.22):

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV = \oint_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot dA,$$

便得到了 Green 第一公式; 将  $\phi, \psi$  轮换后两式相减, 便得到 Green 第二公式.  $\square$

**考虑边界条件的电势** 利用 Green 第二公式 (1.29b), 我们令  $\phi := \Phi(\mathbf{r}')$ ,  $\psi := |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ , 则

$$\nabla'^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla'^2 \psi = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

我们选定  $\mathbf{r} \in V$  使得  $\delta$  函数的积分项得以保留, 代入并移项得到

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dA', \quad (1.30)$$

与式 (1.11) 对比, 上式多了两项边界  $\partial V$  上的积分, 分别等价于面电荷的电势 ( $\partial \Phi / \partial n$  不连续)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA' \quad (1.31a)$$

$$\sigma(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n}. \quad (1.31b)$$

和电偶层的电势 ( $\Phi$  不连续)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} D(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dA' \quad (1.32a)$$

$$D(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \Phi(\mathbf{r}). \quad (1.32b)$$

因此, 求解  $V$  内的电势  $\Phi$  分布问题, 除了需要  $V$  内电荷密度  $\rho$  的分布, 还需知道表面  $\partial V$  上的电势条件 ( $\Phi$  或  $\partial \Phi / \partial n$ ), 这称为边界条件 (boundary condition). 我们可以对不同的边界条件进行分类:

**定义 1.6.2: 边界条件**

Dirichlet 边界条件: 给定表面上的电位

$$\Phi|_{\partial V} = f;$$

Neumann 边界条件：给定表面上电位的法向导数

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\partial V} = f;$$

混合边界条件

### 1.6.2 唯一性定理

#### 定理 1.6.2: 唯一性定理

给定封闭体积  $V$  及边界  $\partial V$  上的 Dirichlet (或 Neumann) 边界条件，得到 Poisson 方程的解是唯一的。

证明。若存在两个解  $\Phi_1, \Phi_2$  满足同一个边界条件。令  $U := \Phi_1 - \Phi_2$ ，则

$$\begin{cases} \nabla^2 U = 0, \\ U|_{\partial V} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\partial V} = 0, \end{cases}$$

由 Green 第一公式 (1.29a)，令式中  $\phi = \psi = U$ ，则

$$\int_V (U \nabla^2 U + \nabla U \cdot \nabla U) dV = \oint_{\partial V} U \frac{\partial U}{\partial n} dA,$$

即

$$\int_V |\nabla U|^2 dV = 0 \implies |\nabla U| \equiv 0 \implies U = \text{const.}$$

这说明  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  仅相差一个常数。对电位来说，这仅是参考点的差别。□

### 1.6.3 Green 函数法求解 Poisson 方程

由于式 (1.30) 同时出现了  $\Phi$  和  $\partial\Phi/\partial n$  的边界条件，因此它并不适合解静电场方程。我们需要寻找一种只含 Dirichlet 或 Neumann 边界条件的解。下面我们引入 Green 函数。

#### 定义 1.6.3: Green 函数

Green 函数是满足下方程的一系列函数：

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.33)$$

回到 Green 第二公式 (1.29b)，这次令  $\phi := \Phi(\mathbf{r}')$ ,  $\psi := G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ，式 (1.30) 变为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} \right] dA'.$$

**定理 1.6.3: Dirichlet 边界条件的 Green 函数**

我们可设法找到一个  $G$  满足

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} \equiv 0, \quad (*)$$

上式变为:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} dA'; \quad (1.34)$$

**定理 1.6.4: Neumann 边界条件的 Green 函数**

由

$$\oint_{\partial V} \frac{\partial G}{\partial n'} dA' = \int_V \nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' = -4\pi,$$

我们也可以设法找到一个  $G$  满足:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_{\partial V} \equiv -\frac{4\pi}{S}, \quad (**)$$

其中  $S$  是边界  $\partial V$  的面积, 则

$$\Phi(\mathbf{r}) = \langle \Phi \rangle_{\partial V} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} dA', \quad (1.35)$$

其中  $\langle \Phi \rangle_{\partial V}$  是边界上的平均电势

$$\langle \Phi \rangle_{\partial V} := \frac{1}{S} \oint_{\partial V} \Phi(\mathbf{r}') dA'.$$

如果 Neumann 问题的  $V$  包括无穷远处, 则  $(**)$  变为  $\partial G / \partial n'|_{\partial V} \equiv 0$ , 此时  $\langle \Phi \rangle_{\partial V} = 0$ .

**注.** 上述方法不依赖于边界条件  $\Phi$  或  $\partial \Phi / \partial n$  的具体表达式, 因此是普遍的. 但通常很难找到一个满足  $(*)$  或  $(**)$  的  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , 因为它依赖于  $\partial V$  的形状.

**例 1.6.1: Green 函数举例**

在无边界空间  $V = \mathbb{R}^3$  中, 可取

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}.$$

在上半空间  $V = \{(x, y, z) | z > 0\}$  中, 为了运用式 (1.34), 需要  $G$  在  $\partial V = \{(x, y, 0)\}$  处为 0. 可取  $\mathbf{r}'$  的对称点  $\mathbf{r}'' = (x', y', -z')$ , 并取

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}}. \end{aligned}$$

**定理 1.6.5: Green 函数的对称性**

对于 Dirichlet 边界条件, Green 函数是对称的:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r});$$

但对于 Neumann 边界条件, 还需加上一项才是对称的:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{S} \oint_{\partial V} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') dA'' = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \frac{1}{S} \oint_{\partial V} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') dA''.$$

额外加的这一项并不影响电势  $\Phi(\mathbf{r})$ .

Green 函数可被拆解为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

而  $F$  满足  $V$  内的 Laplace 方程

$$\nabla'^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0.$$

$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  与电像法有关 (后面会讨论). 其物理意义为:  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')/4\pi\varepsilon_0$  表示  $V$  外的电荷系统的势, 以满足  $\partial V$  上的边界条件.

**1.6.4\* 变分法****定义 1.6.4: 泛函**

泛函 (functional) 是从函数空间到实数 (或复数) 的映射, 通常表示为包含函数及其导数的定积分.

$$I[y(x)] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1.36)$$

**定义 1.6.5: 变分原理**

变分原理 (variational principle) 是指将物理问题转化为泛函极值问题的原理.

比如: 最小作用量原理、物理学中的 Hamilton 原理、静电学中的 Thomson 定理、光学中的 Fermat 原理

Dirichlet 边界条件的泛函

$$I[\psi] = \frac{1}{2} \int_V \nabla \psi \cdot \nabla \psi dV - \int_V g \psi dV \quad (1.37)$$

考虑一阶变分  $\psi \rightarrow \psi + \delta\psi$ ,  $\delta I := I[\psi + \delta\psi] - I[\psi]$

$$\delta I = \int_V [\nabla \psi \cdot \nabla (\delta\psi) - g \delta\psi] dV = - \int_V (\nabla^2 \psi + g) \delta\psi dV + \oint_{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} \delta\psi dA.$$

考虑  $\delta\psi|_{\partial V} \equiv 0$ , 则泛函取极值 (即  $\delta I = 0$ ) 当且仅当

$$\nabla^2 \psi = -g. \quad (1.38)$$

Neumann 边界条件的泛函

$$I[\psi] = \frac{1}{2} \int_V \nabla \psi \cdot \nabla \psi \, dV - \int_V g\psi \, dV - \oint_{\partial V} f\psi \, dA. \quad (1.39)$$

可得

$$\delta I = - \int_V (\nabla^2 \psi + g) \delta \psi \, dV + \oint_{\partial V} \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} - f \right) \delta \psi \, dA,$$

则  $\delta I = 0$  当且仅当

$$\nabla^2 \psi = -g, \quad (1.40a)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\partial V} = f. \quad (1.40b)$$

### 1.6.5\* 松弛法

#### 定义 1.6.6: 松弛法

松弛法 (relaxation method) 也称有限差分法 (finite difference method, FDM), 是一种求解微分方程数值解的近似方法, 其主要原理是对微分方程中的微分项进行直接差分近似:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

从而将微分方程转化为代数方程组求解.

采用直角网格划分, 格点  $(i, j)$  处的电位为  $\Phi_{i,j}$ , 网格间距为  $h$ ,

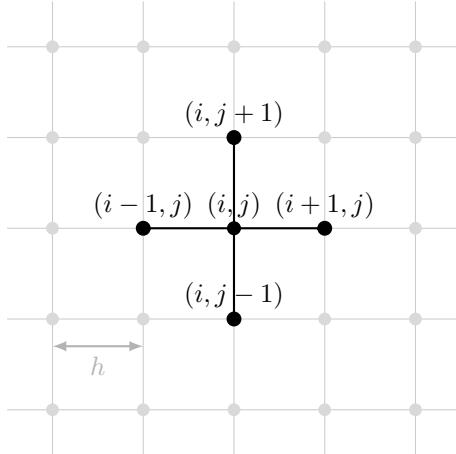


图 1.8: 有限差分法示意图

则

$$\Phi_{i\pm 1,j} = \Phi_{i,j} \pm h \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{i,j} \pm \frac{h^3}{6} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right|_{i,j} + \mathcal{O}(h^4), \quad (1.41)$$

$\Phi_{i,j\pm 1}$  同理, 可得

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.42a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.42b)$$

故二维 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = f,$$

对应的差分方程为五点差分格式 (five-point difference formula)

$$\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 4\Phi_{i,j} = h^2 f_{i,j}. \quad (1.43)$$

对应的超松弛 (successive over-relaxation, SOR) 迭代格式为

$$\Phi_{i,j}^{(n+1)} = (1 - \omega)\Phi_{i,j}^{(n)} + \frac{\omega}{4} \left[ \Phi_{i+1,j}^{(n)} + \Phi_{i-1,j}^{(n)} + \Phi_{i,j+1}^{(n)} + \Phi_{i,j-1}^{(n)} - h^2 f_{i,j} \right], \quad (1.44)$$

可以证明, 当  $0 < \omega < 2$  时, 迭代是收敛的, 最优松弛因子 (最速收敛) 约为

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sin(\pi h)}. \quad (1.45)$$

## 第二章 静电学中的边界条件问题

静电学中最为常见的问题，便是给定边界条件，求解某区域中的电场、电势、电荷密度等。在第 1.6.3 节中，我们已经介绍了 Green 函数法求解 Poisson 方程，并给出了不同边界条件下的形式解。但是从形式解很难得到具体问题的通解，因为 Green 函数的具体形式未知，其与边界形状、边界条件有关。因此，便发展起许多求解静电学边值问题的方法，这些内容其实也是数学物理方法中的重要部分。

**第一部分** 主要介绍三个方法：

- 第 2.1 节的电像法，重点介绍了球面边界的镜像电荷，并由此得到了球面边界的 Green 函数；
- 第 2.2 节的正交函数展开法（分离变量法）；
- 第 2.3 节的有限元分析法。

限于篇幅，Jackson 省略了复变函数方法。

**第二部分** 主要内容分为四节：

- 第 2.4 节和第 2.5 节讲在球坐标和柱坐标中用分离变量法求解 Laplace 方程，并介绍了 Legendre 多项式、球谐函数、Bessel 函数等特殊函数的性质；
- 第 2.6 节内容为在球坐标系和柱坐标系中应用 Green 函数展开法求解 Poisson 方程；
- 第 2.7 节举例讨论了混合边界条件下的边值问题。

一些数学内容（如特殊函数的级数表达式、收敛问题，以及各种完备性的证明等）可见数学物理方法笔记，此处不作为重点讲述，故省略。

### 2.1 电像法

电像法 (method of images) 用于求解一个或多个点电荷在特定边界  $\partial V$  内的问题。在边界  $\partial V$  形状较好的条件下，可以在  $V$  外<sup>1</sup>添加适当的点电荷来模拟所需的边界条件，这种虚拟电荷称为镜像电荷 (image charge)。

#### 例 2.1.1: 接地无限平面导体的镜像电荷

一个简单的例子是接地无限平面导体前的点电荷  $q$ ，如下图所示。移除原边界并对称地放置一镜像电荷  $q' = -q$  后，即可满足原平面所在位置电势为 0。

<sup>1</sup> 镜像电荷必须在  $V$  外部，否则它们的存在将改变  $V$  内实际电荷的排列，违反 Poisson 方程。

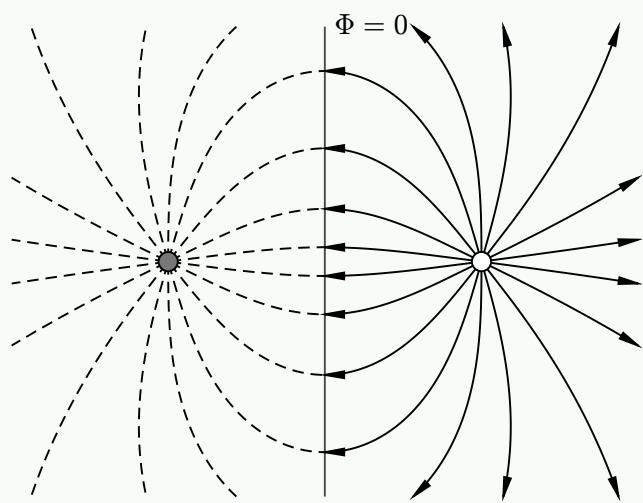


图 2.1: 平面边界的电像法

因此电势分布为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \right). \quad (2.1)$$

### 2.1.1 球面边界的电像法

对于球面边界也可采用电像法，其背后的几何意义为 Apollonius 圆的定义：平面内到两定点距离的比值为定值的点轨迹构成一个圆。

#### 例 2.1.2: 接地导体球的镜像电荷

一半径为  $a$  的导体球接地，球外有一电荷  $q$ ，距球心  $d > a$

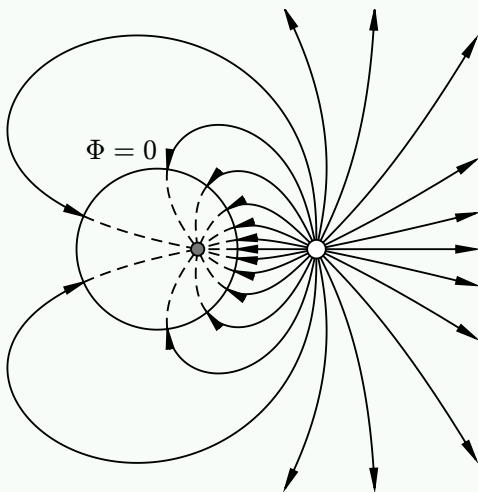


图 2.2: 接地导体球和点电荷

我们可以在球壳内放置一镜像电荷  $q'$ , 由对称性,  $q'$  一定在  $q$  与球心的连线上: 不难验证, 取

$$q' = -\frac{a}{d}q, \quad d' = \frac{a}{d}a. \quad (2.2)$$

便可使原球面上的电势均为 0, 因此球外电势分布为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|} - \frac{a}{d} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}'|} \right), \quad \mathbf{d}' = \left( \frac{a}{d} \right)^2 \mathbf{d}. \quad (2.3)$$

接地导体球外表面的面电荷密度为 ( $\partial V$  上的法向量  $\hat{\mathbf{n}}'$  指向球内, 即  $-\mathbf{r}$  方向)

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi a} \frac{d^2 - a^2}{(d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}}. \quad (2.4)$$

球体上的总感应电荷等于像电荷  $q'$ , 这可以根据 Gauss 定律直接得出, 也可以对  $\sigma$  在  $\partial V$  上积分得到.

作用在电荷  $q$  上的力等于电荷  $q$  和像电荷  $q'$  之间的 Coulomb 力:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(d-d')^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ad}{(d^2-a^2)^2}. \quad (2.5)$$

也可以将  $\sigma^2/2\epsilon_0$  在  $\partial V$  上积分得到.

**注.** 这个结果同样适用于球内的电荷 ( $y < a$ ). 唯一需要改变的是 (2.4), 其中导体外的法向导数现在是径向向内的, 这意味着符号的变化. 导体球内表面感应电荷为  $-q$ , 与  $d$  无关.

### 例 2.1.3: 带电孤立导体球的镜像电荷

将例 2.1.2 的导体球换为总电荷为  $Q$  的孤立导体球, 可以用线性叠加法建立电势的解:

1. 首先将导体球接地, 即例 2.1.2 得到的结果;
2. 然后切断导体球的接地, 导体球外表面会带上  $q'$  的电荷, 我们只需要再向外表面添加  $(Q-q')$  的电荷即可, 由于导体是等电位的, 这些  $(Q-q')$  电荷将均匀地分布在外表面上.

因此电势会添加一项等效于处于原点的  $(Q-q')$  点电荷的电势.

而原点电荷受到的力为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{d^2} \left[ Q - q \frac{a^3(2d^2-a^2)}{d(d^2-a^2)^2} \right]. \quad (2.6)$$

当  $y \gg a$  时, 电场力会退化为两个点电荷之间的 Coulomb 力

$$F \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{d^2}.$$

当  $Q \gg q$  时, 相互作用用 0 的点 (不稳定平衡点) 坐标  $y$  为

$$Q \simeq \frac{qa^2}{4(d-a)^2} \Rightarrow d \simeq a \left( 1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{Q}} \right). \quad (2.7)$$

**注.** 当点电荷处于导体球内时, 由 Gauss 定律, 导体球内表面会产生  $-q$  的感应电荷. 因此若

导体球带总电荷为  $Q$  时, 其外表面电荷应为  $Q + q$ , 且均匀地分布在外表面.

#### 例 2.1.4: 固定电势导体球的镜像电荷

将例 2.1.2 的导体球换为电势为  $V$  的导体球, 类似于例 2.1.3, 但额外加在导体球上的电荷  $(Q - q')$  应改为  $(4\pi\varepsilon_0 \cdot V a)$ .

#### 例 2.1.5: 电像法处理匀强电场中的导体球问题

考虑均匀电场  $E_0$  中半径为  $a$  的导体球. 均匀场可以认为是在无穷远处由带适当电荷的正负电荷产生的, 如下图所示

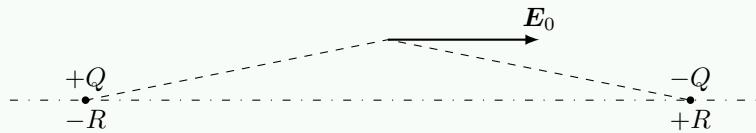


图 2.3: 正负电荷近似匀强电场

有两个电荷  $\pm Q$ , 位于  $\mp R$  位置, 在原点附近电场可以近似为均匀.

$$E_0 \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q}{R^2}.$$

保持  $Q/R^2$  不变, 在  $R, Q \rightarrow \infty$  的极限下, 这个近似是精确的.

因此使用电像法的结论, 构造两个镜像电荷  $\pm Qa/R$ , 得到球坐标系下的电势  $\Phi(r, \theta)$ , 由于  $R \gg r$ , 可进行 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q}{R^2} \left( -r \cos \theta + \frac{a^3}{r^2} \cos \theta + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \right) \\ &= -E_0 \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

省略的部分内容随着  $R \rightarrow \infty$  而消失. 则导体球的面电荷密度为

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (2.9)$$

电荷密度的面积分为 0, 因此导体球接地与否没有区别.

## 2.1.2 球边界的 Green 函数

对于球形 Dirichlet 边界条件, 为了使球面上的  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ , 可借助镜像电荷的思想, 取

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}, \quad \mathbf{r}'' = \left(\frac{a}{r'}\right)^2 \mathbf{r}'. \quad (2.10)$$

令  $\gamma$  表示  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  夹角, 则

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{1/2}} - \frac{a}{(r^2 r'^2 + a^4 - 2a^2 rr' \cos \gamma)^{1/2}},$$

式 (1.34) 中还需要  $\partial G / \partial n'$ , 若感兴趣的区域为球外, 则  $n'$  指向球内,

$$\frac{\partial G}{\partial n'} \Big|_{r'=a} = - \frac{\partial G}{\partial r'} \Big|_{r'=a} = - \frac{r'^2 - a^2}{a(r'^2 + a^2 - 2ar' \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (2.11)$$

这正是式 (2.4) 的感应表面电荷密度.

### 定理 2.1.1: 球外 Laplace 方程的解

给定球表面电势  $\Phi(a, \theta, \phi)$  下, 球外 Laplace 方程的解

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \Phi(a, \theta', \phi') \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d\Omega' \quad (2.12)$$

$d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\phi'$  是点  $(a, \theta', \phi')$  处的立体角微元, 且

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi').$$

注. 若问题改为球内的 Laplace 方程, 则法向量方向反向, 式 (2.11) 的  $\partial G / \partial n'$  结果要变号.

### 例 2.1.6: 两半球具有不同电势的导体球

一个半径为  $a$  的导电球由两个电势分别为  $\pm V$  的半球壳组成,

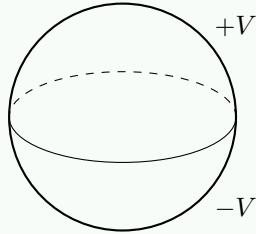


图 2.4: 两半球具有不同电势的导体球

使用式 (2.12),

$$\Phi(r) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 - \int_{-1}^0 \right) \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma)^{3/2}} d(\cos \theta') d\phi'$$

考虑  $+z$  轴上的电势, 取  $\theta = 0$ , 则  $\cos \gamma = \cos \theta'$ , 得到

$$\Phi(z) = V \left[ 1 - \frac{z^2 - a^2}{z \sqrt{z^2 + a^2}} \right], \quad (2.13)$$

当  $z \gg a$  时,  $\Phi(z) \simeq 3Va^2/2z^2$ .

为了得到上面积分的表达式, 提出  $(r^2 + a^2)$ ,

$$\Phi(r) = \frac{Va(r^2 - a^2)}{4\pi(r^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ (1 - 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2} - (1 + 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2} \right] d(\cos \theta') d\phi'$$

其中  $\alpha := ar/(a^2 + r^2)$ , 进行 Taylor 展开:

$$(1 - 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2} - (1 + 2\alpha \cos \gamma)^{-3/2} = 6\alpha \cos \gamma + 35\alpha^3 \cos^3 \gamma + \dots$$

按项积分得到

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{3Va^2}{2r^2} \frac{r^3(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2)^{5/2}} \cos \theta \left[ 1 + \frac{35}{24} \frac{a^2 r^2}{(r^2 + a^2)^2} (3 - \cos^2 \theta) + \dots \right].$$

若  $r \gg a$ , 则

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{3Va^2}{2r^2} \left[ \cos \theta - \frac{7a^2}{12r^2} \left( \frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right) + \dots \right]. \quad (2.14)$$

对应 Legendre 多项式  $P_1(\cos \theta), P_3(\cos \theta)$ . 见例 2.4.2 续.

注. 若题目变为两个半导体球, 我们也可以写成  $(V_1 + V_2)/2$  的完整孤立导体球与两个  $\pm(V_1 - V_2)/2$  的半导体球的叠加.

## 2.2 正交函数展开法

### 定义 2.2.1: 正交函数

一组实 (复) 函数  $U_i(\xi)$  在区间  $(a, b)$  上平方可积, 若两两正交 (orthogonal):

$$\int_a^b U_m^*(\xi) U_n(\xi) d\xi = \delta_{mn}. \quad (2.15)$$

则称为正交函数. 其中  $\delta_{mn}$  为 Kronecker 符号.

### 定理 2.2.1: 完备正交函数展开

若有一组完备的正交函数集  $\{U_i(\xi)\}$ , 则在区间  $(a, b)$  上任意平方可积的函数  $f(\xi)$  均可被展开成正交函数的线性组合

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(\xi), \quad a_i := \int_a^b U_i^*(\xi) f(\xi) d\xi.$$

完备关系 (completeness relation) 为

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_i^*(\xi') U_i(\xi) = \delta(\xi' - \xi). \quad (2.16)$$

证明. 直接代入系数  $a_i$

$$f(\xi) = \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^{\infty} U_i^*(\xi') U_i(\xi) \right] f(\xi') d\xi'. \quad \square$$

### 例 2.2.1: Fourier 级数

易证, 在区间  $(-\pi, \pi)$  内, 函数集

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}$$

两两正交. 因此在  $(-\ell/2, \ell/2)$  上平方可积的函数  $f(x)$  可被展开为 Fourier 级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right) \right]. \quad (2.17)$$

其中 Fourier 系数

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{\ell}\right) dx. \end{aligned}$$

一般化至二维, 对于任意矩形区域  $(a, b) \times (c, d)$  上平方可积的函数  $f(\xi, \eta)$ , 若可在两个维度分别找到一组正交函数  $U_i(\xi), V_j(\eta)$ , 则  $f(\xi, \eta)$  可被展开为

$$f(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} U_i(\xi) V_j(\eta), \quad a_{ij} = \int_a^b \int_c^d U_i(\xi) V_j(\eta) f(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

### 例 2.2.2: Fourier 变换

Fourier 级数有复变函数的形式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi n x / \ell}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x') e^{-i2\pi n x' / \ell} dx'.$$

当  $\ell \rightarrow \infty$  时,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right] e^{ikx} dk.$$

由此可得  $f(x)$  的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx; \quad (2.18)$$

相应的 Fourier 反变换为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (2.19)$$

其体现的正交性:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k - k').$$

### 2.2.1 分离变量法

数学物理中的偏微分方程 (PED) 通常用分离变量的方法来求解. 涉及三维 Laplacian 的方程已知可在 11 个不同的坐标系中分离<sup>II</sup>. 我们只详细讨论其中的三种: 直角坐标、球坐标和柱坐标.

<sup>II</sup>Morse and Feshbach, Methods of Theoretical Physics, Vol.1

### 例 2.2.3: 长方体边界条件下的 Laplace 方程的解

给定如图 2.5 所示边界条件, 只有  $z = c$  的边界有电势  $V(x, y)$  外, 其他面电势均为 0, 求长方体内部电位分布.

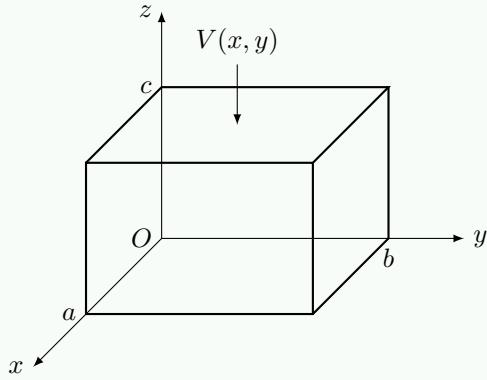


图 2.5: 矩形区域边界条件

直角坐标系下, Laplace 方程为

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

分离变量, 假定解形如  $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ , 代入原方程:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0,$$

上式对内部的任意  $(x, y, z)$  均成立, 故

$$X'' = -\alpha^2 X, \quad Y'' = -\beta^2 Y, \quad Z'' = \gamma^2 Z.$$

其中  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . 因为  $X(0) = X(a) = 0$ ,  $Y(0) = Y(b) = 0$ , 故解为驻波条件:

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \sin(\alpha_m x), & \alpha_m &= \frac{m\pi}{a}, & m &= 1, 2, 3, \dots \\ Y_n(y) &= \sin(\beta_n y), & \beta_n &= \frac{n\pi}{b}, & n &= 1, 2, 3, \dots \\ Z_{mn}(z) &= \sinh(\gamma_{mn} z), & \gamma_{mn} &= \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

$\Phi$  一定可以写成满足 Laplace 方程的一系列正交函数的线性组合

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m,n} A_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \sinh(\gamma_{mn} z).$$

利用  $z = c$  上的边界条件  $\Phi(x, y, c) = V(x, y)$ , 求得系数

$$A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{mn} c)} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dy dx.$$

注. 如果长方体 6 个面的势都不为零, 则我们可以对每个面应用上式, 通过 6 个解的线性叠

加得到内部的解.

### 2.2.2 二维边界问题

现在我们简单地考虑二维 Laplace 方程在直角坐标下的分离变量解法. 二维问题假定势与其中一个坐标无关, 这通常是一种近似的简化做法, 但在一些情况下是很准确的, 比如一条均匀的长传输线.

**二维直角坐标** 其实就是三维 Laplace 方程其中一项偏微分为 0.

**例 2.2.4: 二维直角坐标边界条件**

考虑  $0 < x < a, y > 0$  的边界, 显然  $\Phi$  与  $z$  无关:

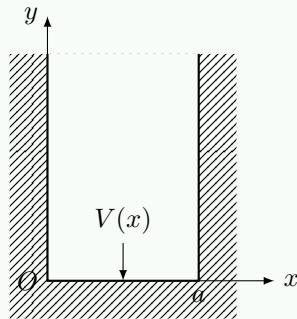


图 2.6: 二维矩形井边界条件

二维直角坐标 Laplace 方程为

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}} = 0,$$

分离变量  $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$ , 由  $\Phi$  在  $x = 0, a$  处为 0 可得

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad Y_n(y) = \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

有形式解

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right). \quad (2.20)$$

代入边界条件  $\Phi(x, 0) = V(x)$ , 得到系数

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a V(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx.$$

**二维极坐标** 二维极坐标 Laplace 方程为柱坐标 Laplace 中  $z$  坐标偏微分为 0:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \cancel{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}} = 0. \quad (2.21)$$

分离变量  $\Phi(\rho, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$ , 得到

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \frac{\Psi''}{\Psi} R = 0.$$

若  $\phi$  的范围是任意的, 则由周期条件

$$\begin{cases} \Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi), \\ \Psi'(\phi + 2\pi) = \Psi'(\phi) \end{cases} \implies \Psi_n(\phi) = a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

可得  $\Psi_n''/\Psi_n = n^2$ , 继而  $R(\rho)$  满足 Euler 方程, 可得

$$R_n(\rho) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln \rho, & n = 0 \\ c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

故

$$\Phi(\rho, \phi) = c_0 + d_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi))(c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}). \quad (2.22)$$

若区域包含原点, 则要求  $d_n \equiv 0$ .

#### 例 2.2.5: 二维极坐标边界条件

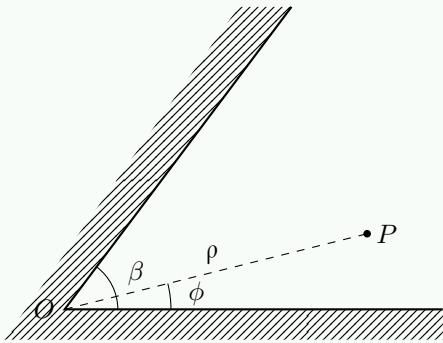


图 2.7: 二维极坐标边界条件

由边界条件, 在  $\phi = 0, \beta$  时  $\Phi = V$  可得

$$\Phi(\rho, \phi) = V + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^{n\pi/\beta} \sin\left(\frac{n\pi\phi}{\beta}\right). \quad (2.23)$$

$\rho \rightarrow 0$  时, 忽略高阶项

$$\Phi \simeq V + a_1 \rho^{\pi/\beta} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right).$$

电场

$$\begin{cases} E_{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \simeq -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\pi/\beta-1} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right). \\ E_{\phi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \simeq -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\pi/\beta-1} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\beta}\right) \end{cases} \quad (2.24)$$

边界感应电荷密度

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E_{\phi}(\rho, 0) \simeq -\frac{\epsilon_0 \pi a_1}{\beta} \rho^{\pi/\beta-1}. \quad (2.25)$$

当  $\beta > \pi$  时,  $\sigma$  在  $\rho \rightarrow 0$  有奇点. 这便是尖端放电现象的解释.

## 2.3\* 有限元分析法

有限元分析法 (finite element analysis, FEA) 是一种数值方法, 用于求解复杂的工程和物理问题, 特别是涉及偏微分方程的连续体力学问题, 如结构力学、热传导、电磁场等. 其基本思想是将一个复杂的连续体问题分解成许多简单的子问题, 这些子问题在数学上更容易处理. 每个子问题对应于一个“有限元”, 它是一个小的、简单形状的区域 (如三角形或四边形). 然后, 在这些简单区域上, 通过选择合适的数学近似 (如多项式函数), 将偏微分方程转化为代数方程. 这些代数方程组成了所谓的有限元方程.

## 2.4 球坐标系中的正交函数

球坐标系  $(r, \theta, \phi)$  中 Laplace 方程可以写成

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (2.26)$$

分离变量  $\Phi(r, \theta, \phi) = R(r)P(\theta)Q(\phi)$ , 得到

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \ell(\ell+1)R = 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[ \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0, \\ \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2. \end{cases}$$

可直接解得  $R, Q$

$$R_\ell(r) = Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)}, \quad (2.27)$$

$$Q_m(\phi) = e^{\pm im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.28)$$

### 2.4.1 Legendre 多项式

$P(\theta)$  经常通过  $x = \cos \theta$  代换, 得到广义 (generalized) Legendre 方程:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (2.29)$$

考虑  $m=0$  的情形, 得到 Legendre 方程:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^2 \frac{dP}{dx} \right] + \ell(\ell+1)P = 0. \quad (2.30)$$

其解为 Legendre 多项式  $P_\ell(x)$ , 可以写成

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell. \quad (2.31)$$

其中  $\ell = 0, 1, 2, \dots$

## 例 2.4.1: 前几个 Legendre 多项式

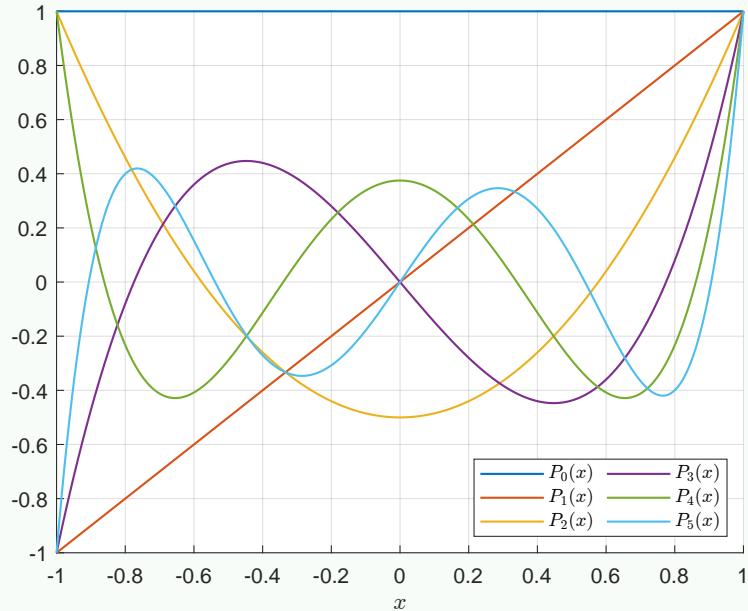


图 2.8: 前几个 Legendre 多项式

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, & P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_1 &= x, & P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

## 定理 2.4.1: Legendre 多项式的正交性和完备性

Legendre 多项式是正交且完备的

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}, \quad (2.32a)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell^*(x') P_\ell^m(x) = \delta(x - x'). \quad (2.32b)$$

因此任意  $[-1, 1]$  上的函数  $f(x)$  均可被展开为 Legendre 级数

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(x), \quad A_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_\ell(x) dx. \quad (2.33)$$

**推论.** 对于方位角  $\phi$  对称的 Laplace 方程 (2.26),  $m = 0$ , 其解为

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}] P_\ell(\cos \theta). \quad (2.34)$$

若区域包含原点, 则要求  $B_\ell \equiv 0$ .

## 例 2.4.2: 两半球具有不同电势的导体球 (续)

接例 2.1.6, 边界条件为

$$\Phi(a, \theta) = V(\theta) = \begin{cases} +V, & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -V, & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

因此解具有 (2.34) 的形式, 而系数满足

$$A_\ell a^\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_0^\pi V(\theta) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

由于  $P_\ell$  与  $\ell$  具有相同的奇偶性, 因此只有  $\ell$  为奇数的项不为 0, 进而由 (2.31) 计算得  $r < a$  时,

$$\Phi = V \left[ \frac{3r}{2a} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left( \frac{r}{a} \right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left( \frac{r}{a} \right)^5 P_5(\cos \theta) + \dots \right].$$

球外电势,  $r > a$ ,  $A_\ell \equiv 0$ . 只需将  $(r/a)^\ell$  替换为  $(a/r)^{\ell+1}$  即可.

由于注意到  $z$  轴上  $\theta = 0$ ,  $P_\ell(\cos \theta) = 1$ , 因此另一种求解方法是先求出  $z$  轴上的电势, 再在级数的项中添加对应的  $P_\ell(\cos \theta)$ .

## 例 2.4.3: 点电荷电势

$\mathbf{r}'$  处的单位点电荷在  $\mathbf{r}$  的产生的电势为

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{r_<}{r_>} \right)^\ell P_\ell(\cos \gamma). \quad (2.35)$$

其中  $r_< := \min(r, r')$ ,  $r_> := \max(r, r')$ ,  $\gamma$  是  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  夹角.

## 例 2.4.4: 锥形孔内尖端附近的电场特性

如图所示的锥形孔边界, 求其尖端附近的电场特性.

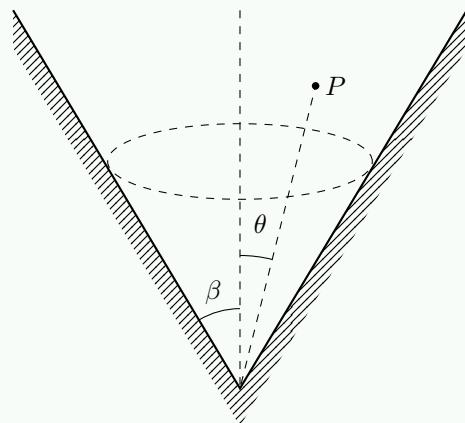


图 2.9: 锥形孔

在  $\theta = 0$  附近展开, 设  $\xi := (1 - \cos \theta)/2$ , 则

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \xi(1 - \xi) \frac{dP}{d\xi} \right] + \nu(\nu + 1)P = 0.$$

注意此式与 Legendre 方程 (2.30) 的区别. 设级数解, 有

$$a_{j+1} = \frac{(j - \nu)(j + \nu + 1)}{(j + 1)^2} a_j.$$

得到 Legendre 函数的一般表达式, 这是 Legendre 多项式的推广:

$$P_\nu(\xi) = 1 + (-\nu)(\nu + 1)\xi + \frac{(-\nu)(-\nu + 1)(\nu + 1)(\nu + 2)}{(2!)^2} \xi^2 + \dots$$

形式解

$$\Phi = Ar^\nu P_\nu(\cos \theta).$$

边界条件  $P_\nu(\cos \beta) = 0$ , 可解得  $\nu = \nu_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P_{\nu_k}(\cos \theta).$$

$r \rightarrow 0$  时, 考虑第一项  $\Phi \simeq Ar^\nu P_\nu(\cos \theta)$ , 电场

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \simeq -\nu Ar^{\nu-1} P_\nu(\cos \theta), \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \simeq Ar^{\nu-1} \sin \theta P'_\nu(\cos \theta). \end{cases}$$

表面电荷密度

$$\sigma_r = -\varepsilon_0 E_\theta|_{\theta=\beta} \simeq -\varepsilon_0 Ar^{\nu-1} \sin \beta P'_\nu(\cos \beta).$$

## 2.4.2 连带 Legendre 函数、球谐函数

考虑式 (2.29)  $m \neq 0$  的一般情形,

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ \ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P = 0.$$

为了使解在  $[-1, 1]$  收敛, 推导过程见第 B.1 节, 要求:

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.36a)$$

$$m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell. \quad (2.36b)$$

解是连带 (associated) Legendre 函数:

$$P_\ell^m(x) = (-)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x), \quad (2.37)$$

上式默认  $m > 0$ , 因为  $P_\ell^{-m}$  和  $P_\ell^m$  是线性相关的:

$$P_\ell^{-m}(x) = (-)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x). \quad (2.38)$$

**定理 2.4.2: 连带 Legendre 函数的正交性**

连带 Legendre 函数只对固定的  $m$  或固定的  $\ell$  正交:

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \delta_{\ell\ell'}; \quad (2.39a)$$

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(x) P_{\ell'}^{m'}(x) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{m} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{mm'} \cdot \quad (2.39b)$$

但不能同时对  $\ell$  和  $m$  正交, 比如  $P_1^1$  和  $P_2^2$  并不正交.

将角向部分的解  $P(\theta)$  和  $Q(\phi)$  合并, 由此得到球谐函数 (spherical harmonics):

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (2.40)$$

满足 Laplace 方程的角向部分:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \ell(\ell+1)Y = 0.$$

**定理 2.4.3: 球谐函数的正交性和完备性**

球谐函数是正交且完备的:

$$\oint Y_{\ell m}^* Y_{\ell' m'} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (2.41)$$

球坐标系下 Laplace 方程 (2.26) 的通解

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [A_{\ell m} r^\ell + B_{\ell m} r^{-(\ell+1)}] Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (2.42)$$

由  $P_\ell(\cos \gamma)$  的球谐函数展开式及 (2.35), 点电荷之间电势的球谐函数展开

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{4\pi}{r_>} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\ell+1} \left( \frac{r_<}{r_>} \right)^\ell \cdot \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) \right]. \quad (2.43)$$

## 2.5 柱坐标系中的正交函数

柱坐标系  $(\rho, \phi, z)$ , Laplace 方程可以写成

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.44)$$

分离变量  $\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$ , 得到

$$\begin{cases} \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0, \\ \frac{d^2Q}{d\phi^2} + \nu^2 Q = 0, \\ \frac{d^2Z}{dz^2} - k^2 Z = 0. \end{cases}$$

可直接解得  $Q, Z$

$$Q_\nu(\phi) = e^{\pm i\nu\phi}, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.45)$$

$$Z_k(z) = e^{\pm kz}, \quad k > 0 \quad (2.46)$$

### 2.5.1 Bessel 函数

设  $x = k\rho$ , 得到 Bessel 方程

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0. \quad (2.47)$$

其解为 Bessel 函数  $J_\nu(x)$  和  $Y_\nu(x)$ .

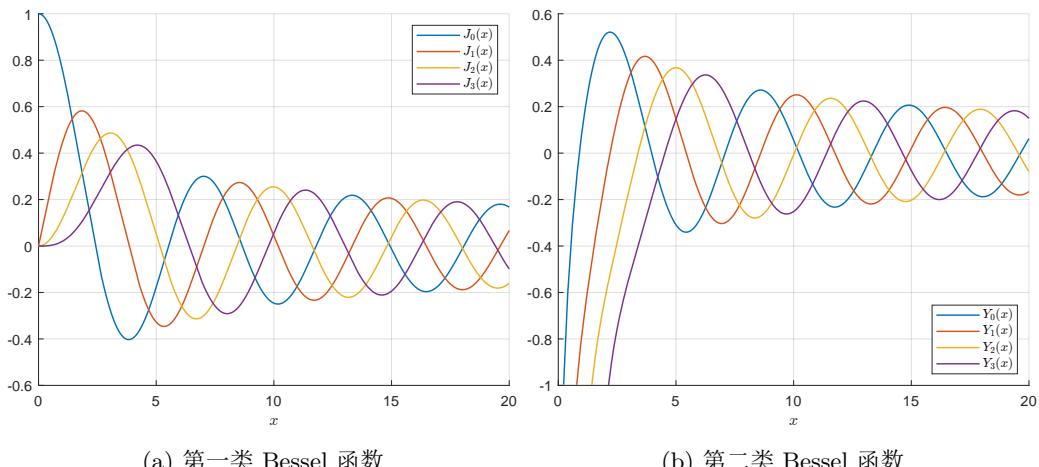


图 2.10: 前几个 Bessel 函数

#### 定理 2.5.1: Bessel 函数的正交性

令  $x_{\nu n}$  是  $J_\nu(x)$  的第  $n$  个零点, 则

$$\int_0^a J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu n'} \frac{\rho}{a}\right) \rho d\rho = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{\nu n}) \delta_{nn'}. \quad (2.48)$$

因此  $[0, a]$  上的函数  $f(\rho)$  均可被展开为 Bessel 级数

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{\rho}{a}\right),$$

系数

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a f(\rho) J_\nu \left( x_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \rho d\rho.$$

## 例 2.5.1: 圆柱体内电势分布

如下图, 圆柱体除顶面外其余面电势均为 0.

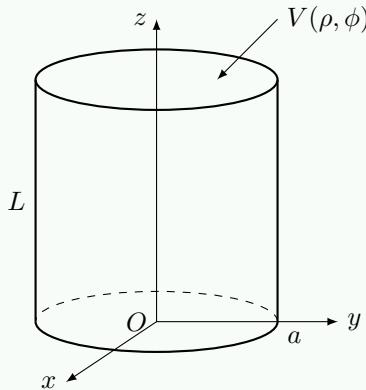


图 2.11: 圆柱形边界条件

由边界条件可知, 电势有形式解

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z) (A_{mn} \sin(m\phi) + B_{mn} \cos(m\phi)).$$

$z = L$  处边界条件  $\Phi(\rho, \phi, L) = V(\rho, \phi)$ , 可得系数

$$\begin{cases} A_{mn} = \frac{2 \operatorname{csch}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} \int_0^a V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \sin(m\phi) \rho d\rho d\phi \\ B_{mn} = \frac{2 \operatorname{csch}(k_{mn}L)}{\pi a^2 J_{m+1}^2(k_{mn}a)} \int_0^{2\pi} \int_0^a V(\rho, \phi) J_m(k_{mn}\rho) \cos(m\phi) \rho d\rho d\phi \end{cases}$$

## 2.6 Green 函数展开法解 Poisson 方程

在第 1.6.3 节中, 我们介绍了 Green 函数方法. 对于三种不同边界条件下的 Poisson 方程, 我们给出了 (1.34) 和 (1.35) 的通解形式. 在本章前面, 我们用正交函数解了球坐标和柱坐标下的 Laplace 方程. 在本节中, 我们将重点讨论使用 Green 函数求解带有 Dirichlet 边界的 Poisson 方程.

由式 (1.34), 带 Dirichlet 边界条件的 Poisson 方程的形式解为:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \Phi(\mathbf{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} dA';$$

因此有必要确定满足边界条件的 Green 函数  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ .

### 2.6.1 球坐标系下 Green 函数的展开

对于球面边界条件，我们通常选择球坐标。然后，将 Green 函数表示为与所讨论的坐标相适应的函数的一系列乘积就很方便了。我们希望得到适用于在  $r = a$  处具有球面边界的外部问题的 Green 函数的类似展开。对式 (2.10) 中的两项展开 (2.43)，得到

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|} \\ &= 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\ell+1} \frac{1}{r_>}^{\ell+1} \left( r_<^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r_<} \right) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

其中  $r_> = \max(r, r')$ ,  $r_< = \min(r, r')$ .

**一般展开式** 现在我们从基本原理开始，来系统地构建这种展开。有

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

且  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r=a} = 0$ . 对于球坐标， $\delta$  函数可以写成

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \\ &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

将 Green 函数看做  $\mathbf{r}$  的函数，可以被展开为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m}(r|r', \theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi).$$

由上面三式，可得

$$A_{\ell m}(r|r', \theta', \phi') = g_{\ell}(r, r') Y_{\ell m}^*(\theta', \phi')$$

$g_{\ell}$  满足

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r g_{\ell}(r, r')) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} g_{\ell}(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r').$$

当  $r \neq r'$ , 右边  $\delta(r - r') = 0$ ,  $g_{\ell}$  可被写成

$$g_{\ell}(r, r') = \begin{cases} Ar^{\ell} + Br^{-(\ell+1)}, & r < r' \\ A'r^{\ell} + B'r^{-(\ell+1)}, & r > r' \end{cases}$$

下一步是确定各项的系数。

#### 例 2.6.1: 同心球边界条件

边界为半径为  $a, b$  ( $a < b$ ) 的同心球面，其 Green 函数的边界条件为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r=a} = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r=b} = 0,$$

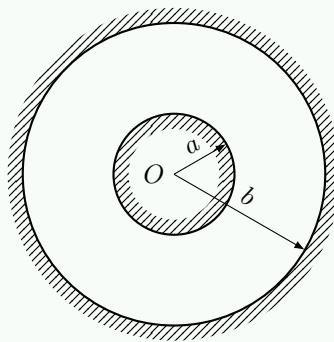


图 2.12: 同心球边界条件

由  $g_\ell(a, r') = g_\ell(b, r') = 0$  可得

$$g_\ell(r, r') = \begin{cases} A\left(r^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}\right), & r < r' \\ B'\left(\frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^\ell}{b^{2\ell+1}}\right), & r > r' \end{cases}$$

由于  $r, r'$  的对称性,  $g_\ell(r, r')$  可被写成

$$g_\ell(r, r') = C\left(r_<^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{b^{2\ell+1}}\right)$$

为了确定系数  $C$ , 对  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \left[ \frac{d^2}{dr^2} (rg_\ell(r, r')) - \frac{\ell(\ell+1)}{r} g_\ell(r, r') \right] dr = \int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} -\frac{4\pi}{r} \delta(r - r') dr.$$

即

$$\frac{d}{dr} (rg_\ell(r, r')) \Big|_{r'+\epsilon} - \frac{d}{dr} (rg_\ell(r, r')) \Big|_{r'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'}.$$

这说明  $rg_\ell(r, r')$  的导数在  $r'$  处不连续. 由此

$$C = \frac{4\pi}{(2\ell+1)[1 - (a/b)^{2\ell+1}]}.$$

故 Green 函数的展开

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{(2\ell+1)[1 - (a/b)^{2\ell+1}]} \left(r_<^\ell - \frac{a^{2\ell+1}}{r_<^{\ell+1}}\right) \left(\frac{1}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_>^\ell}{b^{2\ell+1}}\right). \quad (2.50)$$

$a \rightarrow 0, b \rightarrow \infty$  时, 变为式 (2.43)

$b \rightarrow \infty$  时, 变为式 (2.49)

$a \rightarrow 0$  时, 变为球内 Green 函数表达式.

### 例 2.6.2: 接地球内带电圆环

一个半径为  $b$  的空心接地球, 其同心环的电荷半径为  $a$ , 总电荷为  $Q$ , 环的电荷密度可以写成

$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r' - a) \delta(\cos \theta').$$

由方位角的对称性,  $m = 0$ , 故

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} - \frac{r_<^\ell a^\ell}{b^{2\ell+1}} \right) P_\ell(\cos \theta) P_\ell(0) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{r_<^{2n}}{r_>^{2n+1}} - \frac{r_<^{2n} a^{2n}}{b^{4n+1}} \right) P_{2n}(\cos \theta).\end{aligned}$$

## 2.6.2 柱坐标系下 Green 函数的展开

柱坐标系下,

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(z - z').$$

Green 函数可以写成

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi-\phi')} e^{ik(z-z')} g_m(k, \rho, \rho') dk.$$

径向 Green 函数  $g_m(k, \rho, \rho')$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dg_m}{d\rho} \right) - \left( k^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right) g_m = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho'). \quad (2.51)$$

当  $\rho \neq \rho'$  时, 上式为修正 Bessel 方程, 解为  $I_m(k\rho)$ ,  $K_m(k\rho)$ , 由对称性

$$g_m(k, \rho, \rho') = \psi_1(k\rho_<) \psi_2(k\rho_>).$$

$\psi_1, \psi_2$  是  $I_m, K_m$  的线性组合. 由方程右边  $\delta$  函数所隐含的斜率不连续条件:

$$\frac{dg_m}{d\rho} \Big|_{\rho'+\epsilon} - \frac{dg_m}{d\rho} \Big|_{\rho'-\epsilon} = kW[\psi_1, \psi_2] = -\frac{4\pi}{\rho}.$$

其中 Wroński 行列式 (Wronskian)  $W[\psi_1, \psi_2] = \psi_1 \psi'_2 - \psi_2 \psi'_1$ , 由于方程 (2.51) 是 Sturm-Liouville 型的:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + g(x)y = 0,$$

故其两线性独立解的 Wronskian  $\propto 1/p(x)$ , 因此我们可以找到一个满足所有  $\rho'$  的解, 我们必须要求归一化  $\psi_1 \psi_2$  使得 Wronskian

$$W[\psi_1(x), \psi_2(x)] = -\frac{4\pi}{x}.$$

如果没有边界,  $g_m(k, \rho, \rho')$  必须在  $\rho = 0$  处收敛且在  $\rho \rightarrow \infty$  趋于 0, 由此  $\psi_1(k\rho) = AI_m(k\rho)$ ,  $\psi_2(k\rho) = K_m(k\rho)$ , 又

$$W[I_m(x), K_m(x)] = -\frac{1}{x},$$

故  $A = 4\pi$ , 我们得到了  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  的展开

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{im(\phi - \phi')} e^{ik(z - z')} I_m(k\rho_<) K_m(k\rho_>) dk. \quad (2.52)$$

### 2.6.3 Green 函数的本征函数展开式

另一种获得 Green 函数展开式的技术是在一些相关问题上使用本征函数 (eigenfunction). 作为说明, 我们考虑一个椭圆微分方程的形式

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + [f(\mathbf{r}) + \lambda] \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.53)$$

为了使本征函数  $\psi_n(\mathbf{r})$  满足边界条件,  $\lambda$  必须取一系列本征值  $\lambda_n$ .

本征函数是正交的:

$$\int_V \psi_m^*(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}) dV = \delta_{mn}.$$

本征值  $\lambda$  的谱可以是离散集, 也可以是连续集, 或者两者兼而有之. 我们假定所有本征函数构成一个完备集.

现在我们希望找到 Green 函数的方程:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [f(\mathbf{r}) + \lambda] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2.54)$$

若 Green 函数与的本征函数  $\psi_n(\mathbf{r})$  具有相同的边界条件, 则可将 Green 函数展开为一系列本征函数的形式:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n a_n(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r}),$$

代入得

$$\sum_n a_n(\mathbf{r}') (\lambda - \lambda_n) \psi_n = -4\pi \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

因此系数为

$$a_n(\mathbf{r}') = \frac{4\pi}{\lambda_n - \lambda} \int_V \psi_n^*(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV = 4\pi \frac{\psi_n^*(\mathbf{r}')}{\lambda_n - \lambda}.$$

因此 Green 函数的本征函数展开式为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(\mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r})}{\lambda_n - \lambda} \quad (2.55)$$

对于连续谱, 求和用积分代替.

**例 2.6.3:**  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  的三维 Fourier 积分表示

自由边界下,  $f(\mathbf{r}) \equiv 0$  的特征方程

$$(\nabla^2 + k^2) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0 \implies \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

则  $\lambda = 0$  时的 Green 函数为

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \int \frac{\psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})}{k^2} dV_k = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}}{k^2} dV_k.$$

## 2.7\* 混合边界条件

Jackson 举例了一带圆孔的导电平板问题，略.

# 第三章 宏观介质静电学

本章内容分为两节：

1. 第 3.1 节介绍给定电荷分布系统的电势及其多极展开 (multipole expansion)，多极展开本质是利用逐项逼近的方法来计算电势或能量的，故在系统电荷的空间分布尤为复杂的情况下，使用多极展开去近似计算是一种行之有效的方法。  
和某些教材上使用并矢张量的标记法不同，本文使用的是球谐函数表示 (通过球谐函数导出也更为自然和简洁)。
2. 第 3.2 节介绍了电介质 (dielectrics) 及含电介质的边值问题。并扼要介绍了分子极化率 (atomic polarizability) 和宏观电极化率 (susceptibility) 的主要特征及彼此之间的关系，导出了 Clausius-Mossotti 方程。最后介绍了含电介质时系统的能量表示。

## 3.1 多极矩展开

考虑一个局域 (localized) 分布的电荷系统  $\rho(\mathbf{r}')$  在空间某点  $\mathbf{r}$  处激发的电势  $\Phi(\mathbf{r})$ ，所谓局域，是指电荷仅分布在有限体积  $V$  内，而我们感兴趣的点  $\mathbf{r}$  位于该体积之外 (往往  $r \gg r'$ )。由  $\Phi(\mathbf{r})$  的表达式 (1.11) 和  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  的展开式 (2.43)，代入  $r_< = r'$ ,  $r_> = r$ ，有

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} dV' \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left[ \int_V \rho(\mathbf{r}') r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') dV' \right] \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} \\ &=: \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{q_{\ell m}}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中系数  $q_{\ell m}$  称为多极矩 (multipole moment)

$$q_{\ell m} := \int_V \rho(\mathbf{r}') r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') dV'.\tag{3.2}$$

另一方面，也可应用式 (2.35) 展开  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ：

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \gamma) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \int_V \rho dV' + \frac{1}{r^2} \int_V \rho r' \cos \gamma dV' + \frac{1}{r^3} \int_V \rho r'^2 P_2(\cos \gamma) dV' + \dots \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{1}{2r^3} \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha\beta} \hat{r}_{\alpha} \hat{r}_{\beta} + \dots \right].\end{aligned}\tag{3.3}$$

前三个积分项分别对应总电荷即电单极矩 (electric monopole moment)  $q$ 、电偶极矩 (dipole)  $\mathbf{p}$ 、电四极矩 (quadrupole)  $Q_{\alpha\beta}$ :

$$q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV', \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{p} := \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV', \quad (3.4b)$$

$$Q_{\alpha\beta} := \int_V (3r'_\alpha r'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\mathbf{r}') dV'. \quad (3.4c)$$

### 例 3.1.1: 前几个多极矩

易得

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q; \quad (3.5a)$$

$$q_{10} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_V (x' - iy') \rho(\mathbf{r}') dV' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), \quad (3.5b)$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_V z' \rho(\mathbf{r}') dV' = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z; \quad (3.5c)$$

$$q_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int_V (3z'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{r}') dV' = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} Q_{zz}, \quad (3.5d)$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int_V (x' - iy') z' \rho(\mathbf{r}') dV' = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{xz} - iQ_{yz}), \quad (3.5e)$$

$$q_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int_V (x' - iy')^2 \rho(\mathbf{r}') dV' = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (Q_{xx} - Q_{yy} - 2iQ_{xy}). \quad (3.5f)$$

负  $m$  项可由  $q_{\ell,-m} = (-)^m q_{\ell m}^*$  推出,

对于任何电荷分布, 其最低阶的不为 0 的多极矩  $q_{\ell m}$  与原点的选择无关, 但剩下所有较高阶的多极矩一般都与原点的位置有关.

### 例 3.1.2: 等量异号电荷对的电场

考虑位于  $z$  轴坐标分别为  $\pm a$  的等量异号电荷对  $\pm q$ , 其在空间激发的电势为

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \cos\theta}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^\ell [P_\ell(\cos\theta) - P_\ell(-\cos\theta)] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \frac{2a}{r} \cos\theta + \left( \frac{a}{r} \right)^3 (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \dots \right] \end{aligned}$$

对于  $r \gg a$  的远场, 仅保留第一项, 与理想电偶极矩  $p := q \cdot 2a$  的电势相同:

$$\Phi = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.6b)$$

但上式电场的旋度  $\nabla \times \mathbf{E}$  在原点处的积分不为  $\mathbf{0}$ , 应进行修正:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{p} \delta(\mathbf{r}) \right]. \quad (3.7)$$

此时  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r})/\epsilon_0$ , 即电偶极子的电荷密度为

$$\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r}). \quad (3.8)$$

### 例 3.1.3: 电场的体积分

对于局域分布的电荷系统, 其电场在以原点为球心、半径为  $R$  的球内的体积分为

$$\begin{aligned} \int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV &= - \int_{r < R} \nabla \Phi(\mathbf{r}) dV = - \int_{r=R} \Phi(\mathbf{r}) dA = - \int_{r=R} \Phi(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}} R^2 d\Omega \\ &= - \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=R} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \hat{\mathbf{r}} d\Omega, \end{aligned}$$

其中球面上的单位矢量可以写成  $Y_{1m}(\theta, \phi)$  的线性组合:

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}},$$

而  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  可由式 (2.43) 展开, 由球谐函数的正交性, 级数将只剩  $\ell = 1$  阶项, 即

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = - \frac{R^2}{3\epsilon_0} \int_V \frac{r_<}{r_>} \rho(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{r}}' dV'.$$

其中  $r_< := \min(r', R)$ ,  $r_> := \max(r', R)$ .

考虑两种极端情形: 电荷分布全在球内 ( $r' < R$ ) 和全在球外 ( $r' > R$ ), 有

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{p}, & \text{电荷全在球内;} \\ -\frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{E}(\mathbf{0}), & \text{电荷全在球外.} \end{cases} \quad (3.9)$$

这也对应于电偶极子电场 (3.7) 中的  $-\mathbf{p} \delta(\mathbf{r})/3\epsilon_0$  项.

### 3.1.1 能量的多极矩展开

对  $\Phi(\mathbf{r})$  在原点处 Taylor 展开

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{0}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{0}) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} x_\alpha x_\beta \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}(\mathbf{0}) + \dots$$

由于  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , 上式可减去  $r^2 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{0})/6$  捂成  $Q_{\alpha\beta}$  的形式, 进而由 (1.20) 得到静电能

$$W = q\Phi(\mathbf{0}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{0}) - \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}(\mathbf{0}) + \dots \quad (3.10)$$

上式体现了多极子和外场的相互作用: 电荷与电势、电偶极子与电场、电四极子与电场梯度等.

### 例 3.1.4: 两个电偶极子之间的互能

$$W = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}_1)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad \hat{\mathbf{n}} := \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (3.11)$$

电偶极子的能量、力矩和力 对  $\mathbf{E}$  展开至一阶项, 得到电偶极子在电场中受到的力为

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{E} dV \simeq (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad (3.12)$$

一般地,  $\mathbf{p}$  不随坐标变化, 上式也可写成  $\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ :

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{p}.$$

由  $\mathbf{F} = -\nabla U$ , 可定义电偶极子在电场中的势能为

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.13)$$

利用例 3.1.2 中的模型, 可以很直观地推出电偶极子在电场中受到的力矩为

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (3.14)$$

## 3.2 电介质

电介质 (dielectric) 是能够被电极化的绝缘体. 与导体的自由电荷不同, 电介质的带电粒子被原子、分子的内力或分子间的力紧密束缚着, 称为束缚电荷 (bound charge). 在外电场作用下, 这些电荷也只能在微观范围内移动, 产生极化 (polarization). 极化主要有三种机制:

1. 畸变极化: 原子核外的电子云分布产生畸变, 从而产生不等于零的电偶极矩;
2. 位移极化: 分子原来正负电中心重合, 在外电场作用下正负电中心分离产生电偶极矩;
3. 转向极化: 分子有固有电偶极矩, 但取向混乱, 宏观上电偶极矩总和等于零. 在外电场作用下, 各个电偶极子趋向于一致的排列, 从而宏观电偶极矩不等于零.

在静电场中, 电介质内部可以存在电场, 这是电介质与导体的基本区别.

**宏观电场** 在前一章中, 我们没有考虑有质介质 (ponderable media) 的存在, 所以我们没有区分微观场 (microscopic) 和宏观场 (macroscopic). 但是静电学主要涉及有质介质中的电荷和场, 因此我们必须在微观层面上考虑有质介质的极化效应 (polarization effect). 为了得到适用于宏观现象的 Maxwell 方程, 我们对宏观小、微观大的区域求平均:

$$\mathbf{E} := \langle \mathbf{E}_{\text{micro}} \rangle,$$

则旋量方程 (1.12) 对求平均后的宏观电场  $\mathbf{E}$  适用:

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\text{micro}} = \mathbf{0} \implies \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

这意味着宏观电场  $\mathbf{E}$  同样可以表达成电势的梯度  $-\nabla\Phi$ .

**电极化** 在电介质内的多极子被外电场极化的过程中, 偶极子占主导地位.

**定义 3.2.1: 电极化强度**

定义电极化强度 (electric polarization) 为单位体积的电偶极矩

$$\mathbf{P} := \sum_i N_i \langle \mathbf{p}_i \rangle. \quad (3.16)$$

假设更高阶的宏观多极矩密度可忽略，则有质介质的电势为

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[ \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中  $\rho$  是自由电荷 (或过剩电荷) 密度， $\rho_p := -\nabla \cdot \mathbf{P}$  是极化电荷密度。从而

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \Phi = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}. \quad (3.18)$$

若极化不均匀，则任何小体积内的电荷都会有净增加或净减少，这对应  $\nabla \cdot \mathbf{P}$  这一项。

**定义 3.2.2: 电位移矢量**

将式 (3.18) 移项，可定义电位移矢量 (electric displacement)

$$\mathbf{D} := \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (3.19)$$

从而式 (3.18) 变为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (3.20)$$

式 (3.15) 和 (3.20) 是式 (1.12) 和 (1.9) 的宏观对应。

**定义 3.2.3: 本构关系**

为了简化，我们假设介质是各向同性的 (isotropic)，且系统对外加场的响应是线性的 (linear)。因此  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  之间的本构关系 (constitutive relation) 为

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}. \quad (3.21)$$

其中无量纲常数  $\chi_e$  称为介质的电极化率 (electric susceptibility)。由此得到

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (3.22)$$

其中  $\epsilon := \epsilon_r \epsilon_0$  称为电容率或介电常数 (permittivity)，无量纲常数  $\epsilon_r := 1 + \chi_e$  称为相对介电常数 (relative permittivity)。

如果电介质不仅是各向同性的，而且是均匀的，则  $\epsilon$  与位置无关。式 (3.18) 可被写为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (3.23)$$

均匀电介质中的所有问题都可归结为前几章的问题，仅需将所有的  $\epsilon_0$  替换为  $\epsilon$ 。

**表面分布** 考虑介质界面上  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  的分布,  $\hat{\mathbf{n}}$  是边界上从区域(1)指向区域(2)的法向量, 我们可以得到:

$$(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\sigma_p, \quad (3.24a)$$

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma, \quad (3.24b)$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}. \quad (3.24c)$$

其中  $\sigma_p$  是边界上表面极化电荷密度;  $\sigma$  是宏观表面电荷密度(不包含极化电荷  $\sigma_p$ ).

对于非均匀介质, 极化电荷在介质内部随处可见; 对于均匀介质, 极化电荷仅位于自由电荷附近和两种不同介质之间的界面处; 极化电荷所在的界面不是理想的几何界面, 实际上, 它们的厚度包含了分子.

### 3.2.1 含电介质的边值问题

我们可以推广之前介绍的方法来解决电介质的边界问题.

#### 例 3.2.1: 电介质中的镜像电荷

半无限电介质  $\varepsilon_1$  与半无限电介质  $\varepsilon_2$  被隔开, 考虑嵌入在  $\varepsilon_1$  中的点电荷  $q$  距离边界  $d$ , 如图所示.

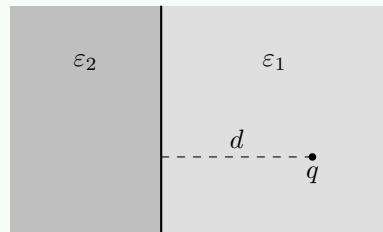


图 3.1: 电介质中的电荷

为了计算  $z > 0$  部分的电位, 在  $z < 0$  部分与  $q$  对称的位置放置镜像电荷  $q'$ :

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \left( \frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right), \quad z > 0;$$

为了计算  $z < 0$  部分的电位, 在  $q$  的位置替换为镜像电荷  $q''$ :

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \frac{q''}{R_1}, \quad z < 0.$$

由边界条件:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 E_{1z} = \varepsilon_2 E_{2z} \\ E_{1\rho} = E_{2\rho} \end{cases} \implies \begin{cases} q - q' = q'' \\ \frac{q + q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2} \end{cases} \implies \begin{cases} q' = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q \\ q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q \end{cases}$$

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  时,  $q, q'$  符号相反,  $\varepsilon_1$  内的电场线外凸;

$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$  时,  $q, q'$  同号,  $\varepsilon_1$  内电场线内凸.

由式 (3.24a),  $z = 0$  上极化电荷面密度为

$$\sigma_p = P_{2z} - P_{1z} = -\frac{q}{2\pi} \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}.$$

当  $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$  时, 介质  $\varepsilon_2$  表现很像导体 ( $q' = -q$ ).

### 例 3.2.2: 匀强电场中的介质球

半径为  $a$  的介质球  $\varepsilon$  在匀强电场  $E_0$  中. 其电势

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), & r < a \\ \Phi_2 &= \sum_{\ell=0}^{\infty} [B_{\ell} r^{\ell} + C_{\ell} r^{-(\ell+1)}] P_{\ell}(\cos \theta), & r > a\end{aligned}$$

又  $r \rightarrow \infty$  时,  $\Phi_2 \simeq -E_0 r \cos \theta$ , 故

$$\Phi_2 = -E_0 r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell} r^{-(\ell+1)} P_{\ell}(\cos \theta),$$

由边界条件……

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0 r \cos \theta, & r < a \\ -E_0 r \cos \theta + \left( \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right) E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta, & r > a \end{cases}$$

因此介质球内是匀强电场

$$E_1 = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} E_0;$$

介质球外相当于外加场  $E_0$  加上原点的电偶极场, 偶极矩朝向电偶极场的方向

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right) a^3 \mathbf{E}_0,$$

球体内的电极化强度

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_1 = 3\varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right) \mathbf{E}_0, \quad (3.25)$$

因此表面极化电荷面密度:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 3\varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right) E_0 \cos \theta.$$

## 3.2.2 分子极化率和电极化率

本节中讨论分子极化率 (molecular polarizability)  $\chi_{\text{mol}}$  和电极化率 (electric susceptibility)  $\chi_e$  之间的关系.

在稀薄 (rarefied) 介质中, 宏观场与作用在任何分子 (或分子群) 上的场几乎没有区别; 但在致密 (dense) 介质中, 相邻分子的极化会产生一个内部场  $\mathbf{E}_{\text{in}}$ , 所以分子上的总电场是

$\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{in}}$ . 内部场  $\mathbf{E}_{\text{in}}$  除了考虑相邻分子的贡献  $\mathbf{E}_{\text{near}}$  外, 还要减去可以用极化强度  $\mathbf{P}$  描述的平均贡献  $\mathbf{E}_p$ :

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \mathbf{E}_{\text{near}} - \mathbf{E}_p,$$

由 (3.9), 极化强度  $\mathbf{P}$  贡献的平均场为  $\mathbf{E}_p = -\mathbf{P}/3\varepsilon_0$ ; 而对于大多数材料, 可有效近似  $\mathbf{E}_{\text{near}} = \mathbf{0}$ ; 故  $\mathbf{E}_{\text{in}} = \mathbf{P}/3\varepsilon_0$ .

#### 定义 3.2.4: 分子极化率

分子极化率描述单个分子在电场下的极化能力

$$\langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle = \varepsilon_0 \gamma_{\text{mol}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{in}}). \quad (3.26)$$

#### 定理 3.2.1: Clausius-Mossotti 方程

分子极化率  $\gamma_{\text{mol}}$  与电极化率  $\chi_e$  之间的关系为

$$\gamma_{\text{mol}} = \frac{3}{N} \frac{\chi_e}{\chi_e + 3} = \frac{3}{N} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}. \quad (3.27)$$

证明. 由电极化强度的定义

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle = N \varepsilon_0 \gamma_{\text{mol}} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{in}}) = N \gamma_{\text{mol}} \left( \varepsilon_0 \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3} \right).$$

代入  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ ,  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$  即得.  $\square$

注. 这种关系对气体等稀释物质最适用. 对于液体和固体, 尤其是  $\varepsilon_r$  很大时, 上式仅近似有效.

#### 分子极化率的模型 由谐振子模型

$$m\omega_0^2 \mathbf{r} = e\mathbf{E} \implies \mathbf{p}_{\text{mol}} = e\mathbf{r} = \frac{e^2 \mathbf{E}}{m\omega_0^2} \implies \gamma_{\text{mol}} = \frac{e^2}{m\omega_0^2 \varepsilon_0}.$$

$\omega_0$  为分子的固有频率.

#### 例 3.2.3

常温常压 (normal temperature and pressure, NTP) 下, 气体  $\chi_e < 10^{-3}$ , 固体和液体  $\chi_e \sim 1$ .

一般地, 考虑不同能量的分子的 Boltzmann 分布,

$$\gamma_{\text{mol}} \simeq \frac{e^2}{m\omega_0^2 \varepsilon_0} + \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 k_B T}.$$

$p_0$  为分子固有偶极矩的大小.

### 3.2.3 电介质中的静电能

一般情况下，我们对电介质不作假设。可由微小功  $\delta W$  推出电介质中的静电能为

$$W = \iint_0^D \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV.$$

若介质是线性的，则

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV. \quad (3.28)$$

上式仅当介质是线性时才在宏观上成立。

**电介质在极化过程中储存的能量** 过程分电荷不变和电势不变；

**电荷分布不变过程** 若电介质放入前后源电荷分布  $\rho(\mathbf{r})$  不变

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}) dV + \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} + \mathbf{E}_0) \cdot (\underline{\mathbf{D}} - \underline{\mathbf{D}_0}) dV \\ &= -\frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 dV = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dV, \end{aligned}$$

因此电介质的能量密度为

$$w = -\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0, \quad (3.29)$$

**电势不变过程** 下面分析在电势分布不变情形下，电介质放入前后的能量变化（不能用  $\delta W_V = -F \delta x$  计算）。

$$\delta W = \int_V \Phi(\mathbf{r}) \delta \rho(\mathbf{r}) dV$$

又对于线性介质，

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_V [\rho(\mathbf{r}) \delta \Phi(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r}) \delta \rho(\mathbf{r})] dV,$$

故  $\rho(\mathbf{r}) \delta \Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) \delta \rho(\mathbf{r})$ 。

在电势分布不变情形下，电介质放入的过程可以分为两步：

1. 断开电极板和电源的接触，移动电介质，这一过程中电荷分布不变，

$$\delta W_1 = \frac{1}{2} \int_V [\rho(\mathbf{r}) \delta \Phi_1(\mathbf{r}) + 0] dV;$$

2. 将极板与电源相连，电势恢复到初始值， $\delta \Phi_1 + \delta \Phi_2 = 0$

$$\delta W_2 = \frac{1}{2} \int_V [\rho(\mathbf{r}) \delta \Phi_2(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r}) \delta \rho_2(\mathbf{r})] dV = -2 \delta W_1.$$

因此  $\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = -\delta W_1$ ，从而

$$\delta W_V = -\delta W_Q.$$

力

$$F = -\left( \frac{\delta W}{\delta x} \right)_Q = \left( \frac{\delta W}{\delta x} \right)_V.$$

# 第四章 静磁学、时变场

本章主要介绍静磁学 (magnetostatics) 的内容，与前几章介绍的静电学在多处均有呼应。类似于静电学，我们建立了静磁学的基本方程组，通过几个边值问题阐述了静磁学问题的处理方法。

第二节介绍 Faraday 定律，将静电学和静磁学中的恒稳态问题变为与时间有关的时变场 (time-varying field) 问题。

## 4.1 磁感应强度、电流密度

磁场 (magnetic field) 的基本规律最早并不是直接根据人类对磁性材料的接触中得出的，原因在于静磁学和静电学存在一个根本上的差别：人们没有发现自由磁荷 (free magnetic charge) 的存在。在磁学中，基本单元是磁偶极子 (magnetic dipole)，用于测量磁场的磁偶极子一般是小磁针，对应电学中的试探电荷。

### 定义 4.1.1: 磁感应强度

磁场通常用磁感应强度 (magnetic induction intensity)  $\mathbf{B}$  描述，其方向定义为磁偶极子平衡时磁矩  $\boldsymbol{\mu}$  的方向，大小可以由磁偶极子偏转时所受力矩  $\mathbf{N}$  来衡量：

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (4.1)$$

Ørsted 等人的实验发现：通电导线可使小磁针偏转，也就是说磁场可以由电流产生。

### 定义 4.1.2: 电流密度

电流 (current) 相当于运动电荷，其大小为单位时间通过某界面的电荷量：

$$I := \frac{dq}{dt}, \quad (4.2)$$

电流也可以用电流密度 (current density) 矢量  $\mathbf{J}$  描述：

$$\mathbf{J} := \rho \mathbf{v}, \quad (4.3)$$

其大小为单位时间流过单位面积的电荷量，其方向为电荷运动的方向。

推论。对于离散情形，

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (4.4)$$

**定理 4.1.1: 连续性方程**

由于电荷守恒 (conservation of charge), 电荷密度和电流密度满足连续性方程 (continuity equation)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (4.5)$$

证明. 考虑空间一体积微元  $\delta V$ , 其内电荷量不随时间改变:

$$\frac{d(\rho \delta V)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \delta V + \rho \frac{d(\delta V)}{dt} = 0, \quad (*)$$

由于  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  是时空的函数, 其全微分为

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz,$$

其迁移导数 (convective derivative) 为

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho;$$

而体积元的变化率

$$\frac{d(\delta V)}{dt} = \oint_{\partial(\delta V)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\delta V} \nabla \cdot \mathbf{v} dV = \delta V \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

因此 (\*) 变为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad \square$$

**定义 4.1.3: 稳恒电流**

稳恒 (steady-state) 磁现象满足空间各处的  $\rho$  不变, 于是连续性方程 (4.5) 变为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (4.6)$$

## 4.2 Biot-Savart 定律

为了描述电流在激发磁场时的作用, 我们引入电流元 (current element) 的概念:  $d\ell$  是通电流  $I$  的导线的长度元, 指向电流方向, 则电流元为  $I d\ell$ .

**定理 4.2.1: Biot-Savart 定律**

原点处电流元  $I d\ell$  在  $\mathbf{r}$  处激发的磁感应强度  $d\mathbf{B}$  为

$$d\mathbf{B} = k_m \frac{I d\ell \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (4.7)$$

其中  $k_m$  是比例系数, 在 SI 单位制中,

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \approx 1 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2,$$

其中真空磁导率  $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ .

注. 尽管电流元磁感应强度 (4.7) 与点电荷电场强度 (1.3) 有相似的形式, 但电流元只有在积分中才有意义, 因为电流元本身并不满足连续性方程 (4.5). <sup>1</sup>

#### 例 4.2.1: 无限长直导线的磁场

$z$  轴上的长直导线电流方向为  $+z$ , 距离其  $\rho$  处的磁感应强度方向服从右手定则, 即  $\hat{\phi}$  方向, 大小为

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I\rho dz}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}.$$

#### 定理 4.2.2: Ampère 力

电流元  $I d\ell$  在磁感应强度  $\mathbf{B}$  中受 Ampère 力

$$d\mathbf{F} = I d\ell \times \mathbf{B}; \quad (4.8)$$

#### 例 4.2.2: 闭合回路之间的力

由闭合电流回路 2 产生的磁场  $\mathbf{B}$  对闭合电流回路 1 的总力:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{d\ell_1 \times (d\ell_2 \times \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{(\hat{\mathbf{r}}_{12} \cdot d\ell_1) d\ell_2 - \hat{\mathbf{r}}_{12} (d\ell_1 \cdot d\ell_2)}{r_{12}^2} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} (d\ell_1 \cdot d\ell_2). \end{aligned}$$

利用 (A.4a) 将双叉乘化为更对称的形式, 第一项的环路积分为 0:

$$\oint \frac{\hat{\mathbf{r}}_{12} \cdot d\ell_1}{r_{12}^2} = \oint \frac{dr_{12}}{r_{12}^2} = 0.$$

第二项是对称的, 因此满足 Newton 第三定律.

#### 例 4.2.3: 两条长平行直导线之间的力

由例 4.2.1, 两条长平行直导线之间的力为

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}. \quad (4.9)$$

旧的 SI 单位制便由此式及  $\mu_0$  定义电流单位 A.

<sup>1</sup>将电流元  $I d\ell$  换成运动电荷  $qv$  可以满足连续性方程, 但得到的表达式

$$\mathbf{B} = k_m \frac{qv \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

与时间相关, 并且只有当电荷速度  $v \ll c$  且加速度可忽略不计时才成立. 而式 (4.7) 是精确的: 考虑相对论电磁场理论 (包括加速度效应), 在电荷单元  $e \rightarrow 0$  极限下, 稳恒电流系统会激发静磁场, 并且形式上等于对式 (4.7) 遍历电流积分所得的场.

电流密度表示 电流元可以写成电流密度  $\mathbf{J}$  的形式

$$I d\ell = dq\mathbf{v} = (\rho dV)\mathbf{v} = \mathbf{J} dV,$$

因此磁场中电流受到的力可以写成:

$$\mathbf{F} = \int_V dq(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int_V \rho(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV.$$

#### 定义 4.2.1: Lorentz 力

单个电荷  $q$  在磁场中受到的 Lorentz 力为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.10)$$

推论. Lorentz 力不做功.

#### 定理 4.2.3: 磁场的 Gauss 定律

静磁场无源

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.11)$$

证明. 利用电流密度, Biot-Savart 定律 (4.7) 可以写成旋度的形式

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (4.12)$$

由 (A.19) 即得.  $\square$

#### 定理 4.2.4: Ampère 定律的微观形式

磁场的旋度

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (4.13)$$

证明. 利用 (A.20)

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[ \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] &= \nabla \left( \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \nabla^2 \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \nabla \left[ \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] + 4\pi \mathbf{J}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

则

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\nabla \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + 4\pi \mathbf{J}(\mathbf{r}) \right],$$

对积分项进行分部积分:

$$\int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \widehat{d\mathbf{A}'} - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = 0.$$

注意积分区域  $V$  必须考虑所有的电流分布, 因此边界 (一般是无穷远处) 项为 0.  $\square$

**定理 4.2.5: Ampère 定律**

磁感应强度沿闭合曲线  $\partial S$  的环量与穿过  $S$  的电流  $I_i$  的关系为:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \sum_S I_i. \quad (4.14)$$

证明. 对 (4.13) 两边取  $S$  的面积分

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

右边积分项即穿过  $S$  的电流  $I$ .  $\square$

注. 在高度对称的条件下, 可利用 Ampère 定律得到磁感应强度的大小. 比如例 4.2.1 可以直接得到  $B \cdot 2\pi\rho = \mu_0 I$ .

### 4.3 矢量势

**定义 4.3.1: 矢量势**

由于  $\mathbf{B}$  可以写成旋度的形式, 可定义矢量势 (vector potential) 满足

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.15)$$

**定理 4.3.1: 规范变换**

对  $\mathbf{A}$  进行规范 (gauge) 变换:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda,$$

其中  $\Lambda$  为任意标量场. 磁场在规范变换下是不变的.

证明.

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Lambda = \mathbf{B}. \quad \square$$

推论. 因此  $\mathbf{A}$  并不唯一, 有必要选定一个额外的限制条件, 称为规范条件 (gauge condition).

**定义 4.3.2: Coulomb 规范**

一个方便的选择是 Coulomb 规范:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (4.16)$$

从而  $\nabla^2 \Lambda = 0$ , 在无边界条件时,  $\Lambda = \text{const}$ ,  $\mathbf{A}$  形式即最简洁的:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (4.17)$$

推论. 在 Coulomb 规范下, 我们也可以得到  $\mathbf{A}$  三个分量的 Poisson 方程:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

即

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (4.18)$$

## 4.4 磁矩

### 例 4.4.1: 环形电流回路的磁场

在球坐标中, 环形电流的电流密度  $\mathbf{J}$  仅有  $\phi$  分量

$$J_\phi = I \sin \theta' \delta(\cos \theta') \frac{\delta(r' - a)}{a}.$$

在 Coulomb 规范下, 矢量势  $\mathbf{A}$  也仅有  $\phi$  分量:

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_\phi}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{+\infty} \oint \frac{\sin \theta' \delta(\cos \theta') \delta(r' - a) r'^2 d\Omega' dr'}{\sqrt{r'^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \phi')}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi'}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta}} \left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right]. \end{aligned}$$

其中

$$k^2 := \frac{4ar \sin \theta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \theta}.$$

$K(k), E(k)$  为第一、二类完全椭圆积分

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad |k| < 1, \\ E(k) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \quad |k| < 1. \end{aligned}$$

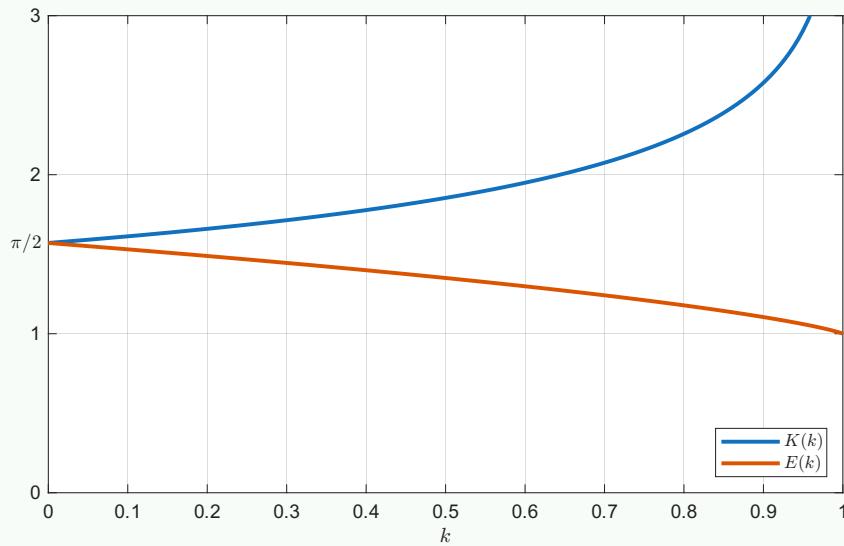


图 4.1: 第一、二类完全椭圆积分

当  $r \gg a$  或  $r \ll a$  或  $\theta \rightarrow 0$  时,

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{4} \frac{a^2 r \sin \theta}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \left[ 1 + \frac{15}{8} \left( \frac{ar \sin \theta}{a^2 + r^2} \right)^2 + \dots \right],$$

因此对于  $r \gg a$  处的远场

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) = \frac{\mu_0 I a^2 \cos \theta}{2 r^3}, \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4 r^3}, \\ B_\phi &= 0. \end{aligned}$$

与电偶极矩的电场 (3.6b) 比较, 可定义环形电流的磁偶极矩 (magnetic dipole moment) 大小

$$m = I \cdot \pi a^2,$$

沿  $+z$  方向, 从而

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{\phi}; \quad (4.19a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta}). \quad (4.19b)$$

同样, 上式磁场的散度  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  在原点处的积分不为 0, 应进行修正:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \right]. \quad (4.20)$$

可得磁场的旋度  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{m} \times \nabla \delta(\mathbf{r})$ , 即磁偶极子的电流密度为

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{m} \times \nabla \delta(\mathbf{r}). \quad (4.21)$$

**多极矩展开** 与第 3.1 节静电多极展开类似, 考虑一个局域分布的电流, 我们也可以对矢量势做多极矩展开:<sup>II</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \dots \right) dV' \\ &= \mathbf{0} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \dots \end{aligned} \quad (4.22)$$

由于  $\mathbf{J}$  的体积分为  $\mathbf{0}$ , 磁单极矩 (magnetic monopole moment) 不存在, 因此最低阶非零项为磁偶极矩 (magnetic dipole moment)  $\mathbf{m}$ , 简称磁矩. 经过推导, 可以得到磁矩的表达式:

$$\mathbf{m} := \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'. \quad (4.23)$$

<sup>II</sup>这个问题可以用矢量球谐函数来做一个完整的处理, 将在第八章多极辐射中介绍, 这里只满足于最低的近似阶.

**例 4.4.2: 电流回路的磁矩**

平面  $S$  边缘上的电流回路的磁矩

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} \mathbf{r} \times I d\ell = IS \hat{\mathbf{n}}.$$

与例 4.4.1 中的定义一致.

**例 4.4.3: 带电粒子轨道角动量的磁矩**

带电粒子的磁矩与其轨道角动量  $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$  有关:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} q \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{q}{2m} \mathbf{L}.$$

**例 4.4.4: 磁场的体积分**

与例 3.1.3 类似, 磁场在球内的体积分

$$\int_{r < R} \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV = \frac{\mu_0 R^2}{3} \int_V \frac{r_-}{r_+^2} \hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV',$$

其中  $r_- := \min(r', R)$ ,  $r_+ := \max(r', R)$ .

考虑两种极端情形: 电荷分布全在球内 ( $r' < R$ ) 和全在球外 ( $r' > R$ ), 有

$$\int_{r < R} \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{m}, & \text{电流全在球内;} \\ -\frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{B}(\mathbf{0}), & \text{电流全在球外.} \end{cases} \quad (4.24)$$

这也对应于磁偶极子磁场 (4.20) 中的  $2\mu_0 \mathbf{m} \delta(\mathbf{r})/3$  项.

**4.4.1 磁矩的力、力矩和能量**

外部磁感应强度  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  中电流密度  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  受到的总力

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dV \simeq (\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B}),$$

即<sup>III</sup>

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}), \quad (4.25)$$

此时, 可由  $\mathbf{F} = -\nabla U$  定义永久磁矩  $\mathbf{m}$  的势能为

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}, \quad (4.26)$$

注.  $U$  并不是外磁场  $\mathbf{B}$  中磁矩  $\mathbf{m}$  的总能量, 因为它不包含产生磁矩  $\mathbf{m}$  并维持  $\mathbf{m}$  恒定所需的能量.

<sup>III</sup>此式包含了隐藏动量 (hidden momentum)  $d(\mathbf{E} \times \mathbf{m})/c^2 dt$  的效应.

可见, 当磁矩  $\mathbf{m}$  和  $\mathbf{B}$  方向相同时,  $U$  最低, 因此磁矩倾向于偏转自己平行于磁场. 力矩与作用在磁偶极子上的力矩表达式相同:

$$\mathbf{N} = \int_V \mathbf{r}' \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV' \simeq \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (4.27)$$

上式也可作为定义磁感应强度的一种方法.

## 4.5 宏观介质静磁学

在物质中, 由原子电子贡献的有效 (effective) 原子电流和本征 (intrinsic) 磁矩产生的偶极场在原子尺度上变化非常明显. 因此在宏观观测时, 我们也需要对微观取空间平均<sup>IV</sup>:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{micro}} = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.28)$$

### 定义 4.5.1: 磁化强度

定义磁矩密度 (magnetic moment density) 或磁化强度 (magnetization) 为单位体积的磁矩:

$$\mathbf{M} := \sum_i N_i \langle \mathbf{m}_i \rangle. \quad (4.29)$$

可得矢量势

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (4.30)$$

因此

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M}),$$

其中  $\mathbf{J}_m := \nabla \times \mathbf{M}$  是有效电流密度. 定义磁场强度 (magnetic field)

$$\mathbf{H} := \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (4.31)$$

从而

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (4.32)$$

式 (4.28) 和 (4.32) 考虑了有效原子电流的贡献, 是 (4.11) 和 (4.13) 的宏观对应.

### 定义 4.5.2: 磁导率

对于各向同性抗磁性 (diamagnetic) 和顺磁性 (paramagnetic) 物质,  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{B}$  有简单的线性关系:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (4.33)$$

其比例系数  $\mu$  称为磁导率 (permeability).

根据磁导率可以将物质分为以下磁性:

- 顺磁性 (paramagnetism):  $\mu \gtrsim \mu_0$ , 如碱金属 (Li, Na, Cs)、碱土金属 (Mg, Ca);
- 抗磁性 (diamagnetism):  $\mu \lesssim \mu_0$ , 如  $\text{H}_2\text{O}$ 、Cu、C (石墨)、Pb 等;

<sup>IV</sup> 不需要对时间平均.

- 铁磁性 (ferromagnetism):  $\mu \gg \mu_0$ , 且  $\mu$  与  $\mathbf{H}$  的关系较为复杂, 如图 4.2, 称为磁滞现象 (hysteresis). 如 Fe, Co, Ni.

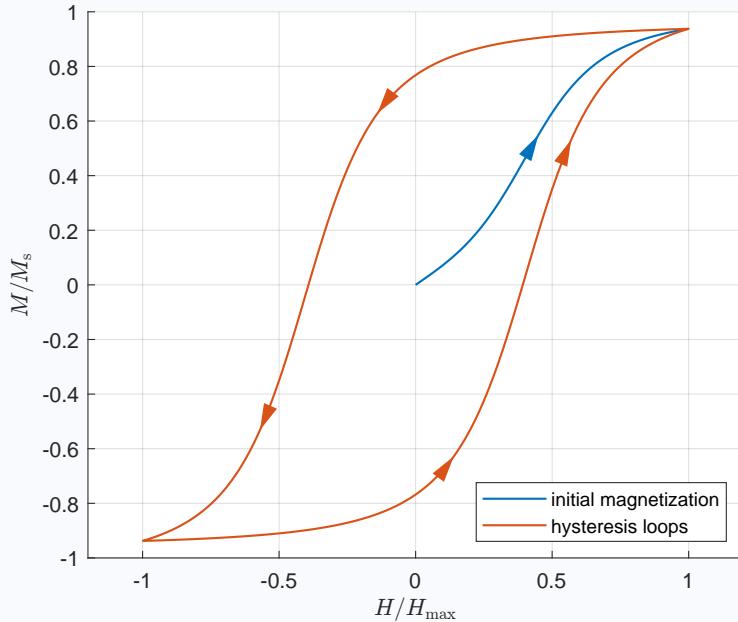


图 4.2: 磁滞回线

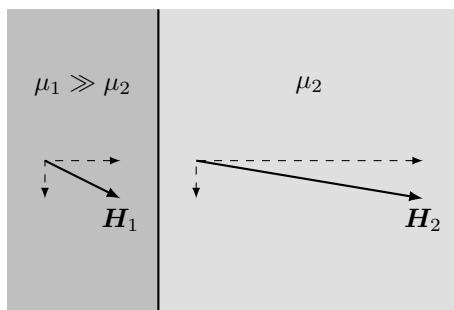
**表面分布** 考虑介质界面上  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  的分布,  $\hat{\mathbf{n}}$  是边界上从区域 (1) 指向区域 (2) 的法向量, 我们可以得到:

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{21} = 0, \quad (4.34a)$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{n}}_{21} = -\mathbf{K}, \quad (4.34b)$$

其中  $\mathbf{K}$  是理想化的表面电流密度 (surface current density).

当  $\mu_1 \gg \mu_2$  时,  $H_{2,\perp} \gg H_{1,\perp}$ , 磁场  $\mathbf{H}_2$  与边界面垂直. 所以, 极高磁导率材料表面上  $\mathbf{H}$  的边界条件与导体表面上  $\mathbf{E}$  的边界条件相同:

图 4.3: 极高磁导率材料表面的  $\mathbf{H}$  表现

因此, 我们可以把静电势理论用于磁场上, 高磁导率材料的表面是近似的等势面. 这种类比在许多磁铁设计问题中用到: 先决定场的形式, 然后把极面设计成等势面的形状.

## 例 4.5.1

对于真空中的极高磁导率材料，若其表面无电流，则

$$H_{\parallel} = H_{0,\parallel}, \quad B_{\perp} = B_{0,\perp},$$

因此材料内磁场

$$B^2 = B_{0,\perp}^2 + \frac{\mu^2}{\mu_0^2} B_{0,\parallel}^2.$$

两边同除  $\mu$  便得到了能量密度的形式，由于材料中储存的能量是有限的，故  $B_{0,\parallel} = 0$

## 4.5.1 静磁学中的边界条件问题

**磁势** 若材料是磁导率  $\mu \gg \mu_0$  的硬铁磁体 (其磁矩密度  $\mathbf{M}$  与外场无关)，则材料外表面上的  $\mathbf{B}$  垂直于界面，内表面上的  $\mathbf{B}$  平行于界面。如果其内没有电流 ( $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ )，则可引入磁势  $\Phi_m$  并解其 Laplace 方程。

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m, \quad \nabla^2\Phi_m = -\rho_m = \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (4.35)$$

若无边界条件，则有解

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (4.36)$$

若  $\mathbf{M}$  是局域的，可通过分部积分得到

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (4.37)$$

在  $r \gg r'$  的地方

$$\Phi_m(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}, \quad \mathbf{m} = \int_V \mathbf{M} dV.$$

对于有边界条件的情形，在边界  $\partial V$  处  $\mathbf{M}$  瞬间变为 0，运用静电学中的结论：

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA', \quad (4.38)$$

若铁磁体是均匀磁化的，则  $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ ，第一项为 0；第二项为有效面磁荷密度  $\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  的贡献。

**矢量势** 我们接着求矢量势，由于  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ，仅剩有效电流密度项

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 (\mathbf{0} + \nabla \times \mathbf{M}), \quad (4.39)$$

可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA', \quad (4.40)$$

上式两项分别对应有效电流密度  $\mathbf{J}_m$  和有效面电流密度  $\mathbf{K}$  的贡献

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}; \quad (4.41a)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (4.41b)$$

## 例 4.5.2: 均匀磁化球

真空中半径为  $R$  的永磁体球, 其磁化强度  $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$ . 应用式 (4.38)

$$\Phi_m(r, \theta) = 0 + \frac{1}{4\pi} \oint_{r'=R} \frac{M_0 \cos \theta'}{|r - r'|} R^2 d\Omega',$$

由于

$$\cos \theta' = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \phi'),$$

以及球谐函数的正交性,  $1/|r - r'|$  的展开式 (2.43) 仅有  $Y_{10}$  项保留, 故

$$\Phi_m(r, \theta) = \frac{1}{3} M_0 R^2 \cdot \frac{r_<}{r_>} \cos \theta.$$

球内,  $r_< = r$ ,  $r_> = R$ , 表现为匀强磁场:

$$\Phi_m = \frac{1}{3} M_0 r \cos \theta, \quad \mathbf{H}_{in} = -\frac{1}{3} \mathbf{M}, \quad \mathbf{B}_{in} = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M};$$

球外,  $r_< = R$ ,  $r_> = r$ , 表现为磁偶极子 (没有更高阶的项):

$$\Phi_m = \frac{M_0 R^3}{3} \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{r}}{4\pi r^2}, \quad \mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{M}.$$

$\mathbf{B}$  线是连续的闭合曲线, 而  $\mathbf{H}$  线不是.

也可通过矢量势的方法:

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0}{3} M_0 R^2 \cdot \frac{r_<}{r_>} \sin \theta.$$

## 例 4.5.3: 外场下的磁化球

续例 4.5.2, 在全空间叠加一匀强场  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ , 便成为外场下的磁化球问题, 球内场强为

$$\mathbf{B}_{in} = \mathbf{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}, \quad \mathbf{H}_{in} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{3} \mathbf{M},$$

如果球是顺磁或抗磁的, 那么  $\mathbf{M}$  便是由外场引起的, 且  $\mathbf{B}_{in} = \mu \mathbf{H}_{in}$ , 从而得到与电介质 (3.25) 很相似的结果:

$$\mathbf{M} = \frac{3}{\mu_0} \left( \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \right) \mathbf{B}_0. \quad (4.42)$$

如果球是铁磁的, 那么便可以得到  $\mathbf{B}_{in}$  和  $\mathbf{H}_{in}$  的限制关系:

$$\mathbf{B}_{in} + 2\mu_0 \mathbf{H}_{in} = 3\mathbf{B}_0,$$

上式可以在磁滞图上画一条直线, 并会产生交点.

#### 例 4.5.4: 外场下的磁化球壳

内外半径为  $a, b$  的球壳磁导率为  $\mu$ , 放置在匀强磁场  $\mathbf{B}_0$  中, 由于没有电流可应用磁势求解

$$\nabla^2 \Phi_m = 0$$

由式 (2.34), 再加上  $r \rightarrow \infty$  时  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$  的条件, 可写出磁势的形式解, 再通过边界条件

...

可得系数仅剩  $\ell = 1$  项, 壳内是一个匀强场:

$$\Phi_m(r, \theta) = \begin{cases} a_1 r \cos \theta, & r < a \\ \dots, & a < r < b \\ -H_0 r \cos \theta + \frac{d_1}{r^2} \cos \theta, & r > b \end{cases}$$

当  $\mu \gg \mu_0$  时, 壳内场强趋于 0, 这便是磁屏蔽效应.

最后探究了在一侧具有渐近均匀切向磁场的完全导电平面上的圆孔的影响, 略.

## 4.6 Faraday 电磁感应定律

我们在前几章里论述了静电力学和静磁学中的稳恒态问题. 我们虽然用了相似的数学方法, 但把电现象和磁现象当作相互独立的现象来处理. 两者之间唯一的联系在于如下事实: 磁场是由电流产生的, 而电流就是运动的电荷. 但当我们考虑与时间有关的问题时, 电现象和磁现象的几乎独立的性质便会消失: 随时间变化的磁场会产生电场, 反之亦然.

Faraday 在探究时变磁场中电流表现的实验表明:

1. 接通/断开临近电路的稳恒电流;
2. 临近电路的稳恒电流相对于本电路移动;
3. 将一根永磁体插入/抽出电路

都会在电路中产生瞬态 (transient) 电流. Faraday 把瞬态电流的产生解释为电路环绕磁通量 (magnetic flux)

$$\Phi := \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (4.43)$$

的变化所引起的. 变化的磁通量会在电路周围感生 (induce) 一个电场驱动电路电荷运动形成电流, 其电动势 (electromotive force, emf) 为

$$\mathcal{E} := \oint_{\partial S} \mathbf{E}' \cdot d\ell. \quad (4.44)$$

$\mathbf{E}'$  是在运动坐标系或介质中的电场. 则 Faraday 的观测结果可总结为:

$$\mathcal{E} \propto -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (*)$$

其符号由 Lenz 定律决定: 感生电流磁通量总是对抗磁通量的变化.

**Galileo 变换** 下面我们希望得到式 (\*) 中的比例系数  $k$ , 我们将从已有单位制推导 (而非定义) 该比例系数.

在狭义相对论 (special relativity) 发现之前 (或处理低速情况时), 所有物理学家都公认 (虽然不经常明确说出) 物理定律在 Galileo 变换 (Galilean transformation):

$$(t, \mathbf{r}) \mapsto (t, \mathbf{r} + \mathbf{v}t),$$

下应该是不变的.  $\mathbf{v}$  是两个参考系之间的相对速度. 也就是说, 两个以恒定速度  $\mathbf{v}$  作相对运动的观察者看到的物理现象是一样的.

Faraday 从实验上证实电磁感应现象在 Galileo 变换下不变: 无论是载电流的初级电路静止、次级电路运动; 或者是次级电路静止、而载电流的初级电路作同样的相对运动, 在次级电路中感生的电流是相同的.

现在讨论一个运动电路的法拉第定律, 如果电路以恒定速度  $\mathbf{v}$  移动, 则磁场的迁移导数为

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{B}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}),\end{aligned}$$

即,

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \oint_{\partial S} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot d\ell,$$

因此

$$\oint_{\partial V} (\mathbf{E}' - k\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}.$$

由 Galileo 变换下电场力和 Lorentz 力的形式, 应有:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

即  $k = 1$ , 因此 Faraday 定律可以写成等式:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.45)$$

并可由 Stokes 公式转化为微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.46)$$

而静电场的旋度 (1.12) 为 0! 由此可见, 时变场将电场和磁场联系了起来.

## 4.7 磁场的能量

我们在前面讨论静磁场时, 避开了场能和能量密度的问题. 因为要建立电流的稳恒组态及有关的磁场, 必定经过一段初始的瞬变期, 在这期间, 电流和磁场从零增到终值. 存在这种随时间变化的场, 就存在使电流源做功的感生电动势. 因为按照定义, 场的能量等于建立这场时所做的总功, 所以我们必须考虑这些贡献.

保持电流恒定不变,

$$\delta W = \int_V \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV = \int_V \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} dV.$$

对于顺磁性和抗磁性物质,  $2\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} = \delta(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV.$$

将一个磁导率为  $\mu$  的物体放进电流源固定不动的磁场  $\mathbf{B}$  中, 前后能量发生变化

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 dV.$$

#### 4.7.1\* 自感和互感

对于  $N$  个不导磁的载流电路系统, 总能量可以描述为:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} M_{ij} I_i I_j.$$

$L_i$  是线圈  $i$  的自感 (self-inductance),  $M_{ij}$  是线圈  $i, j$  之间的互感 (mutual inductance), 可以证明

$$M_{ij} = M_{ji}.$$

自感和互感可由

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV.$$

求出, 用磁通量的形式即

$$L_i = \frac{\Phi_{ii}}{I_i}, \quad M_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{I_j}.$$

##### 例 4.7.1: 同轴线缆的电感

内外半径为  $r, R$  的同轴线缆单位长度的电感为

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r}\right). \quad (4.47)$$

若电路是导磁的, 则  $W$  的表达式不适用了, 需要换为

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV.$$

后面还讨论了圆导线的自电感.

#### 4.8\* 似稳场

似稳场 (quasi-static field)、涡流 (eddy current)、磁扩散 (magnetic diffusion)

# 第五章 Maxwell 方程组

## 5.1 Maxwell 位移电流

在前面的讨论中，我们已经得到了关于电场和磁场的基本定律，分别是：

$$\text{电场 Gauss 定律 (3.20)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho,$$

$$\text{磁场 Gauss 定律 (4.28)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{Ampère 定律 (4.32)} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J},$$

$$\text{Faraday 电磁感应定律 (4.46)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

但在第四章推导 Ampère 定律时，我们设定了稳恒电流条件  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ，这在非稳恒态问题中便显然不适用了，而应该修正为连续性方程 (4.5)：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) = 0.$$

上式利用了电场的 Gauss 定律，从而 Ampère 定律也被修正为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.1)$$

Maxwell 将附加项  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  称为位移电流 (displacement current).

## 5.2 Maxwell 方程组

修正 Ampère 定律后，我们便得到了 Maxwell 方程组：<sup>1</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (5.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.2d)$$

将 Maxwell 方程和 Lorentz 力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (5.3)$$

以及 Newton 第二定律结合起来，就可以完全描写相互作用带电粒子和电磁场的经典动力学。

<sup>1</sup>事实上 Maxwell 原稿中的方程组是分量形式，并不简洁，其微分形式是由 Heaviside 给出的。

### 例 5.2.1: 真空中电磁波

在无源的真空中

$$\rho = 0, \quad \mathbf{J} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0;$$

利用式 (A.20), 可得

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = 0 + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

因此真空中电场和磁场的各个分量均服从波动方程 (wave equation):

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (5.4)$$

对于自由空间  $\mathbb{R}^3$ , 有平面波解, 且波速为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s}, \quad (5.5)$$

与真空中光速相同! 这意味着光就是电磁波 (electromagnetic wave). Maxwell 方程组将电、磁和光作为同一现象的表现形式.

### 5.2.1 标量势和矢量势

Maxwell 方程组是 4 个联立的一阶偏微分方程组, 它们将电场和磁场的各个分量联系起来. 在简单情况下这一方程组可以解出来, 但是引入势往往更方便.

#### 定义 5.2.1: 标量势和矢量势

引入标量势  $\Phi$  和矢量势  $\mathbf{A}$ , 使得电场和磁场可以表示为

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.6b)$$

证明. 式 (5.2b) 可以写成  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$  的形式, 继而式 (5.2c) 变为

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0},$$

也可以写成  $\nabla \times \nabla \Phi \equiv \mathbf{0}$  的形式. □

推论. 剩下的式 (5.2a) 和 (5.2d) 可变形为

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.7a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.7b)$$

下一步是解耦合 (decouple) 式 (5.7) 中的  $\Phi$  和  $\mathbf{A}$ .

**定理 5.2.1: 规范不变性**

电场和磁场在规范变换 (gauge transformation) 中保持不变:

$$(\Phi, \mathbf{A}) \mapsto \left( \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \mathbf{A} + \nabla \Lambda \right). \quad (5.8)$$

证明. 规范变换后的  $\Phi', \mathbf{A}'$  得到的电场和磁场为

$$\mathbf{E}' = -\nabla \left( \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E};$$

$$\mathbf{B}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad \square$$

推论. 总能将任意  $(\Phi, \mathbf{A})$  规范变换为满足特定约束条件的  $(\Phi', \mathbf{A}')$ .

**Lorenz 规范** 一种直接的想法是令梯度内的项为 0

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (5.9)$$

这称为 Lorenz 规范<sup>II</sup>, 从而 Maxwell 方程组可以写成

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (5.10a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.10b)$$

上面两式其实形式是一样的, 可定义 D'Alembertian

$$\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (5.11)$$

若规范变换前后均满足 Lorenz 规范, 则

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0. \quad (5.12)$$

**Coulomb 规范** 另一种规范是第 4.3 节提到的 Coulomb 规范

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

得到的方程为

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad (5.13a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi. \quad (5.13b)$$

式 (5.13a) 是 Poisson 方程, 可直接得到

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

这说明: 标量势  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  是由电荷密度  $\rho(\mathbf{r}', t)$  产生的瞬时 Coulomb 势<sup>III</sup>, 在空间中的传播没有任何延迟.

<sup>II</sup>注意区分 Lorenz 和 Lorenz.

<sup>III</sup>这是其被称为 Coulomb 规范的原因.

对于式 (5.13b), 将电流密度  $\mathbf{J}$  写成纵向 (longitudinal, 或无旋 irrotational) 电流  $\mathbf{J}_l$  和横向 (transverse, 或螺旋 solenoidal) 电流  $\mathbf{J}_t$  之和, 满足

$$\nabla \times \mathbf{J}_l = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0.$$

从而将式 (5.13b) 解耦合为 (略去推导过程)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi = \mu_0 \mathbf{J}_l; \quad (5.14a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t. \quad (5.14b)$$

这说明: 标量势方程的源可以用纵向电流  $\mathbf{J}_l$  表示; 而矢量势满足波动方程, 在空间中以光速  $c$  传播, 其源可以用横向电流  $\mathbf{J}_t$  表示. 在 Coulomb 规范下, 横向辐射场仅由矢量势给出, 而瞬时 Coulomb 势只对近场有贡献.

### 例 5.2.2: Coulomb 规范下电磁波的表达

无源情况下, 第一个方程  $\Phi = 0$ , 第二个方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \implies \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

从而

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A};$$

$$\mathbf{E} = 0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\omega \mathbf{A}.$$

**磁荷存在吗?** 如果自由磁荷真的存在, Maxwell 方程组就要改写

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

我们需要新的理论, 标量势和矢量势的形式也需要改写.<sup>IV</sup>

### 5.2.2 波动方程的 Green 函数

Lorenz 规范下,  $\Phi$  和  $\mathbf{A}$  均满足有源波动方程

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{r}, t). \quad (5.15)$$

对  $t$  进行 Fourier 变换,

$$(\nabla^2 + k^2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi \hat{f}(\mathbf{r}, \omega),$$

<sup>IV</sup> 事实上, 无论磁荷存在与否, 理论物理学家都可以提出许多漂亮的理论, 但是决定磁荷存在性仍需要实验物理学家的实验验证. 举个例子: Higgs 粒子是粒子物理学标准模型 (standard model) 预言的粒子, 也有一些 Higgsless 的理论大受欢迎, 直到 2012 年 Higgs 粒子被发现.

其中  $k := \omega/c$ . 则频域中的 Green 函数  $\hat{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  满足

$$(\nabla^2 + k^2)\hat{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

$\hat{G}_k$  是关于源点  $\mathbf{r}'$  球对称的, 定义  $\mathbf{R} := \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  可得

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2}(R\hat{G}_k) + k^2 \hat{G}_k = -4\pi \delta(\mathbf{R}),$$

当  $R \neq 0$  时,

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R\hat{G}_k) + k^2(R\hat{G}_k) = 0 \implies \hat{G}_k^\pm(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R}$$

有两个线性无关的球面波 (spherical wave) 解, 分别为发散 (diverging) 球面波  $\hat{G}_k^+(R)$  和会聚 (converging) 球面波  $\hat{G}_k^-(R)$ , 后者的例子是透镜聚焦. 则频域下 Green 函数是通解的线性组合

$$\hat{G}_k(R) = A\hat{G}_k^+(R) + B\hat{G}_k^-(R),$$

Green 函数要求在点源处

$$\lim_{kR \rightarrow 0} \hat{G}_k(R) = \frac{1}{R} \implies A + B = 1.$$

回到时域下的 Green 函数, 满足

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'),$$

对  $t$  进行 Fourier 变换,

$$(\nabla^2 + k^2)\hat{G}(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\omega t'}.$$

可得

$$\hat{G}^\pm(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{r}', t') = \hat{G}_k^\pm(R) e^{i\omega t'} = \frac{e^{i(\pm kR + \omega t')}}{R},$$

进行 Fourier 反变换,

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\pm kR - \omega\tau)}}{R} d\omega, \quad \tau := t - t',$$

对于非色散 (nondispersive) 介质,  $c$  与频率无关, Green 函数有通解

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right)$$

即

$$G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - \left(t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\right). \quad (5.16)$$

分别为推迟 (retarded) 和超前 (advanced) Green 函数.  $\delta$  函数的自变量表明: 在  $\mathbf{r}$  点于时间  $t$  观测的效应是由距离为  $\mathbf{R}$  的源在时间为  $t' = t \mp R/c$  时的作用引起的.<sup>v</sup> 从而有源波动方程 (5.15) 的两个解为

$$\Psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \int G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt',$$

<sup>v</sup>课上的理解是: 无穷远处产生的源经过  $\mathbf{r}$  后仍需要  $R/c$  的时间去经过  $\mathbf{r}'$ .

我们考虑一个在时间和空间中作局域分布的源  $f(\mathbf{r}', t')$ , 这个源分布只在  $t' = 0$  前后一段有限的时间间隔内不为零. 则在无源的波动方程仅仅满足其次波动方程

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

想像两种极限情形:

1.  $t \rightarrow -\infty$ , 存在一个特定的“背景”波  $\Psi_{\text{in}}$ ,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \int G^+(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt';$$

2.  $t \rightarrow +\infty$ , 存在一个特定的“稳态”波  $\Psi_{\text{out}}$ ,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_{\text{out}}(\mathbf{r}, t) + \int G^-(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt',$$

最常见的物理情景是  $\Psi_{\text{in}} = 0$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{f(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \quad (5.17)$$

物理学家已经就一维、二维和三维情形下的有限时间的初值和终值问题进行过广泛研究. <sup>VI</sup>

### 5.2.3 推迟势和推迟场

如果电荷密度和电流密度分布随时间变化, 观测点的标量势和矢量势将会延迟:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (5.18a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (5.18b)$$

得到

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ -[\nabla' \rho]_{\text{ret}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right] \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5.19a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\nabla' \times \mathbf{J}]_{\text{ret}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (5.19b)$$

Jackson 用  $[\cdot]_{\text{ret}}$  表示赋值  $t' = t - R/c$ , 这样的好处是可以有效区分  $\nabla[f]_{\text{ret}} \neq [\nabla f]_{\text{ret}}$ , 因为前者的  $t$  与  $\mathbf{r}'$  有关, 进一步的:

$$\begin{aligned} [\nabla' \rho]_{\text{ret}} &= \nabla' [\rho]_{\text{ret}} - \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} \nabla' (t - R/c); \\ [\nabla' \times \mathbf{J}]_{\text{ret}} &= \nabla' \times [\mathbf{J}]_{\text{ret}} + \left[ \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right]_{\text{ret}} \times \nabla' (t - R/c). \end{aligned}$$

而  $\nabla' R = -\hat{\mathbf{R}}$ , 故

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \left( \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t'} \right) \hat{\mathbf{R}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right] \frac{dV'}{R}, \quad (5.20a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t'} \right] \times \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} dV'. \quad (5.20b)$$

上式称为 Jefimenko 对 Coulomb 定律和 Biot-Savart 定律的推广. 若  $\rho$  和  $\mathbf{J}$  是与时间无关的, 则可重新得到静电场和静磁场的表达式 (1.5) 和 (4.12).

---

<sup>VI</sup>Morse and Feshbach, Methods of Theoretical Physics, pp843-847.

## 例 5.2.3: 电荷量变化的点电荷

空间中原点处一点电荷, 其电荷量随时间变化

$$\rho(\mathbf{r}', t') = Q(t') \delta(\mathbf{r}'),$$

则

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} Q\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

## 例 5.2.4: 阶跃电流

无限长直导线通阶跃电流

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ I_0, & t > 0 \end{cases}$$

电流密度为

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t') = I(t') \delta(x') \delta(y') \hat{z}.$$

矢量势

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} I\left(t - \frac{R}{c}\right) \frac{dz'}{R}, \quad R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2},$$

$t \leq \rho/c$  时,  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ;  $t > \rho/c$  时, 仅  $z'^2 \leq (ct)^2 - \rho^2$  部分有贡献, 则

$$\mathbf{A}(\rho, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln\left[\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}{\rho}\right] \hat{z}.$$

由式 (5.6a) 和 (5.6b), 电场和磁场分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, t) &= -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{c}{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} \hat{z}, \\ \mathbf{B}(\rho, t) &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{ct}{\rho \sqrt{(ct)^2 - \rho^2}} \hat{\phi}. \end{aligned}$$

$t \rightarrow +\infty$  时, 电磁场趋于稳定, 与恒稳电流情形相同:

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho} \hat{\phi}.$$

### 5.3 宏观电磁场

尽管我们已经得到了 Maxwell 方程组、电磁场与标量势矢量势的关系, 但我们仍没有处理  $\mathbf{B}$  &  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  &  $\mathbf{E}$  之间的关系. 在真空中

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}.$$

有质介质中,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}.$$

对于线性介质,  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu;$$

在非线性介质中, 关系变得复杂.

**微观场** 考虑一个仅由电子和原子核构成的微观世界, 由于原子之内是如此的空旷, 以至于可以认为是真空条件, 因此微观场的 Maxwell 方程

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{e} &= \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \times \mathbf{b} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j}.\end{aligned}$$

$\varrho, \mathbf{j}$  是微观电荷密度和电流密度,  $\mathbf{e}, \mathbf{b}$  是微观电场和磁场, 而  $\mathbf{d}, \mathbf{h}$  并无定义.

**宏观场** 宏观场被定义为微观场的空间平均:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \rangle, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

其中空间平均值是相对于测试函数  $f(\mathbf{r})$  而言的, 其定义为:

$$\langle F(\mathbf{r}, t) \rangle := \int F(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) f(\mathbf{r}') dV',$$

因此, 空间和时间的微分运算与平均运算可交换:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle F \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \right\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle.$$

从而宏观场的 Maxwell 方程为:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \langle \varrho \rangle, \tag{5.21}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0}, \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \langle \mathbf{j} \rangle.\end{aligned} \tag{5.22}$$

因此导出场  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  是通过从  $\langle \varrho \rangle$  和  $\langle \mathbf{j} \rangle$  提出某些可以看作介质的宏观性质的贡献而引进的.

下面便研究  $\langle \varrho \rangle$  和  $\langle \mathbf{j} \rangle$ .

**电荷密度** 我们将电荷  $\varrho$  分为自由电荷  $\varrho_{\text{free}}$  和束缚电荷  $\varrho_{\text{bound}}$ , 后者被束缚在分子中, 因此

$$\begin{aligned}\varrho_{\text{free}}(\mathbf{r}, t) &= \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j); \\ \varrho_{\text{bound}}(\mathbf{r}, t) &= \sum_n \varrho_n(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

$\varrho_n$  是第  $n$  个分子的电荷密度, 分子质心坐标为  $\mathbf{r}_n$ , 分子电荷相对质心坐标为  $\mathbf{r}_{nj}$ , 则其平均值为

$$\langle \varrho_n(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{j(n)} q_j f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{nj}),$$

因为  $\mathbf{r}_{nj}$  具有原子线度的数量级, 适合在  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$  处 Taylor 展开:

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{nj}) = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_{nj} \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\mathbf{r}_{nj})_\alpha (\mathbf{r}_{nj})_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) + \cdots,$$

式中各项分别对应分子电荷、偶极矩、四极矩……

$$\langle \varrho_n(\mathbf{r}, t) \rangle = q_n f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) - \mathbf{p}_n \cdot \nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) + \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} (Q_n)_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) + \cdots$$

将上式各项表示成空间平均的形式:

$$\langle \varrho_n(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle + \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \langle (Q_n)_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \rangle + \cdots$$

就平均而言, 可以把分子看作位于分子质心 (也可选取其他固定点) 上的点多极子的集合. 对所有分子求和, 得到

$$\langle \varrho(\mathbf{r}, t) \rangle = \rho(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \cdots$$

其中  $\rho, \mathbf{P}, Q_{\alpha\beta}$  分别是宏观电荷密度、宏观电极化强度、宏观电四极矩密度……因此式 (5.21) 可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho,$$

宏观电位移矢量定义为

$$D_\alpha := \varepsilon_0 E_\alpha + P_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \cdots$$

前两项是熟知的结果, 更高阶项原则上是存在的, 但几乎可以忽略不计.

**电流密度**  $\langle \mathbf{j} \rangle$  的推导比  $\langle \varrho \rangle$  的处理复杂的多, 在这里仅给出结果. 定义分子磁矩和宏观磁化强度分别为

$$\mathbf{m}_n = \frac{1}{2} \sum_{j(n)} q_j \mathbf{r}_{jn} \times \mathbf{v}_{jn}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n),$$

宏观电流密度

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{j}_{\text{free}} + \mathbf{j}_{\text{bound}} \rangle, \quad \mathbf{j}_{\text{free}}(\mathbf{r}, t) := \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j).$$

进而定义磁场强度<sup>VII</sup>

$$\mathbf{H} := \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} - (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}) \times \mathbf{v}.$$

因此式 (5.22) 可以写成

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}.$$

---

<sup>VII</sup>本式其实是运动介质的非相对论性极限.

## 5.4 电磁场的能量、动量和角动量

**能量守恒** 则对于电荷和电流的连续分布，在有限体积  $V$  中，各场做功的总功率为

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV,$$

利用 Maxwell 方程组和式 (A.14) 变形

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \left( \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} = - \left[ \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right].$$

假设：

1. 总电磁能量密度为 (即使是在时变场中)：

$$u = w_e + w_m = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B});$$

2. 宏观介质的电磁性质是线性的，

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu;$$

3. 介质无色散或损失，即  $\epsilon, \mu$  不随时间 (或频率) 变化故

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (5.23)$$

$\mathbf{S}$  定义为 Poynting 矢量

$$\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (5.24)$$

### 定理 5.4.1: Poynting 定律 (电磁场的能量守恒定律)

电磁能量在一定体积内的变化率，加上单位时间内流出的能量，等于该体积内各源的场所做的总功的负值。

我们的重点一直是放在电磁场的能量上。场在单位时间和单位体积内所做的功  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  代表电磁能转换为机械能或热能。因为物质归根到底是由带电粒子 (电子和原子核) 组成的，所以可把这能量转换率看作每单位体积带电粒子的能量增加率。这样一来，我们就可以把微观场  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  的 Poynting 定理，解释为粒子和场的组合系统的能量守恒定律。

将空间  $V$  中的总能量  $E$  分成粒子的机械能 (包含热能)  $E_m$  和场能  $E_f$ ，并假定没有粒子移出体积外，总的的能量随时间的变化

$$\frac{dE_m}{dt} + \frac{dE_f}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{d}{dt} \int_V u dV = - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}.$$

若空间中没有电荷 (源)

$$E = E_f = \int_V u dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (E^2 + c^2 B^2) dV.$$

## 例 5.4.1: 导线的 Joule 热

圆柱形导线长度为  $L$ , 半径  $a$ , 两端电压为  $V$ , 则电场强度

$$E = \frac{V}{L},$$

导体表面磁场

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}.$$

Poynting 矢量向里, 大小为

$$S = \frac{V}{L} \cdot \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} = \frac{VI}{2\pi a L},$$

通过导线表面的单位时间能量为

$$\int S \cdot dA = S \cdot 2\pi a L = VI.$$

**动量守恒** 电磁场对带电粒子的力是 Lorentz 力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

则粒子动量的变化率为

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV$$

消去源, 得到

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \\ &= \epsilon_0 \left[ \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right], \end{aligned}$$

右边出现了时间的导数, 我们依此定义电磁场的动量

$$\mathbf{P}_f := \epsilon_0 \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV = \frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{H} dV.$$

电磁场的动量密度

$$\mathbf{g} := \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}.$$

则

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_f}{dt} = \epsilon_0 \int_V [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] dV.$$

右边的体积分完全可以加上  $c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) \equiv 0$  以更对称. 并且注意到

$$[\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_\alpha = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta} \right);$$

从而右边的体积分具有散度的形式, 定义 Maxwell 应力张量 (Maxwell stress tensor)

$$T_{\alpha\beta} := \epsilon_0 \left[ E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2) \delta_{\alpha\beta} \right]. \quad (5.25)$$

则

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P}_m + \mathbf{P}_f)_\alpha = \oint_{\partial V} \sum_\beta T_{\alpha\beta} \hat{n}_\beta dA.$$

角动量守恒 角动量与动量有关:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P},$$

故结论与动量守恒相似, 仅仅是所有表达式左乘  $\mathbf{r}$  罢了. 而且也涉及并矢这种不是很优雅的表达, 特略.

#### 例 5.4.2: Feynman 盘详谬

塑料圆盘可以自由旋转, 一个线圈 (一个短的螺线管) 与旋转轴同心. 该电磁阀携带由一个小电池提供的稳定电流. 此外, 一些相互绝缘的小金属球围绕圆盘的圆周均匀间隔, 每个球体上都有相同的  $Q$  电荷. 一切静止. 假设螺线管中的电流突然中断. 圆盘是否会旋转?

详谬是: 角动量守恒似乎表明, 在场消散前后, 圆盘保持静止; 但由于消散的磁场会产生一个与圆盘周边相切的强环形电场, 静电荷将被该场推动, 圆盘必然会开始旋转.

但事实是: 由于电磁场具有角动量, 因此圆盘转动也不违反角动量守恒; 另外, 磁场也不能立刻消失, 而必须将存储的磁能消散到线圈的电阻中, 这会将电流的角动量传递到线圈中, 使圆盘旋转.

#### 5.4.1 色散介质中的 Poynting 定律

在有色散介质中,  $\varepsilon, \mu$  与频率  $\omega$  有关, 前面的假设不再成立, 但仍有一

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = - \int_V \left[ \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right].$$

为了讨论色散, 有必要利用 Fourier 变换将时域变到频域中:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega;$$

在此我们仍假设介质是各向同性的, 从而

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega),$$

其中  $\varepsilon$  是复数, 而场  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  必然仍是实数, 因此

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, -\omega) = \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, \omega), \quad \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, -\omega) = \hat{\mathbf{D}}^*(\mathbf{r}, \omega),$$

从而  $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$ , 色散的性质表面:  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  在时间上的联系是非局域性的. 因此  $\mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D} / \partial t) \neq \partial(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} / 2) / \partial t$ , 我们先不考虑空间相关性, 利用 Fourier 变换

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}^*(\omega') \cdot [-i\omega \varepsilon(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\omega)] e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [-i\omega \varepsilon(\omega) + i\omega' \varepsilon^*(\omega')] \hat{\mathbf{E}}^*(\omega') \cdot \hat{\mathbf{E}}(\omega) e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega'. \end{aligned}$$

我们现在假设电场在一个相对狭窄的范围内由频率分量主导, 而在这个范围内  $\varepsilon$  有可观测的变化. 然后我们可以将  $i\omega' \varepsilon^*(\omega')$  在  $\omega$  附近 Taylor 展开:

$$-i\omega \varepsilon(\omega) + i\omega' \varepsilon^*(\omega') = 2\omega \operatorname{Im}[\varepsilon(\omega)] - i(\omega - \omega') \frac{d}{d\omega} [\omega \varepsilon^*(\omega)] + \dots$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}^*(\omega') \cdot \hat{\mathbf{E}}(\omega) \omega \operatorname{Im}[\varepsilon(\omega)] e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}^*(\omega') \cdot \hat{\mathbf{E}}(\omega) \frac{d}{d\omega} [\omega \varepsilon^*(\omega)] e^{-i(\omega-\omega')t} d\omega d\omega' \end{aligned}$$

第一项表示电场能量转化为热能 (或更一般地转化为各种形式的辐射); 第二项表示有效能量密度.

$\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial t)$  的表达式是相似的, 只需  $\mathbf{E}, \varepsilon$  换为  $\mathbf{H}, \mu$  即可.

谐振场 假设场有谐振的形式:

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_e), \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_m),$$

其中  $\tilde{\mathbf{E}}(t), \tilde{\mathbf{H}}(t)$  相对  $1/\omega$  缓慢变化. 则

$$\left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\rangle = \omega_0 \operatorname{Im}[\varepsilon(\omega_0)] \langle E^2 \rangle + \omega_0 \operatorname{Im}[\mu(\omega_0)] \langle H^2 \rangle + \frac{\partial u_{\text{eff}}}{\partial t}.$$

其中

$$u_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega}(\omega_0) \right] \langle E^2 \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{d(\omega \mu)}{d\omega}(\omega_0) \right] \langle H^2 \rangle.$$

Poynting 定律形式变为

$$\frac{\partial u_{\text{eff}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \omega_0 \operatorname{Im}[\varepsilon(\omega_0)] \langle E^2 \rangle - \omega_0 \operatorname{Im}[\mu(\omega_0)] \langle H^2 \rangle \quad (5.26)$$

右边第一项是 Ohm 热损耗, 后面两项是在介质中的吸收耗散, 不包括传导损耗. 上述方程给出了现实情况下的电磁能局部守恒, 在这种情况下, 除了能量从局部流出外 ( $\nabla \cdot \mathbf{S} \neq 0$ ), 介质的加热可能会造成损失 ( $\operatorname{Im} \varepsilon \neq 0, \operatorname{Im} \mu \neq 0$ ), 从而导致 (先前假设中提到的) 场能量的缓慢衰减.

#### 5.4.2\* 谐振场的 Poynting 定律

我们假定所有的场和源都是随时间简谐的, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}],$$

其中  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  一般是复的, 有相位的信息. 谐振场的 Maxwell 方程组可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (5.27a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.27b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (5.27c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - i\omega \mathbf{D}. \quad (5.27d)$$

场在体积  $V$  上所做的时间平均工作量

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dV &= \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \mathbf{H}^* - i\omega \mathbf{D}^*) \cdot \mathbf{E} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V [ -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) - i\omega (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*) ] dV. \end{aligned}$$

复 Poynting 矢量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (5.28)$$

简谐电磁场能量密度

$$w_e = \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*, \quad (5.29a)$$

$$w_m = \frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*. \quad (5.29b)$$

故简谐场的 Poynting 定律为

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dV + 2i\omega \int_V (w_e - w_m) dV + \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (5.30)$$

实部给出了时间平均量的能量守恒；虚部与反应性（或储存的）能量及其交替流动有关。如果能量密度  $w_e$  和  $w_m$  体积分为实数，就像具有无损耗介质和完美导体的系统一样，实部将是：

$$\frac{1}{2} \int_V \operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) dV + \oint_{\partial V} \operatorname{Re}(\mathbf{S}) \cdot d\mathbf{A} = 0.$$

场对  $V$  中源的稳态时间平均功率等于通过边界面  $\partial V$  进入  $V$  的平均功率流，由  $\operatorname{Re}(\mathbf{S})$  的法向分量计算。由于系统各组成部分的损失，上述方程的第二项有一个实部，这可以解释这种耗散。

**阻抗和导纳** 阻抗  $Z$  (impedance)、电阻  $R$  (resistance)、电抗  $X$  (reactance)

$$Z = R + iX,$$

$X > 0$ : 感抗 (inductance);  $X < 0$ : 容抗 (capacitance); <sup>VIII</sup>

导纳  $Y$  (admittance)、电导  $G$  (conductance)、电纳  $B$  (susceptance)

$$Y = G + iB,$$

$B > 0$ : 容纳 (capacitive susceptance);  $B < 0$ : 感纳 (inductive susceptance).

阻抗  $Z$  和导纳  $Y$  的关系为  $Y = Z^{-1}$ .

## 5.5 电磁场的变换性质、空间反演和时间反演

**定义 5.5.1: 空间反演**

空间反演 (spatial reflection) 变换或称宇称 (parity) 变换是指

$$P : \mathbf{r}_i \mapsto -\mathbf{r}_i,$$

在此反演变换下，(真) 矢量将同步反转 (奇变换):

$$P : \mathbf{V} \mapsto -\mathbf{V};$$

而赝矢量 (pseudovector) 将保持不变 (偶变换):

$$P : \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}.$$

<sup>VIII</sup>电气工程师的  $i$  已经被电流占用，故虚数单位采用  $j$ ，阻抗写作  $Z = R + jX$ .

推论. 我们可以对熟知的一些矢量进行归类:

- 真矢量: 坐标  $\mathbf{r}$ 、速度  $\mathbf{v}$ 、动量  $\mathbf{p}$ 、电场  $\mathbf{E}$ ;
- 贲矢量: 角动量  $\mathbf{L}$ 、力矩  $\mathbf{N}$ 、磁场  $\mathbf{B}$ .

此外还有真标量 (如质量  $m$ 、电荷  $q$ ) 和赝标量 (如混合积  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ) 之分.

注. Poynting 矢量是真矢量与贲矢量叉乘 ( $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ), 但其仍是真矢量.

定义 5.5.2: 时间反演

时间反演 (time reversal) 即

$$t' = -t,$$

同样有奇偶变换之分, 但这与真贲矢量并无联系.

# 第六章 平面电磁波

本章讨论无限或半无限介质中的平面波. 首先论述了平面电磁波在非导电介质中的基本性质: 平面电磁波的横向性、线偏振态和圆偏振态. 然后推导了至关重要的电磁波在平面分界面上反射和折射的 Fresnel 公式, 并加以应用, 接着概括阐述了电介质、导体和等离子体的高频率散关系. 而后简单地讨论了电磁波在电离层中的传播, 和在导电介质或耗散介质中的波. 继而介绍了相速度和群速度的概念, 以及一个脉冲或波包在色散介质中传播时的扩展.

## 6.1 非导电介质中的平面波

电磁场 Maxwell 方程组的基本特征是存在行波解, 这些解描写能量从一点输运到另一点. 最简单最基本的电磁波是横平面波.

考虑无源介质 ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ ), 并假设场是随时间简谐的 ( $e^{-i\omega t}$ ), Maxwell 方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (6.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (6.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}. \quad (6.1d)$$

对于均匀各向同性的线性介质,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

可以推出,  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  均满足如下的 Helmholtz 波动方程:

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0, \quad (6.2)$$

其波数 (wave number) 定义为

$$k = \sqrt{\mu\epsilon}\omega. \quad (6.3)$$

Helmholtz 方程的一个解是沿  $z$  方向传播的平面波  $e^{i(kz-\omega t)}$ , 其相位为  $\varphi = kz - \omega t$ , 等相位面移动的速度称为相速度 (phase velocity):

$$v_\varphi := \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}}. \quad (6.4)$$

**平面电磁波** 频率为  $\omega$ 、波数为  $k$ 、传播方向为  $\hat{\mathbf{n}}$  的平面电磁波一般具有如下形式:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \end{cases} \quad (6.5)$$

其中  $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$  是常矢量,  $\mathbf{k} := k \hat{\mathbf{n}}$  为波矢 (wave vector).

### 定理 6.1.1

无源 Maxwell 方程组与下列方程组等价

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (6.6a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (6.6b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}. \quad (6.6c)$$

**推论.** 电磁波是横波 (transverse wave), 即  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  均垂直于传播方向  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad (6.7a)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (6.7b)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0. \quad (6.7c)$$

同时  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ , 注意:  $\hat{\mathbf{n}}$  可以是复矢量, 此时  $|\hat{\mathbf{n}}|^2 = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^* \neq 1$ .

**实波矢** 若  $\hat{\mathbf{n}}$  是实矢量, 则  $\mathbf{E}_0$  和  $\mathbf{B}_0$  有相同的相位:

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\epsilon}_1, \quad (6.8a)$$

$$\mathbf{B}_0 = \sqrt{\mu \epsilon} E_0 \hat{\epsilon}_2. \quad (6.8b)$$

其中  $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2$  是两两正交的单位矢量.  $\hat{\mathbf{n}}$  称为传播矢量 (propagation vector),  $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2$  称为极化矢量 (polarization vector).

能流的时间平均由复 Poynting 矢量的实部给出:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 \hat{\mathbf{n}}. \quad (6.9)$$

相应地, 电磁场能量密度的时间平均为

$$u = \frac{1}{4} \left( \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right) = \frac{\epsilon}{2} |\mathbf{E}_0|^2. \quad (6.10)$$

因此, 对于实波矢的平面横波, 能流的速度等于相速度:  $|\mathbf{S}|/u = v_\varphi$ .

**复波矢** 若  $\hat{\mathbf{n}}$  是复矢量, 则电磁波为非均匀平面波, 在虚部方向  $\text{Im}(\hat{\mathbf{n}})$  上呈指数衰减 (或增长)

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{-k \text{Im}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{r}} e^{i(k \text{Re}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

等幅面和等相面仍然是平面, 但它们不再平行; 横波的关系 (6.7) 仍成立, 由  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ :

$$|\text{Re}(\hat{\mathbf{n}})|^2 - |\text{Im}(\hat{\mathbf{n}})|^2 = 1, \quad (6.11a)$$

$$\text{Re}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \text{Im}(\hat{\mathbf{n}}) = 0. \quad (6.11b)$$

## 6.2 偏振

前文指出：均匀平面波的电场沿  $\hat{\epsilon}_1$  方向，磁场沿  $\hat{\epsilon}_2$  方向；但显然，一旦确定极化矢量  $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2$  后，一个均匀平面波的电场当然也可以沿其他方向，一般地，可以将任意均匀平面波分解成两种偏振方向的波：

$$\mathbf{E} = (E_1 \hat{\epsilon}_1 + E_2 \hat{\epsilon}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

振幅  $E_1, E_2$  是复数， $E_2$  相对  $E_1$  的相位差为  $\delta$ .

**线偏振** 若  $E_1, E_2$  同相 ( $\delta = 0, 180^\circ$ )，则  $\mathbf{E}$  是线偏振的 (linear polarized). 如图 6.1， $\mathbf{E}$  的终点在一条直线 (图中虚线) 上简谐运动. 细箭头表示  $\mathbf{E}$  终点运动方向，

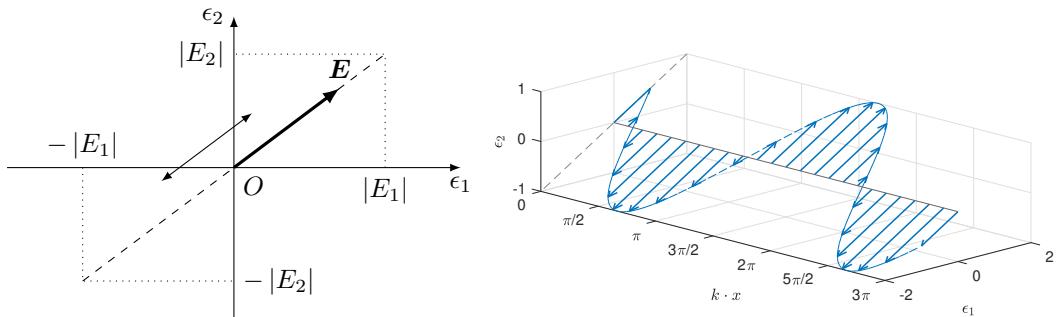


图 6.1: 线偏振 ( $\delta = 0$ )

**圆偏振** 若  $E_1, E_2$  不同相，但幅值相同 ( $|E_1| = |E_2|$ ) 且相位差  $\delta = \pm 90^\circ$ ，则  $\mathbf{E}$  是圆偏振的 (circular polarized)，可以写成

$$\mathbf{E} = E_1 (\hat{\epsilon}_1 \pm i \hat{\epsilon}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

如图 6.2，向  $-\mathbf{k}$  方向 (即垂直纸面向内) 看去，(+) 对应电场终点逆时针 (counterclockwise) 旋转，我们称为左旋 (left circular) 或正螺旋性 (positive helicity)，因为其角动量是沿  $+\mathbf{k}$  的；相应的，(-) 对应顺时针旋转，称为右旋或负螺旋性.

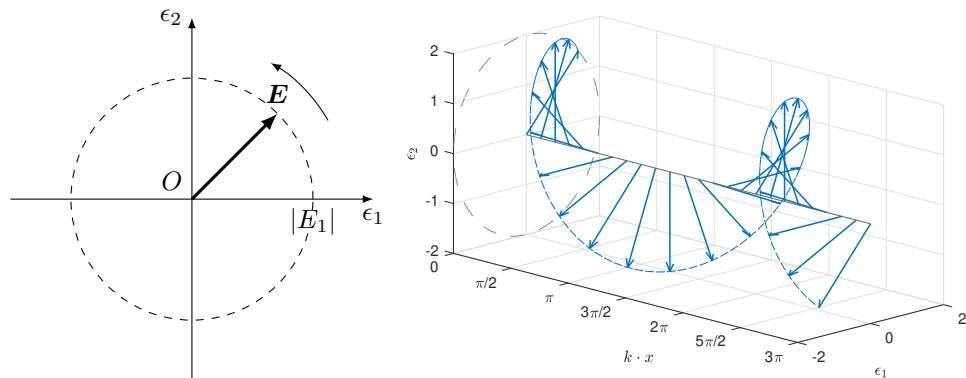


图 6.2: 圆偏振 ( $\delta = +90^\circ$ )

依此定义圆偏振基：

$$\hat{\epsilon}_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\epsilon}_1 \pm i \hat{\epsilon}_2), \quad (6.12)$$

则  $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\pm}$  也是两两正交的单位矢量 (复矢量内积). 在这一对坐标下, 任意平面波都可以分解成左旋和右旋波:

$$\mathbf{E} = (E_+ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_+ + E_- \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_-) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

若  $E_{\pm}$  幅值相同, 则  $\mathbf{E}$  是线偏振的; 若  $E_{\pm}$  有一个为 0, 则  $\mathbf{E}$  是圆偏振的.

**椭圆偏振** 若  $E_{\pm}$  幅值不同, 则  $\mathbf{E}$  是椭圆偏振的 (elliptically polarized).  $\mathbf{E}$  的终点在一个椭圆上旋转, 如图 6.3 所示.

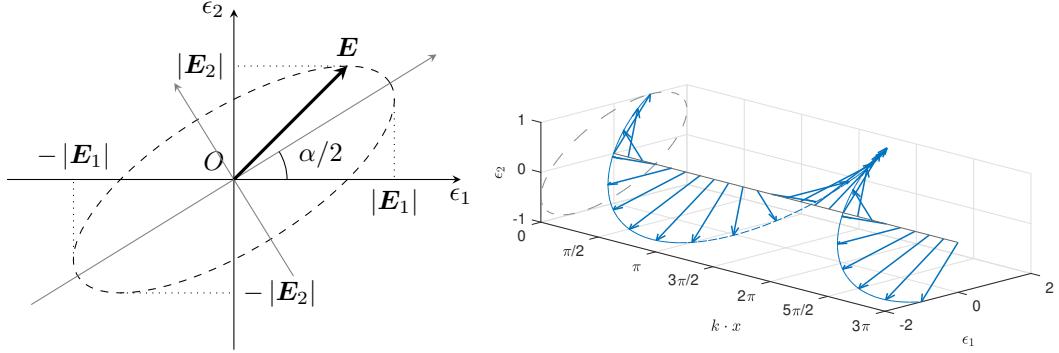


图 6.3: 椭圆偏振

为了方便地描述这个椭圆的方程, 记  $\text{Re}(\mathbf{E}) = E_{\epsilon_1} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 + E_{\epsilon_2} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2$ , 则

$$\begin{aligned} E_{\epsilon_1} &= |E_1| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \\ E_{\epsilon_2} &= |E_2| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta), \end{aligned}$$

则

$$\left(\frac{E_{\epsilon_1}}{|E_1|}\right)^2 + \left(\frac{E_{\epsilon_2}}{|E_2|}\right)^2 - 2\left(\frac{E_{\epsilon_1}}{|E_1|}\right)\left(\frac{E_{\epsilon_2}}{|E_2|}\right) \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

若  $E_-$  相对  $E_+$  的相位差是  $\alpha$ , 则椭圆半长轴与  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1$  轴的夹角为  $\alpha/2$ , 且满足

$$\tan \alpha = \frac{2 |E_1| |E_2|}{|E_1|^2 - |E_2|^2} \cos \delta.$$

椭圆长短轴之比由  $E_{\pm}$  幅值之比给出:

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{|E_+| + |E_-|}{|E_+| - |E_-|}.$$

**Stokes 参数** 我们如何从观察光束的细节来确定偏振的状态? 对于一束光来说,

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 \cdot \mathbf{E}, \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2 \cdot \mathbf{E}; \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_+^* \cdot \mathbf{E}, \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_-^* \cdot \mathbf{E},$$

分别是沿  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{1,2}$  方向线偏振的、左旋和右旋圆偏振的振幅. 这些振幅的平方给出了各类偏振强度的一种测量.

## 定义 6.2.1: Stokes 参数

在线偏振基  $\hat{\epsilon}_{1,2}$  下, Stokes 参数表示为

$$s_0 = |\hat{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{E}|^2 + |\hat{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{E}|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2, \quad (6.13a)$$

$$s_1 = |\hat{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{E}|^2 - |\hat{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{E}|^2 = |E_1|^2 - |E_2|^2, \quad (6.13b)$$

$$s_2 = 2 \operatorname{Re}[(\hat{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{E})^*(\hat{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{E})] = 2 |E_1| |E_2| \cos \delta, \quad (6.13c)$$

$$s_3 = 2 \operatorname{Im}[(\hat{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{E})^*(\hat{\epsilon}_2 \cdot \mathbf{E})] = 2 |E_1| |E_2| \sin \delta; \quad (6.13d)$$

在圆偏振基  $\hat{\epsilon}_{\pm}$  下, Stokes 参数表示为

$$s_0 = |\hat{\epsilon}_+^* \cdot \mathbf{E}|^2 + |\hat{\epsilon}_-^* \cdot \mathbf{E}|^2 = |E_+|^2 + |E_-|^2, \quad (6.14a)$$

$$s_1 = 2 \operatorname{Re}[(\hat{\epsilon}_+^* \cdot \mathbf{E})^*(\hat{\epsilon}_-^* \cdot \mathbf{E})] = 2 |E_+| |E_-| \cos \alpha, \quad (6.14b)$$

$$s_2 = 2 \operatorname{Im}[(\hat{\epsilon}_+^* \cdot \mathbf{E})^*(\hat{\epsilon}_-^* \cdot \mathbf{E})] = 2 |E_+| |E_-| \sin \alpha, \quad (6.14c)$$

$$s_3 = |\hat{\epsilon}_+^* \cdot \mathbf{E}|^2 - |\hat{\epsilon}_-^* \cdot \mathbf{E}|^2 = |E_+|^2 - |E_-|^2. \quad (6.14d)$$

**推论.** Stokes 参数仅依赖于  $|E_1|, |E_2|, \delta$  或  $|E_+, |E_-|, \alpha$  三个参数, 因此并不独立:

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

表 6.1: 典型偏振的 Stokes 参数

偏振	取向	Stokes 参数
线偏振	水平 (horizontal) 和垂直 (vertical)	[1 ± 1 0 0]
	±45°	[1 0 ± 1 0]
圆偏振	右旋和左旋	[1 0 0 ± 1]

现实中, 即使是单色性 (monochromatic) 很好的辐射波束也是由有限波列 (finite wave trains) 叠加而成的, 因而根据 Fourier 定理, 它包含一个频率范围, 即不完全是单色的. 这时可观测的 Stokes 参数就在一个较长时间尺度上的平均, 比如:

$$s_2 = 2 \langle a_1 a_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) \rangle,$$

求平均的结果是: 准单色波束的 Stokes 参数满足不等式:

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2,$$

无偏振 (unpolarized) 光或自然光 (natural light):  $\mathbf{E}$  由无数个无规则取向的偏振光叠加, 各方向振幅相同, 因此  $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ , Stokes 参数为

$$[1 0 0 0].$$

### 定义 6.2.2: 偏振度

定义偏振度是总光强  $I_{\text{tot}}$  中椭圆偏振的成分  $I_{\text{elp}}$  占比:

$$P := \frac{I_{\text{elp}}}{I_{\text{tot}}} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}{s_0},$$

显然  $0 \leq P \leq 1$ ,

**推论.** 依偏振度分类:

- $P = 1$  对应完全偏振光;
- $P = 0$  对应无偏振光;
- $0 < P < 1$  对应部分偏振光 (partially polarized), 这时尽管  $\mathbf{E}$  含有各种振动方向的光矢量, 但在某一方向更显著, 不难表达为无偏振光和完全偏振光的叠加:

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_{\text{pp}} = (1 - P) \begin{bmatrix} s_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{unp}} + P \begin{bmatrix} s_0 \\ s'_1 \\ s'_2 \\ s'_3 \end{bmatrix}_{\text{elp}}.$$

**Stokes 参数的测量** Stokes 参数在场强上是二次的, 只能通过强度测量来确定, 并结合:

- 线偏振器 (linear polarizer): 利用物质的材料特性让透射光只有沿着特定方向偏振的分量透过;
- $1/4$  波片 (quarter waveplate): 利用了晶体的双折射 (birefringence) 现象<sup>1</sup>使得 o 光和 e 光产生相位差, 控制波片厚度便可以使线偏振光变成圆偏振光.

如果线偏振器与入射光偏振方向夹角为  $\theta$ , 波片的相位差为  $\phi$ , 则出射光的光强为

$$I(\theta, \phi) = \frac{1}{2}(s_0 + s_1 \cos 2\theta + s_2 \sin 2\theta \cos \phi - s_3 \sin 2\theta \sin \phi),$$

由此可以利用线偏振器和  $1/4$  波片, 通过测量 4 次出射光强来得到 4 个 Stokes 参数:

- 线偏振器  $\theta = 0$ :  $I(0, 0) = (s_0 + s_1)/2$ ;
- 线偏振器  $\theta = 90^\circ$ :  $I(90^\circ, 0) = (s_0 - s_1)/2$ ;
- 线偏振器  $\theta = 45^\circ$ :  $I(45^\circ, 0) = (s_0 + s_2)/2$ ;
- 线偏振器  $\theta = 45^\circ + 1/4$  波片:  $I(45^\circ, 45^\circ) = (s_0 - s_3)/2$ .

### 例 6.2.1: Stokes 参数的应用: 蟹状星云辐射的偏振态

在天体物理中, 蟹状星云中的脉冲星发来的可见光频和射频 (radiofrequency) 辐射可以用 Stokes 参数描写偏振态. 光频辐射显示出微小的线偏振, 而  $\omega \simeq 2.5 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$  的射频辐射有高度的线偏振. 但两个频段均没有圆偏振的迹象. 这类资料有助于阐明这些迷人天体发出辐射的机理.

<sup>1</sup>一束光线进入某些晶体会产生两束折射光. 改变入射角, 其中一束光在晶体内的光速各向同性, 称为 o 光 (ordinary); 而另一束光的光速各向异性, 称为 e 光 (extraordinary).

### 6.3 反射与透射

平面电磁波入射 (incident) 到不同媒质的分界面上会发生反射 (reflect) 和透射 (transmit)<sup>II</sup>. 下面我们研究这种现象的规律.

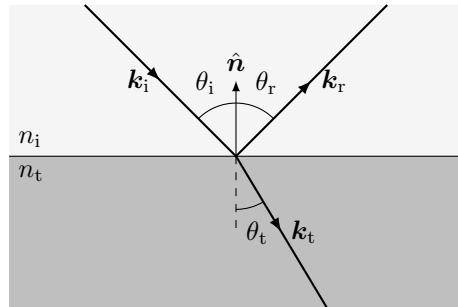


图 6.4: 入射波、反射波和透射波

**反射定律和折射定律** 入射波、反射波和透射波的波数分别为  $k_i, k_r, k_t$ . 由前文的结论, 边界上电场的切向分量是连续的:

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}.$$

上式对任意  $t$  均成立, 因此光在任意介质中都具有相同的频率:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega, \quad (6.15)$$

又上式对于分界面上的任意一点均成立, 故  $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_t$  在分界面上任意一点的相位差均相同, 故  $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_r, \mathbf{k}_t$  三线共面, 且三者的切向分量相等:

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t, \quad (6.16)$$

#### 定理 6.3.1: 反射定律

入射波与反射波在同一介质中, 当然有  $k_i = k_r$ , 故入射角  $\theta_i$  和反射角  $\theta_r$  相等:

$$\theta_i = \theta_r; \quad (6.17)$$

入射波与折射波在不同介质中, 角度的正弦与波数成反比:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_i},$$

但二者频率相同, 对波矢同乘  $c/\omega$  得到一个无量纲参数:

#### 定义 6.3.1: 折射率

将光速与相速度的比值称为折射率 (index of refraction)

$$n := \frac{c}{v_\varphi} \geq 1, \quad (6.18)$$

<sup>II</sup>也称为折射 (refract).

**定理 6.3.2: Snell 定律**

入射角  $\theta_i$  和折射角  $\theta_t$  的正弦与折射率成反比:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t. \quad (6.19)$$

**电磁分量的变化** 定义振幅的反射系数 (reflection coefficient) 和透射系数 (transmission coefficient):

$$r := \frac{E_r}{E_i}, \quad t := \frac{E_t}{E_i}.$$

**定理 6.3.3: Stokes 倒逆关系**

定义  $r_{ij}, t_{ij}$  分别表示从介质  $i$  入射介质  $j$  的反射系数和透射系数, 由光路可逆

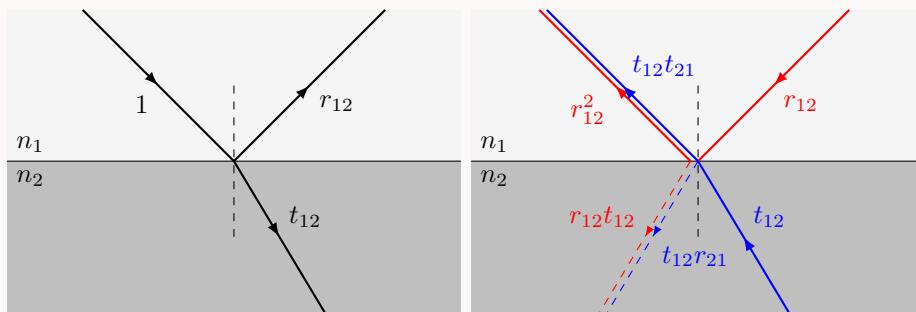


图 6.5: Stokes 倒逆关系示意图

可得

$$r_{21} = -r_{12} \quad (6.20a)$$

$$r_{12}^2 + t_{12}t_{21} = 1. \quad (6.20b)$$

由边界上:  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{B}$  法向分量连续,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  切向分量连续. 我们可以求出  $r, t$  的表达式. 根据入射面 (入射光线与法线确定的平面) 与  $\mathbf{E}_i$  的关系可以分成两种独立情形:

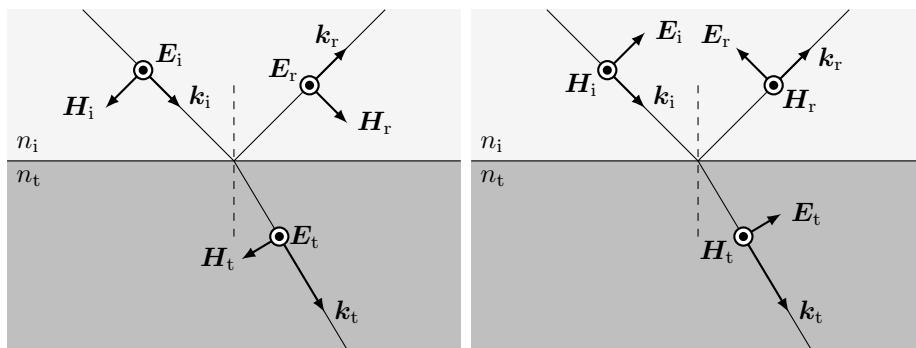


图 6.6: 垂直极化波和平行极化波

1. 垂直极化波 (senkrecht polarized):  $\mathbf{E}_i$  与入射面垂直 (即  $\mathbf{E}_i$  垂直纸面向外)

$$E_i + E_r = E_t,$$

$$H_i \cos \theta_i - H_r \cos \theta_r = H_t \cos \theta_t,$$

2. 平行极化波 (parallel polarized):  $\mathbf{E}_i$  与入射面平行 (或者说  $\mathbf{H}_i$  垂直纸面向外)

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t,$$

$$H_i + H_r = H_t,$$

电介质通常满足  $\mu_i = \mu_r \approx \mu_t \approx \mu_0$ , 因此  $r, t$  的表达式为:

#### 定理 6.3.4: Fresnel 公式

对于垂直极化波,  $1 + r_{\perp} = t_{\perp}$ :

$$r_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \quad (6.21a)$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}; \quad (6.21b)$$

对于平行极化波,  $1 + r_{\parallel} = t_{\parallel} \cdot n_t / n_i$ :

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}, \quad (6.22a)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}. \quad (6.22b)$$

利用 Snell 定律 (6.19),  $r, t$  便完全由折射率之比  $n_i/n_t$  与入射角  $\theta_i$  决定.

#### 例 6.3.1: Brewster 角

对于平行极化波, 存在一个特殊的入射角  $\theta_i$  使得  $r_{\parallel} = 0$ , 称为 Brewster 角:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right). \quad (6.23)$$

在 Brewster 角下, 平行极化波可以发生全透射, 因此加了偏振镜的相机可以拍出更通透的照片:

- 空气折射率  $n_i = 1$ , 玻璃的折射率  $n_t = 1.5$ , 得到  $\theta_B = 56.31^\circ$ ;
- 水折射率  $n_t = 4/3$ , 得到  $\theta_B = 53.13^\circ$ .

**全反射** 前面的讨论在绝大部分上只限于外反射 ( $n_i < n_t$ ), 即光疏介质入射光密介质. 相反的情况是内反射 ( $n_i > n_t$ ), 这时  $\theta_i < \theta_t$ . 考虑  $\theta_t \geq 90^\circ$ , 即光疏介质没有折射光, 我们称之为全反射 (total internal reflection), 由 Snell 定律, 全反射的临界角

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_t}{n_i}\right). \quad (6.24)$$

发生全反射时,  $\theta_i > \theta_c$ , 折射角的正弦

$$\sin \theta_t = \frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_c} > 1,$$

则  $\cos \theta_t$  是纯虚的,

$$e^{ik' \cdot r} = e^{ik_t(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)},$$

此时折射波在光疏介质内仅平行于表面传播，并在垂直方向上呈指数衰减，Poynting 矢量的法向分量在时间平均上为 0:

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{n}}] = \frac{1}{2\omega\mu'} \operatorname{Re}[(\mathbf{k}' \cdot \hat{\mathbf{n}}) |\mathbf{E}'_0|^2] = 0.$$

**Goos-Haenchen 效应** 发生全反射时，光疏介质中的倏逝波 (evanescent wave) 在垂直方向上以  $e^{-z/\delta}$  衰减，其中

$$\delta^{-1} := k' \sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}.$$

如果有限横向范围内的光束经历全反射，则反射光将相对几何反射光束出现横向偏移。对于线偏振光，偏移的距离称为 Goos-Haenchen 偏移

$$D \simeq 2\delta \sin \theta_i.$$

**Fresnel 菱体** 发生全反射时，反射光相对入射光的相位差为  $n_t \cos \theta_t$ ，是一个纯虚数，与入射角  $\theta_i$  和折射率  $n_i, n_t$  有关，这种相位差可以用来将一种偏振态的光转化为另一种偏振态，Fresnel 菱体 (rhombus) 便是以此为原理，将垂直于表面入射的线偏振光转换为出射的圆偏振光。

经过复杂的计算，如果要实现此效果，需要满足

$$\cos^2 \theta_i + \frac{n_t^2}{n_i^2} \sin^2 \theta_i - 1 = \pm 2(n_t^2 - n_i^2) \cos \theta_i^2 \sqrt{\frac{n_t^2}{n_i^2} \sin^2 \theta_i - 1},$$

玻璃的折射率  $n = 1.5$ ，因此内反射角位  $50.2^\circ$  或  $53.3^\circ$  即可满足条件。

## 6.4 色散

所有介质都表现出一定的色散性，只有在有限的频率范围内，或在真空中，光的传播速度才能被视为常量。

色散的应用：能量啁啾 (chirped pulse amplification)。

**色散的简单模型** 我们忽略外加电场和局部电场之间的区别。因此，该模型只适用于密度相对较低的物质。忽略磁场所力，由谐波力束缚和由电场作用的电荷电子的运动方程为：

$$-m_e \omega_0^2 \mathbf{r} - m_e \gamma \dot{\mathbf{r}} - e \mathbf{E} = m_e \ddot{\mathbf{r}}.$$

$-m_e \omega_0^2 \mathbf{r}$  是回复力 (restoring force)， $-m_e \gamma \dot{\mathbf{r}}$  是唯象的阻尼力 (damping force)。如果振幅足够小，便可以计算电子平均位置的电场。场随频率  $\omega$  的简谐  $e^{-i\omega t}$  变化。则由一个电子贡献的偶极矩为：

$$\mathbf{p} = -e \mathbf{r} = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \mathbf{E}.$$

从微观到宏观，单位体积内有  $N$  个分子，每个分子有  $Z$  个电子；我们将分子中的电子分类，第  $j$  组有  $f_j$  个特性相同的电子，其结合频率为  $\omega_j$ ，阻尼常数为  $\gamma_j$ 。代入  $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}$  和  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$  得到

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}, \quad (6.25)$$

在量子力学中， $f_j, \omega_j, \gamma_j$  都有合适的定义，因此上面的方程准确地描述了原子对介电常数的贡献。我们称  $f_j$  为振子强度 (oscillator strength)， $\omega_j$  为共振频率 (resonant frequency)。

通常  $\gamma_j \ll \omega_j$ ，上式可约化为

$$\varepsilon_r(\omega) \simeq 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2},$$

对于  $\omega < \min(\omega_j)$  的低频率下，和的贡献是正的， $\varepsilon_r > 1$ ；随着频率的增加，它将穿过越来越多的  $\omega_j$ ，求和将从正到负，最后  $\varepsilon_r < 1$ 。

**反常色散和共振吸收** 当  $\omega$  在共振频率  $\omega_j$  附近时，

$$\varepsilon_r(\omega) \simeq 1 + i \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega\gamma_j},$$

$\varepsilon_r$  的虚部是可观的，由于  $\varepsilon_r$  的正虚部表示电磁波向介质中产生的能量耗散，因此  $\text{Im}[\varepsilon_r(\omega)]$  较大的区域称为共振吸收 (resonant absorption) 区域。

回忆第 5.4.1 节中线性色散介质中的 Poynting 定律 (5.26)，考虑平面波的衰减 (attenuation)，波数是一个复数

$$k = \beta + i\frac{\alpha}{2}.$$

其中  $\alpha$  是衰减常数或吸收系数，波的强度随  $e^{-\alpha z}$  衰减，且  $\alpha \ll \beta$ 。由

$$k \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r}, \implies \begin{cases} \alpha \simeq \frac{\text{Im}(\varepsilon_r)}{\text{Re}(\varepsilon_r)} \beta, \\ \beta \simeq \frac{\omega}{c} \sqrt{\text{Re}(\varepsilon_r)}. \end{cases}$$

**低频表现，电导** 在低频极限  $\omega \rightarrow 0$  下，如果每个分子中电子的某些  $f_0$  是自由的，即  $\omega_0 = 0$ ，则  $\varepsilon_r$  在  $\omega = 0$  处是奇异的。

如果自由电子的贡献被分别显示出来，

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b(\omega) + i \frac{Ne^2 f_0}{m_e \omega (\gamma_0 - i\omega)},$$

其中  $\varepsilon_b$  体现其他偶极子的贡献。

#### 定义 6.4.1: 电导率

引入电导率 (conductivity)  $\sigma$  的概念，体现电流密度与电场强度的关系：

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (6.26)$$

这也称为 Ohm 定律 ( $I = U/R$ ) 的微观表达式。

式 (5.27d) 变为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} - i\omega \mathbf{D}.$$

而  $\mathbf{D} = \epsilon_b \mathbf{E}$ , 故电导率也是一个复数:

$$\sigma = \frac{f_0 N e^2}{m_e (\gamma - i\omega)}, \quad (6.27)$$

#### 例 6.4.1: 铜的电导率

铜的参数为

$$N = 8 \times 10^{28} \text{ m}^3,$$

$$\sigma = 5.9 \times 10^7 \Omega \cdot \text{m}.$$

由此得到  $\gamma_0/f_0 \simeq 4 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ , 而  $f_0 \sim 1$ , 因此当  $\omega \leq 10^{11} \text{ s}^{-1}$  时, 铜的导电率是实数, 并且与频率无关.

**高频极限, 等离子体频率** 在  $\omega \gg \max(\omega_j)$  的高频下,

$$\epsilon_r(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

$\omega_p$  是介质的等离子体频率 (plasma frequency)

$$\omega_p^2 = \frac{NZe^2}{\epsilon_0 m_e}, \quad Z = \sum_j f_j. \quad (6.28)$$

仅取决于总电子密度  $NZ$ .

#### 例 6.4.2: 地球电离层的短波全反射

电离层中, 电子均是自由的且阻尼可忽略不计. 对于  $\omega < \omega_p$  的情形,  $\epsilon_r \simeq 1 - \omega_p^2/\omega^2$  的关系仍成立, 此时

$$ck = \omega \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

是纯虚的. 因此低频电磁波会被电离层反射.

地球电离层的电子密度  $NZ = 10^{18} - 10^{22} \text{ m}^3$ , 故等离子体频率  $\omega_p \simeq 6 \times 10^{10} - 6 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega = 0$  的衰减常数  $\alpha^{-1} = 0.2 - 2 \times 10^{-3} \text{ cm}$ .

#### 例 6.4.3: 金属的紫外透射现象

对于  $\omega \ll \omega_p$ , 光被完全反射; 当频率  $\omega$  增加到  $\epsilon_r(\omega) > 0$  的区间, 金属便突然可以透射光, 其反射率变化得很剧烈 (drastically), 这称为紫外透射 (ultraviolet transparency) 现象.

**水的折射率和吸收系数随频率的变化** 在可见光范围内, 水的折射率  $n \sim 1.34$ , 吸收系数  $\alpha$  骤降至一个很低的值.

## 6.5\* 在电离层和磁层中的传播模型

电磁波对等离子体中的传播会受到外部磁场的显著影响.

略

## 6.6 群速度

如果介质是色散的，则波的每个频率分量的相速度都不相同，能流的速度可能与相位的速度有很大的不同，甚至缺乏精确的意义.

**一维标量波** 一维中的标量波的通解为

$$u(x, t) = a e^{i(kx - \omega t)} + b e^{i(-kx - \omega t)},$$

由色散性质， $\omega = \omega(k)$  是波数的函数. 将标量波表示成 Fourier 变换的形式

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk,$$

$A(k)$  描述了不同波的线性叠加的性质，

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx,$$

对于一个单色行波， $u(x, 0) \sim e^{ik_0 x}$ ，则  $A(k) = \sqrt{2\pi} \delta(k - k_0)$ ，从而  $u(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$ .

**有限波列、群速度** 对于一个有限波列 (wave train)， $x, k$  平均值的均方根偏差  $\Delta x, \Delta k$  满足 Fourier 带宽 (bandwidth) 定律

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}, \quad (6.29)$$

如果一个脉冲的波数谱不太广，或者一个介质中的频率对波数的依赖性较弱，则  $\omega(k)$  可以被展开

$$\omega(k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 (k - k_0) + \dots$$

得到

$$u(x, t) \simeq u\left(x - t \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0, 0\right) \exp\left[i\left(k_0 \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 - \omega_0\right)t\right],$$

除了一个整体的相位因子，脉冲以一种没有失真的 (undistorted) 速度传播，称为群速度 (group velocity)

$$v_g := \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0, \quad (6.30)$$

对于光波，以折射率  $n(k)$  表示更方便：

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)},$$

相速度

$$v_\varphi = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)},$$

群速度

$$v_g = c \left( \frac{1}{n} - \frac{k}{n^2} \frac{dn}{dk} \right) = \frac{c}{n} - \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} v_g,$$

得到

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}, \quad (6.31)$$

群速度可以大于光速吗？ 随着频率  $\omega$  的增大，经过一系列共振频率，折射率  $n(\omega)$  将在 1 附近出现上升和下降的变化，我们称上升段为正常色散，下降段为反常色散 (anomalous dispersion)，由群速度  $v_g$  和  $dn/d\omega$  的关系 (6.31)，在反常色散中群速度是可以超越光速的，但这并不违反相对论，个人的解释是这种群速度是波包的速度，并不传递信息。<sup>III</sup>

**进一步讨论群速度的有效性** 考虑频率对波数依赖的特定模型，并在不近似的情况下计算脉冲在该模型介质中的传播。 $t=0$  时标量波的初始值和初始变化率为  $u(x, 0), \dot{u}(x, 0)$ ，则

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ u(x, 0) + i \frac{\dot{u}(x, 0)}{\omega(k)} \right] e^{-ikx} dx,$$

#### 例 6.6.1: Gauss 波包

考虑初始为 Gauss 调制振荡：

$$u(x, 0) = e^{-x^2/2L^2} \cos(k_0 x),$$

若假设  $\dot{u}(x, 0) = 0$ ，则

$$u(x, t) = e^{-x^2/2L^2} \cosh(kx - \omega t);$$

假设

$$\omega(k) = v \left( 1 + \frac{a^2 k^2}{2} \right),$$

则群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0) = v a^2 k_0.$$

## 6.7 $D$ 和 $E$ 之间的因果关系

静态电磁场

$$D_\alpha = \epsilon_0 E_\alpha + P_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots$$

若考虑时间，会发生什么变化？

**时间非局域性** 在色散介质中， $\epsilon(\omega)$  对频率  $\omega$  的依赖会导致  $D(r, t)$  和  $E(r, t)$  的临时性非局域联系。对于  $\omega$  的单色成分，

$$\hat{D}(r, \omega) = \epsilon(\omega) \hat{E}(r, \omega),$$

---

<sup>III</sup> 唐老师课上讲的词忘了。

Fourier 变换得到

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') e^{i\omega t'} dt' \right] e^{-i\omega t} d\omega,$$

假设积分的次序可以交换, 可以得到

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) G(\tau) d\tau \right], \quad (6.32)$$

其中

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varepsilon_r(\omega) - 1] e^{-i\omega\tau} d\omega,$$

因此  $t$  时刻的  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  依赖除  $t$  以外的电场  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau)$ . 若  $\varepsilon$  是不依赖于  $\omega$  的, 则

$$G(\tau) = (\varepsilon_r - 1) \delta(\tau), \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  有瞬时的联系; 但如果  $\varepsilon(\omega)$  随  $\omega$  变化, 则  $G(\tau)$  在  $\tau \neq 0$  的一些地方也不会消失.

$G(\tau)$  的简单模型 假设所有的电子都以一个频率  $\omega_0$  振荡, 则

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega},$$

即

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega.$$

被积函数在  $\omega$  的下半平面上有两个奇点

$$\omega_{\pm} = -i\frac{\gamma}{2} \pm \nu_0, \quad \nu_0^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}.$$

利用复变函数中对留数的处理, 得到

$$G(\tau) = \omega_p^2 \frac{\sin \nu_0 \tau}{\nu_0} e^{-\gamma \tau / 2}, \quad \tau > 0.$$

若没有上述假设,  $G(\tau)$  也仅仅是上式的线性组合. 因此,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  之间连接上的非局域性被限制在  $\gamma^{-1}$  的时间内. 而  $\gamma^{-1}$  的典型值  $10^{-9}$  s.

上面的方程在时间 (而非空间) 上是非局部的.

$\varepsilon(\omega)$  的因果性和分析性域  $\tau < 0$  时  $G(\tau) = 0$ . 说明只有在  $t$  时间之前的电场  $\mathbf{E}$  进入以确定电位移  $\mathbf{D}$ , 这符合我们在物理现象中的因果关系的基本思想.

假设: 空间局域、线性、因果关系, 均匀各向同性介质.

**Kramers-Kronig 关系** 由 Cauchy 定理

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(\omega) - 1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega - i\delta} d\omega' \end{aligned}$$

由 Sokhotski-Plemelj 定理

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\delta} = \text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) \mp i\pi \delta(x),$$

故

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi i} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

由  $\text{Re}[\varepsilon_r(\omega)]$  为偶,  $\text{Im}[\varepsilon_r(\omega)]$  为奇, 得到 Kramers-Kronig 关系

$$\begin{aligned} \text{Re}[\varepsilon_r(\omega)] &= 1 + \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}[\varepsilon_r(\omega)]}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \text{Im}[\varepsilon_r(\omega)] &= -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}[\varepsilon_r(\omega)] - 1}{\omega' - \omega} d\omega' \end{aligned} \quad (6.33)$$

或

$$\begin{aligned} \text{Re}[\varepsilon_r(\omega)] &= 1 + \frac{2}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \text{Im}[\varepsilon_r(\omega)]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \text{Im}[\varepsilon_r(\omega)] &= -\frac{2\omega}{\pi} \text{P.V.} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re}[\varepsilon_r(\omega)] - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \end{aligned} \quad (6.34)$$

Kramers-Kronig 关系具有非常普遍的有效性, 这仅仅是根据极化和电场之间的因果关系 (6.32) 的假设而得出的.

对于  $\omega = \omega_0$  处的一条非常窄的吸收线或吸收带, 由

$$\begin{aligned} \text{Im}[\varepsilon_r(\omega)] &\simeq \frac{\pi K}{2\omega_0} \delta(\omega' - \omega_0) + \dots \\ \text{Re}[\varepsilon_r(\omega)] &\simeq \bar{\varepsilon} + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2}, \end{aligned}$$

后略.

# 第七章 波导

本章我们研究金属边界下的电磁场，这是一个相当重要且实用的题材。因为在波长为米量级（或更短）的高频情况下，只有利用线度与波长相当的金属结构才能有效产生和发送电磁波。我们在本章里先考虑在一个导体附近的场，并讨论场对表面的穿透以及伴随的电阻损失。然后讨论了一般的波导和谐振腔中的电磁波等问题，并进行了具体说明。用两种不同观点讨论波导中的衰减和谐振腔的  $Q$  值。

## 7.1 导体表面和内部的场

理想导体 (perfect conductor) 和超导体 (superconductor) 的异同？最大的不同是不存在理想导体，但存在超导体。

**理想导体** 由于理想导体内部的电荷会随着场的变化而瞬间移动，故其内部是没有电场的。其表面电荷密度  $\varsigma$  (此处符号与电导率  $\sigma$  区分) 和表面电流密度  $\mathbf{j}$  由理想导体外的法向电位移  $\mathbf{D}$  和切向磁场  $\mathbf{H}$  给出：

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D} = \varsigma, \quad (7.1a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (7.1b)$$

法向量  $\hat{\mathbf{n}}$  指向理想导体外部。其余两个边界条件是关于法向  $\mathbf{B}$  和切向  $\mathbf{E}$  的：

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_c) = 0, \quad (7.2a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_c) = \mathbf{0}. \quad (7.2b)$$

下标 c 表示导体。由此可见：在理想导体表面，仅存在法向电场  $\mathbf{E}$  和切向磁场  $\mathbf{H}$ ，并且这两个场在理想导体内骤降为 0。

**良导体** 非理想的良导体的电导率  $\sigma$  有限，其内部会存在电场，且振幅随趋肤深度 (skin depth) 指数衰减：

$$\delta := \sqrt{\frac{2}{\mu_c \omega \sigma}}. \quad (7.3)$$

而 Ohm 定律  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  说明表面没有电流  $\mathbf{j}$ ：

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_c) = \mathbf{0},$$

由于场在垂直于表面的方向上的空间变化比平行方向快得多，因此和法向导数相比，切向导数可以忽略。若  $\xi$  表示导体向内的法向坐标，则

$$\nabla \simeq -\hat{\mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

忽略导体内的位移电流，谐振场的 Maxwell 方程变为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_c &\simeq \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{H}_c \simeq -\frac{1}{\sigma} \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial \xi}, \\ \mathbf{H}_c &= -i \frac{1}{\mu_c \omega} \nabla \times \mathbf{E}_c \simeq i \frac{1}{\mu_c \omega} \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\partial \mathbf{E}_c}{\partial \xi}.\end{aligned}$$

变形得到

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + i \frac{2}{\delta^2} \right) (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_c) &\simeq \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_c &\simeq 0.\end{aligned}$$

第二个方程说明：导体内  $\mathbf{H}$  平行于表面，这与边界条件相符。解得

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_{\parallel} e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta}. \quad (7.4)$$

$\mathbf{H}_{\parallel}$  是导体外表面的切向磁场，则导体内电场

$$\mathbf{E}_c \simeq \sqrt{\frac{\mu_c \omega}{2\sigma}} (1 - i) (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{\parallel}) e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta}. \quad (7.5)$$

故导体内的  $\mathbf{H}_c$  和  $\mathbf{E}_c$  与表面平行，大小随指数迅速衰减，二者有相位差，且磁场所比电场强得多。在表面外侧，除了法向的  $\mathbf{E}$  和切向的  $\mathbf{H}$  外，还有  $\mathbf{E}$  的一个微小的切向分量存在。这意味着有功率流入导体，每单位面积吸收功率的时间平均为

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{da} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)] = \frac{\mu_c \omega \delta}{4} |\mathbf{H}_{\parallel}|^2. \quad (7.6)$$

可把这个结果简单地解释为导体内的 Ohm 损失。每单位体积内 Ohm 损失率的时间平均为

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{dV} = \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^* = \frac{\sigma}{2} |\mathbf{J}|^2.$$

由于电流密度  $\mathbf{J}$  局限于导体表面下的薄层内，其等效有效面电流密度为

$$\mathbf{j}_{\text{eff}} := \int_0^{+\infty} \mathbf{J} d\xi = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{\parallel}. \quad (7.7)$$

其形式与理想导体 (7.1b) 相同，只是理想面电流密度  $\mathbf{j}$  换成了等效面电流密度  $\mathbf{j}_{\text{eff}}$ 。功率损失可以用等效面电流密度表示：

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{da} = \frac{1}{2\sigma\delta} |\mathbf{j}_{\text{eff}}|^2. \quad (7.8)$$

可定义等效表面电阻  $R_s = 1/\sigma\delta$ 。因此，只要我们解出理想导体边界的场，就可以通过 (7.7) 和 (7.8) 给出的  $\mathbf{j}_{\text{eff}}$  近似地算出实际波导、谐振腔和传输线的电阻损失。

## 7.2 柱形波导和谐振腔

本章研究电磁波在中空金属柱体内的传播和激发. 如果柱体具有端面, 就叫做谐振腔 (cavity), 否则就叫做波导 (waveguide). 本节考虑理想导体作为边界, 在实际应用中发生的能力损失, 可用上一节的方法来估计.

柱体内是介电常数  $\epsilon$ 、磁导率  $\mu$  的均匀非耗散介质. 当柱体内的场具有谐振关系  $e^{-i\omega t}$  时, Maxwell 方程组可化为以下形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (7.9a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7.9b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (7.9c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -i\mu\epsilon\omega \mathbf{E}. \quad (7.9d)$$

得到 Helmholtz 方程:

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2) \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

假定柱形曲面  $S$  的截面形状和大小沿轴不变, 称轴线方向为纵向 (longitudinal), 垂直于纵向的方向为横向 (transverse). 由边界限制, 单独考虑纵向 ( $z$  轴) 的空间变化:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y) e^{i(\pm k_z z - \omega t)},$$

通过线性组合可以给出纵向的行波或驻波. 目前, 纵向波数  $k_z$  是一个未知参数, 它可能是实数也可能是复数. 假定了场对  $z$  有上述依赖关系后, 波动方程就简化为二维形式:

$$(\nabla_t^2 + \mu\epsilon\omega^2 - k_z^2) \mathbf{E} = 0, \quad (7.10)$$

其中  $\nabla_t^2$  表示 Laplace 算符的横向部分:

$$\nabla^2 =: \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

将场分解为横向和纵向两个分量  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z$ , 有

$$\mathbf{E}_t = (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (7.11a)$$

$$\mathbf{E}_z = E_z \hat{\mathbf{z}}, \quad (7.11b)$$

Maxwell 方程组变为

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (7.12a)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{B}_t + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (7.12b)$$

$$\nabla_t E_z - \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_t, \quad (7.12c)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = i\omega \mathbf{B}_z, \quad (7.12d)$$

$$\nabla_t B_z - \frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} = -i\mu\epsilon\omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t, \quad (7.12e)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) = i\mu\epsilon\omega \mathbf{E}_z. \quad (7.12f)$$

结合纵向波数的关系式 (7.10),  $\mathbf{E}_t, \mathbf{B}_t$  可以被  $E_z, B_z$  确定

$$\mathbf{E}_t = i \frac{1}{\mu \varepsilon \omega^2 - k_z^2} (k_z \nabla_t E_z - \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t B_z), \quad (7.13a)$$

$$\mathbf{B}_t = i \frac{1}{\mu \varepsilon \omega^2 - k_z^2} (k_z \nabla_t B_z + \mu \varepsilon \omega \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t E_z), \quad (7.13b)$$

**TEM 模式** 在讨论中空柱体内可以存在的各种场之前, 我们先介绍简并型或特殊型解: 横电磁 (transverse electromagnetic, TEM) 波. 这种解只有垂直于传播方向的横场分量,  $E_z = B_z = 0$  且

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_{\text{TEM}} = 0, \quad (7.14a)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_{\text{TEM}} = \mathbf{0}, \quad (7.14b)$$

因此  $\mathbf{E}_{\text{TEM}}$  是二维静电问题的一个解. 纵向波数就是无限介质中的波数

$$k_z = k_0 := \omega \sqrt{\mu \varepsilon}, \quad (7.15)$$

磁场

$$\mathbf{B}_{\text{TEM}} = \pm \sqrt{\mu \varepsilon} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\text{TEM}},$$

电导率为无穷大的单个中空柱形导体内不可能存在 TEM 模. 为了运载 TEM 模, 必须有两个及以上的等势面 (比如同轴线). TEM 模的一个重要性质是不存在截止频率, 即任意  $\omega$  均可以传播 ( $k_z$  均是实数).

**TE 模式和 TM 模式** 横电 (TE) 波和横磁 (TM) 波是在中空柱体内 (以及高频时的传输线上) 出现两类场的构型, 可以通过纵向分量  $E_z$  和  $B_z$  满足的波动方程以及边界条件得到. 对于理想导电柱体, 边界上电场为法向, 磁场为切向:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (7.16a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7.16b)$$

由于  $E_z$  和  $B_z$  边界条件不同, 所以本征值一般是不同的, 场自然可分为两种模式:

- TM 模式: 磁场为横向 ( $B_z = 0$ ), 边界条件:

$$E_z|_S = 0; \quad (7.17)$$

- TE 模式: 电场为横向 ( $E_z = 0$ ), 边界条件:

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_S = 0, \quad (7.18)$$

### 7.3 波导

由 (7.12), TM 波和 TE 波的横磁场和横电场的关系如下:

$$\mathbf{H}_t = \pm \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\mathbf{E}_t}{Z},$$

式中  $Z$  定义为波阻抗 (wave impedance):

$$Z := \begin{cases} \frac{k_z}{\varepsilon\omega} = \frac{k_z}{k_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, & \text{TM} \\ \frac{\mu\omega}{k_z} = \frac{k_0}{k_z} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, & \text{TE} \end{cases}$$

这里  $k_0$  由 (7.15) 给出. 特别地, 自由空间阻抗 (impedance of free space) 为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c \simeq 120\pi \Omega \quad (7.19)$$

横向场可由纵向场决定

$$\text{TM : } \mathbf{E}_t = \pm i \frac{k_z}{k_c^2} \nabla_t \psi, \quad E_z = \psi e^{\pm ik_z z}; \quad (7.20a)$$

$$\text{TE : } \mathbf{H}_t = \pm i \frac{k_z}{k_c^2} \nabla_t \psi, \quad H_z = \psi e^{\pm ik_z z}. \quad (7.20b)$$

其中  $k_c^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - k_z^2$ . 标量函数  $\psi$  满足二维波动方程

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)\psi = 0, \quad (7.21)$$

根据边界条件:

$$\text{TM : } \psi|_S = 0;$$

$$\text{TE : } \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_S = 0.$$

可以确定一系列本征值  $k_{ci}$  和本征函数  $\psi_i$ , 这些不同的解称为波导的模式 (mode).

### 定义 7.3.1: 截止频率

定义单个模式的截止频率 (cutoff frequency):

$$\omega_c := \frac{k_c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad (7.22)$$

相应的波长  $\lambda_c$  称为截止波长.

对于给定的频率  $\omega$ , 单个模式对应的波数

$$k_z = \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}. \quad (7.23)$$

截止频率的意义为:

- 当  $\omega > \omega_c$  时,  $k_z^2 > 0$ , 模式可以在波导中传播;
- 当  $\omega < \omega_c$  时,  $k_z^2 < 0$ , 模式不能在波导中传播.

因此给定频率上, 只有有限个模式可以传播. 可以通过选择波导的尺寸, 使得在使用频率上只能出现最低模式的波.

**色散关系** 均匀介质波导中的波数  $k_z$  总是小于无限空间中的波数  $k_0$ , 因此相速度  $v_\varphi$  大于无限空间中的光速:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}} > \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

而群速度小于光速，并且在介质频率处为 0：

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} < \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

因此并不违反相对论，并且有关系

$$v_\varphi v_g = \frac{1}{\mu\varepsilon}. \quad (7.24)$$

$\omega - k_z$  的关系称为色散曲线，曲线上的点的幅角是相速度，切线斜率是群速度。在均匀传输系统中是双曲线。

### 7.3.1 矩形波导

在内尺寸为  $a, b$  的矩形波导中（不失一般性取  $a > b$ ），如图 7.1 所示：

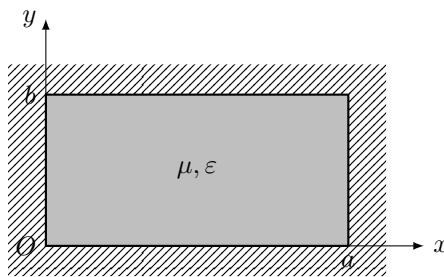


图 7.1: 矩形波导

采用直角坐标，波动方程 (7.21) 为：

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) \psi = 0, \quad (7.25)$$

分离变量  $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$  可得

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x), \\ Y(y) &= C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y). \end{aligned}$$

满足  $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$ ，故

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 = \mu\varepsilon\omega^2. \quad (7.26)$$

**TE 模式**  $E_z = 0, H_z = \psi$ ，边界上  $\partial\psi/\partial n = 0$  可得

$$\psi_{mn} = A \cos(k_x x) \cos(k_y y), \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (7.27)$$

截止频率为

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (7.28)$$

其中  $m, n$  不同时为 0，则 TE 模式的最低截止频率为  $\text{TE}_{10}$ ，对应的

$$\omega_{10} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}a}, \quad \lambda_{10} = 2a \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}.$$

由 (7.20b) 和 (7.13a), 场的表达式为:

$$H_x = -i \frac{k_z k_x}{k_c^2} H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (7.29a)$$

$$H_y = -i \frac{k_z k_y}{k_c^2} H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (7.29b)$$

$$H_z = H_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (7.29c)$$

$$E_x = -i \frac{\omega \mu k_y}{k_c^2} H_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (7.29d)$$

$$E_y = i \frac{\omega \mu k_x}{k_c^2} H_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (7.29e)$$

$$E_z = 0. \quad (7.29f)$$

虚数单位  $i$  说明传播方向上  $\mathbf{H}_t, \mathbf{E}_t$  与  $H_z$  有  $90^\circ$  的相位差.

由此便可画出不同 TE 模式的电场线和磁场线. 如图 7.2 所示为  $xy$  截面, 蓝色实线是电场线、红色虚线是磁场线 (的投影). 注意磁场线不接触内壁, 而是会在  $z$  方向延伸形成回路.

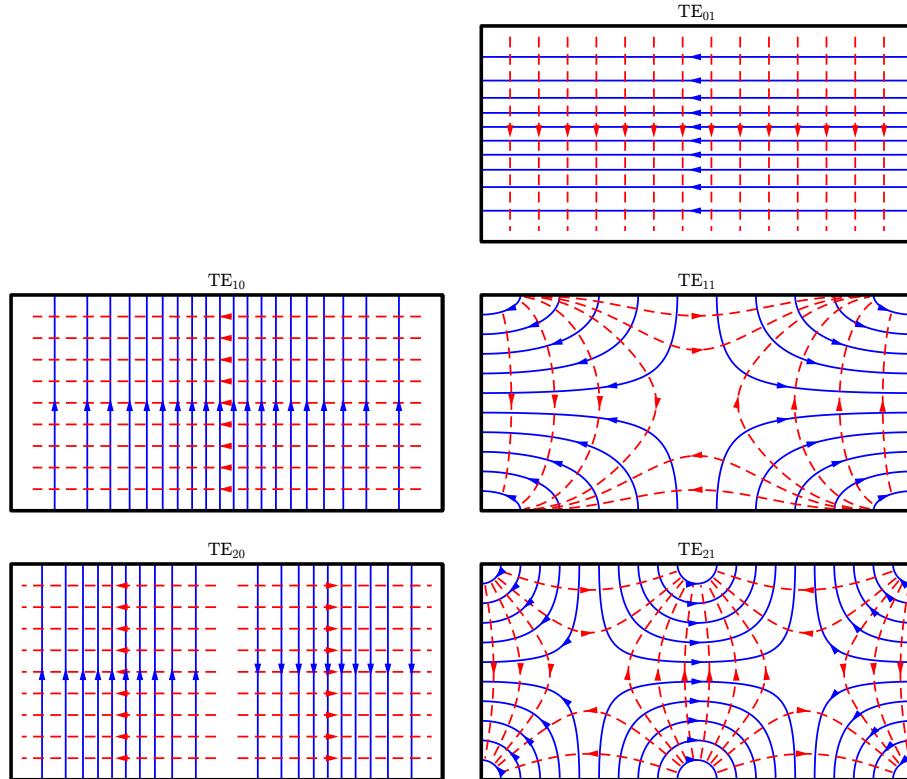


图 7.2: 矩形波导的前几个 TE 模式

可见,  $TE_{m0}$  模式就是  $TE_{10}$  模式在  $x$  方向上复制  $m$  倍. 同样地,  $TE_{0n}$  模式就是  $TE_{01}$  模式在  $y$  方向上复制  $n$  倍;  $TE_{mn}$  模式就是  $TE_{11}$  模式  $x$  方向上复制  $m$  倍、在  $y$  方向上复制  $n$  倍.

**TM 模式**  $H_z = 0, E_z = \psi$ , 边界上  $\psi = 0$  可得

$$\psi_{mn} = A \sin(k_x x) \sin(k_y y), \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (7.30)$$

截止频率表达式同 TM 模，但由于  $\psi \not\equiv 0$ ，故  $m, n$  均不能为 0，最低模式为  $\text{TM}_{11}$ .

$$H_x = -i \frac{\omega \varepsilon k_y}{k_c^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (7.31a)$$

$$H_y = i \frac{\omega \varepsilon k_x}{k_c^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (7.31b)$$

$$H_z = 0, \quad (7.31c)$$

$$E_x = i \frac{k_z k_x}{k_c^2} E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (7.31d)$$

$$E_y = i \frac{k_z k_y}{k_c^2} E_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (7.31e)$$

$$E_z = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (7.31f)$$

同样地可以画出 TM 模式在截面上的电场线和磁场线，由于  $\text{TM}_{mn}$  模式同样只是  $\text{TM}_{11}$  模式的简单复制，故只需画出  $\text{TM}_{11}$  模式，如图 7.3 所示：

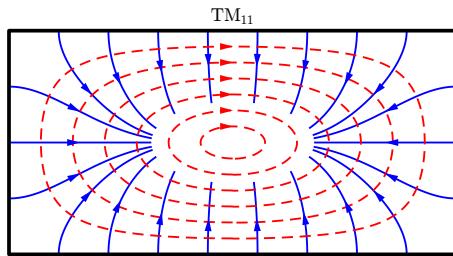


图 7.3: 矩形波导的  $\text{TM}_{11}$  模式

**传输特性** 根据截止频率的表达式， $\text{TE}_{10}$  模式具有最低的截止频率。一般波导内为真空，相应的截止波长  $\lambda_{10} = 2a$ . 其次为  $\text{TE}_{20}$  或  $\text{TE}_{01}$ . 理论上当

$$\max(a, 2b) \leq \lambda < 2a$$

时，波导内只存在  $\text{TE}_{10}$  模式，而其余频率均被截止。因此通常矩形波导会被设计成  $a = 2b$ ，且尺寸随着工作频率的增加而减小。

### 7.3.2 圆波导

在内径为  $a$  的圆形波导中，

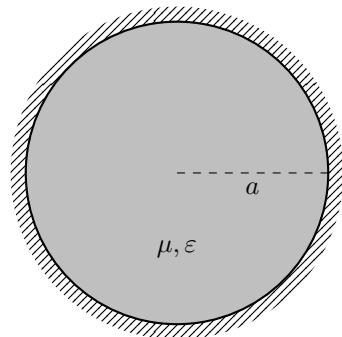


图 7.4: 圆波导

采用柱坐标, 波动方程 (7.21) 为:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k_c^2 \right) \psi = 0, \quad (7.32)$$

分离变量  $\psi(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$  可得

$$\begin{aligned} R(\rho) &= AJ_m(k_c\rho) + BN_m(k_c\rho), \\ \Phi(\phi) &= e^{\pm im\phi}. \end{aligned}$$

其中  $J_m, N_m$  分别是第一、二类 Bessel 函数, 由  $R(0) < \infty$  知  $B = 0$ . 由于极轴的选取是任意的, 取  $D = 0$ .

**TM 模式**  $H_z = 0, E_z = \psi$ , 边界上  $\psi = 0$  可得

$$\psi_{mn} = AJ_m(k_c\rho)e^{\pm im\phi}, \quad k_c = \frac{x_{mn}}{a}. \quad (7.33)$$

其中  $x_{mn}$  表示  $J_m$  的第  $n$  个正零点. 场的表达式为

$$\begin{aligned} H_\rho &= \pm m \frac{\omega \varepsilon k_z}{k_c^2 \rho} E_0 J_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}, \\ H_\phi &= i \frac{\omega \varepsilon k_z}{k_c} E_0 J'_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}, \\ H_z &= 0, \\ E_\rho &= i \frac{k_z}{k_c} E_0 J'_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}, \\ E_\phi &= \mp m \frac{k_z}{k_c^2 \rho} E_0 J_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}, \\ E_z &= E_0 J_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}. \end{aligned}$$

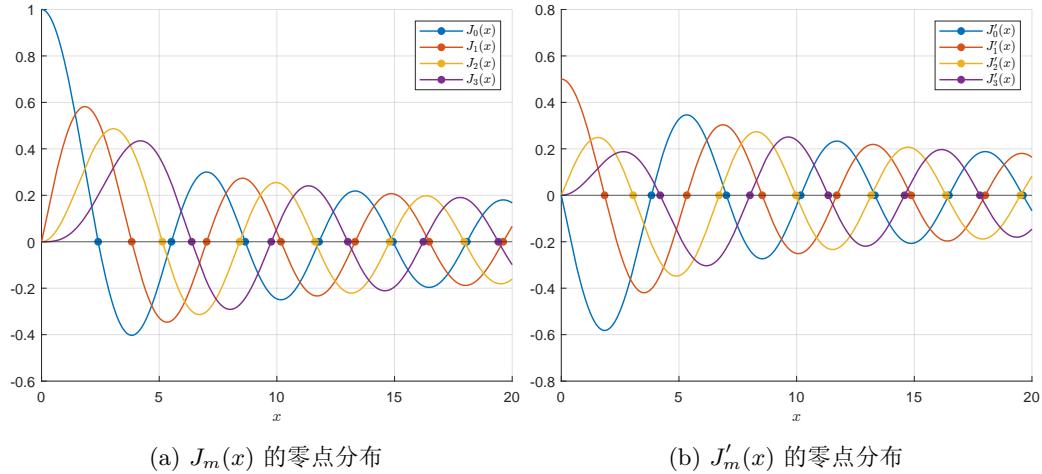
**TE 模式**  $E_z = 0, H_z = \psi$ , 边界上  $\partial\psi/\partial n = 0$  可得

$$\psi_{mn} = AJ_m(k_c\rho)e^{\pm im\phi}, \quad k_c = \frac{x'_{mn}}{a}. \quad (7.35)$$

其中  $x'_{mn}$  表示  $J'_m$  的第  $n$  个正零点. 场的表达式为

$$\begin{aligned} H_\rho &= i \frac{k_z}{k_c} H_0 J'_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}, \\ H_\phi &= \mp m \frac{k_z}{k_c^2 \rho} H_0 J_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}, \\ H_z &= H_0 J_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}, \\ E_\rho &= \pm m \frac{\omega \mu k_z}{k_c^2 \rho} H_0 J_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}, \\ E_\phi &= i \frac{\omega \mu k_z}{k_c} H_0 J'_m(k_c \rho) e^{i(k_z z - \omega t \pm m\phi)}, \\ E_z &= 0. \end{aligned}$$

不难发现, 圆波导的 TE 模式与 TM 模式场的表达式仅仅是将  $E, H$  和  $\varepsilon, \mu$  互换.

图 7.5:  $J_m(x)$  和  $J'_m(x)$  的零点分布

**前几个  $x_{mn}$  和  $x'_{mn}$  分布** 查表知, TE 和 TM 的最低模式分别为  $\text{TM}_{01}$  和  $\text{TE}_{11}$ . 由于  $J'_0(x) = -J_1(x)$ ,  $\text{TM}_{1n}$  和  $\text{TE}_{0n}$  的截止频率相同.

表 7.1:  $J_m(x)$  和  $J'_m(x)$  的零点

(a) $J_m(x)$ 的零点 $x_{mn}$				(b) $J'_m(x)$ 的零点 $x'_{mn}$			
$x_{mn}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$x'_{mn}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	2.405	5.520	8.654	$x'_{mn}$	3.832	7.016	10.176
$m = 1$	3.832	7.016	10.173	$m = 1$	1.841	5.331	8.536
$m = 2$	5.136	8.417	11.620	$m = 2$	3.054	6.706	9.970
$m = 3$	6.380	9.761	13.015	$m = 3$	4.201	8.015	11.346

### 7.3.3 介质加载波导

**慢波结构** 带电粒子与电磁波交换能量(加速/减速)要求电磁波的相速度与电子的速度相同. 因此需要波导中的相速度小于等于光速, 称为慢波结构. 由于带电粒子在介质中的速度超过介质光速时, 会产生 Cherenkov 辐射, 故无法采用全部填充介质的波导. 本小节考虑部分填充介质的波导.

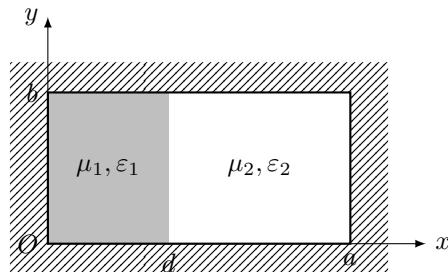


图 7.6: 部分填充介质的矩形波导

考虑 TE 模式，根据金属边界条件，两部分的场形式为：

$$\begin{aligned} H_{z1} &= A \cos(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) e^{ik_z z}, & k_{y1} &= \frac{n_1 \pi}{b}, \\ H_{z2} &= B \cos(k_{x2}(a-x)) \cos(k_{y2}y) e^{ik_z z}, & k_{y2} &= \frac{n_2 \pi}{b}. \end{aligned}$$

且

$$k_{x1}^2 + k_{y1}^2 + k_z^2 = \mu_1 \varepsilon_1 \omega^2 =: k_1^2, \quad (7.37a)$$

$$k_{x2}^2 + k_{y2}^2 + k_z^2 = \mu_2 \varepsilon_2 \omega^2 =: k_2^2, \quad (7.37b)$$

由  $H_z$  在介质分界  $x = d$  处连续，可得  $n_1 = n_2 = n$ ；当  $n \neq 0$  时，结合

$$H_{yi} = i \frac{k_z}{k_i^2 - k_z^2} \frac{\partial H_{zi}}{\partial y}$$

在  $x = d$  处连续，可得  $\varepsilon_1 \mu_1 = \varepsilon_2 \mu_2$ . 即  $\varepsilon_1 \mu_1 \neq \varepsilon_2 \mu_2$  时， $\text{TE}_{mn}$  不存在. 但是  $\text{TE}_{m0}$  可以存在，此时  $H_y \equiv 0$ ，再结合

$$E_{yi} = -i \frac{\omega \mu_i}{k_i^2 - k_z^2} \frac{\partial H_{zi}}{\partial x}$$

在  $x = d$  处连续，可得

$$\frac{\mu_1}{k_{x1}} \tan(k_{x1}d) = \frac{\mu_2}{k_{x2}} \tan(k_{x2}(a-d)), \quad (7.38)$$

再结合

$$k_{x1}^2 - k_{x2}^2 = (\mu_1 \varepsilon_1 - \mu_2 \varepsilon_2) \omega^2, \quad (7.39)$$

便可在给定  $\omega$  下求得  $k_{x1}$ ,  $k_{x2}$  和  $k_z$ . 另一方面，也可以令  $k_z = 0$  求得截止频率满足的方程：

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \tan(\omega_c \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} d) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \tan(\omega_c \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} (a-d)). \quad (7.40)$$

上式可以通过作图求出交点. 显然， $\text{TE}_{m0}$  的截止频率位于分别完全填充介质 1 ( $d = a$ ) 和介质 2 ( $d = 0$ ) 的截止频率之间：

$$\frac{m\pi}{a\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} < \omega_c < \frac{m\pi}{a\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}},$$

考虑介质 2 为真空，当相速度  $v_\varphi$  等于电子速度（电子在一定能量下速度可以非常接近真光速）时，即  $v_\varphi = \omega/k_z = c$ ，有  $k_{x2} = 0$ .

#### 7.3.4 波导中的能流和衰减

我们扩大前面对任意截面形状的柱形波导所作的一般讨论，使它包括沿波导的能流以及波的衰减，后者是当电导率有限时由波导管壁中能量损耗所引起的. 我们只限于讨论波导中只存在一种模式的情况；不过将简短提一下简并模式. 能流用复 Poynting 矢量描写；

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{\omega k}{2\gamma^4} \begin{cases} \varepsilon \left( \hat{\mathbf{z}} |\nabla_t \psi|^2 + i \frac{\gamma^2}{k} \psi \nabla_t \psi^* \right), & \text{TM} \\ \mu \left( \hat{\mathbf{z}} |\nabla_t \psi|^2 - i \frac{\gamma^2}{k} \psi^* \nabla_t \psi \right), & \text{TE} \end{cases} \quad (7.41)$$

因为  $\psi$  一般是实数,<sup>1</sup> 因此  $\mathbf{S}$  的第二项代表无功能流, 并且对能流的时间平均没有贡献. 总功率流

$$P = \int_A \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}} dA = \frac{\omega k}{2\gamma^4} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \mu \end{array} \right\} \left( \oint_{\partial A} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\ell - \int_A \psi^* \nabla_t^2 \psi dA \right).$$

由特征方程  $(\nabla_t^2 + \gamma_\lambda^2)\psi = 0$ ,

$$P = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \left( \frac{\omega}{\omega_\lambda} \right)^2 \left( 1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \mu \end{array} \right\} \int_A \psi^* \psi dA.$$

时间平均能量密度

$$u = \frac{1}{4} \left( \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right),$$

单位长度的场能量

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_\lambda} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \mu \end{array} \right\} \int_A \psi^* \psi dA,$$

能流的速度正是群速度

$$\frac{P}{U} = \frac{k}{\omega} \frac{1}{\mu\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}} = v_g.$$

结合前面说的相速度

$$v_g v_\varphi = \frac{1}{\mu\varepsilon}, \quad (7.42)$$

在无限介质中,  $v_g$  总是小于  $v_\varphi$ , 并且在截止频率时降为零.

**良导体的波导** 对于理想导体,  $k_\lambda$  是实数或纯虚数; 而对于电导率有限的良导体来说,  $k_\lambda$  是一个实数与一个小复数的和.

后面的略.

**最小衰减频率** 略.

## 7.4 边界条件的扰动

略

## 7.5 谐振腔

一个谐振腔 (resonant cavity) 可以是任何形状的, 具有一个封闭的导体表面. 但通常我们将端面放置在一定长度的圆柱形波导上, 以产生一个空腔. 端面是垂直于圆柱体轴线的平面.

由  $z = 0, d$  的边界条件, 应有驻波形式:

$$\begin{aligned} \text{TM : } & E_z = \psi(x, y) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right), & p = 0, 1, 2, \dots, \\ \text{TE : } & H_z = \psi(x, y) \sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right), & p = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

特征值频率

$$\omega_{\lambda_p}^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon} \left[ \gamma_\lambda^2 + \left( \frac{p\pi}{d} \right)^2 \right],$$

<sup>1</sup>有可能这样激发一个波导, 使得某给定模式或一些模式的线性组合具有复数  $\psi$ . 这时候横向能流对时间的平均值将不为零, 但它是一个环流, 所以实际上只代表贮藏的能量, 在实用上不大重要.

## 7.6 腔内的功率损失

对于理想导体,  $|E(\omega)|$  在各个  $\omega_i$  上是一个个  $\delta$  函数; 而对于良导体, 则会有一定的半高宽.

定义品质因子 (quality factor)

$$Q := \omega_0 \frac{\text{stored energy}}{\text{power loss}}. \quad (7.43)$$

# 第八章 多极辐射

在第七章和第八章里，讨论了电磁波的性质，以及电磁波在有界的和无界的区域内的传播情况。但是，很少谈到如何产生这些电磁波的问题。本章就转入这个问题，并讨论定域振荡电荷和电流密度系统辐射的电磁波，我们的论述是直截了当的，而不去精心推敲数学形式。

## 8.1 局域振荡源

对于随时间变化的电荷和电流系统，我们都可以将随时间变化的量作 Fourier 分析，并分别处理各个 Fourier 分量。因此，不失一般性，我们只考虑随时间作正弦变化的局域电荷和电流系统所产生的势、场和辐射，设

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

矢量势

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dt' dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.\end{aligned}\quad (8.1)$$

磁场和电场为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = i \frac{Z}{k} \nabla \times \mathbf{H}.$$

给定电流分布  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  以后，至少在原则上可以通过计算 (8.1) 的积分来定出场的分布。但是，现在我们先确立在电流源被局限于小区域内（与波长相比，确实很小）的极限情形下，场所具有的某些简单而普遍的性质。如果源的线度为  $d$ ，波长为  $\lambda = 2\pi c/\omega$ ，并且  $d < \lambda$ ，则有三个令人感兴趣的空间区域：近区、中间区、远区。

近区： $d \ll r \ll \lambda$ ，(8.1) 中的指数可以用 1 代替，并用球谐函数 (2.43) 展开，

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') dV'.$$

上式表明，近场是准静态的，除了按  $e^{-i\omega t}$  方式作简谐振荡外，其它性质都是静态的。

远区， $d \ll \lambda \ll r$ ，

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} dV'.$$

可以对  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}$  展开，略。

中间区,  $d \ll r \sim \lambda$ , 近似失效, 引入球 Bessel 函数和 Hankel 函数

$$j_\ell(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x), \quad (8.2)$$

$$y_\ell(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\ell+1/2}(x), \quad (8.3)$$

$$h_\ell^\pm(x) := j_\ell(x) \pm i y_\ell(x). \quad (8.4)$$

则

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = i\mu_0 k \sum_{\ell,m} h_\ell^+(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') j_\ell(kr') Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') dV',$$

推导和后面的略.

标量势与矢量势形式相同, 我们考虑电单极的情况

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} q \left( t - \frac{r}{c} \right),$$

式中  $q(t)$  是源的总电荷. 因为电荷是守恒的, 且根据定义, 局域源是一个没有电荷流入或流出的源, 所以总电荷  $q$  与时间无关. 于是, 一个定域源的势 (和场) 的电单极部分必然是静态的.

## 8.2 电偶极辐射

下面我们求电偶极子

$$\mathbf{p} := \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV',$$

激发的电场和磁场. 通过远区近似,

$$\mathbf{A} = -i \frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

场

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 + i \frac{1}{kr} \right), \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ k^2 (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{n}} \frac{e^{ikr}}{r} + (3 \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}) \left( \frac{1}{r^3} - i \frac{k}{r^2} \right) e^{ikr} \right]. \end{aligned}$$

$r \rightarrow 0$  时,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= i \frac{\omega}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}}{r^2}, \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3}; \end{aligned}$$

$r \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r}, \\ \mathbf{E} &= Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

由振荡偶极子辐射的时间平均功率

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [r^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{n}}] = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 p^2 \sin^2 \theta,$$

故

$$P = \frac{c^2 Z_0^2 k^4}{12\pi} p^2. \quad (8.5)$$

为什么天空是蓝色的，特别是在垂直于太阳光线的天弧处？因为  $\theta = 90^\circ$  时太阳光线所激发的偶极辐射功率为 0.

#### 例 8.2.1: 天线

对于一个中间馈送 (center-fed) 的线性天线 (antenna)，其电流

$$I_0 \left( 1 - \frac{2|z|}{d} \right) e^{-i\omega t},$$

则其电偶极矩为

$$p = i \frac{I_0 d}{2\omega},$$

辐射功率

$$P = \frac{Z_0 I_0^2}{48\pi} (kd)^2.$$

由于天线向外辐射功率，因此它需要消耗能量，尽管天线是一个理想导体，但仍有辐射阻抗  $R_{\text{rad}}$

$$R_{\text{rad}} = \frac{Z_0}{24\pi} (kd)^2 \simeq 5(kd)^2.$$

## 8.3 磁偶极子和电四极子

**磁偶极子** 磁偶极矩对矢量势的贡献

$$\mathbf{A} = \frac{k\mu_0}{4\pi} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left( i - \frac{1}{kr} \right),$$

得到磁场和电场

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \left[ k^2 (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{m}) \times \hat{\mathbf{n}} \frac{e^{ikr}}{r} + (3 \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}) \left( \frac{1}{r^3} - i \frac{k}{r^2} \right) e^{ikr} \right], \\ \mathbf{E} &= -\frac{Z_0}{4\pi} k^2 (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 + i \frac{1}{kr} \right). \end{aligned}$$

与电偶极子形式高度相似.

**电四极子** 电四极子对矢量势的贡献

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 c k^2}{8\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 + i \frac{1}{kr} \right) \int \mathbf{r}' (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') dV'.$$

磁场

$$\mathbf{H} = -i \frac{ck^3}{24\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{n}} \times (Q \cdot \hat{\mathbf{n}}).$$

辐射功率

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{1152\pi^2} k^6 |[\hat{\mathbf{n}} \times (Q \cdot \hat{\mathbf{n}})] \times \hat{\mathbf{n}}|^2$$

从而

$$P = \frac{c^2 Z_0 k^6}{1440\pi} \sum_{\alpha,\beta} |Q_{\alpha\beta}|^2 \sim \omega^6.$$

## 第九章 相对论电动力学

**Michelson-Morley 实验** 人们最开始设想光需要在一种称为以太 (ether) 的介质中传播, 光速是相对于以太的速度. 为了验证以太是否存在以及光速是否是常数, 1887 年 Michelson 和 Morley 设计了如下所示的光学干涉装置:

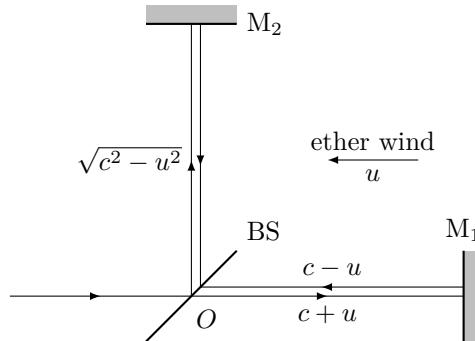


图 9.1: Michelson-Morley 光学干涉仪的实验装置图

图中最左侧相干光源发出的光在经过分束器 (beam splitter, BS) 中心  $O$  后, 其中一部分光被透射后抵达镜子  $M_1$  然后被反射回  $O$  点, 另一部分光被反射后抵达镜子  $M_2$  然后被反射回  $O$  点, 并与从  $M_1$  反射回来的光发生干涉. 假设整个装置在以太中以速度  $u$  向右运动, 那么这等价于装置不动, 而以太风以速度  $u$  向左吹来. 容易得出光在水平方向从  $O$  到  $M_1$  再返回  $O$  的路径上所花费的时间是:

$$T_1 = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} = \frac{2L/c}{1-u^2/c^2}.$$

同理, 容易得出光在竖直方向上从  $O$  到  $M_2$  再返回  $O$  的路径上所花费的时间是:

$$T_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

容易发现  $T_1 \neq T_2$ . 由于装置在以太中的运动速度  $u \ll c$ ,

$$T_1 - T_2 = \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{u^2}{c^2} \right) - \frac{2L}{c} \left( 1 + \frac{u^2}{2c^2} \right) + \mathcal{O}(u^4) = \frac{Lu^2}{c^3} + \mathcal{O}(u^4).$$

由于存在光程差,  $O$  点上应当观测到干涉条纹, 且随着  $u$  的改变, 干涉条纹也应当发生偏移. 然而, Michelson-Morley 的实验结果发现: 不论装置的运动状态和方位如何, 光学干涉条纹并未发生任何改变. 这也就从实验上证明了以太并不存在, 光速恒为常数  $c$ !

为了解释这个实验结果, Einstein 提出了狭义相对论 (special relativity).

## 9.1 狹义相对论

**Einstein 的两个假设** 此节仅介绍必要内容，而略去狭义相对论的大部分推导内容。

### 定理 9.1.1: 相对性假设

在一个给定的参照系中，一切自然规律和实验结果都与整个系统的平动 (translational motion) 无关。更精确地说，存在无穷多个互相作匀速直线相对运动的三维等效 Euclidean 参照系，称为惯性系 (inertial reference frame)。在惯性系中，一切物理现象都以等同方式发生，

### 定理 9.1.2: 光速不变假设

光速有限且与光源的运动无关。

### 9.1.1 Lorentz 变换

#### 定理 9.1.3: Lorentz 变换

给定惯性系  $S$  和  $S'$ ， $S'$  系相对  $S$  系有  $x$  方向的相对速度  $v$ 。同一事件 (event) 在  $S, S'$  系中的坐标分别为  $(ct, x, y, z)$  和  $(ct', x', y', z')$ ，则 Lorentz 变换给出：

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

其中相对速度  $\beta \equiv v/c$ ，Lorentz 因子

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

如果质点在  $S$  系中有  $x$  方向的速度  $u = dx/dt$ ，则其在  $S'$  中的速度为

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - v dt/c^2)} = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}. \quad (9.2)$$

**四矢量** 为讨论形式的统一，我们定义四矢量 (4-vector)。

### 定义 9.1.1: 四矢量

定义逆变量 (contravariant) 形如

$$a^\mu \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3)^\top, \quad (9.3)$$

与之对应的是协变量 (covariant)，形如

$$a_\mu \equiv (a_0, a_1, a_2, a_3). \quad (9.4)$$

时空连续统 (continuum) 由位置四矢量表示:

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z)^\top. \quad (9.5)$$

#### 定义 9.1.2: Einstein 求和约定

表达式上下标中出现重复指标时, 表示对其遍历求和, 即

$$a_\mu b^\mu \equiv \sum_\mu a_\mu b^\mu, \quad (9.6)$$

因此 Einstein 约定: 这个求和符号是可以省略的.

则 Lorentz 变换可以表示为

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \Lambda^\mu{}_\nu \equiv \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

**时空结构** 狹义相对论时空的具体几何结构由间隔 (interval) 确定

$$s^2 = -c^2(t_A - t_B)^2 + (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2.$$

可以验证: 间隔在 Lorentz 变换下是不变的:<sup>1</sup>

$$(s^2)' = -c^2(t'_A - t'_B)^2 + (x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2 + (z'_A - z'_B)^2 = s^2.$$

- 若  $s^2 < 0$ , 则称间隔是类时的 (timelike), 因为这是同地不同时事件间隔的符号;
- 若  $s^2 > 0$ , 则是类空的 (spacelike), 因为这是同时不同地事件间隔的符号;
- 若  $s^2 = 0$ , 则是类光的 (lightlike), 因为这是当两个事件由一个以光速传播的信号连接时所保持的关系.

#### 定义 9.1.3: 度规张量

在微分形式上, 无穷小间隔是

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (9.7)$$

式中  $g_{\mu\nu}$  是度规张量 (metric tensor). 对于狭义相对论的平坦时空 (广义相对论中为弯曲时空), 采取 Minkowski 度规:

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.8)$$

<sup>1</sup> 不变量 (invariant) 表示在所有惯性系中均保持相同的值; 守恒量 (conserved quantity) 表示在某个过程前后保持相同的值. 比如, 质量是不变量, 却不守恒; 能量是守恒的, 但不是不变量; 电荷量既是不变量, 又是守恒量; 而速度既不是不变量, 也不守恒. 在每个封闭系统中, 总的相对论能量和动量都是守恒的.

逆变度规张量  $g^{\mu\nu}$  应满足

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho. \quad (9.9)$$

对平坦时空来说, 二者相同  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ .

注. Minkowski 度规有两种:

- 东海岸度规  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , 常用于弦论和宇宙学, 其好处是空间分量上的度规分量和我们平时习惯的 Euclidean 空间的度规相同, Griffiths 采用此;
- 西海岸度规  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , 常用于粒子物理学, Jackson 采用此;
- 其实还有几乎没人喜欢的  $ict$ .

推论. 逆变坐标  $x_\mu$  可由协变坐标  $x^\mu$  和度规张量得到

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu. \quad (9.10)$$

同样有  $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$ , 写成分量形式就是

$$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1, \quad x_2 = x^2, \quad x_3 = x^3.$$

### 9.1.2 相对论动力学

**相对论运动学** 由于钟慢效应 (time dilation), 在静止系中的时间流速是最慢的, 可定义固有时间 (proper time):

$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \equiv \gamma_u dt.$$

进而定义四矢量速度

$$\eta^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (9.11)$$

和四矢量动量

$$p^\mu \equiv m\eta^\mu. \quad (9.12)$$

其中  $m$  为 (静止) 质量.

$p^\mu$  的时间分量是  $p^0 = \gamma_u mc$ , 对应相对论能量:

$$E = \gamma_u mc^2,$$

静止时,  $\gamma_u = 1$ ,  $E = mc^2$ , 二者之差定义为动能

$$E_k \equiv E - mc^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{8}\frac{mu^4}{c^2} + \frac{5}{16}\frac{mu^6}{c^4} + \mathcal{O}(u^8),$$

相对论动量

$$\mathbf{p} = m\eta = m\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \gamma_u m\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \gamma_u m\mathbf{u}.$$

有关系

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (9.13)$$

## 例 9.1.1: Compton 散射

频率为  $\nu$  的光子与一个静止的电子发生 Compton 散射，散射后光子的频率变为  $\nu'$ ，散射角为  $\theta$ ，反冲电子动量大小为  $p_e$ ，反冲角为  $\phi$ .

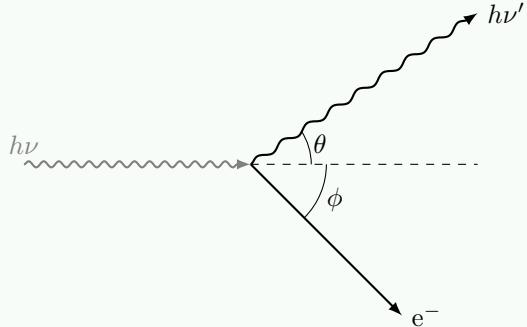


图 9.2: Compton 散射示意图

由横向、纵向的动量守恒以及能量守恒：

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p_e \cos \phi, \quad (9.14a)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - p_e \sin \phi, \quad (9.14b)$$

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2}. \quad (9.14c)$$

消去  $\phi$ ，解得

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)}, \quad \alpha \equiv \frac{h\nu}{m_e c^2}. \quad (9.15)$$

将上式改写成波长的形式，得到 Compton 移动

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta). \quad (9.16)$$

**相对论动力学** 相对论中的力依然遵循 Newton 第二定律中的定义：

$$\mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

因此功能关系仍然满足：

$$W \equiv \int \mathbf{F} \cdot d\ell = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} dt = \int \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \cdot \mathbf{u} dt = \Delta E. \quad (9.17)$$

而 Newton 第三定律在不同地的时候不再成立，因为在相对论中，同时性是相对的.

可得力在 Lorentz 变换中的关系

$$F'_x = \frac{F_x - v\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}/c^2}{1 - vu_x/c^2}, \quad (9.18a)$$

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}, \quad (9.18b)$$

$$F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}. \quad (9.18c)$$

如果质点在  $S$  系中保持静止 ( $u = 0$ ), 则其受到的力的变换为:

$$\mathbf{F}'_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}_{\perp}, \quad F'_{\parallel} = F_{\parallel}. \quad (9.19)$$

## 9.2 相对论电动力学

为什么会有磁场? 利用静电学和相对论, 我们可以计算出载电流线和运动电荷之间的磁力, 而不需要援引磁力定律.

### 例 9.2.1: 导线的磁场力

$S$  系中有一导线, 其中正负电荷静止时的线密度为  $\pm \lambda_0$ , 通电正负电荷后在导线中反向运动, 速度  $v_{\pm} = \pm v$ , 则正负电荷的线密度为  $\lambda_{\pm} = \pm \gamma \lambda_0$ , 电流为  $I = 2\lambda_0 v$ , 导线外距离  $r$  处有一电荷  $q$  沿平行于导线的方向以速度  $u < v$  运动.

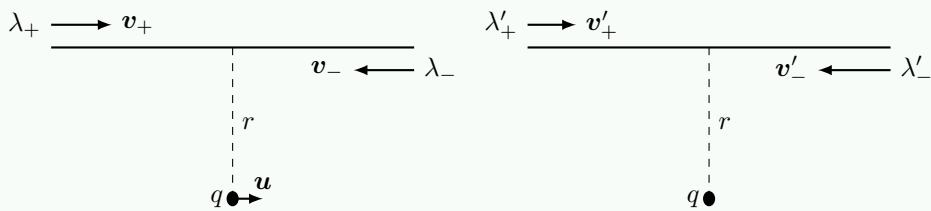


图 9.3:  $S$  系和  $S'$  系中导线与电荷示意图

转换到粒子静止的参考系  $S'$ , 则电荷  $q$  不受磁场力, 仅受电场力.  $S'$  系中正负电荷的速度为

$$v'_{\pm} = \frac{v_{\pm} - u}{1 - v_{\pm} u / c^2} = \frac{\pm v - u}{1 \mp vu/c^2},$$

正负电荷线密度变为  $\lambda'_{\pm} = \pm \gamma_{v'_{\pm}} \lambda_0$ , 总电荷线密度和电场为

$$\lambda_{\text{tot}} = -\frac{2vu}{c^2} \gamma_u \lambda, \quad E = \frac{\lambda_{\text{tot}}}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

因此  $S'$  系中电荷所受的电场力为

$$F' = qE = -\frac{vu\gamma_u\lambda}{c^2} \frac{q}{\pi\epsilon_0 r}.$$

变回到  $S$  系中,

$$F = \frac{1}{\gamma_u} F' = -\frac{vu\lambda}{c^2} \frac{q}{\pi\epsilon_0 r} = -qu \frac{\mu_0 I}{2\pi}.$$

而  $S$  系中导线没有净电荷,  $q$  不受电场力, 故此力只能是磁场力!

场的变换 假设:

1. 电荷是不变的;
2. 无论场是如何产生的, 转换规则都是相同的.

得到

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + vB_y); \quad (9.20)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right). \quad (9.21)$$

### 例 9.2.2: 匀速运动电荷的场

考虑  $S'$  系中, 电荷是静止的, 没有磁场只有电场:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \hat{\mathbf{r}}',$$

变换到原系  $S$ :

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma E'_y, \quad E_z = \gamma E'_z,$$

得到电场为  $\hat{\mathbf{r}}$  方向, 但并不各向同性:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (9.22)$$

磁场为  $\hat{\phi}$  方向:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 - \beta^2) \sin \theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{qv}{r^2} \hat{\phi}. \quad (9.23)$$

## 9.2.1 电磁场张量

电磁场的变换是由一个反对称的二阶张量连接起来的

$$t^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & t^{01} & t^{02} & t^{03} \\ -t^{01} & 0 & t^{12} & t^{13} \\ -t^{02} & -t^{12} & 0 & t^{23} \\ -t^{03} & -t^{13} & -t^{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

变换为

$$\bar{t}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma t^{\rho\sigma}.$$

对应分量的变换规则为

$$\begin{aligned} \bar{t}^{01} &= t^{01}, & \bar{t}^{02} &= \gamma(t^{02} - \beta t^{12}), & \bar{t}^{03} &= \gamma(t^{03} + \beta t^{31}), \\ \bar{t}^{23} &= t^{23}, & \bar{t}^{31} &= \gamma(t^{31} + \beta t^{03}), & \bar{t}^{12} &= \gamma(t^{12} - \beta t^{02}). \end{aligned}$$

与场变换比较, 可得电磁张量

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.24)$$

或对偶 (dual) 张量

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.25)$$

**张量符号中的电动力学** 用张量的语言重新表述电动力学定律 (Maxwell 方程和 Lorentz 力). 统一电荷源  $\rho$  和电流源  $\mathbf{J}$ , 定义四矢量电流源

$$J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z)^\top, \quad (9.26)$$

#### 定义 9.2.1: 四维导数

定义

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (9.27)$$

有

$$\partial_\mu a^\mu = \partial_0 a^0 + \partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + \partial_3 a^3 = \frac{\partial a^0}{\partial x^0} + \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a^3}{\partial x^3}. \quad (9.28)$$

连续性方程 (4.5) 变为

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

Maxwell 方程组变为

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad (9.29a)$$

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0. \quad (9.29b)$$

$\mu = 0$  给出

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad (9.30a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (9.30b)$$

$\mu = 1, 2, 3$  给出  $x, y, z$  分量

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (9.31a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (9.31b)$$

定义四矢量 Minkowski 力

$$K^\mu := q\eta_\nu F^{\mu\nu}, \quad (9.32)$$

得到 Lorentz 力的表达式

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

### 9.2.2 相对论势

将标量势和矢量势的定义:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

展开, 可见对称性:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, & B_x &= \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}, \\ E_y &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}, & B_y &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}, \\ E_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}, & B_z &= \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}, \end{aligned}$$

四矢量势

$$A^\mu := (\Phi/c, A_x, A_y, A_z)^\top, \quad (9.33)$$

则电磁张量可以写成

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (9.34)$$

#### 例 9.2.3: 匀速运动电荷的场 · 续

续例 9.2.2, 我们用势的方法再做一遍.  $S'$  系中电荷静止

$$\Phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r'}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{0},$$

变回  $S$  系

$$\Phi = \gamma\Phi', \quad A_x = \gamma \frac{v}{c^2} \Phi', \quad A_y = A_z = 0,$$

其中

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}.$$

则

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\gamma qr}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

利用四矢量势, Maxwell 方程组变为

$$\partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial^\nu \partial_\nu A^\mu = \mu_0 J^\mu,$$

使用 Lorenz 规范

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

由此我们得到了 Maxwell 方程组最简单的形式:

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = -\mu_0 J^\mu. \quad (9.35)$$

# 第十章 运动电荷的辐射

## 10.1 Liénard-Wiechert 势

# 附录 A 矢量分析

## A.1 矢量代数

定义 A.1.1: 标量和矢量

标量 (scalar) 是只有大小 (magnitude) 没有方向 (direction) 的量 (quantity); 矢量 (vector) 是既有方向又有大小的量.

- 矢量加法:  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ;
- 矢量数乘:  $a\mathbf{A}$ ;
- 标量积:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ;
- 矢量积:  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ .
- 矢量的分量表示: 直角坐标 (Cartesian coordinate) 中

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.1})$$

位置向量 (position vector)

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}. \quad (\text{A.2})$$

- 标量三重积

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

- 矢量三重积: back cab 规则

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}); \quad (\text{A.4a})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}). \quad (\text{A.4b})$$

可以将多个矢量积简化, 比如

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

## A.2 微积分

### A.2.1 微分

- 函数 ( $x$ ) 的微分

$$dy = \frac{dy}{dx} dx.$$

- 标量场  $f(x, y, z)$  的微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz =: \nabla f \cdot d\ell. \quad (\text{A.5})$$

梯度 (gradient)

$$\nabla f := \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}. \quad (\text{A.6})$$

- Hamiltonian

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}. \quad (\text{A.7})$$

- 散度 (divergence)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{A.8})$$

- 旋度 (curl)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}. \quad (\text{A.9})$$

## 乘法法则

- 常微分乘法法则

$$d(fg) = (df)g + f dg.$$

- 梯度、旋度、散度的简单乘法法则

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g; \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A}); \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A}). \quad (\text{A.12})$$

- 梯度、旋度、散度的复杂乘法法则

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}; \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}; \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}). \quad (\text{A.15})$$

## 二重微分

- 标量 Laplacian

$$\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (\text{A.16})$$

- 矢量 Laplacian

$$\nabla^2 \mathbf{A} \equiv (\nabla^2 A_x) \hat{x} + (\nabla^2 A_y) \hat{y} + (\nabla^2 A_z) \hat{z}. \quad (\text{A.17})$$

- 梯度的旋度恒为 0, 旋度和散度恒为 0

$$\nabla \times (\nabla f) \equiv \mathbf{0}; \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0. \quad (\text{A.19})$$

- 二重旋度

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (\text{A.20})$$

## A.2.2 积分

- 线积分、面积分和体积分
- 微积分基本定理

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

- 梯度定理

$$\int_A^B \nabla f \cdot d\ell = f(B) - f(A). \quad (\text{A.21})$$

- 散度定理 (Gauss 定理)

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \quad (\text{A.22})$$

- 旋度定理 (Stokes 定理)

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\ell. \quad (\text{A.23})$$

- 分部积分

$$\begin{aligned} \int_a^b fg' dx &= fg|_a^b - \int_a^b f'g dx \\ \int_V f(\nabla \cdot \mathbf{F}) dV &= \oint_{\partial V} f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} - \int_V \mathbf{F} \cdot \nabla f dV. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

## A.3 曲线坐标系

### A.3.1 Lamé 系数

给定曲线坐标系 (curvilinear coordinate) 的正交基  $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ , 点的坐标为  $(q_1, q_2, q_3)$ , 则

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3,$$

由正交性,  $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$  应沿着  $\hat{\mathbf{e}}_i$  方向, 其模值定义为 Lamé 系数

$$H_i := \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}. \quad (\text{A.25})$$

因此

$$d\mathbf{r} = H_1 dq_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + H_2 dq_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + H_3 dq_3 \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (\text{A.26})$$

面积微元和体积微元为

$$dA_i = H_j H_k dq_j dq_k, \quad (ijk) = (123); \quad (\text{A.27})$$

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{A.28})$$

**梯度** 在曲线坐标系下, 梯度可以通过 Lamé 系数表示:

$$\nabla f = \frac{1}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \hat{e}_3. \quad (\text{A.29})$$

**散度** 矢量  $\mathbf{A}$  在曲线坐标系下的分量:

$$\mathbf{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3.$$

根据面积微元和体积微元的表达式, 散度为:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial(H_2 H_3 A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3 H_1 A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 A_3)}{\partial q_3} \right]. \quad (\text{A.30})$$

**旋度** 省去推导过程

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \hat{e}_1 & H_2 \hat{e}_2 & H_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

**Laplacian** 结合式 (A.29) 和式 (A.30), 得到

$$\nabla^2 f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (\text{A.32})$$

### A.3.2 球坐标系

在球坐标系中的坐标为  $(r, \theta, \phi)$ ,  $r$  称为径向距离 (radial distance),  $\theta$  称为极角 (polar angle),  $\phi$  称为方位角 (azimuthal angle). 如下图所示.

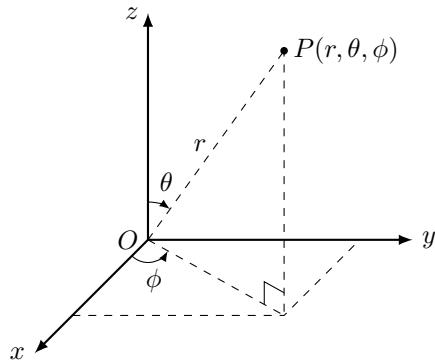


图 A.1: 球坐标系

基变换

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

坐标变换

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

Lamé 系数:

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1, \quad (\text{A.35a})$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = r, \quad (\text{A.35b})$$

$$H_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2} = r \sin \theta, \quad (\text{A.35c})$$

矢量微分

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}, \quad (\text{A.36})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi, \quad (\text{A.37})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}, \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (\text{A.39})$$

### A.3.3 柱坐标系

坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

Lamé 系数:

$$H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = 1, \quad (\text{A.41a})$$

$$H_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2} = \rho, \quad (\text{A.41b})$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1, \quad (\text{A.41c})$$

## 矢量微分

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}, \quad (\text{A.42})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + r \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{A.43})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}, \quad (\text{A.44})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (\text{A.45})$$

## A.4 Dirac 函数

例 A.4.1: 引入 Dirac  $\delta$  函数

计算  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  的散度:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \implies \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = 0,$$

但考虑其在半径为  $r$  球面上的面积分:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial V} \frac{1}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi.$$

这与散度定理 (A.22) 矛盾! 原因在于:  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  在除了原点以外的任意一点均为 0, 但其体积分分为  $4\pi$ .

定义 A.4.1: Dirac  $\delta$  函数

$\delta$  函数是一个将任意函数  $f$  映射到  $f(0)$  的线性泛函 (linear functional), 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

其特点为:  $\forall x \neq 0, \delta(x) = 0$ , 但

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1,$$

因此  $\delta$  函数并不是一个严格意义上的函数, 而是一个广义函数 (general function) 或分布 (distribution). 在物理上,  $\delta$  函数可以代表质点 (或点电荷) 的密度.

因此例 A.4.1 中的散度其实应为  $4\pi \delta(\mathbf{r})$ , 进而

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}). \quad (\text{A.46})$$

## A.5 向量场理论

给定  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  和  $\nabla \times \mathbf{F}$ , 能否确定  $\mathbf{F}$ ?

### 定理 A.5.1: Helmholtz 定理

给定  $\mathbf{F}$  的散度和旋度:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{F} = D(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{C}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

若当  $r \rightarrow \infty$  时,  $D(\mathbf{r}), \mathbf{C}(\mathbf{r}) = o(1/r^2)$  收敛得更快, 且  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ , 则

$$\mathbf{F} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.47})$$

此处

$$\begin{cases} V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

### 定理 A.5.2: 无旋场与标量势

对于无旋场  $\mathbf{F}$ , 下列命题是等价的:

- $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ;
- $\mathbf{F}$  可以被写为标量势 (scalar potential) 的梯度:  $\mathbf{F} = -\nabla V$ ;
- 给定起点终点, 线积分与路径无关

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\ell = V(A) - V(B);$$

- 闭合线积分恒为 0.

与式 (A.18) 联系, 注意  $V$  并不唯一.

### 定理 A.5.3: 无源场与矢量势

对于无源场  $\mathbf{F}$ , 下列命题是等价的:

- $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ ;
- $\mathbf{F}$  可以被写为矢量势 (vector potential) 的旋度:  $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ ;
- 给定边界, 面积分与表面形状无关

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\ell;$$

- 闭合面积分恒为 0.

与式 (A.19) 联系, 注意  $\mathbf{A}$  并不唯一 .

## 附录 B 特殊函数

### B.1 Legendre 多项式

广义 (generalized) Legendre 方程:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (\text{B.1})$$

考虑  $m=0$  的情形, 得到 Legendre 方程:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^2 \frac{dP}{dx} \right] + \ell(\ell+1)P = 0. \quad (\text{B.2})$$

采用级数解, 设

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j.$$

$\alpha$  是待定系数, 从而

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j x^{\alpha+j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha+j)(\alpha+j+1) - \ell(\ell+1)] a_j x^{\alpha+j} = 0.$$

解得

$$\begin{cases} a_0 \alpha(\alpha-1) = 0, & j=0 \\ a_1 \alpha(\alpha+1) = 0, & j=1 \\ a_{j+2} = \frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - \ell(\ell+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} a_j, & j \geq 2 \end{cases}$$

对初始条件分情况讨论:

- $a_0 = a_1 = 0$ , 解  $P \equiv 0$  是平凡的;
- $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ , 展开式事实上与  $a_0 \neq 0, a_1 = 0$  等价:

$$P(x) = x^\alpha (a_1 x + a_3 x^3 + \dots) = x^{\alpha+1} (a_1 + a_3 x^2 + \dots);$$

- $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$ , 由递推关系知, 级数会在  $x = \pm 1$  发散.

综上, 我们最终选取  $a_0 \neq 0, a_1 = 0$ , 从而  $\alpha(\alpha-1) = 0$ ,

$$P(x) = \begin{cases} a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots, & \alpha = 0 \\ a_0 x + a_2 x^3 + a_4 x^5 + \dots, & \alpha = 1 \end{cases}$$

这个级数在  $|x| < 1$  时当然收敛, 但在  $x = \pm 1$  时会发散, 除非级数在某一项截断 (即此项之后的系数均为 0). 考察递推关系:

$$a_{j+2} = \begin{cases} \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1)}{(j+1)(j+2)} a_j, & \alpha = 0 \\ \frac{(j+1)(j+2) - \ell(\ell+1)}{(j+2)(j+3)} a_j, & \alpha = 1 \end{cases}$$

因此, 收敛性要求  $\ell = 0, 1, 2, \dots$

### 定理 B.1.1: Legendre 多项式的递推关系

可直接从 Rodrigues 公式和 Legendre 方程得到:

$$(2\ell + 1)P_\ell = P'_{\ell+1} - P'_{\ell-1}, \quad (\text{B.3a})$$

$$(\ell + 1)P_{\ell+1} = (2\ell + 1)xP_\ell + \ell P_{\ell-1}, \quad (\text{B.3b})$$

$$P'_{\ell+1} = xP'_\ell + \ell(\ell + 1)P_\ell, \quad (\text{B.3c})$$

$$(x^2 - 1)P'_\ell = \ell xP_\ell - \ell P_{\ell-1}. \quad (\text{B.3d})$$

下面证明递推式 (B.3a).

证明. 由 Rodrigues 公式

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell. \quad (\text{B.4})$$

可得

$$\begin{aligned} P'_\ell &= \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}} (x^2 - 1)^\ell = \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} [x(x^2 - 1)^{\ell-1}] \\ &= \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}} [(2\ell - 1)x^2 - 1](x^2 - 1)^{\ell-2}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} P'_{\ell+1} - P'_{\ell-1} &= \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} [(2\ell + 1)x^2 - 1](x^2 - 1)^{\ell-1} - \frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^{\ell-1} \\ &= \frac{1}{2^\ell \ell^2} \frac{d^\ell}{dx^\ell} [(2\ell + 1)(x^2 - 1)^\ell] = (2\ell + 1)P_\ell. \end{aligned} \quad \square$$

## B.2 Bessel 函数

Bessel 方程

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0. \quad (\text{B.5})$$

采用级数解, 设

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j.$$

解得

$$\begin{cases} \alpha^2 = \nu^2, & j = 0 \\ a_1[(\alpha + 1)^2 - \nu^2] = 0, & j = 1 \\ a_{j-2} = [\nu^2 - (j + \alpha)^2]a_j, & j \geq 2 \end{cases}$$

故  $\alpha = \pm\nu$ ,  $a_1 = 0$ , 从而

$$a_{2j} = -\frac{1}{4j(j + \alpha)}a_{2j-2}, \quad j = 1, 2, \dots$$

选取<sup>1</sup>

$$\alpha = \nu, \quad a_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}.$$

解得 (第一类) Bessel 函数

$$J_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^j}{j!(j + \nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}, \quad (\text{B.6})$$

当  $\nu$  不为整数时,  $J_{-\nu}$  和  $J_\nu$  是线性无关的, 可作为 Bessel 方程的解系; 但当  $\nu$  为整数时, 二者线性相关:

$$J_{-\nu}(x) = (-)^\nu J_\nu(x),$$

为了得到线性无关的另一解, 定义 Neumann 函数 (第二类 Bessel 函数)

$$Y_\nu(x) := \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (\text{B.7})$$

当  $\nu$  为整数时,  $Y_\nu(x)$  的值定义为上式  $\nu$  趋近于该整数的极限 (即可去间断点). 可以证明,  $J_\nu, Y_\nu$  线性无关.

Bessel 方程的另一对重要线性无关解是 Hankel 函数 (第三类 Bessel 函数)

$$H_\nu^\pm(x) = J_\nu(x) \pm iY_\nu(x). \quad (\text{B.8})$$

三类 Bessel 函数均满足形如下面的递推公式

$$\begin{aligned} \Omega_{\nu-1} + \Omega_{\nu+1} &= \frac{2\nu}{x} \Omega_\nu, \\ \Omega_{\nu-1} - \Omega_{\nu+1} &= 2\Omega'_\nu. \end{aligned}$$

### 例 B.2.1: Bessel 函数的渐进性

$x \rightarrow 0$  时,

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\simeq \frac{1}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \\ Y_\nu(x) &\simeq \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right], & \nu = 0 \\ -\frac{(\nu-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} + \frac{\cot(\nu\pi)}{\nu!} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, & \nu \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> $\nu$  可以不是整数, 此时阶乘  $\nu!$  推广为  $\Gamma(\nu + 1)$ .

其中  $\gamma$  是 Euler-Mascheroni 常数

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = 0.5772156649\dots$$

$x \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_\nu(x) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

若将  $k$  替换为  $ik$ , 便会得到修正 (modified) Bessel 方程

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0.$$

修正 Bessel 函数只是纯虚数参数的 Bessel 函数

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = i^{\nu+1} \frac{\pi}{2} H_\nu^+(ix).$$