数理方程与特殊函数

by Dait at DEP 00, THU

2022/2/24 - 2022/6/16

目录

1 偏微分方程的定解问题 **1**

1.1 定解问题及适定性 2

1.2 一阶线性方程的通解法 2

1.3 波动方程的行波解和 d'Alembert 公式 3

1.4 二阶线性偏微分方程及标准型 7

1.5 叠加原理和齐次化原理 8

2 分离变量法 **10**

2.1 特征值和特征函数 11

2.2 Sturm-Liouville 定理 15

2.3 非其次方程 18

3 积分变换法 **21**

3.1 Fourier 变换 21

3.1.2 Fourier 正余弦变换 22

3.1.3 Fourier 变换与分离变量法 24

3.2 Laplace 变换 24

3.2.1 Laplace 定理的应用 26

4 基本解方法 **28**

4.1 广义函数 28

4.2 $Pu = 0$ 型方程的基本解 31

4.3 Possion 方程 Green 函数法 33

4.4 初值问题的基本解方法 37

附录 **40**

A 特征值问题 **40**

B Fourier 和 Laplace **42**

B.1 Fourier 系数 43

B.2 Fourier 变换 44

B.3 Laplace 变换 48

1 偏微分方程的定解问题

我们先从 ~~三~~ 两个具体问题出发推导典型方程.

弦振动 弦在自身张力作用下平衡位置在 x 轴，横向位移 $u = u(x,t)$，取 $[x_1, x_2]$ 段进行受力分析

$$\begin{aligned} x\ \text{轴：}\quad & T_2\cos\theta_2 - T_1\cos\theta_2 = 0, \\ y\ \text{轴：}\quad & T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_2 = \rho\,\delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}., \end{aligned}$$

其中 T 为弦内张力，ρ 为弦的线密度.

对于 $\theta \ll 1$ 的情况，有 $\cos\theta \doteq 1, \sin\theta \doteq \theta$,

$$T_1 = T_2 =: T,$$

又 $\theta = \partial u/\partial x$,

$$T(\theta_2 - \theta_1) = T\,\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho\,\delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

设 $a^2 := T/\rho$，得到波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.1}$$

热传导问题 由 Fourier 热传导定律，一段时间内流入物体 Ω 的热量为

$$Q = \int_{t_1}^{t_2}\oint_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} k\Delta u\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t,$$

其中 k 为介质的热传导系数，$u = u(x,y,z,t)$ 为各点温度.

另一方面，从比热容 c 的角度看，

$$Q = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t.$$

其中 ρ 为物体的体密度.

因为上式对任意 $\Omega \times [t_1, t_2]$ 均成立，设 $a^2 = k/c\rho$，得到热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.2}$$

1.1　定解问题及适定性

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ 内 m 阶 PDE

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0,$$

其中 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$, 有各阶偏导数连续的解 $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 称为**古典解**.

通解是 m 阶 PDE 有 m 个任意函数的解；**特解**是不包含任何任意函数或任意常数的解.

定义 1.1.1: 定解条件

确定解中函数的条件称为定解条件

I. $u|_{x=0} = f,$　　$u|_{\partial V} = f$ (Dirichlet);

II. $u_t|_{x=0} = f,$　　$u_t|_{\partial V} = f$ (Neumann);

III. $(u_t + \sigma u)_{x=0} = f,$　　$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)_{\partial V} = f$ (Robin).

适定解：存在、唯一且稳定.

1.2　一阶线性方程的通解法

1. 常数变易法

在微积分中已经学过

$$y' + P'y = Q.$$

有解

$$y = \mathrm{e}^{-P}\left[\int Q\,\mathrm{e}^{P}\,\mathrm{d}x + \mathrm{const}\right]. \tag{1.3}$$

对于 $u(x, y)$ 的方程

$$u_x + Ax = B.$$

$$\begin{cases} \varphi = \exp\left(-\int A\,\mathrm{d}x\right), \\ \psi = \int B\varphi^{-1}\,\mathrm{d}x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u = \varphi[\psi + g(y)].$$

其中 $g \in \mathscr{C}$.

2. 变量代换

对 $u=u(x,y)$ 的方程

$$au_x+bu_y+cu=f,$$

作变量代换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x\\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y\end{cases}$$

变成 $u=u(\xi,\eta)$ 的方程

$$\left(a\xi_x+b\xi_y\right)u_\xi+\left(a\eta_x+b\eta_y\right)u_\eta+cu=f.$$

使 $a\xi_x+b\xi_y=0$，得到**特征方程**和**特征曲线**

$$\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{\mathrm{d}y}{b},\quad\Rightarrow\quad\xi(x,y)=\mathrm{const}.\tag{1.4}$$

剩下

$$\left(a\eta_x+b\eta_y\right)u_\eta+cu=f.$$

对 η 积分便可求出通解．注意：要 $a\eta_x+b\eta_y\neq 0$，应有 Jacobi 行列式

$$\det J(\xi,\eta)=\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_x\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0.$$

1.3 波动方程的行波解和 d'Alembert 公式

一维波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad a>0.$$

可分解为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0.$$

等价于

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}+a\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial u}{\partial x}=v.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\xi=x-at,\\ \eta=x+at.\end{cases}$$

方程化为

$$\frac{\partial^2u}{\partial\eta\partial\xi}=0,\quad\Rightarrow\quad u=f(\xi)+g(\eta).$$

即**行波解**

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at),\quad f,g\in\mathscr{C}^2.\tag{1.5}$$

d'Alembert 公式

无限长弦自由振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

将初值问题带入通解

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} &= -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

因此

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.6}$$

对于 $\varphi \in \mathscr{C}^2, \psi \in \mathscr{C}$, 解是适定的.

非无限情况，可以延拓至无限. 比如端点固定的半无限边界条件：

$$\begin{aligned} &u(0,t) = 0, \quad x > 0,\ t > 0. \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \end{aligned}$$

进行奇延拓

$$\varphi_{\mathrm{o}}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \qquad \psi_{\mathrm{o}}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geqslant 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

问题便适用 d'Alembert 公式，解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\varphi_{\mathrm{o}}(x-at) + \varphi_{\mathrm{o}}(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_{\mathrm{o}}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, & x \geqslant at, \\ \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at) - \varphi(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, & x < at. \end{cases} \end{aligned}$$

端点自由半无限弦 $u_t(0,t) = 0$ 则采用偶延拓；对有界弦，则两端均延拓.

中心对称的球面波 $u = u(r)$，采用球坐标

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

波动方程变为

$$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right) = \frac{a^2}{r}(ru)_{rr}.$$

设 $v = ru$, 则可解得

$$u(r) = \frac{1}{r}[f(r-at) + g(r+at)].$$

掺入边界条件 $\varphi(r), \psi(r)$ 后，作奇延拓即可.

例： 一般的三维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x,y,z). \end{cases}$$

采用球面平均法，定义球面平均

$$\overline{u}(r,t;M) = \frac{1}{4\pi r}\oint_{S_r(M)} u(x,y,z,t)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $S_r(M)$ 表示以 M 为球心，r 为半径的球面.

略去证明过程，问题转化为中心对称球面波问题

$$\begin{cases} \overline{u}_{tt} = \dfrac{1}{r}\left(r\overline{u}\right)_{rr}, \\ (r\overline{u})_{r=0} = 0, \\ \overline{u}(r,0) = \overline{\varphi}(r), \quad \overline{u}_t(r,0) = \overline{\psi}(r). \end{cases}$$

奇延拓解，注意：$(r\varphi)_{\mathrm{o}} = r\varphi_{\mathrm{e}}$,

$$r\overline{u}(r,t) = \frac{1}{2}[(r-at)\overline{\varphi}_{\mathrm{e}}(r-at) + (r+at)\overline{\varphi}_{\mathrm{e}}(r+at)] + \frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\rho\overline{\psi}_{\mathrm{e}}(\rho)\,\mathrm{d}\rho.$$

为得到 $u(x,y,z,t)$, 取极限

$$u(M,t) = \lim_{r\to 0^+}\overline{u}(r,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\overline{\varphi}(at)\right) + t\overline{\psi}(at),$$

上式称为 Possion 公式.

求解三维波动方程的关键在于计算球面平均

$$\begin{aligned} u(M,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\oint_{S_{at}}\varphi\,\mathrm{d}S\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\oint_{S_{at}}\psi\,\mathrm{d}S \qquad (1.7)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right) + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\psi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \end{aligned}$$

其中采用球坐标.

例： 二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x,y). \end{cases}$$

采用升维法

$$U(x,y,z,t) = u(x,y,t), \quad \Phi(x,y,z) = \varphi(x,y),$$
$$U(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\oint_{S_{at}} \Phi \,\mathrm{d}S\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\oint_{S_{at}} \Psi \,\mathrm{d}S$$

由于 U, Φ, Ψ 取值与 z 无关，故积分区域可投影到 xy 平面上．记 D_r 是以 (x,y) 为圆心，r 为半径的圆内区域，在 D_r 上

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2}\,\mathrm{d}A = \frac{r\,\mathrm{d}A}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

故

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \\ + \frac{1}{2\pi a}\int_{D_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

(1.7) 是在球面上积分，而 (1.8) 是在圆域上积分．[I]

对一维弦振动方程，也可升二维，再将积分投影到 $[x - at, x + at]$ 上．记 C_r 是以 (x,y) 为圆心，r 为半径的圆，在 C_r 上

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{r\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}}.$$

故

$$\begin{aligned} &\int_{D_{at}} \frac{\Phi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} = \int_0^{at}\oint_{C_r} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\,\mathrm{d}\ell\,\mathrm{d}r \\ &= 2\int_0^{at}\int_{x-r}^{x+r} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\frac{r\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}}\,\mathrm{d}r \qquad \text{(交换次序)} \\ &= \left(\int_x^{x+at}\int_{\xi-x}^{at} + \int_{x-at}^{x}\int_{x-\xi}^{at}\right)\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\frac{2r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}}\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

[I]这个差别在物理上产生了截然不同的效果：对三维情况，波的传播既有清晰的前阵面，也有清晰的后阵面，可用于传播信号，这称为 Huygens 原理；对二维情况，波的传播有清晰的前阵面，但没有后阵面，这称为波的弥漫，或说这种波具有后效现象，不适合于传播信号．

推出 d'Alembert 公式：

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

1.4　二阶线性偏微分方程及标准型

两个自变量的二阶其次线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=0.$$

进行变量代换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}\qquad \text{其中 } \det J(\xi,\eta)\neq 0.$$

变成

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu=0.$$

其中

$$\begin{aligned}
A_{11}&=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\
A_{12}&=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\
A_{22}&=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2;\\
B_1&=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y,\\
B_2&=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y,
\end{aligned}$$

用矩阵表达即

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{12}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_x&\xi_x\\\eta_x&\eta_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_x&\xi_x\\\eta_x&\eta_y\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

考虑使 $A_{11}=0$ 或 $A_{22}=0$ 则有

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0.$$

其判别式

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}.$$

$\Delta > 0$，**双曲型**　不妨设 $a_{11} \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi(x,y) = \text{const} \\ \eta(x,y) = \text{const}' \end{cases} \tag{1.9}$$

继而 $A_{11} = A_{22} = 0$,

$$A_{12} = -\frac{2\Delta}{a_{11}} \xi_y \eta_y \neq 0,$$

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2A_{12}} (B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + cu) = 0. \tag{1.10}$$

上式就是**双曲型方程的标准型**.

若再作变量替换 $p = (\xi + \eta)/2$, $q = (\xi - \eta)/2$, 方程可化为

$$u_{pp} - u_{qq} + \frac{1}{A_{12}} [(B_1 + B_2) u_q + (B_1 - B_2) u_p + cu] = 0. \tag{1.11}$$

$\Delta = 0$，**抛物型**　只有一个线性 ODE，不妨设 $a_{11} \neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad \Rightarrow \quad \xi(x,y) = \text{const}. \tag{1.12}$$

任取 $\eta(x,y)$，可得 $A_{11} = A_{12} = 0$

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{22}} (B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + cu) = 0. \tag{1.13}$$

$\Delta < 0$，**椭圆型**　ODE 解为复函数，不妨设 $a_{11} \neq 0$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{12} \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a_{11}} \quad \Rightarrow \quad \xi(x,y) \pm \mathrm{i}\eta(x,y) = \text{const}. \tag{1.14}$$

其中 ξ, η 为实函数，$A_{12} = 0, A_{11} = A_{22} \neq 0$,

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{11}} (B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + cu) = 0. \tag{1.15}$$

1.5　叠加原理和齐次化原理

定义算子为从函数类到函数类的映射 $\mathcal{T}$.

定理 1.5.1: 叠加原理

线性算子 $\mathcal{L}$ 可与 $\lim, \sum, \int$ 等运算符交换.

齐次化原理也称冲量原理，源于求解有外力的弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

利用叠加原理，解 $u = u_0 + w$；其中 u_0 表示 $f \equiv 0$ 的齐次化解；w 表示 $\varphi, \psi \equiv 0$ 的解，即纯受迫振动.

考虑时间段 $[\tau, \tau + \delta\tau]$ 内，位移分布 $w(x,t) =: v(x,t;\tau)\,\delta\tau$，外力冲量 $f(x,\tau)\,\delta\tau$，有

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ v|_{t=\tau} = 0 \quad v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau). \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v(x,t;\tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi.$$

叠加得

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{1.16}$$

定理 1.5.2: 齐次化原理

定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} = \mathcal{P}u + f(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cdots = \left.\dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

其中 $\mathcal{P}$ 为常系数线性偏微分算子，有解

$$u(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t v(\boldsymbol{x},t;\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

v 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m v}{\partial t^m} = \mathcal{P}v, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \\ v|_{t=\tau} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \cdots = \left.\dfrac{\partial^{m-2} v}{\partial t^{m-2}}\right|_{t=\tau} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=\tau} = f(\boldsymbol{x},\tau). \end{cases}$$

当 $\boldsymbol{x} \in V \subsetneq \mathbb{R}^n$ 时，还应加上其次边界条件

$$\mathcal{P}u|_{\partial V} = 0, \quad \mathcal{P}v|_{\partial V} = 0.$$

2 分离变量法

回忆一些典型 ODE 方程的基本解法

二阶常系数其次方程

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{2.1}$$

其特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的解 $\lambda_{1,2}$

I. $\Delta > 0, \quad y = A\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + B\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$;

II. $\Delta = 0, \quad \lambda_{1,2} = \lambda, \quad y = (A + Bx)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$;

III. $\Delta < 0, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta, \quad y = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.

二阶非其次方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \tag{2.2}$$

根据叠加定理，其解 $y = y_0 + y_{\mathrm{s}}$; 其中 y_0 为 $f(x) \equiv 0$ 时的其次通解，y_{s} 为特解.

若 y_1, y_2 为对应的其次方程线性无关解，则可求出一特解

$$y_{\mathrm{s}}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)}{y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_1'(\xi)y_2(\xi)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad \forall x_0. \tag{2.3}$$

特解满足其次边界条件

$$y_{\mathrm{s}}(x_0) = 0, \quad y_{\mathrm{s}}'(x_0) = 0.$$

Euler 方程

$$x^2y'' + axy' + by = f(x). \tag{2.4}$$

令 $x = \mathrm{e}^t$, $u(t) = y(\mathrm{e}^t) = y(x)$ 方程变为

$$u'' + (a-1)u' + bu = f(\mathrm{e}^t). \tag{2.5}$$

2.1　特征值和特征函数

在讨论分离变量前，先引入 Fourier 级数的概念.

定义 2.1.1: Fourier 级数

$f(x)$ 周期为 2ℓ，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\mathrm{FS}\, f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right). \tag{2.6}$$

其中 Fourier 系数

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x;$$
$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x.$$

定理 2.1.1: Parserval 等式

若 $f\in\mathscr{L}^2[-\ell,\ell]$ 即平方可积，则

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right).$$

定理 2.1.2: Dirichlet 收敛定理

若

1. f,f' 连续或分段连续，至多有有限个第一类间断点；
2. f 至多有有限个极值点；

则

$$\mathrm{FS}\, f(x)=\begin{cases}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)/2, & x\in(-\ell,\ell)\\ \left(f(-\ell^+)+f(\ell^-)\right)/2, & x=\pm\ell\end{cases}$$

在 f 连续点处，$\mathrm{FS}\, f=f$.

例 1： 有界弦问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0,L)\,,\ t > 0 \\
u(0,t) = u(L,t) = 0, \\
u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x).
\end{cases}
$$

假设变量是可以分离的，即 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 则引入**特征值** λ

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda.$$

要使 $X'' + \lambda X = 0$ 且 $X(0) = X(L) = 0$ 仅有

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

进而 $T'' + a^2\lambda T = 0$

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{n\pi at}{L} + D_n \sin\frac{n\pi at}{L}.$$

因此原方程应有*形式解*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\frac{n\pi at}{L} + D_n\sin\frac{n\pi at}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2.7}$$

C_n, D_n 由初始条件确定

$$
\begin{aligned}
u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \varphi(x), \\
u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} = \psi(x).
\end{aligned}
$$

恰好对应 Fourier 正弦系数 $\varphi_n^{\mathrm{s}}, \psi_n^{\mathrm{s}}$

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x =: \varphi_n^{\mathrm{s}}, \\
D_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^L \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x =: \frac{L}{n\pi a}\psi_n^{\mathrm{s}}.
\end{aligned}
$$

至于形式解是否符合条件，不是考试涉及的范围.

例 2： 圆域上的 Laplace 方程，采用极坐标

$$\begin{cases}\Delta_2 u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad r < r_0 \\ u(r_0, \theta) = \varphi(\theta)\end{cases}$$

还应包括自然条件，即

$$\limsup_{r\to 0^+} |u(r,\theta)| < \infty.$$

和周期边界条件

$$u(r,0) = u(r,2\pi), \quad u_\theta(r,0) = u_\theta(r,2\pi).$$

分离变量 $u(r,\theta) = R(r)\varTheta(\theta)$

$$\begin{cases}r^2R'' + rR' + \lambda R = 0 \\ \varTheta'' - \lambda\varTheta = 0.\end{cases}$$

由周期条件，特征值 $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varTheta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta =: \begin{Bmatrix}\cos n\theta \\ \sin n\theta\end{Bmatrix}$$

再解 R 的 Euler 方程，可得

$$R_n(r) = \begin{cases}c_0 + d_0 \ln r, & n = 0 \\ c_n r^n + d_n r^{-n}, & n \geqslant 1\end{cases}$$

再由自然条件 $|R(0)| < \infty$，可知 $d_i \equiv 0$，进而

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_b \sin n\theta),$$

结合边界条件 $u(r_0,\theta) = \varphi(\theta)$，求得系数

$$a_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\cos n\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta, \quad b_n = \frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\sin n\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta.$$

因此

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta +$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)(\cos n\vartheta\cos n\theta+\sin n\vartheta\sin n\theta)\,\mathrm{d}\vartheta\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n(\theta-\vartheta)\right]\mathrm{d}\vartheta\end{aligned}$$

又由 Euler 公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos n\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\,k^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1-k\cos\theta}{1+k^2-2k\cos\theta}.$$

故得到圆域内的 Poisson 公式

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2-r^2)\varphi(\vartheta)}{r_0^2+r^2-2r_0r\cos(\theta-\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta \tag{2.8}$$

积分内式子称为 Poisson 核.

例 3： 圆域上的 Neumann 问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, & r<R\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R}=\varphi(\theta)\end{cases}$$

由 Green 公式

$$\int_{D_R}\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{r=R}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}\ell=R\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta=0.$$

剩下的证明留给读者

2.2　Sturm-Liouville 定理

例： 有限杆热传导问题，设杆温度 $u=u(x,t)$，则定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x\in(0,L)\,,\ t>0, \\ u(0,t)=0, \quad u_t(L,t)+hu(L,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi(x). \end{cases}$$

其中热交换常数 $h>0$.

分离常数 $u(x,t)=X(x)T(t)$,

$$\begin{cases} X''+\beta^2 X=0, \\ X(0)=0, \quad X'(L)+hX(L)=0. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \beta+h\tan\beta L=0.$$

$\Rightarrow\quad X_n(x)=\sin\beta_n x,\quad T_n(t)=C_n\,\mathrm{e}^{-\beta_n^2 a^2 t}$. 可以验证 X_n 是正交的，即

$$\langle X_m, X_n\rangle = \int_0^L X_m(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x=0, \quad m\neq n.$$

形式解

$$u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\beta_n^2 a^2 t}\sin\beta_n x.$$

再根据初始条件

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\beta_n x=\varphi(x).$$

在后面可以看到，这是广义 Fourier 级数，其系数

$$C_n=\frac{\langle\varphi,\sin\beta_n x\rangle}{\langle\sin\beta_n x,\sin\beta_n x\rangle}=\frac{\int_0^L\varphi(x)\sin\beta_n x\,\mathrm{d}x}{\int_0^L\sin^2\beta_n x\,\mathrm{d}x}.$$

定义 2.2.1: 加权内积

定义在 $[a,b]$ 上的实函数 f,g 的 ρ - 加权内积

$$\langle f,g\rangle_\rho := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

其中权函数 $\rho\geqslant 0$ 分段连续且零点孤立.

加权平方可积函数空间

$$\mathscr{L}^2_\rho[a,b] := \left\{ f \,\middle|\, \|f\|_\rho < \infty \right\}.$$

定理 2.2.1: 广义 Fourier 级数

若 $f_1, f_2, \ldots$ 在 $\mathscr{L}^2_\rho$ 中完备且加权正交，则 $\forall f \in \mathscr{L}^2_\rho$ 有广义 Fourier 级数展开

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x), \quad a_i = \frac{\langle f, f_i \rangle_\rho}{\|f_i\|^2_\rho}.$$

且有 Parserval 等式

$$\|f\|^2_\rho = \sum_{i=1}^{n} \left\langle f, \frac{f_i}{\|f_i\|_\rho} \right\rangle^2_\rho.$$

定义 2.2.2: Sturm-Liouville 方程

定义域 $[a,b]$，常见一维特征值问题都可以化为

$$\big(k(x)f'(x)\big)' - q(x)f(x) + \lambda\rho(x)f(x) = 0.$$

其中 λ 为参数，k, q, ρ 为实函数.

记

$$\mathcal{L}[f] := -\frac{(kf')' - qf}{\rho}.$$

则

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho - \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho = [k(fg' - f'g)]_a^b.$$

好的边界条件可以使上式等于 0.

正则 Sturm-Liouville 问题

$$\mathcal{L}[f](x) = \lambda f(x).$$

正则条件：

$$k \in \mathscr{C}^2[a,b],\ q, \rho \in \mathscr{C}[a,b];\ k, \rho > 0.$$

保证了 Sturm-Liouville 方程在 $[a,b]$ 上没有奇点.

边界条件：

$$\text{可分：}\begin{cases} c_1 f(a) + c_2 f'(a) = 0, \\ d_1 f(b) + d_2 f'(b) = 0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{周期：}\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases}$$

这些边界条件是好的，可使 $\mathcal{L}$ 是对称算子，即

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho = \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho .$$

定理 2.2.2: Sturm-Liouville 定理 1

正则 Sturm-Liouville 问题

1. 有可数多个实特征值
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$
2. 特征函数加权 ρ - 正交；
3. 特征值的特征子空间至多 2 维，
可分边界条件下，特征子空间为 1 维；
4. 特征函数构成 $\mathscr{L}^2_\rho$ 上完备的正交基底.

奇异 Sturm-Liouville 问题：不满足正则条件或区间无界；但若

$$a \text{ 或 } b \text{ 是 } k(x) \text{ 的一级零点，是 } q(x) \text{ 的至多一级极点，}$$

定理结论依旧成立！

定理 2.2.3: Sturm-Liouville 定理 2

若正则 Sturm-Liouville 问题还满足 $q \geqslant 0$；可分边界条件下还需满足 $c_1c_2 \leqslant 0$, $d_1d_2 \geqslant 0$.

1. 所有特征值非负；
特别的，存在 0 特征值 (对应特征函数 1) 的充要条件是 $q \equiv 0$ 且两端为第二类边界条件；
2. 若正则条件为周期条件，那么其对应于每一个非最小特征值 λ_0 的特征值有两个相互正交的特征函数.

例： 扇形域上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & r \in (1, \mathrm{e}),\ \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right). \\ u(1,\theta) = u(\mathrm{e},\theta) = 0, \\ u(r,0) = 0, \quad u\left(r, \dfrac{\pi}{2}\right) = g(r). \end{cases}$$

化为 Sturm-Liouville 型

$$(rR')' + \frac{\lambda}{r}R = 0,$$

对应 $k = r,\ q = 0,\ \rho = \dfrac{1}{r}$，因此 $\lambda > 0$，进而

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad R_n(r) = \sin(n\pi \ln r), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Theta_n(\theta) = A_n \,\mathrm{e}^{n\pi\theta} + B_n \,\mathrm{e}^{-n\pi\theta}.$$

再结合 u 的边界条件即可解出.

2.3　非其次方程

对非齐次方程，有时可靠直觉找出特解 v，但对一般的非齐次方程，需要借助齐次化原理转化为其次方程：

齐次化原理法　设 $\mathcal{D}_t$ 中关于 2 阶导数的系数为 1

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x,t), & x \in (a,b),\ t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, \quad (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

由 9 页的定理 1.5.2 知，有解

$$u(x,t) = \int_0^t v(x, t-\tau; \tau)\,\mathrm{d}\tau$$

v 满足

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x v + \mathcal{D}_t v = 0, & x \in (a,b),\ t > 0 \\ (\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = 0, \quad (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = f(x,\tau). \end{cases}$$

广义 Fourier 展开法　对于

$$\begin{cases}\mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x,t), & x\in(a,b),\ t>0\\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, \quad (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, & \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). & \end{cases}$$

1. 首先分离变量，求出 $f\equiv 0$ 对应的特征值问题

$$\mathcal{D}_x X = -\lambda X.$$

   解出特征值 $\{\lambda_n\}$ 和本征函数 $\{X_n(x)\}$，注意 n 的取值是否含 0.

2. 根据 Sturm-Liouville 定理判断 $\{X_n\}$ 的完备性，展开

$$u(x,t) = \sum T_n(t)X_n(x), \quad f(x) = \sum f_n(t)X_n(x),$$
$$\varphi(x) = \sum \varphi_n X_n(x), \quad \psi(x) = \sum \psi_n X_n(x).$$

   求解

$$\begin{cases}\mathcal{D}_t T_n(t) - \lambda_n T_n(t) = f_n(t),\\ T_n(t) = \varphi_n, \quad T_n'(t) = \psi_n.\end{cases}$$

3. 解出 $T_n(t)$，得 $u(x,t)$

一般的非齐次问题　对于一般的非齐次问题

$$\begin{cases}\mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x,t), & x\in(a,b),\ t>0\\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = g_1(t), \quad (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = g_2(t), & \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). & \end{cases}$$

首先将非齐次边界条件齐次化，寻找 $v(x,t)$ 满足

$$(\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = g_1(t), \quad (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = g_2(t).$$

显然 v 不唯一，若无法直觉看出，可设为 x 的线性函数

$$v(x,t) = A(t)x + B(t),$$

整理得

$$\begin{cases}(\alpha_1 a - \beta_1)A(t) + \alpha_1 B(t) = g_1(t),\\ (\alpha_2 b + \beta_2)A(t) + \alpha_2 B(t) = g_2(t).\end{cases}$$

便可解出 A, B 若无解还可设为 x 的二次函数.

这样便可将 u 分解为 $u = v + w$，而 w 的边界条件是齐次化的：

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x w + \mathcal{D}_t w = f(x,t) - \mathcal{D}_x v - \mathcal{D}_t v, & x \in (a,b),\ t > 0 \\ (\alpha_1 w - \beta_1 w_x)_{x=a} = 0, \quad (\alpha_2 w + \beta_2 w_x)_{x=b} = 0, \\ w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0}, \quad w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0}. \end{cases}$$

这在前面已解决.

3 积分变换法

定义 3.0.1: 积分变换

积分变换

$$\mathcal{T}[f](\xi)=\int_a^b f(x)K(x,\xi)\,\mathrm{d}x.$$

其中 K 是核函数 (kernel).

3.1 Fourier 变换

定义 3.1.1: Fourier 变换

定义 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi)\equiv\mathcal{F}[f](\xi):=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x,\quad \xi\in\mathbb{R},$$

及其逆变换

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\big[\hat{f}\big](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Fourier 变换的相关性质见第 44 页的附录内容.

例: 无界长杆热传导

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\\ u(x,0)=\varphi(x).\end{cases}\quad\longrightarrow\quad\begin{cases}\hat{u}_t=-a^2\xi^2\hat{u}+\hat{f},\\ \hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\varphi).\end{cases}$$

因此

$$\hat{u}(\xi,t)=\mathrm{e}^{-a^2\xi^2t}\left[\int_0^t\hat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{e}^{a^2\xi^2\tau}\,\mathrm{d}\tau+\hat{\varphi}(\xi)\right].$$

再用 Fourier 逆变换

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t\hat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]+\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2t}\right]\\&=\int_0^t\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\xi,\tau)\right]*\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau+\mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)]*\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\xi^2t}\right]\\&=\int_0^t f(x,t)*\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\eta)\,\mathrm{e}^{-(x-\eta)^2/4a^2t}\,\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta,\tau)\, \mathrm{e}^{-(x-\eta)^2/4a^2(t-\tau)}\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\tau + \\
&\qquad \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta)\, \mathrm{e}^{-(x-\eta)^2/4a^2 t}\, \mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

以上只是形式解.

3.1.2 Fourier 正余弦变换

对于定义在 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 上的函数，可将其奇偶延拓至 $\mathbb{R}$ 后再作 4ier 变换

定义 3.1.2: Fourier 正余弦变换

正余弦变换分别为

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_\mathrm{s}(\xi) \equiv \mathcal{F}_\mathrm{s}[f](\xi) &:= \int_0^{+\infty} f(x) \sin \xi x\, \mathrm{d}x; \\
\hat{f}_\mathrm{c}(\xi) \equiv \mathcal{F}_\mathrm{c}[f](\xi) &:= \int_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

其反变换

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}_\mathrm{s}(\xi) \sin \xi x\, \mathrm{d}\xi =: \mathcal{F}_\mathrm{s}^{-1}\left[\hat{f}_\mathrm{s}(\xi)\right] \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}_\mathrm{c}(\xi) \cos \xi x\, \mathrm{d}\xi =: \mathcal{F}_\mathrm{c}^{-1}\left[\hat{f}_\mathrm{c}(\xi)\right]
\end{aligned}
$$

变换的性质见第 46 页的附录内容.

例： 半无界杆热传导方程问题

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0,\ t > 0 \\
u(x,0) = 0, \\
u_x(0,t) = \varphi(x)
\end{cases}
$$

自然边界条件

$$
\lim_{x\to\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\infty} u_t(x,t) = 0
$$

若用 Fourier 正弦变换，则会出现 $u(0,t)$，此边界条件没有给出，因此只能用余弦变换，记 $U(\xi,t) = \mathcal{F}_\mathrm{c}[u(x,t)]$

$$
U_t(\xi,t) = a^2 [u_x(x,t)\cos \xi x - \xi u(x,t) \sin \xi x]_0^{+\infty} - a^2\xi^2 U(\xi,t)
$$

$$= -a^2\varphi(t) - a^2\xi^2 U(\xi,t).$$

故

$$U(\xi,t) = -a^2\int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

逆变换

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= -\frac{2a^2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\xi x\,\mathrm{d}\xi \\
&= -\frac{2a^2}{\pi}\int_0^t \varphi(\tau)\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos\xi x\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau \\
&= -a\int_0^t \varphi(\tau)\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

例： 半无界弦振动问题

$$\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x>0,\ t>0 \\
u_x(0,t) = f(t), & \\
u(x,0) = u_t(x,0) = 0 &
\end{cases}$$

自然边界条件 $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = \lim\limits_{x\to\infty} u_t(x,t) = 0$.

$$U_{tt}(\xi,t) = -a^2 f(t) - a^2\xi^2 U(\xi,t).$$

其次方程通解 $\cos a\xi t,\ \sin a\xi t$，运用 (2.3) 和边界条件 $U(\xi,0)=U_t(\xi,0)=0$

$$\begin{aligned}
U(\xi,t) &= \int_0^t -a^2 f(\tau)\frac{\cos a\xi\tau\sin a\xi t - \cos a\xi t\sin a\xi\tau}{\cos a\xi\tau\,(\sin a\xi\tau)' - (\cos a\xi\tau)'\sin a\xi\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= -\frac{a}{\xi}\int_0^t f(\tau)\sin a\xi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

逆变换

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{a}{\xi}\int_0^t f(\tau)\sin a\xi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\xi x\,\mathrm{d}\xi \\
&= -2a\int_0^t f(\tau)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\xi}\sin a\xi(t-\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

由

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin a\xi}{\xi}\right] = \frac{\mathrm{H}(x+a)-\mathrm{H}(x+a)}{2}.$$

其中 $\mathrm{H}(x)$ 为 Heaviside 跳跃函数，故

$$u(x,t) = -a\int_0^{t-x/a} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \quad x<at$$

3.1.3　Fourier 变换与分离变量法

无界区域是否有相应的分离变量法？

例： 无界长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

分离变量 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 特征值

$$X'' + \lambda X = 0,\ T' + \lambda a^2 T = 0$$

讨论知 $\lambda = \xi^2 \geqslant 0$

$$X = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}, \quad T = \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}.$$

故

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi)X(x,\xi)T(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\,\mathrm{d}\xi.$$

边界条件

$$u(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \equiv \mathcal{F}^{-1}[A] = \varphi(x),$$

故 $\varphi(x)$ 是 $A(\xi)$ 的 Fourier 变换.

可见对无界区间上的问题，分离变量法依然适用，只是特征值是连续分布的.

3.2　Laplace 变换

定义 3.2.1: Laplace 变换

定义 Laplace 变换

$$\bar{f}(\xi) = \mathcal{L}[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \operatorname{Re}\xi > \sigma_0.$$

其逆变换

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\bar{f}(\xi)\right] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \bar{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\xi x}\,\mathrm{d}\xi, \quad x \geqslant 0.$$

注意 Laplace 变换存在条件需要 $\exists M, \sigma_0$ 使得

$$|f(x)| < M\,\mathrm{e}^{\sigma_0 x}, \quad \forall x > 0.$$

其逆变换中 $\sigma > \sigma_0$；注意，Laplace 变换的积分中本身不包含 $\mathbb{R}_{<0}$ 的部分，一般认为 $f(<0) \equiv 0$.

定理 3.2.1: 第一展开定理

设 $F(\xi)$ 在 ∞ 邻域内有 Laurent 展开式

$$F(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\xi^n},$$

则

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad x \geqslant 0$$

定理 3.2.2: 第二展开定理

设 $F(\xi) = A(\xi)/B(\xi)$ 是有理函数，$\deg A < \deg B$，$B(\xi)$ 只有单零点 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 且是 $F(\xi)$ 的单极点，则

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(\xi_k)}{B'(\xi_k)}\,\mathrm{e}^{\xi_k x} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[F(\xi)\,\mathrm{e}^{\xi x}, \xi_k\right].$$

若 $F(\xi)$ 满足

1. 在 $\mathbb{C}$ 上除了有限个奇点 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 外解析；
2. 在半平面 $\operatorname{Re}\xi > \sigma_0$ 上解析；
3. $\exists M > 0,\ R > 0$ 使得当 $|\xi| > R$ 时

$$|F(\xi)| \leqslant \frac{M}{|\xi|},$$

则对于 $x \geqslant 0$ 有

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[F(\xi)\,\mathrm{e}^{\xi x}, \xi_k\right].$$

3.2.1　Laplace 定理的应用

例 1： 有限杆热传导

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, L),\ t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) = A, & \\ u(x, 0) = B. & \end{cases}$$

关于 t 作 Laplace 变换，记 $U(x, s) = \mathcal{L}\left[u(x, t)\right](s)$

$$sU(x, s) - u(x, 0) = U_{xx}(x, s),$$

由 $u(x, 0) = B$，

$$U(x, s) = c_1 \cosh \sqrt{s} x + c_2 \sinh \sqrt{s} x + \frac{B}{s}.$$

再由 $U_x(0, s) = 0,\ U(L, s) = A/s$

$$U(x, s) = \frac{(A - B) \cosh \sqrt{s} x}{s \cosh \sqrt{s} L} + \frac{B}{s}.$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(A - B) \cosh \sqrt{s} x}{s \cosh \sqrt{s} L}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B}{s}\right](t) \\ &= (A - B) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\cosh \sqrt{s} x}{s \cosh \sqrt{s} L}\right](t) + B. \end{aligned}$$

括号内函数的孤立奇点[II]应使得 $\cosh \sqrt{s} L = 0$

$$s_n = -\left[\frac{(2n - 1)\pi}{2L}\right]^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

由

$$\begin{aligned} u(x, t) &= B + (A - B)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}\left[\frac{\cosh \sqrt{s} x}{s \cosh \sqrt{s} L}\, \mathrm{e}^{st}, s_n\right]\right\} \\ &= A + \frac{4(A - B)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - 1} \cos\left[\frac{(2n - 1)\pi}{2L} x\right] \exp\left[-\frac{(2n - 1)^2 \pi^2}{4L^2} t\right]. \end{aligned}$$

[II]注意，0 不是此函数的孤立奇点，不能应用留数算出．逆变换结果中的 1 是围道积出来的．详情可见附录

例 2： 有限长弦受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u_t(L,t) = A\sin\omega t \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

关于 t 作 Laplace 变换，记 $U(x,s) = \mathcal{L}\left[u(x,t)\right](s)$

$$s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0) = a^2 U_{xx}(x,s).$$

结合 $U_x(L,s) = A\omega/(s^2+\omega^2)$

$$U(x,s) = \frac{Aa\omega}{s(s^2+\omega^2)} \sinh\frac{xs}{a} \operatorname{sech}\frac{Ls}{a}.$$

其所有的孤立奇点：可去奇点 0；一级奇点 $\pm\mathrm{i}\omega_k$，

$$\omega_k := \begin{cases} \omega, & k = 0 \\ \dfrac{2k-1}{2L}\pi a, & k \geqslant 1 \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}[U(x,s)\,\mathrm{e}^{st}, \mathrm{i}\omega_k] + \operatorname{Res}[U(x,s)\,\mathrm{e}^{st}, -\mathrm{i}\omega_k] \\ &= 2\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}[U(x,s)\,\mathrm{e}^{st}, \mathrm{i}\omega_k] \\ &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{Aa\omega}{s(s+\mathrm{i}\omega)}\sinh\frac{xs}{a}\operatorname{sech}\frac{Ls}{a}\,\mathrm{e}^{st}\right]_{\mathrm{i}\omega} + \\ &\qquad 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{Aa\omega}{s(s^2+\omega^2)}\sinh\frac{xs}{a}\cdot\frac{a}{L}\operatorname{csch}\frac{Ls}{a}\,\mathrm{e}^{st}\right]_{\mathrm{i}\omega_k} \\ &= \frac{Aa}{\omega}\sinh\frac{\omega x}{a}\sec\frac{\omega L}{a}\sin\omega t + \\ &\qquad 16Aa\omega^2 L\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)[4\omega^2L^2-(2k-1)^2\pi^2a^2]}\sin\frac{\omega_k x}{a}\sin\omega_k t. \end{aligned}$$

4 基本解方法

4.1 广义函数

δ 函数 源于物理中对集中分布物理量的数学描述．满足

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} f(x), & 0 \in (a,b) \\ 0, & 0 \notin (a,b) \end{cases}$$

因此 $f * \delta(\xi) = f(\xi)$．

定理 4.1.1: δ 复合函数

设 $u(x) \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 且在实轴上只有单零点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，则

$$\delta(u(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(x - x_k)}{|u'(x_k)|}. \tag{4.1}$$

比如 $\delta(ax) = \delta(x)/a$．

广义函数

定义 4.1.1: 线性泛函

函数空间 $\mathscr{V}$ 到数域 $\mathbb{F}$ 的映射 $\mathcal{T}$，若

$$\mathcal{T}(au + bv) = a\mathcal{T}u + b\mathcal{T}v$$

$\forall a, b \in \mathbb{F}$, $u, v \in \mathscr{V}$ 均成立，则 $\mathcal{T}$ 是 $\mathscr{V}$ 上的线性泛函，即广义函数．$\mathscr{V}$ 上所有线性泛函构成一个线性空间，称作 $\mathscr{V}$ 的对偶空间 $\mathscr{V}^*$．

例： 记实函数 f 的支撑集

$$\operatorname{supp} f := \{x \,|\, f(x) \neq 0\}\,. \tag{4.2}$$

并记

$$\mathscr{L}_0(\mathbb{R}) := \left\{ f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,\ \operatorname{supp} f \text{ 有界} \right\}$$

则 $\forall f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{R})$，$f$ 确定了 $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 上一个线性泛函：

$$\mathcal{T}_f[\varphi(x)] \equiv \langle f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

广义函数的导数　定义函数空间

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}) := \left\{ f \,\middle|\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} f\,\text{有界} \right\} \tag{4.4}$$

广义函数 $f \in \mathscr{D}^*(\mathbb{R})$，定义其 n 阶导数

$$\left\langle f^{(n)}, \varphi \right\rangle := (-1)^n \left\langle f, \varphi^{(n)} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{4.5}$$

特别的

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

泛函意义下，任意一个广义函数都是无穷阶可导的.

广义函数的卷积　给定 $f, g \in \mathscr{D}^*(\mathbb{R})$ 的卷积 $f * g(x)$ 也是广义函数

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \Big\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \Big\rangle. \tag{4.6}$$

一般的，对常系数微分算子 $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * \mathcal{D}g.$$

广义函数的 Fourier 变换　速降函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$，

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \,\middle|\, \lim_{x\to\infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}. \tag{4.7}$$

比如 $\varphi(x) = p(x)\,\mathrm{e}^{-ax^2}$，$p(x)$ 是多项式，$a > 0$，则 $\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

给定广义函数 $f \in \mathscr{S}^*$，f 的 Fourier 变换及其逆变换也是广义函数，定义为

$$\begin{array}{c} \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ \left\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \right\rangle = \left\langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \right\rangle \end{array}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}. \tag{4.8}$$

Fourier 变换作用转移到基本函数上，它们保持着经典意义下的基本性质.

广义函数序列的收敛性　设广义函数列 $\{f_i\}$ 及广义函数 f，若对基本函数空间的 φ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

则称 f_n 弱收敛到 f，本笔记记作 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \doteq f(x)$.

定理 4.1.2

若基本函数空间为 $\mathscr{S}$，则

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \doteq f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \doteq f'(x).$$

高维广义函数　与一维类似，函数空间

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f \mid f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp} f \text{ 有界}\},$$
$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{\varphi \,\middle|\, \lim_{|X|\to\infty} |X|^m \frac{\partial^k \varphi(X)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} = 0, \quad \forall m, k \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

对函数空间 $\mathscr{V}$ 上的线性泛函 f

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(X)\varphi(X)\,\mathrm{d}X, \quad \forall \varphi \in \mathscr{V}$$

构成 $\mathscr{V}^*$.

广义函数 $f \in \mathscr{D}^*(\mathbb{R}^n)$ 的偏导数定义为

$$\left\langle \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}, \varphi \right\rangle := (-1)^k \left\langle f, \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} \right\rangle$$

特别的，$f = \delta$ 时

$$\left\langle \frac{\partial^k \delta}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \frac{\partial^k \varphi(\mathbf{0})}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}.$$

例 4.1.1

可以证明

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\Delta_2 \ln r, & n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)S_n}\Delta_n \dfrac{1}{r^{n-2}}, & n \geqslant 3 \end{cases} \tag{4.9}$$

其中 $r = |\boldsymbol{x}|$，S_n 为 n 维单位球的表面积．特别的，$S_3 = 4\pi$.

广义函数的卷积

$$\langle f * g, \varphi\rangle := \Big\langle f(X), \langle g(Y), \varphi(X+Y)\rangle \Big\rangle.$$

4.2　$\boldsymbol{\mathcal{P}u=0}$ 型方程的基本解

讨论用基本解方法求解方程

$$\mathcal{P}u(M)=f(M),\quad M\in\mathbb{R}^n,$$

其中，$\mathcal{P}$ 是常系数线性偏微分算子.

视 f,u 为广义函数，它们在广义函数空间里可以自由地进行各种运算和交换. 通过这种方式得到的解叫广义函数解，简称作**广义解**. 如果解是一个正则广义函数，甚至还有足够的光滑性，那么这种解是经典解.

定义 4.2.1: $\mathcal{P}u=0$ 型方程的基本解

方程

$$\mathcal{P}U(M)=\delta(M)\tag{4.10}$$

的解 $U(M)$ 称作 $\mathcal{P}u=0$ 型方程的基本解.

对一般的函数 f，其对应的解是一般的源所产生的物理场. 故基本解也叫点源函数.

若 $\mathcal{P}u=0$ 型方程有基本解 $U(M)$，令

$$u(M):=U*f(M)=\int U(M-N)f(N)\,\mathrm{d}N.\tag{4.11}$$

由积分叠加原理

$$\mathcal{P}u(M)=\int\mathcal{P}U(M-N)f(N)\,\mathrm{d}N=\int\delta(M-N)f(N)\,\mathrm{d}N=f(M).$$

即 u 满足方程 $\mathcal{P}u=f$.

例 1： 求方程

$$y'+ay=f(x),\quad a>0$$

的基本解.

基本解 U 满足 $U'+aU=\delta(x)$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(U\,\mathrm{e}^{ax})=\delta(x)\,\mathrm{e}^{ax}=\delta(x),\quad\Rightarrow\quad U(x)=\mathrm{H}(x)\,\mathrm{e}^{-ax}.$$

因此原方程的解

$$y(x)=U*f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{H}(\xi)\,\mathrm{e}^{-a\xi}f(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{-\infty}^{x}f(\xi)\,\mathrm{e}^{-a(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

例 2： 求 3 维 Helmholtz 方程

$$\Delta_3 u + cu = 0$$

的基本解.

由于只有一个点源，方程具有对称性，可设方程有球对称基本解 $U(r)$，当 $r>0$ 时，$\delta(r)=0$，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)+cU=\frac{1}{r}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rU)+crU\right]=0,$$

当 $c=0$ 时，化为 Laplace 方程

$$(rU)''=0, \quad \Rightarrow \quad U(r)=\frac{A}{r}+\cancel{B}.$$

记 B_r 为半径为 r 的球内部分，则

$$\int_{B_r}\Delta U\,\mathrm{d}V=\int_{B_r}\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V=1.$$

由 Green 公式

$$\int_{B_r}\Delta U\,\mathrm{d}V=\oint_{\partial B_r}\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}S=-\frac{A}{r^2}\cdot 4\pi r^2=1, \quad \Rightarrow \quad U(r)=-\frac{1}{4\pi r}.$$

当 $c<0$ 时，记 $k:=\sqrt{-c}$

$$(rU)''-k^2rU=0, \quad \Rightarrow \quad U=A\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}+B\frac{\mathrm{e}^{kr}}{r}.$$

由积分条件

$$\int_{B_r}\Delta U-k^2U\,\mathrm{d}V=\oint_{\partial B_r}\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}S-k^2\int_{B_r}U\,\mathrm{d}V=1,$$

且

$$\begin{aligned}&\oint_{\partial B_r}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\mathrm{e}^{k\rho}}{\rho}\right)_r r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi-k^2\int_{B_r}\frac{\mathrm{e}^{k\rho}}{\rho}\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\&=4\pi(kr-1)\,\mathrm{e}^{kr}-4\pi\Big[(k\rho-1)\,\mathrm{e}^{k\rho}\Big]_0^r=-4\pi.\end{aligned}$$

故 $-4\pi(A+B)=1$，即

$$U(r)=-\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{4\pi r},\ -\frac{\mathrm{e}^{kr}}{4\pi r}.$$

当 $c>0$ 时，记 $k:=\sqrt{c}$

$$U=A\frac{\cos kr}{r}+B\cancel{\frac{\sin kr}{r}}.$$

$\sin kr/r$ 在 $\mathbb{C}$ 上是整函数，无奇异性，不能作为基本解．积分 $-4\pi A=1$

$$U(r)=-\frac{\cos kr}{4\pi r}.$$

4.3 Possion 方程 Green 函数法

首先引入 Green 公式.

定理 4.3.1: Green 公式

设非空有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 满足边界 $\partial\Omega$ 光滑，则 $\forall u, v \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}(\bar{\Omega})$，有

$$\int_\Omega v\Delta u \,\mathrm{d}V = \oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}V; \tag{4.12}$$

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \,\mathrm{d}V = \oint_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S. \tag{4.13}$$

证明： 由散度定理

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{A} \,\mathrm{d}V = \oint_{\partial\Omega} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S, \tag{4.14}$$

取 $\boldsymbol{A} = v\nabla u$，可得式 (4.12)：

$$\oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S \equiv \oint_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = \int_\Omega \nabla \cdot (v\nabla u) \,\mathrm{d}V = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + v\nabla^2 u \,\mathrm{d}V.$$

将 u, v 互换位置并与原式相减，即得式 (4.13). □

Poisson 方程第 I 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M \in V \subseteq \mathbb{R}^3 \\ u|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases} \tag{4.15}$$

物理上看，这是静电场的基本问题：空间区域 V 内有电荷体密度 $\rho = -\varepsilon f$，边界上电位已知为 φ，求 V 内电位 u.

由叠加原理，$u = v + w$，v, w 分别满足

$$\begin{cases} \Delta v = -f(M), \\ v|_{\partial V} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta w = 0, \\ w|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases}$$

其中 v 表示在边界接地条件下体内电荷产生的电场，w 表示由边界约束引起的电场.

定义 4.3.1: Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数

定解问题

$$\begin{cases} \Delta G(M;N) = -\,\delta(M-N), \\ G|_{\partial V} = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

的解 $G(M;N)$ 称为 Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数.

物理上看，Green 函数就是边界接地条件下，置于 V 内 N 点电荷为 $+\varepsilon$ 的点源在 V 内 M 点产生的电场，仍然是一个基本解.

$$u(M) = \int_V f(N)G(M;N)\,\mathrm{d}N - \oint_{\partial V} \varphi(N)\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S. \tag{4.17}$$

证明：

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_V u(N)\,\delta(M-N)\,\mathrm{d}N = -\int_V u(N)\,\Delta G(M;N)\,\mathrm{d}N \\ &= -\int_V u\,\Delta G\,\mathrm{d}N + \int_V G\,\Delta u\,\mathrm{d}N - \int_V G\,\underline{\Delta u}\,\mathrm{d}N \qquad \text{(Green-II)} \\ &= \oint_{\partial V} \cancel{G}\frac{\partial u}{\partial n} - \underline{u}\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S + \int_V Gf\,\mathrm{d}N \\ &= -\oint_{\partial V} \psi\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S + \int_V Gf\,\mathrm{d}N. \end{aligned}$$

□

Fourier 方法是求 Green 函数的基本方法，但对于一些特殊的区域，可以采用一些特殊方法，如镜像法.

镜像法 分解 $G = U + g$，U 满足 $\Delta U = -\,\delta(M-N)$，可取

$$U = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln r, & n = 2 \\ \dfrac{1}{4\pi r}, & n = 3 \end{cases}$$

而 g 满足

$$\begin{cases} \Delta g = 0, \\ g|_{\partial V} = -U, \end{cases}$$

是 N 的点电荷在边界上的感应电荷产生的电场.

区域外的点源在 V 内产生的电场满足 Laplace 方程，可以将边界感应电荷产生的电场 g 看作区域外某些虚设电荷产生的等效电场，这种来源于物理效应的方法叫镜像法.

例 1： 求上半空间 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数

V 内 $N(\xi,\eta,\zeta)$ 点的正电荷 ε 在空间 (x,y,z) 产生的电场为

$$U_0=\frac{1}{4\pi r}=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

可虚设电荷 $-\varepsilon$ 于 N 关于 $z=0$ 平面对称的点 $M_1(\xi,\eta,-\zeta)$，产生的电场

$$U_1=\frac{-1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}},$$

在边界上 $U_0|_{z=0}=-\,U_1|_{z=0}$

$$G=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right]$$

边界方向导数

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\zeta=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0}=\frac{-z}{2\pi\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}$$

故对于上半空间 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & z>0\\ u|_{z=0}=\varphi(x,y)\end{cases}$$

解的 Poisson 公式

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}$$

二维情况

$$G=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},\quad u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2+y^2}$$

例 2： 求半径为 R 的球域内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases}\Delta_3 G(M;N)=-\,\delta(M-N), & 0\leqslant r<R\\ G|_{r=R}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=R}=\frac{R^2-r^2}{4\pi R(R^2+r^2-2Rr\cos\psi)^{3/2}}.$$

故球内 Dirichlet 问题，解的 Poisson 形式

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0, & 0\leqslant r<R\\ u|_{r=R}=\varphi(\theta,\phi)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad u(r,\theta,\phi)=\frac{1}{4\pi R}\oint_{S_R}\frac{(R^2-r^2)\varphi(\theta_0,\phi_0)\,\mathrm{d}S_0}{(R^2+r^2-2Rr\cos\psi)^{3/2}}.$$

Fourier 法　Fourier 法是求 Green 函数的基本方法，主要思想是按照特征函数作广义 Fourier 展开，包括分离变量与积分变换.

例 1： 求矩形区域 $\Omega=[0,L]\times[0,M]$ 上第 I 类边值 Poisson 方程的 Green 函数

$$\begin{cases}\Delta_2 G(x,y;\xi,\eta)=-\delta(x-\xi,y-\eta), & x,\xi\in[0,L];\ y,\eta\in[0,M]\\ G(0,y)=G(L,y)=G(x,0)=G(x,M)=0, & \end{cases}$$

有特征值

$$G(x,y)=\sum_{m,n}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{M}.$$

系数

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2\right]C_{mn}&=\frac{4}{LM}\int_0^M\int_0^L\delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{M}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{4}{LM}\sin\frac{m\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi\eta}{M}.\end{aligned}$$

后略.

例 2： 求解

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, & x>0,y\in[0,a]\\ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u(x,a)=\psi(x), & \\ u(0,y)=0, & \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=-\left[\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\eta=0}\mathrm{d}\xi+\int_0^{+\infty}\psi(\xi)\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\eta=a}\mathrm{d}\xi\right]\\&=\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left.\frac{\partial G}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}\mathrm{d}\xi-\int_0^{+\infty}\psi(\xi)\left.\frac{\partial G}{\partial \eta}\right|_{\eta=a}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

进而

$$\frac{\partial G}{\partial\eta}=\sum_{n=1}^{\infty}4n\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\xi\sin\omega x}{n^2\pi^2+a^2\omega^2}\,\mathrm{d}\omega\cdot\cos\frac{n\pi\eta}{a}\cos\frac{n\pi y}{a};$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}4n\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\xi\sin\omega x}{n^2\pi^2+a^2\omega^2}\left[\varphi(\xi)-(-1)^n\psi(\xi)\right]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\xi\cdot\cos\frac{n\pi y}{a}.$$

*Poisson 方程第 II, III 边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=-f(M), & M\in V\subseteq\mathbb{R}^n\\ \left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_{\partial V}=\varphi(M), & \alpha,\beta\neq 0.\end{cases}\tag{4.18}$$

相应的 Green 函数

$$\begin{cases}\Delta G=-\,\delta(M-N), & M,N\in V\subseteq\mathbb{R}^n\\ \left(\alpha G+\beta\dfrac{\partial G}{\partial n}\right)_{\partial V}=0, & \alpha,\beta\neq 0.\end{cases}$$

原问题的解

$$\begin{aligned}u(M)&=\int_V f(N)G(M;N)\,\mathrm{d}N+\frac{1}{\beta}\oint_{\partial V}\varphi(N)G(M;N)\,\mathrm{d}S &(4.19)\\ &=\int_V f(N)G(M;N)\,\mathrm{d}N-\frac{1}{\alpha}\oint_{\partial V}\varphi(N)\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S &(4.20)\end{aligned}$$

$\beta=0$ 即第 I 边值问题．$\alpha=0$ 即第 II 边值问题，但此时表示内部有热源而边界绝热的稳恒温度场，这是不可能的，因此需要修正为

$$\begin{cases}\Delta G=-\,\delta(M-N)+\dfrac{1}{v},\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial V}=0,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\Delta G=-\,\delta(M-N),\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial V}=-\dfrac{1}{s},\end{cases}$$

其中 v,s 为 V 的体积和表面积．有解

$$u(M)=\int_V f(N)G(M;N)\,\mathrm{d}N+\oint_{\partial V}\varphi(N)G(M;N)\,\mathrm{d}S+\text{const.}\tag{4.21}$$

相容性条件

$$\int_V f(M)\,\mathrm{d}M+\oint_{\partial V}\varphi(M)\,\mathrm{d}S=0.\tag{4.22}$$

4.4　初值问题的基本解方法

本节主要用基本解方法来求解发展方程，如 $u_t=\mathcal{P}u$ 型方程

$$\begin{cases}u_t=\mathcal{P}u+f(M,t), & M\in\mathbb{R}^n,t>0\\ u(M,0)=\varphi(M).\end{cases}\tag{4.23}$$

这里所涉及的 $\mathcal{P}$ 是关于空间变量 M 的常系数线性偏微分算子．

定义 4.4.1: $u_t = \mathcal{P}u$ 型方程初值问题的基本解

基本解 $U(M,t)$ 满足

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{P}U, & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(M,0) = \delta(M). \end{cases} \tag{4.24}$$

有

$$u(M,t) = U(M,t) * \varphi(M) + \int_0^t U(M,t-\tau) * f(M,\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.25}$$

证明过程略.

以及 $u_{tt} = \mathcal{P}u$ 型方程

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{P}u + f(M,t), & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(M,0) = \varphi(M), \ \ u_t(M,0) = \psi(M). \end{cases} \tag{4.26}$$

定义 4.4.2: $u_{tt} = \mathcal{P}u$ 型方程初值问题的基本解

基本解 $U(M,t)$ 满足

$$\begin{cases} U_{tt} = \mathcal{P}U, & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(M,0) = 0, \ \ U_t(M,0) = \delta(M). \end{cases} \tag{4.27}$$

有

$$u(M,t) = U * \psi + \frac{\partial}{\partial t}(U * \varphi) + \int_0^t U(M,t-\tau) * f(M,\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.28}$$

*** 混合问题的 Green 函数**　对于发展方程的混合问题通常用分离变量法或积分变换法求解，当然也可以用 Green 函数 (点源函数) 法.

例：　一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in (0,L), \ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Green 函数 $G(x,t;\xi)$ 满足

$$\begin{cases} G_{tt} = a^2 G_{xx}, & x,\xi \in (0,L),\ t>0 \\ G(0,t) = G(L,t) = 0 \\ G(x,0) = 0, \quad G_t(x,0) = \delta(x-\xi) \end{cases}$$

利用 Fourier 方法可得

$$G(x,t;\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a} \sin\frac{n\pi\xi}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\frac{n\pi a t}{L},$$

进而解

$$u(x,t) = \int_0^L \psi(\xi) G \,\mathrm{d}\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \varphi(\xi) G \,\mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_0^L f(\xi,\tau) G(x,t-\tau;\xi) \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \tag{4.29}$$

附录

A 特征值问题

1. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

2. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

3. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(L) = 0 \end{cases}$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

4. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

5. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma = -hL\tan\gamma > 0,$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin\frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

6. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma = -hL\cot\gamma > 0,$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos\frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

7. $$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - h_1 X'(0) = 0 \\ X(L) + h_2 X'(L) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tan L\gamma = \frac{(h_1 + h_2)\gamma}{h_1 h_2 \gamma^2 - 1},$$

$$\lambda_n = \gamma_n^2, \quad X_n = \sin \gamma_n x + h_1 \gamma_n \cos \gamma_n x, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

8. $$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases}$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n = A \cos nx + B \sin nx, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

B Fourier 和 Laplace

定义实函数 f,g 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的内积

$$\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x + \cos(n+m)x\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{nm};$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x\,\mathrm{d}x = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x - \cos(n+m)x\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{nm}.$$

因此

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \ldots\}$$

构成 $[-\pi,\pi]$ 上一组完备的基底，归一化之

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}.$$

用这一组基可将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \cos nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \sin nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

利用 $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x.$$

对于其他周期 $T=\lambda$, $k = 2\pi/\lambda$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nkx}, \quad c_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nkx}\,\mathrm{d}x.$$

而当 $f(x)$ 不是周期函数时，就不能用 Fourier 变换.

然而，若认为 $\lambda = 2N$ 充分大，$\xi = nk$，

$$f(x) = \sum_{\xi} \left[\frac{k}{2\pi} \int_{-N}^{N} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}.$$

再让 $N \to \infty$, $k \to 0$，定义

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x,$$

以及

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi,$$

这就是 Fourier 变换.

B.1 Fourier 系数

对于多项式的 Fourier 系数涉及的积分，只需要利用分部积分将 x^k 不断微分降幂，

1. $\displaystyle\int x \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{x \sin ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2} + \text{const}.$
2. $\displaystyle\int x \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} + \text{const}.$
3. $\displaystyle\int x^2 \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^2 \sin ax}{a} + \frac{2x \cos ax}{a^2} - \frac{2 \sin ax}{a^3} + \text{const}.$
4. $\displaystyle\int x^2 \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2 \cos ax}{a} + \frac{2x \sin ax}{a^2} + \frac{2 \cos ax}{a^3} + \text{const}.$
5. $\displaystyle\int x^3 \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^3 \sin ax}{a} + \frac{3x^2 \cos ax}{a^2} - \frac{6x \sin ax}{a^3} - \frac{6 \cos ax}{a^4} + \text{const}.$
6. $\displaystyle\int x^3 \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{x^3 \cos ax}{a} + \frac{3x^2 \sin ax}{a^2} + \frac{6x \cos ax}{a^3} - \frac{6 \sin ax}{a^4} + \text{const}.$

降幂顺序，正弦系数的符号 $-,+,+,-$，余弦系数的符号 $+,+,-,-$；系数均是 $1, n, n(n-1), \ldots$ 形式；正弦函数 cos 打头，余弦 sin 打头，然后正余弦交替.

对于指数函数的 Fourier 系数，只需记住

$$\mathcal{I} := \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax} \cdot \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const};$$

$$\mathcal{J} := \int \mathrm{e}^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + \mathrm{const}.$$

证明：　分部积分

$$\mathcal{I} = \frac{1}{b} \int \mathrm{e}^{ax} \,\mathrm{d} \sin bx = \frac{1}{b} \mathrm{e}^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \mathcal{J};$$
$$\mathcal{J} = -\frac{1}{b} \int \mathrm{e}^{ax} \,\mathrm{d} \cos bx = -\frac{1}{b} \mathrm{e}^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \mathcal{I}.$$

即可解得上式.

从双曲函数的角度

$$\int \cosh ax \cos bx \,\mathrm{d}x = \frac{a \sinh ax \cos bx + b \cosh ax \sin bx}{a^2 + b^2} + \mathrm{const},$$
$$\int \cosh ax \sin bx \,\mathrm{d}x = \frac{a \sinh ax \sin bx - b \cosh ax \cos bx}{a^2 + b^2} + \mathrm{const},$$
$$\int \sinh ax \cos bx \,\mathrm{d}x = \frac{a \cosh ax \cos bx + b \sinh ax \sin bx}{a^2 + b^2} + \mathrm{const},$$
$$\int \sinh ax \sin bx \,\mathrm{d}x = \frac{a \cosh ax \sin bx - b \sinh ax \cos bx}{a^2 + b^2} + \mathrm{const}.$$

对数函数乘正弦函数分部积分后会出现 $\mathrm{Si}\, x$，反三角函数更是没有积分结果，因此靠上面的公式可以解决绝大部分 Fourier 系数的习题.

B.2　Fourier 变换

Fourier 变换的性质 [III]

1. 线性　　$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]$.

2. 微分
$$\mathcal{F}\left[f'\right] = \mathrm{i}\xi \hat{f}.$$

3. 积分
$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\eta) \,\mathrm{d}\eta\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\xi} \hat{f}.$$
其中积分式的 Fourier 变换存在，且 $\hat{f}(0) = 0$.

4. $\hat{f}(\xi)$ 微分
$$\hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}[-\mathrm{i}xf](\xi).$$

[III]定义见第 21 页 3.0.1.

5. $\hat{f}(\xi)$ 积分

$$\int_{-\infty}^{\xi} \hat{f}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \mathcal{F}\left[\frac{f(x)}{-\mathrm{i}x}\right](\xi) + C_1, \tag{B.1}$$

$$\int_{\xi}^{+\infty} \hat{f}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \mathcal{F}\left[\frac{f(x)}{\mathrm{i}x}\right](\xi) + C_2. \tag{B.2}$$

6. 位移性质

$$\mathcal{F}\left[f(x-a)\right](\xi) = \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi},$$
$$\hat{f}(\xi-\alpha) = \mathcal{F}\left[f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\right](\xi).$$

7. 相似

$$\mathcal{F}\left[f(kx)\right](\xi) = \frac{1}{|k|}\hat{f}\left(\frac{\xi}{k}\right).$$

8. 卷积[IV]

$$\mathcal{F}\left[f * g\right] = \hat{f}\hat{g}.$$

9. 象函数卷积

$$\hat{f} * \hat{g} = 2\pi\mathcal{F}\left[fg\right]$$

10. 反射

$$\mathcal{F}\left[\hat{f}(\xi)\right](x) = 2\pi f(-x).$$

因此 Fourier 逆变换

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

在 f 连续点处 $\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\xi)\right](x) = f(x)$.

高维下 Fourier 变换的性质是相似的.

[IV] f, g 的卷积

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)g(x-\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

且有 $f * g = g * f$.

Fourier 正余弦变换的性质[V]

1. 微分

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[f'\right](\xi) &= f(x)\sin\xi x\big|_{x=0}^{+\infty} - \xi\mathcal{F}_{\mathrm{c}}[f](\xi);\\
\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[f'\right](\xi) &= f(x)\cos\xi x\big|_{x=0}^{+\infty} + \xi\mathcal{F}_{\mathrm{s}}[f](\xi);\\
\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[f''\right](\xi) &= \left[f'(x)\sin\xi x - \xi f(x)\cos\xi x\right]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2\mathcal{F}_{\mathrm{s}}[f](\xi);\\
\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[f''\right](\xi) &= \left[f'(x)\cos\xi x - \xi f(x)\sin\xi x\right]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2\mathcal{F}_{\mathrm{c}}[f](\xi).
\end{aligned}
$$

2. 积分

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[\int_0^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right](\xi) &= \frac{1}{\xi}\mathcal{F}_{\mathrm{c}}[f](\xi);\\
\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[\int_0^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right](\xi) &= -\frac{1}{\xi}\mathcal{F}_{\mathrm{s}}[f](\xi).
\end{aligned}
$$

其中 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

3. 象函数微分

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_{\mathrm{s}}' &= -\mathcal{F}_{\mathrm{c}}[xf] & \hat{f}_{\mathrm{s}}'' &= -\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[x^2 f\right]\\
\hat{f}_{\mathrm{c}}' &= \mathcal{F}_{\mathrm{s}}[xf] & \hat{f}_{\mathrm{c}}'' &= -\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[x^2 f\right].
\end{aligned}
$$

4. 相似

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathrm{s}}[f(kx)](\xi) &= \frac{1}{k}\hat{f}_{\mathrm{s}}\left(\frac{\xi}{|k|}\right),\\
\mathcal{F}_{\mathrm{c}}[f(kx)](\xi) &= \frac{1}{|k|}\hat{f}_{\mathrm{c}}\left(\frac{\xi}{|k|}\right)
\end{aligned}
$$

5. 反射

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[\hat{f}_{\mathrm{s}}(x)\right](\xi) &= -\frac{\pi}{2}f(-\xi),\\
\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[\hat{f}_{\mathrm{c}}(x)\right](\xi) &= \frac{\pi}{2}f(-\xi).
\end{aligned}
$$

[V]定义见第 22 页 3.1.2.

Fourier 变换函数表

1. $\mathcal{F}[\delta(x)] = 1, \qquad \mathcal{F}\left[\delta^{(n)}(x)\right] = (\mathrm{i}\xi)^n;$
2. $\mathcal{F}[1] = 2\pi\,\delta(\xi), \qquad \mathcal{F}[x^n] = 2\pi\mathrm{i}^n\,\delta^{(n)}(\xi);$
3. $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\right] = 2\pi\,\delta(\xi - a);$
4. $\mathcal{F}[\cos ax] = \pi\left[\delta(\xi - a) + \delta(\xi + a)\right];$
5. $\mathcal{F}[\sin ax] = -\mathrm{i}\pi\left[\delta(\xi - a) - \delta(\xi + a)\right];$
6. $\mathcal{F}\left[\cos ax^2\right] = \sqrt{\dfrac{\pi}{2a}}\left(\cos\dfrac{\xi^2}{4a} + \sin\dfrac{\xi^2}{4a}\right);$
7. $\mathcal{F}\left[\sin ax^2\right] = \sqrt{\dfrac{\pi}{2a}}\left(\cos\dfrac{\xi^2}{4a} - \sin\dfrac{\xi^2}{4a}\right);$
8. $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-a|x|}\right] = \dfrac{2a}{a^2 + \xi^2};$
9. $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-ax^2}\right] = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/4a};$
10. $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax^2}\right] = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\xi^2/4a - \pi/4\right)};$
11. $\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{x}\right] = -\mathrm{i}\pi\,\mathrm{sgn}\,\xi;$
12. $\mathcal{F}\left[\dfrac{1}{x^n}\right] = -\mathrm{i}\pi\dfrac{(-\mathrm{i}\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{sgn}\,\xi, \qquad \mathcal{F}\left[\dfrac{1}{x^2}\right] = -\pi\xi\,\mathrm{sgn}\,\xi;$
13. $\mathcal{F}\left[|x|^{\alpha}\right] = -2\Gamma(\alpha + 1)\sin\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)|\xi|^{-1-\alpha};$
14. $\mathcal{F}[\mathrm{H}(x)] = \dfrac{1}{\mathrm{i}\xi} + \pi\,\delta(\xi);$
15. $\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \mathrm{sinc}\,\dfrac{\xi}{2};$(系数应该是错的)
16. $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}\,x] = \Pi\left(\dfrac{\xi}{2}\right)$(系数应该是错的)

Heaviside 阶梯函数

$$\mathrm{H}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

B.3　Laplace 变换

Laplace 变换的性质　注：$x<0$ 函数值取 0.

1. 线性

2. 微分

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f'\right] &= \xi\bar{f} - f(0);\\
\mathcal{L}\left[f''\right] &= \xi^2\bar{f} - \xi f(0) - f'(0);\\
\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right] &= \xi^n\bar{f} - \left(\xi^{n-1}f(0) + \xi^{n-2}f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)\right).
\end{aligned}
$$

3. 积分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right] = \frac{1}{\xi}\bar{f}.$$

4. 像函数微分

$$\bar{f}' = \mathcal{L}\left[-xf\right].$$

5. 像函数积分

$$\int_\xi^{+\infty}\bar{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mathcal{L}\left[\frac{f}{x}\right].$$

积分路径 $\operatorname{Re}\xi > \sigma_0$.

6. 复频移与时滞

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\right] &= \bar{f}(\xi-\alpha), &\quad \alpha\in\mathbb{C}\\
\mathcal{L}\left[f(x-a)\right] &= \bar{f}\,\mathrm{e}^{-a\xi}, &\quad a\geqslant 0
\end{aligned}
$$

7. 相似

$$\mathcal{L}\left[f(kx)\right] = \frac{1}{k}\bar{f}\left(\frac{\xi}{k}\right),\quad k>0$$

8. 卷积

$$\mathcal{L}\left[f*g\right] = \mathcal{L}\left[f\right]\mathcal{L}\left[g\right]$$

9. 像函数卷积

$$\mathcal{L}\left[fg\right](\xi) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\bar{f}(\zeta)\bar{g}(\xi-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 $\xi>\max(\sigma_f,\sigma_g)$

Laplace 变换函数表

1. $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1, \quad \mathcal{L}\left[\delta^{(n)}(t)\right] = s^n;$
2. $\mathcal{L}\left[\operatorname{sgn} t\right] = \mathcal{L}\left[\mathrm{H}(t)\right] = \dfrac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\left[t\,\mathrm{H}(t)\right] = \dfrac{1}{s^2};$
3. $\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\right] = \dfrac{1}{\sqrt{s}};$
4. $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at}\right] = \dfrac{1}{s-a};$
5. $\mathcal{L}\left[\sin at\right] = \dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}\left[\sinh at\right] = \dfrac{a}{s^2-a^2};$
6. $\mathcal{L}\left[\cos at\right] = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad \mathcal{L}\left[\cosh at\right] = \dfrac{s}{s^2-a^2};$