

线性代数  
Linear Algebra

Dait

# 目 录

<b>第一章</b>	<b>向量和矩阵</b>	<b>1</b>
1.1	向量 . . . . .	1
1.2	矩阵 . . . . .	3
1.3	矩阵的逆 . . . . .	5
1.3.1*	Woodbury 矩阵恒等式 . . . . .	7
1.3.2*	分块矩阵的逆 . . . . .	8
1.4	矩阵的迹 . . . . .	9
<b>第二章</b>	<b>线性方程组</b>	<b>11</b>
2.1	消元法 . . . . .	11
2.2	矩阵的行变换 . . . . .	11
2.3	LU 分解 . . . . .	14
<b>第三章</b>	<b>线性空间</b>	<b>16</b>
3.1	线性空间 . . . . .	16
3.2	线性独立、基和维度 . . . . .	17
3.3	矩阵 $A$ 的四个子空间 . . . . .	18
3.4	矩阵的秩、线性代数基本定理 . . . . .	19
<b>第四章</b>	<b>正交性</b>	<b>22</b>
4.1	正交性 . . . . .	22
4.2	投影 . . . . .	24
4.3	最小二乘法 . . . . .	25
4.4	正交归一基 . . . . .	26
4.4.1	Gram-Schmidt 法则 . . . . .	27
4.4.2	$QR$ 分解 . . . . .	27
<b>第五章</b>	<b>行列式</b>	<b>28</b>
5.1	行列式 . . . . .	28
5.2	行列式的性质 . . . . .	29
5.3	行列式的运算 . . . . .	30
5.4	Cramer 法则、伴随矩阵 . . . . .	32

<b>第六章 特征值和特征向量</b>	<b>35</b>
6.1 特征值和特征向量	35
6.2 特征多项式	36
6.3 矩阵对角化	36
6.4 * Jordan 标准型	38
6.5 对称矩阵	41
6.6 正定矩阵	42
<b>第七章 奇异值分解</b>	<b>45</b>
7.1 奇异值分解	46
7.2 矩阵的模	47
7.3 伪逆	49
7.4 主成分分析	49
<b>第八章 线性映射</b>	<b>51</b>
8.1 线性映射和矩阵	52
8.2 线性映射的性质	53
8.3 基的变换	55
8.4 对偶空间	56
8.5 直和、直积	58
8.6 张量	59
<b>第九章 复线性空间</b>	<b>62</b>
9.1 内积和内积空间	62
9.2 Hermite 矩阵	64
9.3 么正矩阵	65
<b>第十章 群、环、域</b>	<b>66</b>
10.1 二元运算	66
10.2 群与子群	66
10.3 群同态	69
10.4 群同构	71
10.5 等价关系	71

# 第一章 向量和矩阵

## 1.1 向量

### 定义 1.1.1: 数域

给定复数集的子集  $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ , 若满足:

- 非平凡:  $0, 1 \in \mathbb{F}$ ;
- 封闭性:  $\forall a, b \in \mathbb{F}$ , 有  $a \pm b \in \mathbb{F}$ ,  $ab \in \mathbb{F}$ , 且  $a/b \in \mathbb{F}$  (当  $b \neq 0$  时).

则称  $\mathbb{F}$  是一个数域 (number field).

### 例 1.1.1: 数域的例子

- 最小的数域: 有理数域  $\mathbb{Q}$ ;
- 二次数域  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ;
- 实数域  $\mathbb{R}$ 、复数域  $\mathbb{C}$ .

注. 直到第九章复线性空间之前, 均只考虑实数域  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .

### 定义 1.1.2: 向量

一个  $n$  维向量 (vector)  $v$  由  $n$  个标量 (scalar)  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{F}$  组成, 记作:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

组成向量  $v$  的标量  $v_1, \dots, v_n$  称为  $v$  的分量 (component).

所有  $n$  维向量构成的集合记作  $\mathbb{F}^n$ .

注. 如无特别说明, 向量均默认为列向量, 即  $n$  行 1 列.

### 定义 1.1.3: 零向量、反向量

零向量 (zero vector) 是所有分量均为 0 的向量, 记作  $0$ ;

一个向量  $v$  的反向量 (opposite vector) 对应每个分量取相反数, 记作  $-v$ .

## 定义 1.1.4: 向量的加法

向量的加法 (addition) 即对应分量相加.

推论. 向量加法的性质:  $\forall v, u, w \in \mathbb{F}^n$ ,

- 交换律:  $v + u = u + v$ ;
- 结合律:  $v + (u + w) = (v + u) + w \equiv v + u + w$ ;
- 零向量:  $0 + v = v + 0 = v$ ;
- 反向量:  $v + (-v) = 0$ .

## 定义 1.1.5: 向量的数乘

向量与标量的数乘 (scalar product) 即每个分量乘标量.

推论. 向量数乘的性质:  $\forall v, u \in \mathbb{F}^n, c, d \in \mathbb{F}$ ,

- $1v = v, (-1)v = -v, 0v = 0$ .
- 结合律:  $c(dv) = (cd)v \equiv cdv$ ;
- 对标量的分配律:  $(c + d)v = cv + dv$ ;
- 对向量的分配律:  $c(v + u) = cv + cu$ .

## 定义 1.1.6: 线性组合

向量  $v$  和  $u$  的线性组合 (linear combination) 形如

$$cv + du, \quad \forall c, d \in \mathbb{F}.$$

一般地,  $n$  个向量  $v_1, v_2, \dots, v_n$  的线性组合形如

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, \quad \forall c_i \in \mathbb{F}.$$

注. 线性组合是线性代数中最重要的概念之一.

## 定义 1.1.7: (实) 向量的内积

两个向量的内积 (inner product) 结果是一个实数  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . 对于实向量

$$\langle v, u \rangle := \sum_{i=1}^n v_i u_i \equiv v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n. \quad (1.1)$$

有时可以写成点乘形式  $\langle v, u \rangle = v \cdot u$ ; 特别地, 简记  $v^2 \equiv \langle v, v \rangle$ .

推论. 实向量内积的性质:  $\forall v, u \in \mathbb{F}^n, c \in \mathbb{F}$ ,

- 交换律:  $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$ ;
- 与数乘的结合律:  $\langle cv, u \rangle = \langle v, cu \rangle = c \langle v, u \rangle$ ;
- 分配律:  $\langle v + u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$ ;
- 正定性:  $v^2 \geq 0$ , 且  $v^2 = 0 \iff v = 0$ .

**定义 1.1.8: 向量的长度**

向量的长度 (或范数, norm) 可通过内积定义:

$$\|v\| := \sqrt{v^2} = (v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)^{1/2}. \quad (1.2)$$

长度为 1 的向量是单位向量 (unit vector).

**推论.** 与向量  $v$  同向的单位向量是

$$\hat{v} := \frac{v}{\|v\|}, \quad (1.3)$$

## 1.2 矩阵

**定义 1.2.1: 矩阵**

一个  $m$  行  $n$  列的矩阵 (matrix)  $A$  形如

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{F}.$$

其中  $A_{ij}$  是矩阵第  $i$  行第  $j$  列的元素. 矩阵  $A$  的行数和列数分别记作  $\text{row}(A) = m$ ,  $\text{col}(A) = n$ . 特别地, 当  $m = n$  时, 称矩阵是  $n$  阶方阵 (square matrix).

所有  $m$  行  $n$  列矩阵构成的集合记作  $\mathbb{F}^{m \times n}$ .

矩阵的加法和数乘与向量的运算规律相同, 是平凡的 (trivial).

**定义 1.2.2: 矩阵和向量的乘法 (左乘)**

$m \times n$  矩阵  $A$  左乘  $n$  维向量  $x$ , 结果  $b = Ax$  是一个  $m$  维向量, 其各分量为:

$$b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

**注.**  $Ax$  可以看成  $A$  所有列的线性组合, 或者说  $A$  的各行与  $x$  分别内积. 这样线性方程组就可以等价地写成  $Ax = b$  的形式, 即:

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots \\ A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \iff \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

这种思想有助于我们掌握线性代数的理念.

## 定义 1.2.3: 矩阵的乘法

$m \times n$  矩阵  $A$  左乘  $n \times p$  矩阵  $B$ , 结果  $AB$  是一个  $m \times p$  的矩阵, 其分量为

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj}. \quad (1.5)$$

因此若  $A, B$  可以相乘, 要求  $\text{col}(A) = \text{row}(B)$ ; 特别地, 当  $A$  是方阵时, 简记

$$A^n \equiv \underbrace{A \cdots A}_n.$$

**推论.** 矩阵乘法的性质:  $\forall A, B, C$  可运算的,

- 左分配律:  $(A + B)C = AC + BC$ ;
- 右分配律:  $A(B + C) = AB + AC$ .
- 结合律:  $(AB)C = A(BC) \equiv ABC$ ;

**证明.** 仅给出矩阵乘法结合律的证明:  $\forall A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times p}, C \in \mathbb{F}^{p \times q}$

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \sum_{\ell=1}^p B_{k\ell} C_{\ell j} \\ &= \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{k\ell} C_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^p (AB)_{i\ell} C_{\ell j} = [(AB)C]_{ij}. \end{aligned}$$

对应元素均相等, 即证. □

**注.** 矩阵乘法一般不满足交换律, 即一般  $AB \neq BA$ , 比如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 定义 1.2.4: 单位矩阵

$n$  阶单位矩阵 (unit matrix) 是  $n$  阶方阵, 对角项均为 1, 其余项均为 0:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

**推论.**  $\forall A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , 均有

$$I_m A = A I_n = A.$$

## 定理 1.2.1

若方阵  $A$  与任意方阵可交换 (commutable), 则  $A = cI$ ,  $c \in \mathbb{F}$

证明. 定义  $e_{ij}$  表示仅  $i$  行  $j$  列为 1, 其余项均为 0. 则

$$(Ae_{ij})_{k\ell} = \sum_{p=1}^n A_{kp}(e_{ij})_{p\ell} = A_{ki}\delta_{j\ell};$$

$$(e_{ij}A)_{k\ell} = \sum_{p=1}^n (e_{ij})_{kp}A_{p\ell} = \delta_{ki}A_{j\ell},$$

当  $k \neq i = j = \ell$  时,  $A_{ki} = 0$ ; 当  $k = i \neq j = \ell$  时,  $A_{ii} = A_{jj}$ . □

#### 定义 1.2.5: 分块矩阵

可以将矩阵分块, 每一块 (block) 是一个小矩阵, 比如

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \equiv \begin{bmatrix} A & B \\ & D \end{bmatrix}.$$

注. 分块矩阵乘法: 每个块当作矩阵的元素, 块之间使用矩阵乘法.

#### 定义 1.2.6: 矩阵的转置

矩阵  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  的转置 (transpose) 记作  $A^\top$ ,  $A^\top \in \mathbb{F}^{n \times m}$  且元素由  $A$  给出

$$(A^\top)_{ij} = A_{ji}.$$

推论. 矩阵转置的性质:  $\forall A, B$  可运算的,

- $(A^\top)^\top = A$ ;
- $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ ,  $(cA)^\top = cA^\top$ ;
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$ .

## 1.3 矩阵的逆

#### 定义 1.3.1: 矩阵的逆

方阵  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  的逆矩阵 (inverse)  $A^{-1} \in \mathbb{F}^{n \times n}$  满足

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

若存在  $A^{-1}$ , 则称矩阵  $A$  是可逆的; 否则称为不可逆的, 也称奇异的 (singular).

推论. 矩阵逆的性质:  $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$  可逆,

- $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$ ;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ;
- $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$ .



注. 一般地,  $A, B$  均可逆  $\not\Rightarrow (A+B)$  可逆. 除非满足一些额外性质, 见定理 1.3.2.

### 例 1.3.1: 二阶方阵的逆

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

### 例 1.3.2: 对角矩阵

非对角项均为 0 的方阵称为对角矩阵 (diagonal matrix), 对角项为  $a_1, \dots, a_n$  记作

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n).$$

对角矩阵有很多简单的性质, 比如对角矩阵的乘法很简单

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n). \quad (1.7)$$

显然, 对角矩阵的逆为

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)^{-1} = \text{diag}(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}). \quad (1.8)$$

这对于分块对角矩阵也成立, 即式中  $a_i$  可以为可逆矩阵.

### 定理 1.3.1: 左逆和右逆

若  $A, B, C$  为方阵, 且  $BA = AC = I$ , 则  $B = C$ .

证明. 考察恒等式  $B(AC) = (BA)C$  即得  $B = C$ . □

注. 事实上, 可以有更强的命题: 若  $A, B$  为方阵, 则  $BA = I \iff AB = I$ .

### 例 1.3.3: 幂零矩阵

若  $A$  是幂零矩阵 (nilpotent matrix), 即  $\exists n \in \mathbb{N}$  使  $A^n = O$ , 则  $I + A$  可逆, 且

$$(I + A)^{-1} = I - A + A^2 - \dots + (-A)^{n-1}.$$

因为

$$(I + A)(I - A + \dots + (-A)^{n-1}) = I + A^n = I.$$

## 1.3.1\* Woodbury 矩阵恒等式

## 定理 1.3.2: Woodbury 矩阵恒等式

给定  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}, U \in \mathbb{F}^{n \times k}, C \in \mathbb{F}^{k \times k}, V \in \mathbb{F}^{k \times n}$  且  $A, C, (C^{-1} + VA^{-1}U)$  可逆, 则  $(A + UCV)$  可逆, 且

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}. \quad (1.9)$$

证明. 可以直接验证. 也可以对比定理 1.3.4 中的对应块矩阵得到.  $\square$

推论.

- 取  $A = I_n, C = I_k$ , 有

$$(I_n + UV)^{-1} = I_n - U(I_k + VU)^{-1}V. \quad (1.10)$$

特别地, 当  $k = 1$  时,  $U, V$  都是向量:

$$(I - uv^\top)^{-1} = I - \frac{uv^\top}{1 + v^\top u}. \quad (1.11)$$

- 取  $n = k$  且  $U = V = I_n$ , 有

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1} \quad (1.12a)$$

$$= A^{-1} - (A + AB^{-1}A)^{-1}. \quad (1.12b)$$

式 (1.12b) 称为华罗庚恒等式 (Hua's identity).

## 定理 1.3.3: Sherman-Morrison 公式

给定可逆矩阵  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  和向量  $u, v \in \mathbb{F}^n$ , 则  $(A + uv^\top)$  可逆  $\iff 1 + v^\top A^{-1}u \neq 0$ , 此时

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u}. \quad (1.13)$$

证明. 将式 (1.11) 中的  $u$  替换为  $A^{-1}u$  即可.  $\square$

## 例 1.3.4: 应用

求逆矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

设  $v = [1 \ \cdots \ 1]^\top$ , 不难看出  $A = -I + vv^\top$ , 故

$$A^{-1} = -I - \frac{vv^\top}{1-n} = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n \end{bmatrix}.$$

### 1.3.2\* 分块矩阵的逆

给定分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

当  $M$  满足某些条件时, 其逆可以被表达出来.

#### 定义 1.3.2: Schur 补

当  $A$  可逆时, 记  $M/A := D - CA^{-1}B$  是  $A$  在矩阵  $M$  中的 Schur 补 (Schur complement); 当  $D$  可逆时,  $D$  的 Schur 补是  $M/D = A - BD^{-1}C$ .

#### 定理 1.3.4: 分块矩阵的逆

当  $A, M/A$  可逆时,  $M$  可逆, 且

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (1.14a)$$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}; \quad (1.14b)$$

当  $D, M/D$  可逆时,  $M$  可逆, 且

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & \\ -D^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & \\ & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ & I \end{bmatrix} \quad (1.15a)$$

$$= \begin{bmatrix} (M/D)^{-1} & -(M/D)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(M/D)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.15b)$$

当  $A, D, M/A, M/D$  均可逆时,  $M$  可逆, 且逆可以写成简单的分解:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & \\ & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

证明. 由于分块对角矩阵的逆是方便求的. 当  $A$  可逆时, 可以利用 Gauss-Jordan 消元法 (见

第 2.1 节) 将  $M$  化为分块对角的, 即 LDU 分解 (见定理 2.3.2)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ & I \end{bmatrix},$$

上式的分块对角矩阵中出现了  $A$  的 Schur 补  $M/A$ ; 当  $D$  可逆时, 同理有

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & \\ & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix},$$

对上两式求逆即得. □

**推论.** 对比 (1.14b) 和 (1.15b), 可得

$$A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} = (M/D)^{-1} \quad (1.17a)$$

$$-A^{-1}B(M/A)^{-1} = -(M/D)^{-1}BD^{-1} \quad (1.17b)$$

$$-(M/A)^{-1}CA^{-1} = -D^{-1}C(M/D)^{-1} \quad (1.17c)$$

$$(M/A)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}C(M/D)^{-1}BD^{-1} \quad (1.17d)$$

可得 Woodbury 矩阵恒等式 (定理 1.3.2).

**推论.** 对于比较简单的分块矩阵, 其逆的形式更简单:

- 当  $C = O$  时,  $M$  可逆  $\iff A, D$  均可逆, 且

$$\begin{bmatrix} A & B \\ & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ & D^{-1} \end{bmatrix}; \quad (1.18)$$

- 当  $A, D = O$  时,  $M$  可逆  $\iff B, C$  均可逆, 且

$$\begin{bmatrix} & B \\ C & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & C^{-1} \\ B^{-1} & \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

## 1.4 矩阵的迹

### 定义 1.4.1: 矩阵的迹

$n$  阶方阵的迹 (trace) 是对角元的和

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}. \quad (1.20)$$

**推论.** 矩阵迹的性质:  $\forall A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ ,  $\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$ ;
- $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$ ;
- 两个  $n$  维列向量  $u, v$ , 有  $\text{tr}(uv^\top) = v^\top u$

$$\text{tr}(uv^\top) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u^\top v = v^\top u.$$

**注.** 一般地,  $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$ .

## 定理 1.4.1: 交换矩阵乘法的迹

$\forall m \times n$  的矩阵  $A$  和  $n \times m$  的矩阵  $B$ , 都有

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA). \quad (1.21)$$

证明. 直接展开计算:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA). \end{aligned} \quad \square$$

注. 除此之外, 迹还有一些重要性质, 将在后面讲.

## 第二章 线性方程组

线性方程 (linear equation) 是未知数最高次数为 1 的方程. 考虑  $m$  个  $n$  元线性方程构成的线性方程组 (linear equation set)

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

可以把系数写成系数矩阵  $A$ , 即  $Ax = b$ .

### 2.1 消元法

#### 定义 2.1.1: Gauss 消元法

消元法 (elimination) 就是通过对方程之间倍加消元, 得到一个上三角方程组, 比如

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 8y = 8 \end{cases}$$

而主元 (pivot element) 就是每个方程的第一个非 0 系数.

注. 当主元数目  $<$  未知数时, 消元法失效, 若最终结果:

- 得到  $0 \neq 0$ , 则方程组无解;
- 得到  $0 = 0$ , 则方程组有无穷多解.

因此消元法要求: 方程个数与未知数个数相同.

#### 方法 2.1.1: 消元法算法

1. 找到第 1 个  $x_1$  系数不为 0 的方程并移到最上面;
2. 通过将方程 1 倍加, 从第 2 个到第  $n$  个方程中消去  $x_1$ ;
3. 得到的第 2 个到第  $n$  个方程构成  $(n-1)$  元的线性方程组, 重复步骤 1.
4. 最后结果如果是一个上三角方程组, 便可从最后一个方程开始解出全部未知数. 否则消元法失效.

### 2.2 矩阵的行变换

方程中, 置换、倍加、倍乘同时作用在系数矩阵  $A$  和  $b$  上, 因此可以写成增广矩阵 (augmented matrix)  $[A \ b]$  并对其消元得到  $[I \ b']$ . 类似的, 可以考虑对一般矩阵进行置换、倍加、

倍乘的操作.

### 定义 2.2.1: 矩阵的初等行变换

- 倍加 (row addition): 一行乘系数加到另一行
- 对换 (row switching): 交换两行
- 倍乘 (row multiplication): 一行乘以一个非零系数

注. 利用 Gauss-Jordan 消元法对增广矩阵  $[A \ I]$  做消元操作:

$$[A \ I] \rightarrow [I \ A^{-1}].$$

就可以得到  $A$  的逆  $A^{-1}$ .

### 定义 2.2.2: 行等价

如果一个矩阵可以经过行变换得到另一个矩阵, 则它们行等价 (row-equivalent).

### 定义 2.2.3: 行阶梯矩阵

矩阵  $M$  若其满足以下性质:

- 如果  $M$  的第  $i$  行是 0 行, 则下面的所有行的都是 0 行;
- 如果  $M$  的第  $i$  行不全是 0, 则从左数第一个非 0 元素叫做主元. 每个主元所在的列都在其上一行的主元的所在列的右边;
- 同一列中在主元下面的元素都是 0.

则称矩阵  $M$  为行阶梯型 (row echelon form).

比如, 形如 (其中主元  $*$  非 0,  $\cdot$  任意)

$$\begin{bmatrix} 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

就是一个行阶梯矩阵, 其中  $*$  是主元.

注. 消元法就是把增广矩阵变成行阶梯矩阵的过程.

显然, 行阶梯矩阵并不唯一, 还可以进一步化简.

### 定义 2.2.4: 约化行阶梯矩阵

约化行阶梯型 (reduced row echelon form) 矩阵还满足以下额外性质:

- 每个主元都是 1;
- 主元所在列只有主元非 0, 称为主列, 其他列称为自由列.

若  $A$  与约化行阶梯矩阵  $U$  行等价, 记作  $U = \text{rref}(A)$ .

按上面的例子，其约化行阶梯矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

第 2,4,5 列为主列，其余为自由列。

### 定理 2.2.1

一个矩阵的约化行阶梯矩阵是唯一的。

证明. 唯一性证明见 Lay 书的附录 A. □

注. 借助约化行阶梯矩阵的概念，我们可归纳出解方程组  $Ax = b$  的方法：

- 将增广矩阵  $[A \ b]$  约化为  $[\text{rref}(A) \ b']$ ;
- 解的存在性：若  $\text{rref}(A)$  有 0 行，且  $b'$  对应行元素非 0，则无解；反之有解；
- 解的唯一性：若  $\text{rref}(A)$  没有自由列，则解唯一。

### 定义 2.2.5: 初等矩阵

对  $m \times n$  矩阵  $A$  行变换  $\iff$  用  $m \times m$  初等矩阵 (elementary matrix) 左乘  $A$ .  
初等矩阵有以下三种类型：

- 倍加：  $A$  的第  $i$  行的  $a$  倍加到第  $j$  行 ( $r'_j = ar_i + r_j$ )

$$E_{ij}(a) := \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \ddots & & a \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} = I + ae_{ij},$$

逆：  $E_{ij}(a)^{-1} = E_{ij}(-a)$ ;

- 置换：置换  $A$  的第  $i$  行和第  $j$  行 ( $r_i \rightleftharpoons r_j$ )

$$E_{ij} := \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & \ddots & \\ & 1 & & 0 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} = I + e_{ij} + e_{ji} - e_{ii} - e_{jj},$$

逆：  $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$ ;



- 倍乘:  $A$  的第  $i$  行乘一个非 0 常数  $c$  ( $r'_i = cr_i$ )

$$E_i(c) := \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = I + (c-1)e_{ii}.$$

逆:  $E_i(c)^{-1} = E_i(c^{-1})$ .

消元法: 用一系列初等矩阵  $E_1, \dots, E_k$  左乘  $A$ , 把  $A$  化简成行阶梯矩阵.

## 2.3 LU 分解

### 定义 2.3.1: 上/下三角矩阵

上三角矩阵 (upper triangular matrix)  $U$  是主对角线以下元素都是 0 的方阵

$$U_{ij} = 0, \quad \forall i > j,$$

同理可定义下三角矩阵 (lower ...)  $L$  满足  $L_{ij} = 0, \forall i < j$ .

不难注意到, 倍加矩阵和逆矩阵都同时是上/下三角矩阵. 这是 LU 分解的基础.

### 定理 2.3.1: LU 分解

对于方阵  $A$  来说,  $A$  的 LU 分解 (lower-upper decomposition/factorization) 是将  $A$  分解成一个下三角矩阵  $L$  和一个上三角矩阵  $U$  的乘积:

$$A = LU, \tag{2.1}$$

有时需要再乘上一个置换矩阵  $PA = LU$ , 称为 LUP 分解 (LU factorization with partial pivoting).

证明.  $U$  是和  $A$  等价的行阶梯矩阵,  $U$  是上三角的. 如果  $A$  化成行阶梯矩阵  $U$  的过程中没有置换, 则从  $A$  到  $U$  的过程中, 我们只需消去主元下面的元素:

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U.$$

由于  $E_i$  及其逆  $E_i^{-1}$  都是下三角的, 故

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1},$$

也是下三角的,  $A = LU$ ; 反之, 则存在一个置换矩阵  $P$ , 使得  $PA = LU$ .  $\square$

注. LU 分解可以被视为 Gauss 消元法的矩阵形式. 在数值计算上, LU 分解经常被用来解线性方程组, 且在求逆矩阵和计算行列式中都是一个关键的步骤.

**定理 2.3.2: LDU 分解**

LDU 分解 (lower-diagonal-upper decomposition) 是将矩阵写成

$$A = LDU,$$

其中  $D$  是对角矩阵,  $L, U$  是单位下/上三角的 (unitriangular), 即其对角元均为 1.

## 第三章 线性空间

### 3.1 线性空间

#### 定义 3.1.1: 线性空间

定义域  $\mathbb{F}$  上的线性空间 (linear space)  $V$  是具有加法  $+: V \times V \rightarrow V$  和数乘  $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$  运算且满足以下公理的集合.

- |              |                                 |
|--------------|---------------------------------|
| 1. 加法交换律     | $x + y = y + x;$                |
| 2. 加法结合律     | $x + (y + z) = (x + y) + z;$    |
| 3. 加法零元      | $x + 0 = x;$                    |
| 4. 加法逆元      | $x + (-x) = 0;$                 |
| 5. 数乘单位元     | $1x = x;$                       |
| 6. 数乘结合律     | $(c_1 c_2)x = c_1(c_2 x);$      |
| 7. 数乘对向量的分配律 | $c(x + y) = cx + cy;$           |
| 8. 数乘对标量的分配律 | $(c_1 + c_2)x = c_1 x + c_2 x.$ |

#### 例 3.1.1

$\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{C}^n$  都是线性空间.

#### 定义 3.1.2: 子空间

给定线性空间  $V$  的子集  $V_s \subset V$ , 若其对于加法和数乘封闭:  $\forall v, w \in V_s, \forall c \in \mathbb{F}$

$$v + w \in V_s, \quad cv \in V_s,$$

则  $V_s$  为  $V$  的子空间 (subspace). 子空间中元素的线性组合都在同一个子空间,

**推论.** 子空间必然包含零向量. 因为若  $v \in V_s$ , 则  $v + (-v) = 0 \in V_s$ .

**注.** 线性空间  $V$  的一个子集一般不是子空间, 但我们可以通过其构造出子空间.

#### 定义 3.1.3: 线性扩张

$S$  的线性扩张 (linear span) 是  $S$  中向量的所有线性组合的集合, 记作  $\text{span}(S)$ .

**推论.**  $V$  的子集的线性扩展是  $V$  的子空间.

## 3.2 线性独立、基和维度

### 定义 3.2.1: 线性独立

$n$  个向量  $\{v_i\}$  是线性独立的 (linear independent), 当且仅当

$$\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0,$$

只在  $x_i = 0$  时成立, 即只有零解.  $n$  个向量  $\{v_i\}$  不是线性独立, 那么他们是线性相关的 (linear correlate).

等价描述: 集合中每一个向量都不能写成其它向量的线性组合.

注. 向量是否线性独立同数域的选择有关.

### 定义 3.2.2: 线性空间的基

线性空间  $V$  的基 (base) 是一组线性无关的向量  $\{v_i\}$ , 并且他们张成整个线性空间  $V$ .

### 例 3.2.1

$\{e_i\}$  构成  $\mathbb{R}^n$  的一组基.

### 定义 3.2.3: 线性空间的维度

线性空间的维度 (dimension) 是一组基中向量的个数, 记作  $\dim(V)$ .

### 定理 3.2.1: 维度的确定性

线性空间的维度和基的选取无关.

证明. 若线性空间  $V$  存在两组基  $\{v_1, \dots, v_m\}, \{w_1, \dots, w_n\}$  元素个数不等, 不妨设  $n > m$ . 因为  $\{w_i\}$  是基,  $\{v_i\}$  可以被表示为其线性组合

$$v_i = \sum_{j=1}^n w_j a_{ji}, \quad \forall i.$$

考虑线性组合

$$\sum_{i=1}^m x_i v_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i w_j a_{ji} = 0.$$

因为  $\{w_i\}$  线性无关, 故

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} x_i = 0, \quad \forall j,$$

但是其未知数的个数  $m >$  方程的个数  $n$ , 系数矩阵  $A$  一定有自由列, 所以  $x$  有非零解. 这与  $\{v_i\}$  线性无关矛盾! 故  $m = n$ .  $\square$

**定理 3.2.2**

若  $\forall v \in V_1$  可以写成  $V_2$  中向量的线性组合, 则  $\dim(V_1) \leq \dim(V_2)$ .

证明. 这个定理是 trivial 的, 证明留给读者.  $\square$

**定义 3.2.4: 变换矩阵**

不同基之间的变换相应的矩阵称为变换矩阵 (transformation matrix).

### 3.3 矩阵 $A$ 的四个子空间

给定矩阵  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , 可由其得到四个子空间: 列空间、行空间、零空间和左零空间.

**定义 3.3.1: 列空间和行空间**

矩阵  $A$  的列空间 (column space) 是  $A$  的所有列的线性组合的集合, 记作  $C(A)$ .

矩阵  $A$  的行空间 (row space) 是  $A$  的所有行的线性组合的集合, 可用  $C(A^\top)$  表示.

**推论.**  $C(A)$  是  $\mathbb{F}^m$  的子空间,  $C(A^\top)$  是  $\mathbb{F}^n$  的子空间.

**注.** 线性方程组  $Ax = b$  有解  $\iff b \in C(A)$ .

**定义 3.3.2: 零空间和左零空间**

矩阵  $A$  的零空间 (null space) 是所有满足  $Ax = 0$  的  $x$  的集合, 记作  $N(A)$ .

矩阵  $A$  的左零空间 (left null space) 是所有满足  $x^\top A = 0$  的  $x$  的集合, 可用  $N(A^\top)$  表示.

**推论.**  $N(A)$  是  $\mathbb{F}^n$  的子空间,  $N(A^\top)$  是  $\mathbb{F}^m$  的子空间.

**例 3.3.1: 子空间的基**

$N(A)$  的基: 显然  $N(A) = N(\text{rref}(A))$ , 而  $\text{rref}(A)$  的每个自由列各给出一个  $N(\text{rref}(A))$  的基. 若第  $j$  列为自由列, 则其对应的向量  $x$  的分量为:

$$x_i = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{第 } i \text{ 列为自由列} \\ -\text{rref}(A)_{ij}, & \text{第 } i \text{ 列为主列} \end{cases}$$

$C(A)$  的基:  $\text{rref}(A)$  的所有主列构成  $C(A)$  的一组基.

### 3.4 矩阵的秩、线性代数基本定理

#### 定义 3.4.1: 矩阵的秩

矩阵  $A$  的秩 (rank) 定义为行空间的维数:

$$\text{rank}(A) := \dim(C(A)).$$

进而可定义行满秩矩阵 (full row rank matrix) 满足

$$\text{rank}(A) = \text{row}(A).$$

列满秩矩阵 (full column rank matrix) 定义类似.

#### 定理 3.4.1: 线性方程组 $Ax = 0$ 的完整解

线性方程组  $Ax = b$  的通解可以分解为特解  $x_p$  和零解  $x_n$  (即满足  $Ax_n = 0$ ) 的和:

$$x = x_p + x_n,$$

特解  $x_p$  的各个分量可以由约化的增广矩阵  $[\text{rref}(A) \ b']$  中得到

$$x_{pi} = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 列为自由列} \\ b'_j, & \text{第 } i \text{ 列为主列, 其主元 } 1 \text{ 在第 } j \text{ 行} \end{cases}$$

推论.

- 若  $A$  列满秩, 则  $\text{rref}(A)$  没有自由列,  $N(A) = \{0\}$ . 当  $b \in C(A)$  时有唯一解, 否则无解;
- 若  $A$  行满秩, 则  $\text{rref}(A)$  没有零行,  $C(A) = \mathbb{R}^m$ ,  $\forall b$  都有解, 有唯一解或无穷多解.

**四个子空间的维度** 已经知道, 初等行变换就是用初等矩阵  $E$  左乘  $A$ , 相应的, 列变换就是  $E$  右乘  $A$ .

#### 定理 3.4.2: 初等变换和子空间

- $N(A) = N(EA)$ , 因为

$$Ax = 0 \iff EAx = 0.$$

- $\dim(C(A)) = \dim(C(EA))$ , 因为

$$\{v_i\} \text{ 是 } C(A) \text{ 一组基} \iff \{Ev_i\} \text{ 是 } C(EA) \text{ 一组基}.$$

- $C(A) = C(AE)$ , 因为

$$AE \text{ 的每一列} \in C(A) \text{ 且 } A = (AE)E^{-1} \text{ 的每一列} \in C(AE)$$

- $\dim(N(A)) = \dim(N(AE))$ , 因为可由  $Ax = 0 \iff AE(E^{-1}x) = 0$  推出

$$\{v_i\} \text{ 是 } N(A) \text{ 一组基} \iff \{E^{-1}v_i\} \text{ 是 } N(AE) \text{ 一组基}$$

**推论.** 矩阵  $A$  在初等变换下,  $\dim(C(A))$  和  $\dim(N(A))$  均不变, 而行变换下  $N(A)$  不变, 列变换下  $C(A)$  不变. 因此, 可以将  $A$  先由行变换为  $\text{rref}(A)$ , 再列变换为

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}.$$

显然,  $\tilde{I}$  的行秩  $\dim(C(\tilde{I}^\top)) =$  列秩  $\dim(C(\tilde{I})) = r$ , 且

$$\dim(C(\tilde{I}^\top)) + \dim(N(\tilde{I})) = n;$$

$$\dim(C(\tilde{I})) + \dim(N(\tilde{I}^\top)) = m.$$

#### 定理 3.4.3: 线性代数基本定理 · 一

1. 行秩 = 列秩:  $\text{rank}(A) = \dim(C(A)) = \dim(C(A^\top))$ ;
2.  $\dim(C(A^\top)) + \dim(N(A)) = n$ ;
3.  $\dim(C(A)) + \dim(N(A^\top)) = m$ .

**推论.** 方阵  $A$  可逆  $\iff A$  满秩.

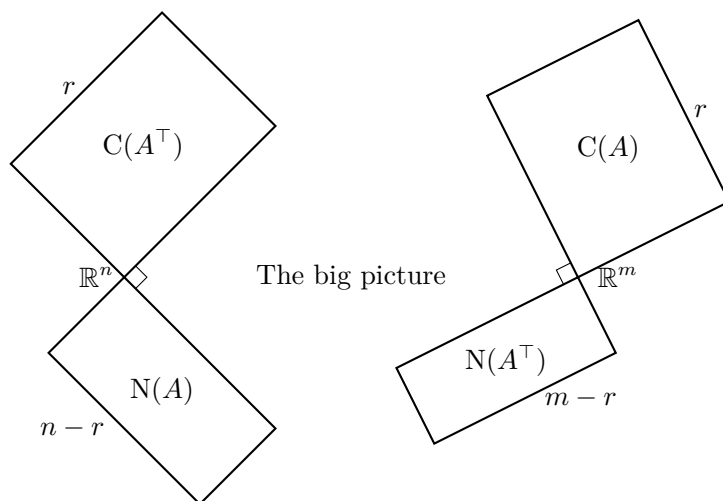


图 3.1:  $A$  的四个子空间

**矩阵的秩的不等式** 参考: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/55206421>

#### 定理 3.4.4

对于矩阵  $A, B$  有

$$\text{rank}(A + B) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B). \quad (3.1)$$

**证明.** 设  $A, B$  的列空间的一组基分别为  $\{a_1, \dots, a_{\text{rank}(A)}\}$  和  $\{b_1, \dots, b_{\text{rank}(B)}\}$ , 则  $A + B$  中的列必然可以由  $\{a_1, \dots, a_{\text{rank}(A)}, b_1, \dots, b_{\text{rank}(B)}\}$  的线性组合表示出, 故不等式成立.  $\square$

**定理 3.4.5: Sylvester 不等式**

对  $n$  阶方阵  $A, B$  有

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n. \quad (3.2)$$

证明. 注意到

$$\text{rank}(AB) + n = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} I_n & \\ & AB \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} I_n & -B \\ A & \end{bmatrix}\right) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B). \quad \square$$

**定理 3.4.6: Frobenius 秩不等式**

对于矩阵  $A, B, C$ , 有

$$\text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank}(B). \quad (3.3)$$

证明. 注意到

$$\begin{aligned} \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) &= \text{rank}\left(\begin{bmatrix} B & \\ & ABC \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{rank}\left(\begin{bmatrix} BC & B \\ & AB \end{bmatrix}\right) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC). \end{aligned} \quad \square$$



## 第四章 正交性

将列向量看做矩阵，则实向量  $v$  和  $w$  的内积可以看做  $\langle v, w \rangle = v^\top w$ .

### 定义 4.0.1: 向量的正交

若  $\langle v, w \rangle = 0$ ，则称  $v$  和  $w$  正交 (orthogonal)，记作  $v \perp w$ .

注. 依定义， $0$  和所有向量正交.

### 定理 4.0.1: 正交的模

若向量  $v \perp w$ ，则

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2. \quad (4.1)$$

## 4.1 正交性

### 定义 4.1.1: 向量和子空间的正交

给定线性空间  $L$  及其子空间  $W$ ，给定  $v \in L$ ，若  $\forall w \in W$  均有  $v \perp w$ ，则称  $v$  和  $W$  正交，记作  $v \perp W$ .

### 定义 4.1.2: 子空间的正交

给定线性空间  $L$  的两个子空间  $V, W$ ，若  $\forall v \in V, w \in W$  均有  $v \perp w$ ，则称  $V$  和  $W$  正交，记作  $V \perp W$ .

推论. 若  $L$  的子空间  $V, W$  正交，则

$$\dim(L) \geq \dim(V) + \dim(W). \quad (4.2)$$

### 定义 4.1.3: 正交补

线性空间  $L$  的子空间  $V$  的正交补 (orthogonal complement) 由  $L$  中所有同  $V$  正交的向量组成，记作  $V^\perp$ .

推论.  $V \cap V^\perp = \{0\}$ .

## 定理 4.1.1: 线性代数基本定理 · 二

在  $\mathbb{F}^n$  中,  $N(A) = C(A^\top)^\perp$ .

在  $\mathbb{F}^m$  中,  $N(A^\top) = C(A)^\perp$ .

## 定理 4.1.2: 分解

给定矩阵  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , 则  $\forall x \in \mathbb{F}^n$  均可以分解成

$$x = x_r + x_n,$$

其中  $x_r \in C(A^\top)$ ,  $x_n \in N(A)$ , 且这种分解是唯一的.

证明. 由

$$Ax = A(x_r + x_n) = Ax_r \in C(A^\top)$$

知, 只需证明:  $\forall b \in C(A^\top)$ , 存在唯一的  $x_r \in C(A^\top)$  使得  $Ax_r = b$ .

若存在  $x_r, x'_r \in C(A^\top)$  满足  $Ax_r = Ax'_r$ , 则  $x_r - x'_r$  同时在  $C(A^\top)$  和  $N(A)$  中, 故  $x_r - x'_r = 0$ .  $\square$

## 定理 4.1.3: 矩阵的可逆部分

对于矩阵  $A$ , 把  $N(A)$  和  $N(A^\top)$  对应的行和列去掉之后总是一个  $r$  阶可逆矩阵.

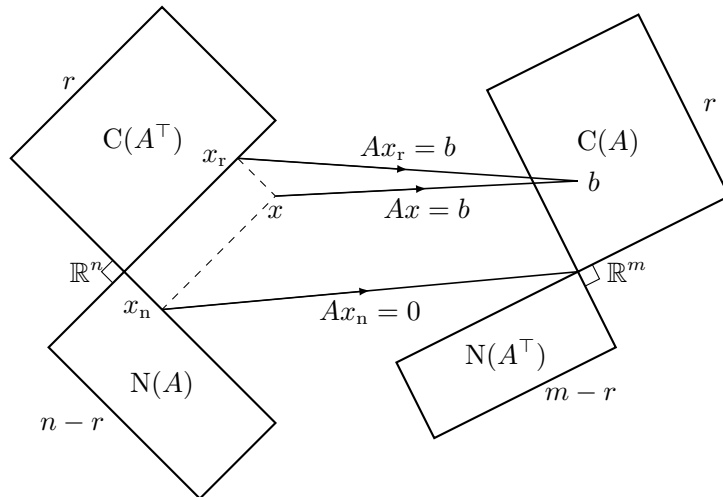


图 4.1: big picture 升级版

## 4.2 投影

### 例 4.2.1: 向量在向量上的投影

考虑向量  $b$  在向量  $a$  上的投影 (projection)  $p$ , 依内积的性质:

$$p = (\hat{a} \cdot b)\hat{a} = \frac{a^\top b}{a^\top a}a = \frac{aa^\top}{a^\top a}b.$$

那么对于一个矩阵, 投影的概念应该如何定义?

考虑  $\mathbb{R}^m$  中  $n$  个线性无关的向量  $a_1, \dots, a_n$  张成的子空间  $\text{span}(a_1, \dots, a_n) = C(A)$ , 其中  $A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$ . 向量  $b \in \mathbb{R}^m$  在  $C(A)$  上的投影为  $p \in C(A)$

$$p = Ax = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n.$$

投影的性质要求:  $p$  的终点在  $C(A)$  中, 且距离  $b$  的终点最近, 即  $(b - p) \perp C(A)$ , 等价于

$$A^\top(b - Ax) = 0,$$

相当于求解线性方程组

$$A^\top Ax = A^\top b.$$

若  $A^\top A$  可逆, 则  $x = (A^\top A)^{-1}A^\top b$ , 故  $b$  在  $C(A)$  上的投影为  $p = Ax = A(A^\top A)^{-1}A^\top b$ .

### 定义 4.2.1: 投影矩阵

一个矩阵  $A$  的投影矩阵 (projection matrix) 为

$$P = A(A^\top A)^{-1}A^\top. \quad (4.3)$$

推论.  $P^2 = P$ , 这也是符合投影性质的.

注. 只有当  $A$  可逆时, 才能拆开  $(A^\top A)^{-1} = A^{-1}(A^\top)^{-1}$ , 此时  $P = AA^{-1}(A^\top)^{-1}A^\top = I$ .

### 定理 4.2.1: $A^\top A$ 的可逆性

$A^\top A$  可逆  $\iff A$  的列之间线性无关.

证明. 只需证明  $N(A^\top A) = N(A)$  即可.

一方面:  $\forall x \in N(A)$ , 对  $Ax = 0$  左乘  $A^\top$  得  $A^\top Ax = 0$ , 故  $x \in N(A^\top A)$ ;

另一方面:  $\forall x \in N(A^\top A)$ , 对  $A^\top Ax = 0$  左乘  $x^\top$  得

$$x^\top A^\top Ax = \|Ax\|^2 = 0, \implies Ax = 0, \implies x \in N(A).$$

综上,  $N(A^\top A) = N(A)$ . □

推论.

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^\top) = \text{rank}(A^\top A) = \text{rank}(AA^\top).$$

### 4.3 最小二乘法

**问题背景** 考虑线性方程组  $Ax = b$ . 当  $A$  的行数  $m >$  列数  $n$  甚至  $m \gg n$  时, 一般地  $A$  不可逆,  $x$  无解, 即  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  均有  $\|b - Ax\| > 0$ . 但可以找到一个解  $x'$  使得  $\|b - Ax'\|$  最小:

$$x' = \arg \min_x \|b - Ax\|,$$

由投影的性质,  $Ax'$  是  $b$  在  $C(A)$  上的投影, 即

$$x' = (A^\top A)^{-1} A^\top b. \quad (4.4)$$

其一个典型应用就是最小二乘法.

#### 例 4.3.1: 直线拟合 (最小二乘法)

$m$  组数据  $(x_i, y_i)$ , 确定线性关系  $y = a + bx$  中的系数  $a, b$ , 即

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \iff Ax = b.$$

$A$  列满秩  $\text{rank}(A) = 2$ , 故  $A^\top A$  可逆,

$$A^\top A = \begin{bmatrix} m & \langle x_i \rangle \\ \langle x_i \rangle & \langle x_i^2 \rangle \end{bmatrix}, \quad (A^\top A)^{-1} = \frac{1}{m\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2} \begin{bmatrix} \langle x_i^2 \rangle & -\langle x_i \rangle \\ -\langle x_i \rangle & m \end{bmatrix}.$$

为了简化符号, 此处且仅在此处  $\langle \cdot \rangle$  特指对  $i = 1, \dots, m$  求和, 得到

$$\begin{cases} a = \frac{\langle x_i^2 \rangle \langle y_i \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_i y_i \rangle}{m\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2} \\ b = \frac{-\langle x_i \rangle \langle y_i \rangle + m\langle x_i y_i \rangle}{m\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2} \end{cases} \quad (4.5)$$

#### 例 4.3.2: 多项式拟合

$m$  组数据  $(x_i, y_i)$ , 使用  $n$  次多项式拟合:

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

求  $n+1$  个系数  $a_0, \dots, a_n$ , 即

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \iff Ax = b.$$

从而  $x' = (A^\top A)^{-1} A^\top b$ .

注. 两组数据相关不一定代表有因果.

## 4.4 正交归一基

基是一组线性无关的向量并且张成整个线性空间，我们对基之间的夹角和长度并没有要求。为了方便，我们可以要求基具备一些额外的性质。

### 定义 4.4.1: 正交归一基

$n$  维线性空间中的一组基  $\{q_1, \dots, q_n\}$  若满足，

$$\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j.$$

则称这组基是正交归一的 (orthonormal)。

### 定义 4.4.2: 正交矩阵

将一组正交归一基  $\{q_1, \dots, q_n\}$  按列排成矩阵

$$Q = [q_1 \ \cdots \ q_n],$$

则  $Q$  是方阵且  $Q^\top = Q^{-1}$ ，称  $Q$  为正交矩阵 (orthogonal matrix)。

### 定理 4.4.1: 正交归一基的完备性

由  $Q^\top Q = QQ^\top = I$ ，可得正交归一基的完备性 (completeness)

$$\sum_{i=1}^n q_i q_i^\top = I. \quad (4.6)$$

### 例 4.4.1: Fourier 级数

定义函数  $f, g$  在  $[-\pi, \pi]$  上的内积

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx,$$

则三角函数系列

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\},$$

构成一组正交归一基，任意  $[-\pi, \pi]$  上平方可积的函数  $f(x)$  均可被展开为 Fourier 级数 (Fourier series):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中 Fourier 系数

$$\begin{cases} a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{cases}$$

### 4.4.1 Gram-Schmidt 法则

给定一组基  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , 如何构造一组正交归一基?

#### 方法 4.4.1: Gram-Schmidt 法则

1. 选取  $b_1 := a_1$ ;
2. 从  $a_i$  减去沿着  $b_1, \dots, b_{i-1}$  方向的分量, 作为  $b_i$

$$b_i := a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle b_j, a_i \rangle}{\langle b_j, b_j \rangle} b_j.$$

得到一组正交基  $\{b_1, \dots, b_n\}$ , 再归一化  $q_i = \hat{b}_i$ , 便得到一组正交归一基  $\{q_1, \dots, q_n\}$ .

### 4.4.2 QR 分解

#### 定理 4.4.2: QR 分解

若  $m \times n$  矩阵  $A = (a_1, \dots, a_n)$  的列之间线性无关, 可用 Gram-Schmidt 法则构造一组正交归一基  $\{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $q_i$  同  $a_1, \dots, a_{i-1}$  正交, 定义

$$R := Q^T A = \begin{bmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & \cdots & q_1^T a_n \\ & q_2^T a_2 & \cdots & q_2^T a_n \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & q_n^T a_n \end{bmatrix}$$

$R$  是个上三角矩阵, 故  $A$  可以写成正交矩阵和上三角矩阵的乘积:

$$A = QR. \quad (4.7)$$

注. 在最小二乘法等应用中,  $A^T A = R^T R$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b = R^{-1} Q^T b.$$

效率更高.

# 第五章 行列式

## 5.1 行列式

下面我们用递归的方式给出行列式的定义。首先引入代数余子式。

### 定义 5.1.1: 代数余子式

给定  $n$  阶方阵  $A$ ，记  $A_{\neq ij}$  为去掉第  $i$  行和第  $j$  列得到的  $(n-1)$  阶方阵，其行列式  $\det(A_{\neq ij})$  定义为  $A_{ij}$  的余子式 (minor)； $A_{ij}$  的代数余子式 (cofactor) 定义为

$$\text{cof}(A)_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{\neq ij}). \quad (5.1)$$

代数余子式前的正负号与位置的关系：

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

### 定义 5.1.2: 行列式 · 一

$n$  阶方阵  $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$  的行列式 (determinant) 记作  $\det(A)$ ，定义为：

1.  $n = 1$  时， $\det(A) = A_{11}$ ；
2.  $n > 1$  时，任取第  $i$  行展开或第  $j$  列展开 (Laplace 展开)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n A_{ij} \text{cof}(A)_{ij} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \text{cof}(A)_{ij}. \quad (5.3)$$

**推论.** 单位矩阵行列式  $\det(I) = 1$ ；对角矩阵行列式就是对角元的积

$$\det(\text{diag}(a_1, \dots, a_n)) = a_1 \cdots a_n. \quad (5.4)$$

### 定理 5.1.1: 三角矩阵的行列式

三角矩阵的行列式等于对角元的乘积。

证明。按行列式的定义进行计算即证。 □

## 例 5.1.1: 二阶行列式和三阶行列式

二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (5.5)$$

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

## 5.2 行列式的性质

## 定义 5.2.1: 行列式 · 二

行列式还可定义为  $n$  个  $n$  维向量到数域  $\mathbb{F}$  的映射:

$$\det : \underbrace{\mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n}_n \rightarrow \mathbb{F}$$

且满足:

- 多线性:

$$\det(\dots, ka_i + k'a'_i, \dots) = k \det(\dots, a_i, \dots) + k' \det(\dots, a'_i, \dots); \quad (5.7)$$

- 反对称:

$$\det(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) = -\det(\dots, a_j, \dots, a_i, \dots); \quad (5.8)$$

- 单位化:  $\det(I) = 1$ .

可以证明, 这个满足此定义的映射存在且唯一, 并且与定义 5.1.2 是等价的.

引理.

证明. 思路在于通过将矩阵  $A$  表示为一系列初等矩阵  $E_1, \dots, E_n$  和  $\text{rref}(A)$  的乘积得到, 过程略.  $\square$ 

推论.

- 若  $A$  中有任何两行或两列相同, 则  $\det(A) = 0$ ;
- 若  $A$  的行/列之间线性相关, 或者说秩小于阶, 则  $\det(A) = 0$ .

## 定理 5.2.1

$$A \text{ 可逆} \iff \det(A) \neq 0.$$



注. 因此任意给定一个方阵, 其不可逆的可能是很小的. 因为不可逆 ( $\det(A) = 0$ ) 是一个额外的约束.

推论.  $A$  不可逆  $\iff \exists x \neq 0$  使得  $Ax = 0$ .

#### 定义 5.2.2: 排列

给定集合  $S = \{1, \dots, n\}$  和  $n$  个数  $i_1, \dots, i_n \in S$ , 若映射  $\sigma$ :

$$\sigma: S \rightarrow S, \sigma(k) \mapsto i_k,$$

是一个一一映射, 则称  $\sigma$  是  $S$  的一个排列 (permutation).

#### 定义 5.2.3: 逆序

给定排列  $\sigma$ , 若  $i < j$  且  $\sigma(i) > \sigma(j)$ , 则称  $(i, j)$  是  $\sigma$  的一个逆序 (inversion).

$\sigma$  中所有逆序组成的集合为逆序集, 逆序集中元素的个数称为逆序数  $\text{inv}(\sigma)$ . 排序的奇偶性 (parity) 便定义为逆序数的奇偶性:

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)}. \quad (5.9)$$

注. 有的地方将逆序定义为  $(\sigma(i), \sigma(j))$ , 二者是等价的.

#### 定义 5.2.4: 全反对称张量

给定  $n$  个数  $i_1, \dots, i_n \in S = \{1, \dots, n\}$ , 定义全反对称张量 (Levi-Civita symbol)

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} \text{sgn}(\sigma), & i_1, \dots, i_n \text{ 是 } S \text{ 的一个排列 } \sigma \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.10)$$

#### 定义 5.2.5: 行列式 · 三

利用全反对称张量, 行列式也可以定义为

$$\det(A) = \sum_{i_1, \dots, i_n \in S} \epsilon_{i_1 \dots i_n} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}. \quad (5.11)$$

## 5.3 行列式的运算

行列式与矩阵运算 行列式在矩阵转置下不变

$$\det(A^T) = \det(A),$$

## 定理 5.3.1: 行列式与矩阵乘法

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \quad (5.12)$$

证明. 若  $A$  不可逆, 则  $AB$  不可逆, 等式成立:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = 0;$$

若  $A$  可逆, 则可表示为一系列初等矩阵的乘积  $A = E_k \cdots E_1$ , 从而

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_k \cdots E_1 B) = \det(E_k) \det(E_{k-1} \cdots E_1 B) \\ &= \det(E_k) \cdots \det(E_1) \det(B) = \det(E_k \cdots E_1) \det(B) = \det(A) \det(B). \quad \square \end{aligned}$$

推论. 逆的行列式为原行列式的倒数:

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \quad (5.13)$$

注. 行列式与矩阵加法之间并无必然联系, 即一般地,  $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ . 但是当  $A, B$  满足一些特定条件时,  $\det(A+B)$  可以化简, 见定理 5.3.5.

## 定理 5.3.2: 分块矩阵的行列式 · 一

若  $A$  是  $m$  阶方阵,  $D$  是  $n$  阶方阵,  $B$  是  $m \times n$  矩阵, 则

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D). \quad (5.14)$$

证明. 对  $A, D$  进行  $LU$  分解,  $A = L_A U_A, D = L_D U_D$ , 则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_A & \\ & L_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A & L_A^{-1} B \\ & U_D \end{bmatrix}$$

前者为下三角矩阵, 后者为上三角矩阵, 故

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ & D \end{pmatrix} = \det(L_A) \det(L_D) \det(U_A) \det(U_D) = \det(A) \det(D). \quad \square$$

## 定理 5.3.3: 分块矩阵的行列式 · 二

若  $A$  是  $m$  阶方阵,  $D$  是  $n$  阶方阵, 且  $A, D$  至少一个可逆, 则

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A) \det(D - CA^{-1}B), & A \text{ 可逆} \\ \det(D) \det(A - BD^{-1}C), & D \text{ 可逆} \end{cases}. \quad (5.15)$$

证明. 对定理 1.3.4 的证明中的矩阵取行列式即证. □

**定理 5.3.4: Weinstein-Aronszajn 恒等式**

给定  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ , 则

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA). \quad (5.16)$$

证明. 考察分块矩阵

$$M = \begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix},$$

显然  $I_m, I_n$  都是可逆的, 由定理 5.3.3, 即得

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA). \quad \square$$

**定理 5.3.5: 矩阵行列式引理**

若  $A$  可逆且  $u, v$  均为  $n$  维列向量, 则

$$\det(A + uv^\top) = (1 + v^\top A^{-1}u) \det(A). \quad (5.17)$$

证明. 先证明命题对于  $A = I$  成立, 事实上

$$\begin{bmatrix} I & \\ v^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + uv^\top & u \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \\ -v^\top & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & u \\ & 1 + v^\top u \end{bmatrix}.$$

故

$$\det(I + uv^\top) = 1 + v^\top u \quad (5.18)$$

进而

$$\det(A + uv^\top) = \det(A) \det(I + A^{-1}uv^\top) = (1 + v^\top A^{-1}u) \det(A). \quad \square$$

注. 行列式的运算技巧不宜写得过多, 因为这远非线性代数的精髓.

## 5.4 Cramer 法则、伴随矩阵

**定理 5.4.1: Cramer 法则**

考虑线性方程组

$$Ax = b,$$

记  $A$  的第  $i$  列为  $a_i = Ae_i$ , 定义矩阵  $B_i := [a_1 \cdots a_{i-1} \ b \ a_{i+1} \cdots a_n]$  为把  $A$  中第  $i$  列换为  $b$  的矩阵, 则

$$B_i = A[e_1 \cdots e_{i-1} \ x \ e_{i+1} \cdots e_n],$$

左右取行列式, 得到 Cramer 法则

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}. \quad (5.19)$$

**推论.** Cramer 法则的应用之一是矩阵求逆, 利用  $AA^{-1} = I$ , 把  $A$  左乘  $A^{-1}$  的每一列看做一个线性方程组, 解得

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\text{cof}(A)_{ji}}{\det(A)}.$$

#### 定义 5.4.1: 伴随矩阵

方阵  $A$  的伴随矩阵 (adjugate matrix) 定义为其代数余子式矩阵的转置:

$$\text{adj}(A) := \text{cof}(A)^\top. \quad (5.20)$$

**推论.** 伴随矩阵的性质:

- $\text{adj}(I) = I$ ;  $\text{adj}(O) = O$ , 除了  $\text{adj}([0]) = [1]$ ;
- $\text{adj}(cA) = c^{n-1} \text{adj}(A)$ ;
- $\text{adj}(A^\top) = \text{adj}(A)^\top$ ;
- $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B) \text{adj}(A)$ , 故  $\text{adj}(A^k) = \text{adj}(A)^k$ .

#### 定理 5.4.2: 伴随矩阵与逆的关系

根据 Cramer 法则,

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}. \quad (5.21)$$

**注.** 即使  $A$  不可逆,  $\text{adj}(A)$  依然存在.

#### 定理 5.4.3: 伴随矩阵与原矩阵的乘积

伴随矩阵与原矩阵可交换, 其乘积为

$$A \text{adj}(A) = \text{adj}(A)A = \det(A)I. \quad (5.22)$$

**证明.** 根据 Laplace 展开,

$$\begin{aligned} [A \text{adj}(A)]_{ij} &= \sum_k A_{ik} \text{adj}(A)_{kj} = \sum_k (-)^{j+k} A_{ik} \det(A_{\neq jk}) = \delta_{ij} \det(A); \\ [\text{adj}(A)A]_{ij} &= \sum_k \text{adj}(A)_{ik} A_{kj} = \sum_k (-)^{i+k} \det(A_{\neq ki}) A_{kj} = \delta_{ij} \det(A). \end{aligned}$$

对应元素相等, 即证. □

**推论.**

- 伴随矩阵的行列式 (并不要求  $A$  可逆)

$$\det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}; \quad (5.23)$$

- 伴随矩阵的伴随矩阵

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-2} A. \quad (5.24)$$

- $A$  可逆  $\iff \text{adj}(A)$  可逆

$$\text{adj}(A)^{-1} = \text{adj}(A^{-1}) = \frac{A}{\det(A)}; \quad (5.25)$$

**定理 5.4.4: 伴随矩阵的秩**

矩阵  $A$  的伴随矩阵  $\text{adj}(A)$  的秩为

$$\text{rank}(\text{adj}(A)) = \begin{cases} n, & \text{rank}(A) = n \\ 1, & \text{rank}(A) = n - 1 \\ 0, & \text{rank}(A) \leq n - 2 \end{cases} \quad (5.26)$$

证明.  $\text{rank}(A) = n$  时,  $A$  可逆,  $\text{adj}(A)$  也可逆;

$\text{rank}(A) = n - 1$  时,  $A \text{adj}(A) = O$ , 故  $C(\text{adj}(A)) \subset N(A)$ , 即

$$\text{rank}(\text{adj}(A)) \leq n - \text{rank}(A) = 1,$$

又  $A$  存在非 0 的余子式, 故  $\text{rank}(\text{adj}(A)) \geq 1$ , 即  $\text{rank}(\text{adj}(A)) = 1$ ;

$\text{rank}(A) \leq n - 2$  时,  $A$  的余子式均为 0, 故  $\text{adj}(A) = O$ . □

注. 计算机运用 Cramer 法则解  $n$  元线性方程组的时间复杂度是  $\mathcal{O}(n \cdot n!)$ , 且在数值上不稳定<sup>I</sup>, 这是不可接受的. 与其在计算方面的作用相比, 其理论价值更为重大, 即: 研究了方程组的系数与方程组解的存在性与唯一性关系.

<sup>I</sup>Cramer, Gabriel (1750). "Introduction à l'Analyse des lignes Courbes algébriques" (in French). Geneva: Europeana. pp. 656-659. Retrieved 2012-05-18.

## 第六章 特征值和特征向量

### 6.1 特征值和特征向量

#### 定义 6.1.1: 特征值和特征向量

方阵  $A$  的特征向量 (eigenvector)  $x \neq 0$  满足:

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{F}.$$

其中  $\lambda$  称为  $A$  的特征值 (eigenvalue).

#### 定理 6.1.1: 特征值的性质

1.  $A$  的特征向量  $x$  也是  $A^n$  的特征向量, 特征值是  $\lambda^n$ ;
2. 若  $A$  可逆, 则  $x$  也是  $A^{-1}$  的特征向量, 特征值是  $\lambda^{-1}$ ;
3. 三角矩阵的特征值就是对角元;
4.  $A$  可逆  $\iff A$  所有特征值非 0.

只需注意到  $A$  可逆时  $Ax = 0$  只有零解即可.

#### 定义 6.1.2: 特征子空间

$A$  的所有特征值为  $\lambda$  的特征向量再加上 0 构成  $\mathbb{R}^n$  的一个线性子空间, 这个子空间就是  $N(A - \lambda I)$ .

#### 定理 6.1.2: 特征值

假设  $n$  阶矩阵  $A$  有特征向量  $x_1, \dots, x_r$ , 对应特征值为  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , 且这些特征值两两不等, 则  $x_1, \dots, x_r$  线性无关.

证明. 运用数学归纳法证明.  $r = 1$  时, 定理自动成立;

假设  $r = m - 1$  定理成立, 若定理在  $r = m$  时不成立, 则

$$x_m = c_1 x_1 + \dots + c_{m-1} x_{m-1}, \quad (*)$$

两边同时左乘  $A$  得

$$\lambda_m x_m = c_1 \lambda_1 x_1 + \dots + c_{m-1} \lambda_{m-1} x_{m-1}, \quad (**)$$

$\lambda_m(*) - (**) \text{ 得,}$

$$0 = c_1(\lambda_m - \lambda_1)x_1 + \cdots + c_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x_{m-1},$$

由  $x_1, \dots, x_{m-1}$  线性无关可得所有的  $c_i = 0$ , 矛盾!

□

## 6.2 特征多项式

求特征值  $\lambda$  需要解如下的特征方程 (eigenfunction)

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

特别地, 特征多项式 (eigen-polynomial) 的系数有如下性质:

$$a_1 = -\operatorname{tr}(A), \quad a_n = (-1)^n \det(A) \quad (6.1)$$

由 Vieta 定理, 在考虑重根的情况下,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i. \quad (6.2)$$

更一般地, Cayley-Hamilton 定理给出了其他项的系数表达式, 比如

$$a_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)), \quad (6.3a)$$

$$a_3 = \frac{1}{6}(\operatorname{tr}(A)^3 - 3\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^2) + 2\operatorname{tr}(A^3)), \quad (6.3b)$$

### 定理 6.2.1: 相似变换的特征多项式

$A$  的相似变换  $B^{-1}AB$  和  $A$  有相同的特征多项式.

证明.

$$\lambda I - B^{-1}AB = B^{-1}(\lambda I - A)B.$$

对两边取行列式即证.

□

**推论.** 相似变换与原矩阵的迹相同

$$\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A). \quad (6.4)$$

## 6.3 矩阵对角化

### 定理 6.3.1: 可对角化判定

$n$  阶矩阵  $A$  可对角化  $\iff A$  有  $n$  个线性无关的特征向量  $x_1, \dots, x_n$ ,  
此时  $A = X\Lambda X^{-1}$ , 且

$$X = (x_1, \dots, x_n), \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (6.5)$$

证明. 假设  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量  $x_1, \dots, x_n$ ,

$$AX = (Ax_1, \dots, Ax_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = X\Lambda,$$

故  $A$  可对角化; 反过来说, 若  $A$  可对角化为  $X\Lambda X^{-1}$ , 则  $AX = X\Lambda$ , 即

$$(Ax_1, \dots, Ax_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n),$$

故  $x_1, \dots, x_n$  是  $A$  的特征向量, 又  $X$  可逆, 故  $x_1, \dots, x_n$  线性无关.  $\square$

**推论.** 有  $n$  个互不相同特征值的  $n$  阶矩阵  $A$  可对角化.

当特征值重复时, 引入两个概念

**定义 6.3.1: 几何重数和代数重数**

几何重数 (geometric multiplicity, GM): 特征值  $\lambda$  对应的最大线性无关的特征向量的个数, 即  $\dim(N(\lambda I - A))$ .

代数重数 (algebraic multiplicity, AM): 特征值  $\lambda$  作为特征方程  $\det(\lambda I - A) = 0$  的根的重复次数.

特征方程可以写成

$$\prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{m_i} = 0,$$

其中  $\lambda_i$  是互不相同的根,  $m_i$  是  $\lambda_i$  的代数重数.

**定理 6.3.2**

$GM \leq AM$ .

证明. 考虑  $n$  阶矩阵  $A$ , 假设特征值  $\lambda_1$  的  $GM = \dim(\lambda_1 I - A) = m$ ,

取  $\{x_1, \dots, x_m\}$  为  $C(\lambda_1 I - A)$  的一组正交归一基.

取  $\{b_1, \dots, b_{n-m}\}$  为  $N(\lambda_1 I - A)^\perp$  的一组正交归一基.

设  $n \times n$  矩阵

$$P = (x_1, \dots, x_m, b_1, \dots, b_{n-m}) = (X, B),$$

$P$  是可逆的且  $P^{-1} = P^\top$ , 且  $X^\top B = 0$ , 则

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_m & X^\top AB \\ 0 & B^\top AB \end{bmatrix},$$

分块三角矩阵

$$\det(\lambda I - P^{-1}AP) = (\lambda - \lambda_1)^m \det(\lambda I - B^\top AB),$$

$A$  和  $P^{-1}AP$  有相同的特征方程, 故  $\lambda_1$  必然是  $A$  的特征方程的根, 且其  $AM \geq GM$ .  $\square$

**推论.**  $n$  阶矩阵  $A$  的全部特征值为  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ ,  $A$  可对角化当且仅当

$$\sum_{i=1}^r \dim(\lambda_i I - A) = n,$$

即所有特征值的  $AM = GM$ .



**定理 6.3.3: 同时对角化**

若  $A, B$  可对角化, 则他们可以同时对角化当且仅当  $AB = BA$ .

证明. 若  $A, B$  可以同时 diagonal 化, 故

$$A = X\Lambda_A X^{-1}, \quad B = X\Lambda_B X^{-1},$$

故

$$AB - BA = X(\Lambda_A \Lambda_B - \Lambda_B \Lambda_A)X^{-1} = 0;$$

若  $AB = BA$ , 下证  $A, B$  可同时对角化.

设  $A$  的特征值为  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ ,  $\lambda_i$  对应特征子空间为  $V_i$ , 几何重数  $m_i = \dim(V_i)$ , 记  $n_i := m_1 + \dots + m_{i-1}$ , 取  $\{v_{n_i+1}, \dots, v_{n_i+m_i}\}$  表示  $V_i$  的一组基, 记  $X = (v_1, \dots, v_n)$ , 则  $X$  可对角化  $A$

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I_{m_s} \end{bmatrix},$$

$\forall x \in V_i$ ,

$$(AB - BA)x = (A - \lambda_i I)Bx = 0,$$

故  $Bx \in V_i$ , 从而  $X^{-1}BX$  和  $X^{-1}AX$  一样是分块对角的:

$$X^{-1}BX = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_s \end{bmatrix},$$

其中  $B_i$  是  $m_i \times m_i$  的. 给定  $B$  的特征值  $\xi_j$ , 其必是  $B_1, \dots, B_s$  其中至少一个的特征值, 不妨考虑  $\xi_j$  是  $B_i$  的特征值<sup>1</sup>, 若  $\xi_j$  的 AM  $>$   $B_i$  的 GM, 则  $\xi_j$  的 AM  $>$   $B$  的 GM,  $B$  便不能被对角化, 与前提矛盾! 故  $B_i$  均可被特定的  $Y_i$  对角化, 即  $Y_i^{-1}B_iY_i = \Lambda_i$ , 构造

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Y_s \end{bmatrix}$$

则  $Y^{-1}X^{-1}BXY$  是对角化的, 同时  $Y^{-1}X^{-1}AXY$  也是对角化的, 取  $Z = XY$ , 便可同时对角化  $A, B$ . □

## 6.4\* Jordan 标准型

不是所有方阵都可以对角化, 如果  $n$  阶矩阵  $A$  有  $r < n$  个线性独立的特征向量, 怎么把  $A$  变成最接近对角矩阵的形式?

<sup>1</sup>无需考虑  $N(B_i)$

**定理 6.4.1: Jordan 标准型**

$n$  阶矩阵  $A$  有  $r$  个特征值, 则存在  $B$ , 使得

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

其中  $J_i$  称为 Jordan 块,  $\lambda_i$  是  $A$  的第  $i$  个特征值.

其证明是线性代数的核心. 其中一些概念需要等到第八章线性映射才会提及. 先给出几个概念证明引理.

**定义 6.4.1: 广义特征向量**

线性映射  $T: V \rightarrow V$  的广义特征向量 (general eigenvector)  $v \in V$  且  $v \neq 0$ , 使得  $(T - \lambda I)^k v = 0$  对某个正整数  $k$  成立. 这里  $I: V \rightarrow V$  是恒等映射. 使得  $(T - \lambda I)^d v = 0$  成立的最小正整数  $d$  称为  $v$  的幂指数 (exponent).

**定理 6.4.2**

给定正整数  $k$ , 广义特征方程  $(T - \lambda I)^k v = 0$  有解当且仅当  $\lambda$  是  $T$  的特征值.

证明. 若  $\lambda$  是  $T$  的特征值, 则  $(T - \lambda I)v = 0$ , 左乘  $(T - \lambda I)^{k-1}$  即可.

若  $(T - \lambda I)^k v = 0$  有解, 则  $w = (T - \lambda I)^{k-1}v$  满足  $(T - \lambda I)w = 0$ ,  $\lambda$  是  $T$  的特征值.  $\square$

**定理 6.4.3**

令  $u_i := (T - \lambda I)^i v$ , 则  $B = \{u_0, \dots, u_{d-1}\}$  是一组线性无关的向量.

证明. 设

$$\sum_{i=0}^{d-1} a_i u_i = \sum_{i=0}^{d-1} a_i (T - \lambda I)^i v = 0,$$

左乘  $(T - \lambda I)^{d-1}$ , 左边只剩  $a_0 (T - \lambda I)^{d-1} v$ , 故  $a_0 = 0$ ;

递推地左乘  $(T - \lambda I)^{d-2}, (T - \lambda I)^{d-3}, \dots$  可得到所有系数为 0, 从而  $u_0, \dots, u_{d-1}$  线性无关.  $\square$

**定理 6.4.4**

$$Tu_j = \begin{cases} \lambda u_j + u_{j+1}, & 1 \leq j < d-1 \\ \lambda u_j, & j = d-1 \\ 0, & j > d-1 \end{cases}$$

证明.  $1 \leq j < d-1$  时,  $(T - \lambda I)u_j = u_{j+1}$ , 即  $Tu_j = \lambda u_j + u_{j+1}$ .

$j = d-1$  时,  $(T - \lambda I)u_j = 0$ , 即  $Tu_j = \lambda u_j$ ;

$j > d-1$  时,  $u_j = 0$ . □

#### 定理 6.4.5

$X = \text{span}(B)$  是  $T$  的不变子空间, 即  $T(X) \subset X$

证明. 由上式,  $\forall u = a_0 u_0 + \cdots + a_{d-1} u_{d-1} \in X$

$$Tu = \sum_{i=0}^{d-2} a_i (\lambda u_i + u_{i+1}) + a_{d-1} \lambda u_{d-1} \in X.$$

因为  $X$  是  $T$  的不变子空间, 我们可以把  $T$  看成是  $X \rightarrow X$  的线性映射. 取  $B$  作为  $X$  的一组基, 则  $T$  在  $B$  下的表示矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

这与 Jordan 块在定理 6.4.1 中的定义仅仅是转置的差别. □

接下来我们将证明  $V$  中存在一组基,  $T$  在这组基上的表示矩阵是分块对角的, 而且每一块都是 Jordan 块的形式.

#### 定理 6.4.6

若  $v_1, \dots, v_r$  是  $T$  的广义特征向量, 且相应的幂指数是  $d_i$ , 设

$$u_{ij} := (T - \lambda_i I)^j v_i, \quad V_i := \text{span}(u_{i0}, \dots, u_{id-1}).$$

之前证明了  $V_i$  是  $T$  的不变子空间, 且  $T$  在  $V_i$  上的表示矩阵是 Jordan 块. 故  $T$  在  $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$  上的表示矩阵是分块对角的, 且每一块都是 Jordan 块的形式.

所以我们只要证明存在这样一组广义特征向量  $v_1, \dots, v_r$  使得  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$  就可以证明 Jordan 标准型的定理.

假设  $\lambda$  是  $T$  的某个特征值. 如果  $T - \lambda I$  可以写成 Jordan 块的形式, 则  $T$  也可以写成 Jordan 块的形式. 所以以下我们用  $T - \lambda I$  代替  $T$ , 或者说, 考虑有一个特征值是 0 的线性映射  $T$ .

#### 定理 6.4.7

设  $K_i = \ker(T^i)$ ,  $U_i = \text{Im}(T^i)$ , 则

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots, \quad U_1 \supset U_2 \supset \cdots$$

证明. 待补 □

## 6.5 对称矩阵

### 定义 6.5.1: 对称矩阵

若  $S^\top = S$ , 则称  $S$  是对称矩阵 (symmetric matrix); 若  $S^\top = -S$ , 则称  $S$  是反对称矩阵 (anti-symmetric matrix).

### 定理 6.5.1: 对称矩阵的性质 · 一

若  $S$  是一个  $n$  阶实对称矩阵, 则  $S$  至少有一个实特征值  $\lambda$

证明. 由代数基本定理, 对任何矩阵,  $S$  的特征方程至少会得到一个复特征值  $\lambda$ , 其对应的特征向量为  $z$  (一般也是复的), 则  $\bar{z}^\top z > 0$ .

$$Sz = \lambda z, \quad S\bar{z} = \bar{S}\bar{z} = \overline{Sz} = \bar{\lambda}\bar{z},$$

由  $S$  的对称的性质, 注意到

$$\bar{z}^\top Sz = \lambda \bar{z}^\top z = \lambda (\bar{z}^\top z)^\top = \lambda z^\top \bar{z} = (Sz)^\top \bar{z} = z^\top S\bar{z} = \bar{\lambda} z^\top \bar{z}.$$

故  $\lambda = \bar{\lambda}$ . □

推论. 由代数基本定理的递归性, 可推知  $S$  的所有特征值都是实数.

### 定理 6.5.2: 对称矩阵的性质 · 二

$v$  是  $S$  的特征向量, 若  $w \perp v$ , 则  $Sw \perp v$ .

证明.

$$(Sw)^\top v = w^\top S^\top v = w^\top Sv = \lambda w^\top v = 0. \quad \square$$

### 定理 6.5.3: 对称矩阵的性质 · 三

若  $W$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个线性子空间, 且在  $S$  的作用下稳定, 即:

$$\forall w \in W, Sw \in W,$$

则  $W^\perp$  也在  $S$  的作用下稳定:

$$\forall u \in W^\perp, Su \in W^\perp.$$

证明.  $\forall w \in W, u \in W^\perp$

$$(Su)^\top w = u^\top S^\top w = u^\top (Sw) = 0. \quad \square$$

### 定理 6.5.4: 谱定理

对称矩阵  $S$  总可以被一个正交矩阵  $Q$  对角化.

证明. 由定理 6.5.1 和推论可知  $S$  至少有一个实特征值  $\lambda_1$  和实特征向量  $q_1$  且  $q_1^\top q_1 = 1$ ,  $S$  在  $q_1$  张成的一维线性空间上是稳定的.

由定理 6.5.3 可知  $S$  作用在  $C(q_1)^\perp$  上也是稳定的, 假设  $C(q_1)^\perp$  上有一组正交归一基为  $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ , 构造矩阵  $X_1 = [q_1, a_1, \dots, a_{n-1}]$ , 且  $X_1$  是正交的  $X_1^\top X_1 = I$ ,

$$X_1^\top S X_1 = X_1^\top [\lambda q_1, S a_1, \dots, S a_{n-1}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & S_1 \end{bmatrix}.$$

$S_1$  是一个  $(n-1)$  阶方阵, 且  $(S_1)_{ij} = a_i^\top S a_j$  的, 显然它也是对称的.

重复上述步骤, 直到用  $S$  的特征向量构造出  $\mathbb{R}^n$  的一组正交归一基: 对  $S_1$  可构造  $(n-1)$  阶的正交矩阵  $X_2$ , 使得

$$X_2^\top S_1 X_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \\ & S_2 \end{bmatrix},$$

其中  $S_2$  是一个  $(n-2)$  阶对称方阵. 从而

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & X_2^\top \end{bmatrix} X_1^\top S X_1 \begin{bmatrix} 1 & \\ & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & S_2 \end{bmatrix}.$$

$Q_2 := X_1 \text{diag}(1, X_2)$  也是正交的……最终有

$$Q_n^\top S Q_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$Q_n$  也是正交的. □

对角化对称矩阵  $S$  的正交矩阵  $Q$  可被构造:

- 若  $S$  的特征值互不相同, 对应的归一特征向量  $q_i$  两两正交, 可选  $Q = [q_1, \dots, q_n]$ ;
- 若  $S$  的特征值有重复, 取  $\{q_i\}$  为相应特征子空间的正交基.

## 6.6 正定矩阵

### 定义 6.6.1: 二次型

二次型 (quadratic form) 是形如  $x^\top S x$  的二次多项式, 其中  $S$  是实对称矩阵.

### 定义 6.6.2: 正定矩阵

给定对称矩阵  $S$ , 如果  $\forall x \neq 0$ , 二次型  $x^\top S x > 0$ , 则称  $S$  是正定的 (positive definite).

**定理 6.6.1: 正定矩阵的判定**

对于对称矩阵  $S$ , 下述命题是等价的:

1.  $\forall x \neq 0$ , 二次型  $x^\top Sx > 0$ ;
2.  $S$  的所有  $n$  个特征值都是正的;
3.  $S$  可以只通过换行和倍加后得到  $n$  个正的主元;
4.  $S$  的所有左上行列式 (前  $i$  行  $i$  列子矩阵的行列式) 均  $> 0$ ;
5. 存在  $A$  列之间线性无关, 使得  $S = A^\top A$ .

证明.  $1 \implies 2$ :  $S$  对称, 则  $\Lambda = Q^\top S Q$

$$\lambda_i = e_i^\top \Lambda e_i = e_i^\top Q^\top S Q e_i = (Q e_i)^\top S (Q e_i) > 0.$$

$2 \implies 1$ :  $S$  的所有  $n$  个特征值都是正的, 故

$$x^\top Sx = x^\top Q \Lambda Q^\top x = \sum_{i=1}^n \lambda_i (Q^\top x)_i^2 > 0.$$

$5 \implies 1$ :  $A$  列之间线性无关, 故  $\forall x \neq 0, Ax \neq 0$

$$x^\top Sx = x^\top A^\top A x = (Ax)^\top (Ax) > 0.$$

$1 \implies 5$ :  $S$  正定, 故

$$S = Q \Lambda Q^\top = Q \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} Q^\top =: A^\top A.$$

$3 \implies 4$ : 行倍加不改变所有左上行列式,  $S$  做行倍加得到上三角矩阵  $U$ , 其  $i \times i$  的左上行列式就是前  $i$  个主元的乘积, 所以  $> 0$ .

$4 \implies 3$ :  $U$  的左上行列式都  $> 0$ , 所以前  $i$  个主元乘积都  $> 0$ , 所以主元全正.

$3 \implies 5$ :  $S = LDU$ , 由  $S$  对称且  $LDU$  分解唯一可知  $L = U^\top$ , 又主元全正, 故

$$S = U^\top D U = U^\top \begin{bmatrix} \sqrt{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{a_n} \end{bmatrix} U =: A^\top A.$$

$5 \implies 3$ :  $A$  列之间线性无关, 故  $A = QR$

$$A^\top A = R^\top Q^\top Q R = R^\top R = LDU.$$

□

**定义 6.6.3: 半正定矩阵**

如果  $\forall x \neq 0$ , 二次型  $x^\top Sx \geq 0$ , 则称  $S$  是半正定的 (positive semidefinite).

## 定理 6.6.2: 半正定但非正定矩阵的判定

1.  $S$  的最小特征值是 0;
2. 存在  $A$  列之间线性相关, 使得  $S = A^{\top}A$ .

半正定但非正定矩阵的行列式为 0.

## 第七章 奇异值分解

特征值和特征向量只适用于方阵，对于一般的  $m \times n$  矩阵  $A$ ，有没有类似的操作？考虑  $A^\top A$  和  $AA^\top$ ，他们都是半正定的，因为  $\forall x$

$$x^\top A^\top A x = \|Ax\|^2 \geq 0,$$

$AA^\top$  同理，因此  $A^\top A$  和  $AA^\top$  都可以对角化。

### 定义 7.0.1: 奇异值

$A^\top A$  是半正定的，因此所有特征值  $\lambda_i \geq 0$ ，矩阵  $A$  的奇异值 (singular value) 便定义为  $A^\top A$  特征值的平方根： $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$ 。

为了后续方便，我们将所有奇异值从大到小排列：

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0.$$

由定理 4.2.1， $\text{rank}(A^\top A) = \text{rank}(A)$

### 定理 7.0.1: 非零奇异值的数量

$A$  的非零奇异值的数量  $r = \text{rank}(A)$ 。

证明. 设  $\{v_1, \dots, v_n\}$  为  $\mathbb{R}^n$  中可以把  $A^\top A$  对角化的一组正交归一基， $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  为对应的特征值，则  $\{Av_1, \dots, Av_n\}$  是一个正交向量集合，即  $\forall i \neq j$ ,

$$(Av_i)^\top Av_j = v_i^\top A^\top Av_j = v_i^\top (\lambda_j v_j) = 0.$$

假设  $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$  是所有的正特征值，则  $Av_{r+1}, \dots, Av_n = 0$ 。

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x$  可以写成  $x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ ，从而  $\forall y \in C(A)$ ,  $y$  可以被写为  $\{Av_1, \dots, Av_r\}$  的线性组合：

$$y = Ax = c_1 Av_1 + \cdots + c_r Av_r + 0 + \cdots + 0,$$

故  $\{Av_1, \dots, Av_r\}$  是  $C(A)$  的一组正交基， $r = \text{rank}(A)$ 。□



## 7.1 奇异值分解

### 定理 7.1.1: 奇异值分解

$m \times n$  矩阵  $A$  秩为  $r$ , 则存在一个  $m \times n$  的矩阵  $\Sigma$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r).$$

$m \times m$  的正交矩阵  $U$  和  $n \times n$  的正交矩阵  $V$ , 且

$$A = U\Sigma V^\top.$$

证明. 直接构造出  $U, \Sigma, V$ .

由  $A^\top A$  是对称矩阵, 故存在一组  $\mathbb{R}^n$  中的正交归一基  $\{v_1, \dots, v_n\}$  可将  $A^\top A$  对角化,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  为对应的特征值, 且  $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$ ,  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0$ .

因为  $\{v_1, \dots, v_n\}$  之间是正交的, 则  $\forall i \neq j$ ,

$$(Av_i)^\top (Av_j) = v_i^\top A^\top Av_j = \lambda_j v_i^\top v_j = 0.$$

所以  $\{Av_1, \dots, Av_r\}$  之间也是正交的,  $Av_{r+1}, \dots, Av_n = 0$ . 令

$$u_i = \frac{Av_i}{\|Av_i\|} = \frac{Av_i}{\sqrt{\lambda_i}} = \frac{Av_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, r.$$

则  $\{u_1, \dots, u_r\}$  是  $C(A)$  的一组正交归一基.

再设  $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$  是  $N(A^\top)$  中的一组正交归一基, 由  $N(A^\top) = C(A)^\perp$ ,  $\{u_1, \dots, u_m\}$  是  $\mathbb{R}^m$  的一组正交归一基.

设矩阵  $U = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $V = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $U$  和  $V$  都是正交矩阵, 且

$$AV = (Av_1, \dots, Av_n) = (\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_r u_r, 0, \dots, 0) = U\Sigma. \quad \square$$

### 定理 7.1.2

$A^\top A$  和  $AA^\top$  的非零特征值相同.

证明. 假设  $x_i$  是  $A^\top A$  的特征值为  $\lambda_i \neq 0$  的特征向量,

$$(\lambda_i I - A^\top A)x_i = 0,$$

左乘  $A$ ,

$$A(\lambda_i I - A^\top A)x_i = (\lambda_i I - AA^\top)(Ax_i) = 0,$$

又  $x_i^\top A^\top Ax_i = \lambda_i x_i^\top x_i > 0$ , 所以  $Ax_i \neq 0$ , 所以  $Ax_i$  是  $AA^\top$  的特征值为  $\lambda_i$  的特征向量.

同理, 如果  $x_i$  是  $AA^\top$  的特征值为  $\lambda_i \neq 0$  的特征向量,  $A^\top x_i$  是  $A^\top A$  的特征值为  $\lambda_i$  的特征向量.

从而  $A^\top A$  和  $AA^\top$  非零特征值对应的特征向量一一对应.  $\square$

## 例 7.1.1: 四个子空间的正交归一基

$\{v_1, \dots, v_r\}$  是  $C(A^\top)$  的正交归一基,  $V_r = (v_1, \dots, v_r)$   
 $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  是  $N(A)$  的正交归一基,  $V_{n-r} = (v_{r+1}, \dots, v_n)$   
 $\{u_1, \dots, u_r\}$  是  $C(A)$  的正交归一基,  $U_r = (u_1, \dots, u_r)$   
 $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  是  $N(A^\top)$  的正交归一基,  $U_{n-r} = (u_{r+1}, \dots, u_m)$

## 例 7.1.2: 数据压缩

假设  $\text{rank}(A) < \min(m, n)$ , 则

$$A = \begin{bmatrix} U_r & U_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^\top \\ V_{n-r}^\top \end{bmatrix} = U_r D V_r^\top = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^\top.$$

可以用  $U_r, D, V_r$  这三个矩阵的  $r(m+1+n)$  个分量完全决定  $A$  原来的  $mn$  个分量. (无损)

甚至可以把很小的奇异值当成 0, 进一步压缩图片. (有损) 由此带来的误差

$$\delta A = \sum_{\ell=k+1}^r \sigma_\ell u_\ell v_\ell^\top.$$

分量误差的绝对值

$$|\delta A_{ij}| = \left| \sum_{\ell=k+1}^r \sigma_\ell (u_\ell)_i (v_\ell)_j \right| \leq \sum_{\ell=k+1}^r \sigma_\ell.$$

因此误差由忽略的奇异值控制, 忽略的越少误差越小

## 7.2 矩阵的模

我们用内积定义了向量的模 (即长度)

$$\|x\| := \sqrt{x^\top x}.$$

## 定理 7.2.1

$$\|Ax\| \leq \sigma_1 \|x\|. \quad (7.1)$$

证明.

$$\begin{aligned}
 \|Ax\|^2 &= x^\top A^\top A x = x^\top V \Sigma^\top \Sigma V^\top x \\
 &= \sum_{k=1}^r x^\top v_k \sigma_k^2 v_k^\top x \leq \sigma_1^2 \sum_{k=1}^n x^\top v_k v_k^\top x \\
 &= \sigma_1^2 x^\top V V^\top x = \sigma_1^2 x^\top x,
 \end{aligned}$$

等号可在  $x = cv_1$  时成立.

□

## 定义 7.2.1: 矩阵的模

矩阵的模 (norm) 定义为

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sigma_1. \quad (7.2)$$

由矩阵模的定义可直接导出  $\forall x \neq 0$ ,

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

## 定理 7.2.2: 三角不等式

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|. \quad (7.3)$$

证明.

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \|x\| + \|B\| \|x\|.$$

故

$$\|A + B\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)x\|}{\|x\|} \leq \|A\| + \|B\|.$$

□

## 定理 7.2.3: Eckart-Young-Mirsky 定理

同矩阵  $A$  最接近的秩为  $k$  的矩阵为

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^\top. \quad (7.4)$$

证明. 只需证  $\forall B$  秩为  $k$ , 都有

$$\|A - B\| \geq \|A - A_k\| = \sigma_{k+1}.$$

设  $w = c_1 v_1 + \cdots + c_{k+1} v_{k+1}$ , 因为  $\text{rank}(B) = k$ , 故  $Bv_1, \dots, Bv_{k+1}$  必然线性相关, 继而存在非零的  $c_1, \dots, c_{k+1}$  使得  $Bw = 0$ , 在此基础上再归一化  $w$ , 从而

$$\begin{aligned} \|A - B\|^2 &\geq \|(A - B)w\|^2 = \|Aw\|^2 \\ &= \sigma_1^2 c_1^2 + \cdots + \sigma_{k+1}^2 c_{k+1}^2 \geq \sigma_{k+1}^2 (c_1^2 + \cdots + c_{k+1}^2) = \sigma_{k+1}^2. \end{aligned}$$

□

### 7.3 伪逆

#### 定义 7.3.1: 伪逆

$m \times n$  矩阵  $A = U\Sigma V^\top$ , 定义伪逆 (pseudoinverse) 是一个  $n \times m$  的矩阵

$$A^+ := V\Sigma^+U^\top. \quad (7.5)$$

其中  $\Sigma^+$  是一个  $n \times m$  的矩阵

$$\Sigma^+ := \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}).$$

注. 伪逆与原矩阵的乘积并不是单位矩阵:

$$A^+A = V \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^\top,$$

是投影到  $C(A^\top)$  的矩阵;

$$AA^+ = U \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^\top,$$

是投影到  $C(A)$  的矩阵.

但额外的满足:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+.$$

#### 定理 7.3.1: 伪逆与最小二乘法

最小二乘法

$$A^\top Ax = A^\top b,$$

的解为  $x^+ = A^+b$ .

证明.

$$A^\top Ax^+ = V\Sigma^\top U^\top U\Sigma V^\top V\Sigma^+U^\top b = V\Sigma^\top U^\top b = A^\top b. \quad \square$$

### 7.4 主成分分析

一组数据  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  来源于  $n$  个样本, 其样本均值 (mean) 和样本方差 (variance) 分别为

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mu_i - \bar{\mu})^2.$$

将数据存在一个  $m \times n$  的矩阵  $A$  中, 每一行对应一种数据, 每一列代表一个样本. 将每个元素减去其所在行的平均值

$$A_{ij} := (A_0)_{ij} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (A_0)_{ik}.$$

由此得到矩阵  $A$ , 每一行都是以 0 为中心的分布.

## 定义 7.4.1: 协方差矩阵

定义协方差矩阵 (covariance matrix)

$$S := \frac{AA^\top}{n-1}. \quad (7.6)$$

对角线上  $S_{ii}$  是样本方差;  $S_{ij}$  是样本协方差.

## 方法 7.4.1: 主成分分析

主成分分析 (principal component analysis, PCA): 找到原有数据的一系列线性组合作为新的数据, 新数据之间的协方差为 0.

利用  $A = U\Sigma V^\top$ , 定义新的数据矩阵  $B := U^\top A = \Sigma V$ ,  $B$  的协方差矩阵

$$\frac{BB^\top}{n-1} = \frac{\Sigma\Sigma^\top}{n-1}$$

是对角的, 故  $B$  之间协方差为 0.

总方差在这种变换下是不变的:

$$\text{tr}\left(\frac{BB^\top}{n-1}\right) = \frac{\text{tr}(U^\top AA^\top U)}{n-1} = \frac{\text{tr}(UU^\top AA^\top)}{n-1} = \text{tr}\left(\frac{AA^\top}{n-1}\right).$$

所有数据点分布在  $\{u_1, \dots, u_r\}$  张成的  $C(A)$  上,  $u_1$  是所有数据变化最大的方向 (方差最大)、 $u_2$  次之……因此  $\{u_1, \dots, u_r\}$  称作主成分 (principal component).

## 第八章 线性映射

### 定义 8.0.1: 映射

给定两个集合  $S, S'$ , 如果  $\forall x \in S$ , 均有一个对应的  $f(x) \in S'$ , 这种对应关系  $f$  便称为映射 (mapping), 记作

$$f: S \rightarrow S', \quad x \mapsto f(x). \quad (8.1)$$

其中  $S$  称为定义域 (domain),  $S'$  称为陪域 (codomain).  $f(x)$  称为  $x$  的像 (image), 所有像的集合  $f(S) = \{f(x) | x \in S\}$  称为值域 (image of  $S$ ), 有  $f(S) \subset S'$ .

给定  $y \in S'$ , 所有满足  $f(x) = y$  的  $x$  的集合称为  $y$  的原像 (preimage), 记作

$$f^{-1}(y) := \{x \in S | f(x) = y\}. \quad (8.2)$$

注. 符号  $f(\cdot)$  便代表映射  $x \mapsto f(x)$ .

### 定义 8.0.2: 映射的复合

映射  $f: U \rightarrow V$ ,  $g: V \rightarrow W$  的复合 (composition) 构成一个新的映射:

$$g \circ f: U \rightarrow W, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

推论. 映射的复合满足结合律

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \equiv h \circ g \circ f.$$

### 定义 8.0.3: 单射、满射和双射

- 单射 (injection):  $\forall x, y \in S$  且  $x \neq y$ , 均有  $f(x) \neq f(y)$ .
- 满射 (surjection):  $f(S) = S'$ .
- 双射 (bijection): 既是单射又是满射.

### 定义 8.0.4: 恒等映射

定义  $S$  上的恒等映射 (identity) 为

$$\text{id}_S: S \rightarrow S, \quad x \mapsto x. \quad (8.3)$$

推论.  $\forall f: S \rightarrow S'$ , 有  $f \circ \text{id}_S = \text{id}_{S'} \circ f = f$ .

## 定义 8.0.5: 逆映射

给定映射  $f: S \rightarrow S'$ , 若存在  $g: S' \rightarrow S$  使得

$$g \circ f = \text{id}_S, \quad f \circ g = \text{id}_{S'},$$

则称映射  $f: S \rightarrow S'$  可逆,  $g = f^{-1}$  为  $f$  的逆映射 (inverse).

## 定理 8.0.1: 有关映射的等价描述

1. 映射  $f$  为单射  $\iff$  存在映射  $g$  使得  $g \circ f = \text{id}$ ;
2. 映射  $f$  为满射  $\iff$  存在映射  $g$  使得  $f \circ g = \text{id}$ ;
3. 映射  $f$  为双射  $\iff f$  可逆.

证明. 显然 (1), (2)  $\implies$  (3), 故只需证明 (1), (2). 证明留作习题.  $\square$

## 8.1 线性映射和矩阵

## 定义 8.1.1: 线性映射

给定两个线性空间  $V, W$ , 若映射  $T: V \rightarrow W$  满足:

1.  $\forall u, v \in V, T(u + v) = T(u) + T(v)$ ;
2.  $\forall c \in \mathbb{F}, T(cu) = cT(u)$ .

则称映射  $T$  是线性映射 (或线性变换, linear mapping). 特别地,  $V \rightarrow \mathbb{F}$  的称为线性函数.

推论.  $T(0) = 0$ .

## 定理 8.1.1: 线性映射与基

给定两个线性空间  $V, W$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  是  $V$  中的一组基,  $\{w_1, \dots, w_n\}$  是  $W$  中任意  $n$  个元素, 则存在唯一的线性映射  $T: V \rightarrow W$  使得

$$T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n.$$

证明. (存在性)  $\forall v \in V$  均可唯一写成基的线性组合  $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$ , 定义映射  $T: V \rightarrow W$

$$T(v) = c_1w_1 + \dots + c_nw_n,$$

下面证明  $T$  是线性映射, 再任取  $u = d_1v_1 + \dots + d_nv_n \in V$

$$\begin{aligned} T(v + u) &= T((c_1 + d_1)v_1 + \dots + (c_n + d_n)v_n) \\ &= (c_1 + d_1)w_1 + \dots + (c_n + d_n)w_n = T(v) + T(u); \\ T(cv) &= T(cc_1v_1 + \dots + cc_nv_n) = cc_1w_1 + \dots + cc_nw_n = cT(v). \end{aligned}$$

(唯一性) 假设存在另一个线性映射  $F : V \rightarrow W$  满足

$$F(v_1) = w_1, \dots, F(v_n) = w_n,$$

则

$$F(v) = c_1 F(v_1) + \dots + c_n F(v_n) = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n = T(v).$$

综上, 存在唯一的线性映射. □

注. 只要知道线性映射在基上的值, 就唯一决定了这个线性映射.

### 例 8.1.1: 矩阵定义线性映射

$m \times n$  的矩阵  $A$  可定义一个线性映射:

$$L_A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m, \quad x \mapsto Ax. \quad (8.4)$$

### 定理 8.1.2: 线性映射和矩阵

设  $L : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$  是线性映射, 则存在唯一的矩阵  $A$  使得  $L = L_A$ .

证明. 设  $\{e_1, \dots, e_n\}$  是  $\mathbb{F}^n$  的标准基,  $\{f_1, \dots, f_m\}$  是  $\mathbb{F}^m$  的标准基,  $\forall x \in \mathbb{F}^n$ , 有  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , 则

$$L(x) = x_1 L(e_1) + \dots + x_n L(e_n).$$

$L(e_i) \in \mathbb{F}^m$ , 故可写成基的线性组合

$$L(e_i) = a_{i1} f_1 + \dots + a_{im} f_m.$$

故

$$\begin{aligned} L(x) &= x_1(a_{11}f_1 + \dots + a_{m1}f_m) + \dots + x_n(a_{n1}f_1 + \dots + a_{nm}f_m) \\ &= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)f_1 + \dots + (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)f_m \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =: Ax. \end{aligned}$$

便唯一确定了一个矩阵  $A$ . □

注. 线性映射给出了矩阵和向量乘法的自然定义.

## 8.2 线性映射的性质

利用线性映射和矩阵的对应, 线性映射的加法和数乘等价于矩阵的加法和数乘, 零映射对应零矩阵, 这些都是平凡的.

给出加法、数乘、零映射的定义后, 所有  $V \rightarrow W$  的线性映射的集合  $\{T\}$  便构成一个线性空间, 可验证满足 8 条公理.



**定义 8.2.1: 线性映射的核**

线性映射  $F: V \rightarrow W$  的核 (kernel) 是所有满足  $F(v) = 0$  的向量  $v$  的集合

$$\ker(F) \equiv \{v \in V \mid F(v) = 0\}.$$

**推论.**  $\ker(F)$  是  $V$  的线性子空间.  $\ker(L_A) = N(A)$ .

**定理 8.2.1: 核和单射**

$$\ker(F) = \{0\} \iff F \text{ 是单射}.$$

**证明.** (矩阵版本) 对应矩阵零空间为  $\{0\}$ ,  $Av = b$  若有解则解必唯一.

(抽象版本) 若  $u, v \in V$  满足  $F(u) = F(v)$ , 则  $F(u - v) = F(u) - F(v) = 0$ , 从而  $u - v = 0$ .  $\square$

**定理 8.2.2: 核的性质**

若线性映射  $F: V \rightarrow W$  的核  $\ker(F) = \{0\}$ , 则对于线性无关的一组  $v_1, \dots, v_n \in V$ , 有  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  线性无关.

**证明.** (矩阵版本) 对应矩阵零空间为  $\{0\}$ , 则列满秩, 列之间线性无关.

(抽象版本) 假设  $x_1 F(v_1) + \dots + x_n F(v_n) = 0$ , 则

$$F(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = 0, \implies x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0.$$

$v_1, \dots, v_n$  线性无关, 故只有零解.  $\square$

**定义 8.2.2: 线性映射的像**

线性映射  $F: V \rightarrow W$  的像 (image) 是所有  $F(v)$  的集合

$$\operatorname{im}(F) \equiv \{F(v) \in W \mid \forall v \in V\}.$$

**推论.**  $\operatorname{im}(F)$  是  $W$  的线性子空间.  $\operatorname{im}(L_A) = C(A)$ .

**定理 8.2.3: 核和像的关系**

$V$  是线性空间,  $L: V \rightarrow W$  是线性映射

$$\dim(V) = \dim(\ker(L)) + \dim(\operatorname{im}(L)). \quad (8.5)$$

**证明.** (矩阵版本)

$$\dim(V) = \dim(N(A)) + \dim(C(A^\top)) = \dim(N(A)) + \dim(C(A)).$$

(抽象版本) 略  $\square$

**定理 8.2.4: 核、像和双射**

线性映射  $L: V \rightarrow W$ , 且  $\dim(V) = \dim(W)$ , 则

$$\ker(F) = \{0\} \iff \operatorname{im}(F) = W \iff L \text{ 是双射}.$$

证明. 略

□

### 8.3 基的变换

**定义 8.3.1: 坐标向量**

设  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  是线性空间  $V$  上的一组基,  $V$  中的向量  $v \in V$  可唯一写成  $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ , 其在基  $B$  下的坐标向量 (coordinate vector) 为

$$x_B(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

显然  $x_B: V \rightarrow \mathbb{F}^n$  是线性映射, 且是一个双射.

我们可以选取  $V$  上的另一组基  $B' = \{u_1, \dots, u_n\}$ , 基变换矩阵:

$$(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n)M, \quad (*)$$

$v$  也可以写成  $v = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$ , 由于向量在基的变换下保持不变, 故

$$v = (v_1, \dots, v_n)(x_1, \dots, x_n)^\top = (u_1, \dots, u_n)(y_1, \dots, y_n)^\top.$$

可以推出

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (**)$$

**定理 8.3.1: 换基矩阵**

$L: V \rightarrow W$  是一个线性映射,  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  是  $V$  上的一组基,  $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$  是  $W$  上的一组基. 则存在唯一的  $m \times n$  矩阵  $M_{B'}^B(L)$ , 使得  $\forall v \in V$ ,

$$x_{B'}(L(v)) = M_{B'}^B(L)x_B(v).$$

证明.  $\forall v \in V$ , 有

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \quad L(v) = x_1 L(v_1) + \dots + x_n L(v_n).$$

$L(v_i) \in W$ , 所以

$$L(v_i) = m_{1i} w_1 + \dots + m_{mi} w_m.$$

写成矩阵的形式即  $(L(v_1), \dots, L(v_n)) = (w_1, \dots, w_m)M$ , 从而

$$L(v) = (L(v_1), \dots, L(v_n))(x_1, \dots, x_n)^\top = (w_1, \dots, w_m)M(x_1, \dots, x_n)^\top.$$

故  $L(v)$  在  $B'$  上的坐标为  $M(x_1, \dots, x_n)^\top$ .  $\square$

$M_{B'}^B(L)$  是所有线性变换  $L: V \rightarrow W$  到  $\dim(W) \times \dim(V)$  矩阵的线性映射, 并且是一个双射.

特别地, 当  $L \equiv \text{id}: V \rightarrow V$  时,

$$x_{B'}(v) = M_{B'}^B(\text{id})x_B(v).$$

### 定理 8.3.2: 线性变换的复合与矩阵乘法

线性映射  $L_1: U \rightarrow V$ ,  $L_2: V \rightarrow W$ ,  $B, B', B''$  分别是  $U, V, W$  上的一组基, 则

$$M_{B''}^B(L_2 \circ L_1) = M_{B''}^{B'}(L_2)M_{B'}^B(L_1).$$

线性映射的复合等价于对应矩阵的乘法, 由此可自然得到矩阵乘法的规则.

### 定理 8.3.3: $M_{B'}^B(\text{id})$ 可逆

$$M_{B'}^B(\text{id}) = M_B^{B'}(\text{id})^{-1}.$$

### 定理 8.3.4

线性映射  $L: V \rightarrow W$ ,  $B, B'$  是  $V$  上的两组基,  $C, C'$  是  $W$  上的两组基, 则

$$M_{C'}^{B'}(L) = M_{C'}^C(\text{id})M_C^B(L)M_B^{B'}(\text{id}) = M_{C'}^{C'}(\text{id})^{-1}M_C^B(L)M_B^{B'}(\text{id})$$

证明. 利用  $L = \text{id}_W \circ L \circ \text{id}_V$ .  $\square$

推论.  $L: V \rightarrow V$ ,  $B, B'$  是  $V$  上的两组基, 则

$$M_{B'}^{B'}(L) = M_{B'}^B(\text{id})^{-1}M_B^B(L)M_B^{B'}(\text{id}).$$

因此相似变换就是换基, 矩阵对角化就是找到描述线性变换的最好的基.

## 8.4 对偶空间

如何从已知的线性空间构造新的线性空间?

### 定义 8.4.1: 对偶空间

线性空间  $V$  的对偶空间 (dual space)  $V^*$  是所有线性映射  $L: V \rightarrow \mathbb{R}$  构成的线性空间.

**定理 8.4.1: 对偶空间的基**

通过  $V$  的一组基  $\{v_1, \dots, v_n\}$  可构造  $V^*$  的基  $\{v^{*1}, \dots, v^{*n}\}$ , 满足

$$v^{*i}(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (8.6)$$

证明. (完备性)  $\forall L \in V^*$ , 由定理 8.1.1,  $L$  可由其在基上的取值  $\{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$  唯一决定, 又  $L(v_1)v^{*1} + \dots + L(v_n)v^{*n}$  和  $L$  在基  $v_1, \dots, v_n$  上取到了相同的值, 故二者相等:

$$L = L(v_1)v^{*1} + \dots + L(v_n)v^{*n}.$$

即  $L$  可被写成  $\{v^{*1}, \dots, v^{*n}\}$  的线性组合.

(线性无关) 若基的线性组合是零映射  $x_1v^{*1} + \dots + x_nv^{*n} = 0$ , 则  $O(v_i) = x_i = 0$ , 即只有零解.  $\square$

**例 8.4.1: Fourier 变换**

Fourier 变换

$$\hat{f}(k) = \int f(x) e^{ik \cdot x} d^3x,$$

就是将  $\mathbb{R}^3$  的函数变成  $(\mathbb{R}^3)^*$  的函数.

**例 8.4.2: 对偶的对偶**

依定义, 对偶空间  $V^*$  的对偶空间  $V^{**}$  是所有线性映射  $F: V^* \rightarrow \mathbb{R}$  构成的线性空间.  $\forall v \in V$ , 可定义映射  $u^{**} \in V^{**}$ , 使得  $\forall L \in V^*$

$$u^{**}(L) = L(u). \quad (8.7)$$

因此  $V^{**}$  和  $V$  是自然同构的 (natural isomorphism):  $V^{**} \cong V$ . 这是范畴论 (category theory) 的概念, 粗糙地说就是这种同构关系不依赖于基的选取, 而  $V$  和  $V^*$  的同构是依赖于基的. 因此我们可以将  $V^{**}$  和  $V$  视为同一个线性空间, 从而  $V^{**}, V^{***}, \dots$  也就再没有研究价值了.

**定理 8.4.2: 对偶空间的基变换**

给定线性空间  $V$  及其中的两组基  $\{v_1, \dots, v_n\}$  和  $\{u_1, \dots, u_n\}$ , 我们可以给出对偶空间  $V^*$  的基  $\{v^{*1}, \dots, v^{*n}\}$  和  $\{u^{*1}, \dots, u^{*n}\}$ , 满足

$$v^{*i}(v_j) = \delta_{ij}, \quad u^{*i}(u_j) = \delta_{ij},$$

若  $(v_1, \dots, v_n) = (u_1, \dots, u_n)A$ , 则  $(v^{*1}, \dots, v^{*n})^\top = A^{-1}(u^{*1}, \dots, u^{*n})^\top$

证明. 若  $(v^{*1}, \dots, v^{*n})^\top = B(u^{*1}, \dots, u^{*n})^\top$ , 即

$$v_i = \sum_{j=1}^n u_j A_{ij}^j, \quad v^{*i} = \sum_{j=1}^n B_{ij}^i u^{*j}.$$

则

$$\begin{aligned} v^{*i}(v_j) &= \sum_{k=1}^n B_{ik}^i u^{*k} \left( \sum_{\ell=1}^n u_\ell A_{j\ell}^j \right) = \sum_{k,\ell} B_{ik}^i A_{j\ell}^j u^{*k}(u_\ell) \\ &= \sum_{k,\ell} B_{ik}^i A_{j\ell}^j \delta_{k\ell}^k = \sum_{k=1}^n B_{ik}^i A_{jk}^j = \delta_{ij}^i. \end{aligned}$$

故  $B = A^{-1}$ . □

## 8.5 直和、直积

### 定义 8.5.1: 线性空间的和

线性空间  $U$  的两个子空间  $V, W$  的和 (sum)  $V + W$  定义为所有  $v + w, v \in V, w \in W$  的集合:

$$V + W \equiv \{v + w \mid v \in V, w \in W\}. \quad (8.8)$$

显然,  $V + W$  也是  $U$  的子空间.

### 定义 8.5.2: 线性空间的直和

线性空间  $U$  是  $V$  和  $W$  的直和 (direct sum)  $U = V \oplus W$ , 若  $\forall u \in U$ , 存在唯一的  $v \in V, w \in W$  使得  $u = v + w$ .

### 定理 8.5.1: 和与直和

若  $U = V + W$  且  $V \cap W = \{0\}$ , 则  $U = V \oplus W$ .

证明. 假设  $u \in U$  可以写成  $u = v + w = v' + w'$ , 则  $v - v' = w - w'$ ,

又  $v - v' \in V, w - w' \in W$  且  $V \cap W = \{0\}$ , 所以  $v - v' = w - w' = 0$ . 故分解是唯一的. □

### 定理 8.5.2: 直和的存在

$U$  是一个有限维线性空间,  $V$  是  $U$  的子空间, 则存在  $U$  的子空间  $W$  使得  $U = V \oplus W$ .

证明. 取  $V$  的一组基  $\{v_1, \dots, v_r\}$ , 可将其扩张成  $U$  的一组基  $\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_m\}$ , 取  $W = \text{span}(w_1, \dots, w_m)$  即可. □

推论.

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W). \quad (8.9)$$

## 定义 8.5.3: 线性空间的直积

两个线性空间  $V, W$  的直积 (direct product)  $V \times W$  是所有形如  $(v, w), v \in V, w \in W$  的元素的集合:

$$V \times W \equiv \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}. \quad (8.10)$$

## 定理 8.5.3: 直基的维度

$V \times W$  是一个线性空间. 且

$$\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W). \quad (8.11)$$

## 8.6 张量

## 定义 8.6.1: 多重线性映射

映射  $L: V_1 \times \cdots \times V_r \rightarrow W$  是一个多重线性映射 (multiple linear mapping), 若其对于每一个变量都是线性的:

$$L(\dots, au + bw, \dots) = aL(\dots, u, \dots) + bL(\dots, w, \dots).$$

定义 8.6.2: 张量空间  $V^* \otimes V^*$ 

考虑所有多重线性函数  $L: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  的集合, 我们可以在这个集合上定义加法和数乘:

- 加法:  $(L_1 + L_2)(u, v) = L_1(u, v) + L_2(u, v)$ ;
- 数乘:  $(cL)(u, v) = cL(u, v)$ ;
- 零元:  $O(u, v) \equiv 0$ .

因此这个集合构成一个线性空间, 称作张量空间 (tensor space)  $V^* \otimes V^*$ . 其中的每一个元素  $L$  是二阶协变张量 (covariant tensor), 记作  $(0, 2)$  张量.

若  $V$  的一组基为  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , 则  $\forall L \in V^* \otimes V^*$

$$L(u, v) = L\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j L(v_i, v_j).$$

$n^2$  个函数值  $L(v_i, v_j)$  便可唯一确定函数  $L$ .

例 8.6.1:  $V^* \otimes V^*$  的基

给定对偶空间  $V^*$  的一组基  $\{v^{*1}, \dots, v^{*n}\}$  满足  $v^{*i}(v_j) = \delta^i_j$ . 继而定义张量  $v^{*i} \otimes v^{*j} \in V^* \otimes V^*$  满足

$$v^{*i} \otimes v^{*j}(u, v) = v^{*i}(u) v^{*j}(v).$$

从而

$$v^{*i} \otimes v^{*j}(v_k, v_\ell) = v^{*i}(v_k)v^{*j}(v_\ell) = \delta_k^i \delta_\ell^j.$$

$n^2$  个张量  $v^{*i} \otimes v^{*j}$  构成  $V^* \otimes V^*$  的一组基.

张量  $\forall w \in V^* \otimes V^*$ ,

$$w = \sum_{i,j} w_{ij} v^{*i} \otimes v^{*j}, \quad w_{ij} = w(v_i, v_j).$$

给出  $V, V^*$  的另一组基  $\{u_1, \dots, u_n\}, \{u^{*1}, \dots, u^{*n}\}$ , 有变换

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_n) &= (v_1, \dots, v_n)A, \\ (u^{*1}, \dots, u^{*n})^\top &= (v^{*1}, \dots, v^{*n})^\top A^{-1}. \end{aligned}$$

张量  $w$  在基  $\{u^{*i} \otimes u^{*j}\}$  下的分量

$$w'_{ij} = w(u_i, u_j) = w\left(\sum_{k=1}^n v_k A^k_i, \sum_{\ell=1}^n v_\ell A^\ell_j\right) = \sum_{k,\ell} w_{k\ell} A^k_i A^\ell_j.$$

因此这也是协变 (covariant) 的含义: 分量在坐标变换下同基的变换规律一致.

### 定义 8.6.3: 张量积

$U, V$  是两个线性空间, 定义  $u \in U, v \in V$  的张量积 (tensor product) 是一个新的元素  $u \otimes v$ , 且满足以下性质:

- 结合律:  $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w) \equiv u \otimes v \otimes w$ ;
- 左分配律:  $(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v$ ;
- 右分配律:  $u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2$ ;
- 数乘:  $(au) \otimes v = u \otimes (av) = a(u \otimes v)$ .

张量积并不满足交换律, 即  $u \otimes v \neq v \otimes u$  是两个不同的张量.

### 定义 8.6.4: 线性空间的张量积

若  $U, V$  是两个线性空间, 各自有一组基  $\{u_1, \dots, u_m\}, \{v_1, \dots, v_n\}$ , 定义基的张量积  $\{u_i \otimes v_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  张成的线性空间为  $U, V$  的张量积, 记为  $U \otimes V$ .

由定义

$$\dim(U \otimes V) = \dim(U) \dim(V).$$

### 例 8.6.2

$\forall u \in U, v \in V, u = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m, v = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ , 则

$$u \otimes v = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j u_i \otimes v_j \in U \otimes V.$$

但并不是所有  $U \otimes V$  的元素都能写成  $u \otimes v$  的形式.

### 例 8.6.3: 张量空间 $V \otimes V$

$V \otimes V$  是所有  $V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$  的双线性函数构成的线性空间,  $\forall v \in V \otimes V$  都可以写为

$$v = \sum_{i,j} v^{ij} v_i \otimes v_j.$$

称作二阶逆变张量 (contravariant tensor), 记作  $(2,0)$  张量.

换基时,

$$v^{k\ell} = \sum_{i,j} A^k_i A^\ell_j v'^{ij}, \quad v'^{ij} = \sum_{k,\ell} (A^{-1})^i_k (A^{-1})^j_\ell v^{k\ell}.$$

逆变 (contravariant) 的含义: 换基时分量每个指标对应的变换矩阵是基的变换矩阵的逆矩阵.

### 例 8.6.4: 混合张量 $V \otimes V^*$

$(1,1)$  张量  $v \in V \otimes V^*$  可以写成

$$v = \sum_{i,j} v^i_j v_i \otimes v^{*j}.$$

### 例 8.6.5: $V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^* = V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes \ell}$

$V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^* = V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes \ell}$  的基

$$\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \otimes v^{*j_1} \otimes \cdots \otimes v^{*j_\ell} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell \leq n\}$$

$V^{\otimes k} \otimes V^{*\otimes \ell}$  的元素

$$v = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_\ell}} (v^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_\ell}) v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \otimes v^{*j_1} \otimes \cdots \otimes v^{*j_\ell}.$$

是  $(k, \ell)$  阶张量. 基变换

$$v'^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_\ell} = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \\ q_1, \dots, q_\ell}} (A^{-1})^{i_1}_{p_1} \cdots (A^{-1})^{i_k}_{p_k} (v^{p_1 \dots p_k}_{q_1 \dots q_\ell}) A^{q_1}_{j_1} \cdots A^{q_\ell}_{j_\ell}.$$



## 第九章 复线性空间

这一章我们将数域由实数域  $\mathbb{R}$  扩展至复数域  $\mathbb{C}$ ，复数的定义和运算高中已经讲过，也可参见复变函数的笔记。在此略。

复数构成的向量  $z$  的共轭即将其中所有元素取共轭，记作  $\bar{z}$ 。共轭转置记作  $z^\dagger := \bar{z}^\top$ 。

所有实线性空间的知识都可以推广到复线性空间，只需要把原来是实数的地方换成复数。

### 9.1 内积和内积空间

#### 定义 9.1.1: $\mathbb{C}^n$ 标准内积

复向量  $u, v$  的内积

$$u^\dagger v = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i = \bar{u}_1 v_1 + \cdots + \bar{u}_n v_n.$$

一般复线性空间  $V$  的内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ :

- 交换共轭:  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ ;
- 对第二个变量线性:  $\langle u, cv \rangle = c \langle u, v \rangle$ ,  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ ;
- 正定:  $\langle u, u \rangle \geq 0$  当且仅当  $u = 0$  时取等号。

注. 对第一个变量不是简单的线性，而是多一个复共轭:

$$\langle cu, v \rangle = \bar{c} \langle u, v \rangle, \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

#### 定理 9.1.1

只需要知道基之间的内积就可以算出任意向量之间的内积。

证明.  $v_1, \dots, v_n$  是  $V$  上的一组基,  $\forall u, w \in V$ ,  $u = u^1 v_1 + \cdots + u^n v_n$ ,  $w = w^1 v_1 + \cdots + w^n v_n$

$$\langle u, w \rangle = \langle u^1 v_1 + \cdots + u^n v_n, w^1 v_1 + \cdots + w^n v_n \rangle = \sum_{i,j} \bar{u}^i w^j \langle v_i, v_j \rangle. \quad \square$$

#### 例 9.1.1: 内积与对偶空间

$V$  的对偶空间  $V^*$  是所有  $V \rightarrow \mathbb{C}$  的线性函数的集合。通过内积可以建立  $V, V^*$  的一一映射

$$\forall v \in V, g_v \in V^*, \quad g_v(w) := \langle v, w \rangle.$$

## 例 9.1.2: Legendre 多项式

所有不高于  $n$  的实系数多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

构成线性空间  $\mathscr{P}^n(\mathbb{R})$ , 显然  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  构成  $\mathscr{P}^n(\mathbb{R})$  的一组基. 定义内积

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

用 Gram-Schmidt 法则将  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  变成一组正交基

$$\begin{aligned} P_0 &= 1, \\ P_1 &= x - \frac{\langle P_0, x \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 = x, \\ P_2 &= x^2 - \frac{\langle P_1, x^2 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} P_1 - \frac{\langle P_0, x^2 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 = x^2 - \frac{2}{3}, \\ P_3 &= x^3 - \frac{\langle P_2, x^3 \rangle}{\langle P_2, P_2 \rangle} P_2 - \frac{\langle P_1, x^3 \rangle}{\langle P_1, P_1 \rangle} P_1 - \frac{\langle P_0, x^3 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} P_0 = x^3 - \frac{3}{5}x, \\ &\dots \end{aligned}$$

这与实际 Legendre 多项式的定义只是系数的差别.

## 例 9.1.3: Hermite 多项式

在  $\mathscr{P}^n(\mathbb{R})$  内定义内积

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x) e^{-x^2/2} dx,$$

用 Gram-Schmidt 法则将  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  变成一组正交基

$$\begin{aligned} H_0 &= 1, \\ H_1 &= x - \frac{\langle H_0, x \rangle}{\langle H_0, H_0 \rangle} H_0 = x, \\ H_2 &= x^2 - \frac{\langle H_1, x^2 \rangle}{\langle H_1, H_1 \rangle} H_1 - \frac{\langle H_0, x^2 \rangle}{\langle H_0, H_0 \rangle} H_0 = x^2 - 1, \\ H_3 &= x^3 - \frac{\langle H_2, x^3 \rangle}{\langle H_2, H_2 \rangle} H_2 - \frac{\langle H_1, x^3 \rangle}{\langle H_1, H_1 \rangle} H_1 - \frac{\langle H_0, x^3 \rangle}{\langle H_0, H_0 \rangle} H_0 = x^3 - 3x, \\ &\dots \end{aligned}$$

这与实际 Hermite 多项式的定义也只是系数的差别.

## 9.2 Hermite 矩阵

### 定义 9.2.1: Hermite 矩阵

方阵  $H$  是厄米 (Hermite) 矩阵若  $H^\dagger = H$ .

Hermite 矩阵是对称矩阵 (见定义 6.5.1) 在复空间的推广.

### 例 9.2.1: Pauli 矩阵

给出三个 Pauli 矩阵

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  都是 Hermite 的, 且

$$\sigma_i \sigma_j = i \sigma_k, \quad (ijk) = (123).$$

### 定理 9.2.1: Hermite 矩阵的二次型

$\forall z \in \mathbb{C}, z^\dagger H z$  是实数.

证明.  $(z^\dagger H z)^\dagger = z^\dagger H^\dagger z = z^\dagger H z$ . □

### 定理 9.2.2: Hermite 矩阵的特征值

Hermite 矩阵  $H$  的特征值都是实数.

证明.  $H z = \lambda z$ , 左乘  $z^\dagger$  得  $z^\dagger H z = \lambda z^\dagger z$ , 由  $z^\dagger H z, z^\dagger z$  均是实数知,  $\lambda$  也是实数. □

### 定理 9.2.3: Hermite 矩阵的特征向量

Hermite 矩阵  $H$  不同特征值对应的特征向量正交.

证明.  $H z_1 = \lambda_1 z_1, H z_2 = \lambda_2 z_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\lambda_1 z_2^\dagger z_1 = z_2^\dagger H z_1 = (z_2^\dagger H z_2)^\dagger = (\lambda_2 z_1^\dagger z_2)^\dagger = \lambda_2 z_2^\dagger z_1.$$

故  $z_2^\dagger z_1 = 0$ . □

### 定理 9.2.4: 谱定理

Hermite 矩阵的特征向量构成  $\mathbb{C}^n$  中的一组么正基.

$$H = Q \Lambda Q^\dagger.$$

证明. 略. □

## 9.3 幺正矩阵

### 定义 9.3.1: 幺正矩阵

矩阵  $U$  是幺正的 (unitary) 若  $U^\dagger U = I$ .

幺正矩阵是正交矩阵 (见定义 4.4.2) 在复空间的推广.

### 定理 9.3.1: 幺正变换

幺正变换保持复向量的模不变.

证明.

$$\|Uz\|^2 = z^\dagger U^\dagger U z = z^\dagger z = \|z\|^2. \quad \square$$

### 定理 9.3.2: 幺正矩阵的行列式

$|\det(U)| = 1$ .

证明.

$$1 = \det(U^\dagger U) = \det(U^\dagger) \det(U) = \overline{\det(U)} \det(U) = |\det(U)|^2. \quad \square$$

# 第十章 群、环、域

## 10.1 二元运算

### 定义 10.1.1: 二元运算

集合  $S$  上的一个二元运算 (binary operation) 形如映射  $\circ: S \times S \rightarrow S$ .  
其中  $S \times S \equiv S^2$  是笛卡尔积 (Cartesian product),

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

二元运算在  $S$  上是封闭的 (property of closure).

### 定义 10.1.2: 恒等元

$e \in S$  是恒等元 (identity element), 若  $\forall a \in S, e \circ a = a \circ e = a$ .

### 定义 10.1.3: 可逆

$a \in S$  是可逆的 (invertible), 若  $\exists a^{-1} \in S, a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ .

特别地, 简记

$$a^m \equiv a \circ \cdots \circ a, \quad a^{-m} \equiv a^{-1} \circ \cdots \circ a^{-1}.$$

## 10.2 群与子群

### 定义 10.2.1: 群

群 (group) 是有二元运算  $\circ: G \times G \rightarrow G$  和集合  $G$  并满足下列性质的组合  $(G, \circ)$ :

- 结合律:  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \equiv a \circ b \circ c$ ;
- 单位元:  $\exists e \in G$  使得  $e \circ a = a \circ e = a$ ;
- 逆:  $\forall a \in G, \exists a^{-1}$  使得  $a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ .

若还满足交换律, 则称为交换群或 Abel 群.

群的阶 (order)  $\text{ord}(G)$  表示其元素的个数. 群可分为有限群和无限群.

**定理 10.2.1: 单位元和逆元的唯一性**

在群中只能有一个单位元，而群中的每个元素都正好有一个逆元素。

证明. 若一个群存在两个单位元  $e, e'$ ，则

$$e = e \circ e' = e';$$

若一个元素  $a$  存在两个逆  $b, c$ ，则

$$b = b \circ e = b \circ (a \circ c) = (b \circ a) \circ c = e \circ c = c.$$

□

**例 10.2.1: 群的例子**

- 整数加群  $(\mathbb{Z}, +)$ : 单位元 0;
- 非零实数乘法群  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ : 单位元 1;
- 一般线性 (general linear) 群  $GL(n)$ : 所有  $n$  阶可逆矩阵集合，单位元  $I_n$ .

**定理 10.2.2: 消去律**

$\forall a, b, c \in G$ ，有

$$a \circ b = a \circ c \implies b = c; \quad (10.1a)$$

$$b \circ a = c \circ a \implies b = c; \quad (10.1b)$$

$$b \circ a = a \text{ 或 } a \circ b = a \implies b = e. \quad (10.1c)$$

证明. 左乘/右乘  $a^{-1}$ .

□

注. 逆  $a^{-1}$  的存在很关键，如果  $G$  上的运算只是结合的，则  $(G, \circ)$  是一个半群 (semigroup)，有单位元的半群又叫么半群 (monoid).

**定义 10.2.2: 置换群和对称群**

给定有限集合  $T$ ，所有可逆映射  $f: T \rightarrow T$  构成一个群  $\text{sym}(T)$ ，运算是映射的复合，称做置换群 (permutation group)

当  $T = \{1, 2, \dots, n\}$  时，对应的置换群称为对称群 (symmetric group)  $S_n$ .

**例 10.2.2:  $S_2$** 

$S_2 = \{1, p\}$ ，其中

$$1 = \text{id}: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\},$$

$$p: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}, \quad p(1) = 2, \quad p(2) = 1.$$

$S_2$  是交换群. 可列出 Cayley 表

	1	$p$
1	1	$p$
$p$	$p$	1

### 例 10.2.3: $S_3$

$S_3$ : 定义生成元  $x, y$  满足:

$$x(1) = 2, \quad x(2) = 3, \quad x(3) = 1;$$

$$y(1) = 2, \quad y(2) = 1, \quad y(3) = 3.$$

可以证明生成元之间的关系:  $x^3 = 1, y^2 = 1, x^2y = yx$ , 故  $S_3$  中所有元素都能写成生成元的积:

$$S_3 = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y\},$$

易知  $S_3$  不交换. 根据生成元,  $S_3$  还可写为  $S_3 = \{x, y \mid x^3 = 1, y^2 = 1, x^2y = yx\}$ . 生成元及其关系称作一个群的表现 (presentation), 一个群的表现不唯一.

### 定义 10.2.3: 子群

$H \subset G$  是  $G$  的子群 (subgroup), 若  $H$  满足

- 封闭性:  $\forall a, b \in H, a \circ b \in H$ ;
- 单位元:  $e \in H$ ;
- 逆元:  $\forall a \in H, \exists a^{-1} \in H$ .

$\{e\}$  和  $G$  都是平凡子群, 其他子群称为真子群 (proper subgroup).

### 例 10.2.4: 子群的例子

- 圆群:  $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \times) \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ ;
- 特殊线性群  $SL(n) \subset GL(n)$ : 所有行列式为 1 的  $n$  阶方阵;

### 定义 10.2.4: 循环群

循环群 (cyclic group) 是

$$Z_n \equiv \{1, x, \dots, x^{n-1} \mid x^n = 1\}, \quad (10.2)$$

其生成元为  $x$ .

## 例 10.2.5

$S_3$  有两个子群是循环群:  $\{x^k \mid x^3 = 1\} = Z_3$  和  $\{y^k \mid y^2 = 1\} = Z_2$ .

## 10.3 群同态

## 定义 10.3.1: 群同态

$(G, \circ), (G', \circ')$  是群, 映射  $\phi: G \rightarrow G'$  是群同态 (group homomorphism) 若  $\forall a, b \in G$

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \circ' \phi(b). \quad (10.3)$$

也称映射  $\phi$  和群上的乘法相容 (compatible).

## 定理 10.3.1: 群同态下的单位元和逆元

若  $\phi: G \rightarrow G'$  是群同态,  $G, G'$  的单位元分别为  $1, 1'$ ,  $a \in G$ , 则

$$\phi(1) = 1', \quad \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}. \quad (10.4)$$

证明. (1) 由  $\phi(1) = \phi(1 \circ 1) = \phi(1) \circ' \phi(1)$ , 再运用消去律可得  $1' = \phi(1)$ ;

(2) 由  $\phi(a^{-1}) \circ' \phi(a) = \phi(a^{-1} \circ a) = \phi(1) = 1'$  可得  $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$ .  $\square$

## 例 10.3.1: 线

空间和  $+$  构成一个群, 线性映射都是群同态.

## 定义 10.3.2: 群同态的像

群同态  $\phi: G \rightarrow G'$  的像 (image)  $\text{im } \phi$  定义为

$$\text{im } \phi \equiv \{x \in G' \mid \exists a \in G, \phi(a) = x\}. \quad (10.5)$$

## 定义 10.3.3: 群同态的核

群同态  $\phi: G \rightarrow G'$  的核 (kernel)  $\ker \phi$  定义为

$$\ker \phi \equiv \{a \in G \mid \phi(a) = 1'\}. \quad (10.6)$$

## 定理 10.3.2

若  $\phi: G \rightarrow G'$  是群同态, 则  $\text{im } \phi$  是  $G'$  的子群,  $\ker \phi$  是  $G$  的子群.

证明. 考虑线性空间在  $+$  下构成的群, 此时线性映射作为群同态的像与核同之前线性映射的像与核相同.  $\square$



## 定义 10.3.4: 左陪集

$H$  是  $G$  的子群,  $a \in G$ , 则

$$a \circ H \equiv \{a \circ h \mid h \in H\} \quad (10.7)$$

是  $H$  在  $G$  下的一个左陪集 (left coset). 同理可定义右陪集.

## 定理 10.3.3

群同态  $\phi: G \rightarrow G'$ ,  $a, b \in G$ , 则以下命题等价:

1.  $\phi(a) = \phi(b)$ ;
2.  $a^{-1} \circ b \in \ker \phi$ ;
3.  $b \in a \circ \ker \phi$ ;
4.  $b \circ \ker \phi = a \circ \ker \phi$ .

证明. (1)  $\Rightarrow$  (2):

$$\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow 1' = \phi(a)^{-1} \circ' \phi(b) = \phi(a^{-1} \circ b) \Rightarrow a^{-1} \circ b \in \ker \phi;$$

(2)  $\Rightarrow$  (3):

$$a^{-1} \circ b = h \in \ker \phi \Rightarrow b = a \circ h \in a \circ \ker \phi.$$

(3)  $\Rightarrow$  (4): 由  $b \in a \circ \ker \phi$ ,  $\exists h \in \ker \phi$  使得  $b = a \circ h$ ;  $\forall b' \in b \circ \ker \phi$ ,  $\exists h' \in \ker \phi$  使得  $b' = b \circ h' = (a \circ h) \circ h' = a \circ (h \circ h') \in a \circ \ker \phi$ , 故  $b \circ \ker \phi \subset a \circ \ker \phi$ ; 同理由  $a = b \circ h^{-1}$  可以证明  $a \circ \ker \phi \subset b \circ \ker \phi$ , 故  $a \circ \ker \phi = b \circ \ker \phi$ .

(4)  $\Rightarrow$  (1):  $\forall h \in \ker \phi$ ,  $\exists h' \in \ker \phi$  使得  $a \circ h = b \circ h'$

$$\Rightarrow \phi(a \circ h) = \phi(b \circ h') \Rightarrow \phi(a) \circ' \phi(h) = \phi(b) \circ' \phi(h')$$

$$\Rightarrow \phi(a) \circ' 1' = \phi(b) \circ' 1' \Rightarrow \phi(a) = \phi(b).$$

故以上 4 个命题等价. □

注.

- 群同态的核不仅告诉我们  $G$  中的哪些元素映射到 1, 也告诉我们哪些元素的像相同;
- 上面的命题在线性方程组中的应用就是  $Ax = b$  的通解 = 特解 +  $\{Ax = 0\}$  的通解.

推论. 群同态  $\phi: G \rightarrow G'$  是单射  $\iff \ker \phi = \{1\}$ .

## 定义 10.3.5: 正规子群

$N \subset G$  是  $G$  的正规子群 (normal subgroup) 若  $\forall a \in N, \forall g \in G$ , 共轭  $g \circ a \circ g^{-1} \in N$ .

## 定理 10.3.4

$\phi: G \rightarrow G'$  是群同态,  $\ker \phi$  是  $G$  的正规子群.

## 定义 10.3.6: 中心

群  $G$  的中心 (center) 是

$$Z_G \equiv \{z \in G \mid z \circ x = x \circ z, \forall x \in G\}, \quad (10.8)$$

中心  $Z_G$  总是  $G$  的正规子群.

## 例 10.3.2

- 行列式是  $GL$  的群同态:

$$\det : GL(n) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$$

核  $\ker \det = SL(n)$  是  $GL(n)$  的正规子群.

- $Z_{SL(2)} = \{I, -I\}$ ;
- $Z_{S_n} = \{1\}, n \geq 3$ .

## 10.4 群同构

## 定义 10.4.1: 群同构

若群同态  $\phi : G \rightarrow G'$  是双射, 则称  $\phi$  为群同构 (isomorphism), 称  $G, G'$  是同构的 (isomorphic), 记作  $G \simeq G'$ .

群到自己的同构  $\phi : G \rightarrow G$  也叫自同构. (automorphism)

恒等映射  $\text{id} : G \rightarrow G$  是自同构.

## 例 10.4.1: 群同构的例子

- 指数函数

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_{>0}, \times), x \mapsto e^x.$$

- $P$  是投影矩阵:  $P^2 = P$

$$S_2 \rightarrow \{I, I - 2P\}.$$

## 10.5 等价关系

## 定义 10.5.1: 等价关系

集合  $S$  上的等价关系  $\sim$  是  $S$  中两个元素  $a, b$  之间的关系, 记作  $a \sim b$ , 满足:

- 传递性:  $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$ ;
- 对称性:  $a \sim b \implies b \sim a$ ;
- 自反性:  $\forall a, a \sim a$ .

注.

- 等价关系可以看成  $=$  的抽象;
- 等价关系可以理解为映射  $f: S \times S \rightarrow \{0, 1\}$  满足

$$a \sim b \iff f(a, b) = 1.$$

- 未竟