

数学物理方法

Methods of Mathematics and Physics

Dait

目 录

第一章	偏微分方程的定解问题	1
1.1	定解问题及适定性	2
1.2	一阶线性方程的通解法	2
1.3	波动方程的行波解和 d'Alembert 公式	3
1.4	二阶线性偏微分方程及标准型	7
1.5	叠加原理和齐次化原理	8
第二章	分离变量法	10
2.1	特征值和特征函数	11
2.2	Sturm-Liouville 定理	14
2.3	非其次方程	18
第三章	积分变换法	20
3.1	Fourier 变换	20
3.1.1	Fourier 正余弦变换	21
3.1.2	Fourier 变换与分离变量法	23
3.2	Laplace 变换	24
第四章	基本解方法	27
4.1	广义函数	27
4.2	$Pu = 0$ 型方程的基本解	30
4.3	Poisson 方程 Green 函数法	32
4.4	初值问题的基本解方法	36
附录 A	附录	38
A.1	特征值问题	38
A.2	Fourier 和 Laplace	39
A.2.1	Fourier 系数	40
A.2.2	Fourier 变换	41
A.2.3	Laplace 变换	44

第一章 偏微分方程的定解问题

例 1.0.1: 弦振动

线密度为 ρ 的弦在自身张力 T 的作用下平衡位置在 x 轴, 横向位移 $u = u(x, t)$, 取 (x_1, x_2) 段进行受力分析

$$\begin{aligned}T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 &= 0, \\T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1 &= \rho \delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

限定 $\theta \ll 1$, 有 $\cos \theta \doteq 1$, $\sin \theta \doteq \theta$,

$$\begin{aligned}T_1 &= T_2 =: T, \\T \delta \theta &= \rho \delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

又 $\theta = \partial u / \partial x$, 得到波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 := \frac{T}{\rho}. \quad (1.1)$$

例 1.0.2: 热传导

由 Fourier 热传导定律, 一段时间内流入物体 Ω 的热量为

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial \Omega} k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} k \Delta u dV dt,$$

其中 k 为介质的热传导系数, $u = u(x, y, z, t)$ 为各点温度.

另一方面, 从比热容 c 的角度看,

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt.$$

其中 ρ 为物体的体密度.

因为上式对任意 $\Omega \times (t_1, t_2)$ 均成立, 得到热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad a^2 := \frac{k}{c \rho}. \quad (1.2)$$

1.1 定解问题及适定性

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ 内 m 阶 PDE 形如

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0,$$

其中 $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

定义 1.1.1: 定解条件

确定解中函数的条件称为定解条件, 包括初始条件和边界条件

- I. (Dirichlet) $u|_{x=0} = f, \quad u|_{\partial V} = f;$
- II. (Neumann) $u_t|_{x=0} = f, \quad u_t|_{\partial V} = f;$
- III. (Robin) $(u_t + \sigma u)_{x=0} = f, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)_{\partial V} = f.$

定义 1.1.2: 解

古典解: 符合方程且各阶偏导数连续;

通解: m 阶 PDE 有 m 个任意函数的解;

特解: 不包含任何任意函数或任意常数的解;

适定解: 存在、唯一且稳定.

1.2 一阶线性方程的通解法

方法 1.2.1: 常数变易法

对于 $u(x, y)$ 的方程

$$u_x + Ax = B.$$

有解

$$\begin{cases} \varphi = \exp\left(-\int A dx\right), \\ \psi = \int B\varphi^{-1} dx \end{cases} \implies u = \varphi(\psi + g(y)).$$

其中 $g \in \mathcal{C}$.

方法 1.2.2: 变量代换

$u = u(x, y)$ 的方程

$$au_x + bu_y + cu = f,$$

作变量代换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \implies \begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{cases}$$

变成 $u = u(\xi, \eta)$ 的方程

$$(a\xi_x + b\xi_y)u_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)u_\eta + cu = f.$$

使 $a\xi_x + b\xi_y = 0$, 得到特征方程和特征曲线

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}, \implies \xi(x, y) = \text{const.} \quad (1.3)$$

剩下

$$(a\eta_x + b\eta_y)u_\eta + cu = f.$$

对 η 积分便可求出通解. 注意: 要 $a\eta_x + b\eta_y \neq 0$, 应有 Jacobi 行列式不为 0

$$\det J(\xi, \eta) = \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

1.3 波动方程的行波解和 d'Alembert 公式

一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0.$$

可分解为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

等价于

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = v. \end{cases} \implies \begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at. \end{cases}$$

方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0, \implies u = f(\xi) + g(\eta).$$

即行波解

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad f, g \in \mathcal{C}^2. \quad (1.4)$$

定理 1.3.1: d'Alembert 公式

无限长弦自由振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0, x \in \mathbb{R}. \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

将初值问题带入通解

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} &= -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

因此

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (1.5)$$

对于 $\varphi \in \mathcal{C}^2, \psi \in \mathcal{C}$, 解是适定的.

非无限情况, 可以延拓至无限.

例 1.3.1: 延拓

端点固定的半无限边界条件:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

进行奇延拓

$$\varphi_o(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases} \quad \psi_o(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

问题便适用 d'Alembert 公式, 解

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi_o(x - at) + \varphi_o(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_o(\xi) d\xi \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & x \geq at, \\ \frac{1}{2} [\varphi(x + at) - \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & x < at. \end{cases} \end{aligned}$$

端点自由半无限弦 ($u_t(0, t) = 0$) 采用偶延拓; 有界弦: 两端均延拓.

例 1.3.2: 中心对称球面波

中心对称的球面波 $u = u(r)$, 采用球坐标

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

波动方程变为

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right) = \frac{a^2}{r} (ru)_{rr}.$$

设 $v = ru$, 则可解得

$$u(r) = \frac{1}{r} [f(r - at) + g(r + at)].$$

掺入边界条件 $\varphi(r), \psi(r)$ 后, 作奇延拓即可.

例 1.3.3: 三维波动方程与球面平均法

一般的三维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z). \end{cases}$$

采用球面平均法, 定义 u 在以 M 为球心、 r 为半径的球面 $S_r(M)$ 上的平均

$$\bar{u}(r, t; M) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{S_r(M)} u(x, y, z, t) dS,$$

略去证明过程, 问题转化为中心对称球面波问题

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} = \frac{1}{r} (r\bar{u})_{rr}, \\ (r\bar{u})_{r=0} = 0, \\ \bar{u}(r, 0) = \bar{\varphi}(r), \quad \bar{u}_t(r, 0) = \bar{\psi}(r). \end{cases}$$

奇延拓解, 注意: $(r\varphi)_o = r\varphi_e$,

$$r\bar{u}(r, t) = \frac{1}{2} [(r - at)\bar{\varphi}_e(r - at) + (r + at)\bar{\varphi}_e(r + at)] + \frac{1}{2a} \int_{r-at}^{r+at} \rho \bar{\psi}_e(\rho) d\rho.$$

为得到 $u(x, y, z, t)$, 取极限

$$u(M, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \bar{u}(r, t) = \frac{d}{dt} (t\bar{\varphi}(at)) + t\bar{\psi}(at),$$

上式称为 Poisson 公式.

求解三维波动方程的关键在于计算球面平均

$$\begin{aligned} u(M, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \varphi \, dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \psi \, dS \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t \varphi \sin \theta \, d\theta d\phi \right) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t \psi \sin \theta \, d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (1.6)$$

例 1.3.4: 二维波动方程与升维法

二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y). \end{cases}$$

采用升维法

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(x, y, t), \quad \Phi(x, y, z) = \varphi(x, y), \\ U(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \Phi \, dS \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \oint_{S_{at}} \Psi \, dS \end{aligned}$$

由于 U, Φ, Ψ 取值与 z 无关, 故积分区域可投影到 xy 平面上. 记 D_r 是以 (x, y) 为圆心, r 为半径的圆内区域, 在 D_r 上

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)^2} dA = \frac{r \, dA}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

故

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta) \, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a} \int_{D_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta) \, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

注. (1.6) 是在球面上积分, 而 (1.7) 是在圆域上积分. 这个差别在物理上产生了截然不同的效果: 对三维情况, 波的传播既有清晰的前阵面, 也有清晰的后阵面, 可用于传播信号, 这称为 Huygens 原理; 对二维情况, 波的传播有清晰的前阵面, 但没有后阵面, 这称为波的弥漫, 或者说这种波具有后效现象, 不适合于传播信号.

例 1.3.5: 一维波动方程

对一维弦振动方程, 也可升二维, 再将积分投影到 $[x - at, x + at]$ 上. 记 C_r 是以 (x, y) 为圆心, r 为半径的圆, 在 C_r 上

$$d\ell = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2} d\xi = \frac{r \, d\xi}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}}.$$

故

$$\begin{aligned}
 & \int_{D_{at}} \frac{\Phi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} = \int_0^{at} \oint_{C_r} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} d\ell dr \\
 &= 2 \int_0^{at} \int_{x-r}^{x+r} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} \frac{r d\xi}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}} dr \quad (\text{交换次序}) \\
 &= \left(\int_x^{x+at} \int_{\xi-x}^{at} + \int_{x-at}^x \int_{x-\xi}^{at} \right) \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} \frac{2r dr}{\sqrt{r^2 - (\xi - x)^2}} d\xi
 \end{aligned}$$

推出 d'Alembert 公式:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi \right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

1.4 二阶线性偏微分方程及标准型

两个自变量的二阶其次线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = 0.$$

进行变量代换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad \text{其中 } \det J(\xi, \eta) \neq 0.$$

变成

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta + cu = 0.$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\
 A_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\
 A_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2; \\
 B_1 &= a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y, \\
 B_2 &= a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y,
 \end{aligned}$$

用矩阵表达即

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}^\top.$$

考虑使 $A_{11} = 0$ 或 $A_{22} = 0$ 则有

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

其判别式

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}.$$

$\Delta > 0$, 双曲型 不妨设 $a_{11} \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}} \implies \begin{cases} \xi(x, y) = \text{const} \\ \eta(x, y) = \text{const}' \end{cases} \quad (1.8)$$

继而 $A_{11} = A_{22} = 0$,

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\frac{2\Delta}{a_{11}} \xi_y \eta_y \neq 0, \\ u_{\xi\eta} + \frac{1}{2A_{12}} (B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + cu) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

上式就是双曲型方程的标准型.

若再作变量替换 $p = (\xi + \eta)/2$, $q = (\xi - \eta)/2$, 方程可化为

$$u_{pp} - u_{qq} + \frac{1}{A_{12}} [(B_1 + B_2) u_q + (B_1 - B_2) u_p + cu] = 0. \quad (1.10)$$

$\Delta = 0$, 抛物型 只有一个线性 ODE, 不妨设 $a_{11} \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \implies \xi(x, y) = \text{const}. \quad (1.11)$$

任取 $\eta(x, y)$, 可得 $A_{11} = A_{12} = 0$

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{22}} (B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + cu) = 0. \quad (1.12)$$

$\Delta < 0$, 椭圆型 ODE 解为复函数, 不妨设 $a_{11} \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm i\sqrt{-\Delta}}{a_{11}} \implies \xi(x, y) \pm i\eta(x, y) = \text{const}. \quad (1.13)$$

其中 ξ, η 为实函数, $A_{12} = 0, A_{11} = A_{22} \neq 0$,

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{A_{11}} (B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + cu) = 0. \quad (1.14)$$

1.5 叠加原理和齐次化原理

定义算子为从函数类到函数类的映射 \mathcal{T} .

定理 1.5.1: 叠加原理

线性算子 \mathcal{L} 可与 \lim, \sum, \int 等运算符交换.

齐次化原理也称冲量原理, 源于求解有外力的弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

利用叠加原理, 解 $u = u_0 + w$; 其中 u_0 表示 $f \equiv 0$ 的齐次化解; w 表示 $\varphi, \psi \equiv 0$ 的解, 即纯受迫振动.

考虑时间段 $(\tau, \tau + \delta\tau)$ 内, 位移分布 $w(x, t) =: v(x, t; \tau) \delta\tau$, 外力冲量 $f(x, \tau) \delta\tau$, 有

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ v|_{t=\tau} = 0 \quad v_t|_{t=\tau} = f(x, \tau). \end{cases} \implies v(x, t; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi.$$

叠加得

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.15)$$

定理 1.5.2: 齐次化原理

定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \mathcal{P}u + f(\mathbf{x}, t), \\ u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

其中 \mathcal{P} 为常系数线性偏微分算子, 有解

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t v(\mathbf{x}, t; \tau) d\tau,$$

v 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^m v}{\partial t^m} = \mathcal{P}v, \\ v|_{t=\tau} = \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=\tau} = \cdots = \frac{\partial^{m-2} v}{\partial t^{m-2}}\bigg|_{t=\tau} = 0, \\ \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}\bigg|_{t=\tau} = f(\mathbf{x}, \tau). \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

当 $\mathbf{x} \in V \subsetneq \mathbb{R}^n$ 时, 还应加上其次边界条件

$$\mathcal{P}u|_{\partial V} = 0, \quad \mathcal{P}v|_{\partial V} = 0.$$

第二章 分离变量法

回忆一些典型 ODE 方程的基本解法

方法 2.0.1: 二阶常系数其次方程

形如

$$y'' + ay' + by = 0. \quad (2.1)$$

其特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的解 $\lambda_{1,2}$

I. $\Delta > 0$, $y = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x}$;

II. $\Delta = 0$, $\lambda_{1,2} = \lambda$, $y = (A + Bx) e^{\lambda x}$;

III. $\Delta < 0$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $y = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x}$.

方法 2.0.2: 二阶非其次方程

形如

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \quad (2.2)$$

二阶非其次方程根据叠加定理, 其解 $y = y_0 + y_s$; 其中 y_0 为 $f(x) \equiv 0$ 时的其次通解, y_s 为特解.

若 y_1, y_2 为对应的其次方程线性无关解, 则可求出一特解

$$y_s(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)}{y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_1'(\xi)y_2(\xi)} f(\xi) d\xi, \quad \forall x_0. \quad (2.3)$$

特解满足其次边界条件

$$y_s(x_0) = 0, \quad y_s'(x_0) = 0.$$

方法 2.0.3: Euler 方程

形如

$$x^2 y'' + axy' + by = f(x). \quad (2.4)$$

令 $x = e^t$, $u(t) = y(e^t) = y(x)$ 方程变为

$$u'' + (a-1)u' + bu = f(e^t). \quad (2.5)$$

2.1 特征值和特征函数

在讨论分离变量前, 先引入 Fourier 级数的概念.

定义 2.1.1: Fourier 级数

$f(x)$ 周期为 2ℓ , 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\text{FS } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right). \quad (2.6)$$

其中 Fourier 系数

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx; \\ b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \end{aligned}$$

定理 2.1.1: Parseval 等式

若 $f \in \mathcal{L}^2[-\ell, \ell]$ 即平方可积, 则

$$\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

定理 2.1.2: Dirichlet 收敛定理

若

1. f, f' 连续或分段连续, 至多有有限个第一类间断点;
2. f 至多有有限个极值点;

则

$$\text{FS } f(x) = \begin{cases} (f(x^+) + f(x^-)) / 2, & x \in (-\ell, \ell) \\ (f(-\ell^+) + f(\ell^-)) / 2, & x = \pm\ell \end{cases}$$

在 f 连续点处, $\text{FS } f = f$.

例 2.1.1: 有界弦问题

有界弦

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

假设变量是可以分离的, 即 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 则引入特征值 λ

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda.$$

要使 $X'' + \lambda X = 0$ 且 $X(0) = X(L) = 0$ 仅有

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

进而 $T'' + a^2 \lambda T = 0$

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{L}.$$

因此原方程应有形式解

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + D_n \sin \frac{n\pi a t}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.7)$$

C_n, D_n 由初始条件确定

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = \psi(x). \end{aligned}$$

恰好对应 Fourier 正弦系数 φ_n^s, ψ_n^s

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx =: \varphi_n^s, \\ D_n &= \frac{2}{n\pi a} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx =: \frac{L}{n\pi a} \psi_n^s. \end{aligned}$$

至于形式解是否符合条件, 不是考试涉及的范围.

例 2.1.2: 圆域 Laplace 方程

圆域上的 Laplace 方程, 采用极坐标

$$\begin{cases} \Delta_2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & r < r_0 \\ u(r_0, \theta) = \varphi(\theta) \end{cases}$$

还应包括自然条件, 即

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} |u(r, \theta)| < \infty.$$

和周期边界条件

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, 2\pi).$$

分离变量 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ \Theta'' + \lambda \Theta = 0. \end{cases}$$

由周期条件, 特征值 $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

再解 R 的 Euler 方程, 可得

$$R_n(r) = \begin{cases} c_0 + d_0 \ln r, & n = 0 \\ c_n r^n + d_n r^{-n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

再由自然条件 $|R(0)| < \infty$, 可知 $d_i \equiv 0$, 进而

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

结合边界条件 $u(r_0, \theta) = \varphi(\theta)$, 求得系数

$$a_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta, \quad b_n = \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \sin n\vartheta \, d\vartheta.$$

因此

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \, d\vartheta + \\ &\quad \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) (\cos n\vartheta \cos n\theta + \sin n\vartheta \sin n\theta) \, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\theta - \vartheta) \right] \, d\vartheta \end{aligned}$$

又由 Euler 公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} k^n e^{in\theta} = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - k e^{i\theta}} = \frac{1 - k \cos \theta}{1 + k^2 - 2k \cos \theta}.$$

故得到圆域内的 Poisson 公式

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) \varphi(\vartheta)}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \vartheta)} \, d\vartheta \quad (2.8)$$

积分内式子称为 Poisson 核.

例 2.1.3: 圆域 Neumann 问题

圆域上的 Neumann 问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & r < R \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=R} = \varphi(\theta) \end{cases}$$

由 Green 公式

$$\int_{D_R} \Delta u \, dx dy = \oint_{r=R} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\ell = R \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \, d\theta = 0.$$

剩下的证明留给读者

2.2 Sturm-Liouville 定理

例 2.2.1: 有限杆热传导

设杆温度 $u = u(x, t)$, 则定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u_t(L, t) + hu(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

其中热交换常数 $h > 0$.

分离常数 $u(x, t) = X(x)T(t)$,

$$\begin{cases} X'' + \beta^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(L) + hX(L) = 0. \end{cases} \implies \beta + h \tan \beta L = 0.$$

$$\implies X_n(x) = \sin \beta_n x, \quad T_n(t) = C_n e^{-\beta_n^2 a^2 t}.$$

可以验证 X_n 是正交的, 即

$$\langle X_m, X_n \rangle = \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

形式解

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\beta_n^2 a^2 t} \sin \beta_n x.$$

再根据初始条件

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \beta_n x = \varphi(x).$$

在后面可以看到, 这是广义 Fourier 级数, 其系数

$$C_n = \frac{\langle \varphi, \sin \beta_n x \rangle}{\langle \sin \beta_n x, \sin \beta_n x \rangle} = \frac{\int_0^L \varphi(x) \sin \beta_n x dx}{\int_0^L \sin^2 \beta_n x dx}.$$

定义 2.2.1: 加权内积

定义在 $[a, b]$ 上的实函数 f, g 的 ρ -加权内积

$$\langle f, g \rangle_{\rho} := \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx.$$

其中权函数 $\rho \geq 0$ 分段连续且零点孤立.

加权平方可积函数空间

$$\mathcal{L}_{\rho}^2[a, b] := \left\{ f \mid \|f\|_{\rho} < \infty \right\}.$$

定理 2.2.1: 广义 Fourier 级数

若 f_1, f_2, \dots 在 \mathcal{L}_ρ^2 中完备且加权正交, 则 $\forall f \in \mathcal{L}_\rho^2$ 有广义 Fourier 级数展开

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x), \quad a_i = \frac{\langle f, f_i \rangle_\rho}{\|f_i\|_\rho^2}.$$

且有 Parserval 等式

$$\|f\|_\rho^2 = \sum_{i=1}^n \left\langle f, \frac{f_i}{\|f_i\|_\rho} \right\rangle_\rho^2.$$

定义 2.2.2: Sturm-Liouville 方程

定义域 $[a, b]$, 常见一维特征值问题都可以化为

$$(k(x)f'(x))' - q(x)f(x) + \lambda\rho(x)f(x) = 0.$$

其中 λ 为参数, k, q, ρ 为实函数. 记

$$\mathcal{L}[f] := -\frac{(kf')' - qf}{\rho}.$$

则

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho - \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho = [k(fg' - f'g)]_a^b.$$

好的边界条件可以使上式等于 0.

定义 2.2.3: 正则 Sturm-Liouville 问题

正则 Sturm-Liouville 问题

$$\mathcal{L}[f](x) = \lambda f(x).$$

正则条件: 保证 Sturm-Liouville 方程在 $[a, b]$ 上没有奇点.

$$k \in \mathcal{C}^2[a, b], \quad q, \rho \in \mathcal{C}[a, b]; \quad k, \rho > 0.$$

好的边界条件:

$$\text{可分: } \begin{cases} c_1 f(a) + c_2 f'(a) = 0, \\ d_1 f(b) + d_2 f'(b) = 0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{周期: } \begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases}$$

可使 \mathcal{L} 是对称算子, 即

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho = \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho.$$

定理 2.2.2: Sturm-Liouville 定理 1

正则 Sturm-Liouville 问题

1. 有可数多个实特征值

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

2. 特征函数加权 ρ -正交;
3. 特征值的特征子空间至多 2 维,
可分边界条件下, 特征子空间为 1 维;
4. 特征函数构成 \mathcal{L}_ρ^2 上完备的正交基底.

奇异 Sturm-Liouville 问题: 不满足正则条件或区间无界; 但若

a (或 b) 是 $k(x)$ 的一级零点, 是 $q(x)$ 的至多一级极点

时, 称 a (或 b) 是方程的正则奇点. 定理结论依旧成立!

定理 2.2.3: Sturm-Liouville 定理 2

若正则 Sturm-Liouville 问题还满足 $q \geq 0$; 可分边界条件下还需满足 $c_1 c_2 \leq 0, d_1 d_2 \geq 0$.

1. 所有特征值非负;
特别的, 存在 0 特征值 (对应特征函数 1) 的充要条件是 $q \equiv 0$ 且两端为第二类边界条件;
2. 若正则条件为周期条件, 那么其对应于每一个非最小特征值 λ_0 的特征值有两个相互正交的特征函数.

例 2.2.2: 扇形域 Dirichlet 问题

扇形域上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & r \in (1, e), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \\ u(1, \theta) = u(e, \theta) = 0, \\ u(r, 0) = 0, & u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = g(r). \end{cases}$$

化为 Sturm-Liouville 型

$$(rR')' + \frac{\lambda}{r}R = 0,$$

对应 $k = r, q = 0, \rho = \frac{1}{r}$, 因此 $\lambda > 0$, 进而

$$\begin{aligned} \lambda_n &= (n\pi)^2, \quad R_n(r) = \sin(n\pi \ln r), \quad n = 1, 2, \dots \\ \Theta_n(\theta) &= A_n e^{n\pi\theta} + B_n e^{-n\pi\theta}. \end{aligned}$$

再结合 u 的边界条件即可解出.

2.3 非其次方程

对非齐次方程, 有时可靠直觉找出特解 v , 但对一般的非齐次方程, 需要借助齐次化原理转化为其次方程:

方法 2.3.1: 齐次化原理法

设 \mathcal{D}_t 中关于 2 阶导数的系数为 1

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x, t), & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

由 9 页的定理 1.5.2 知, 有解

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t - \tau; \tau) d\tau$$

v 满足

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x v + \mathcal{D}_t v = 0, & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, & v_t|_{t=0} = f(x, \tau). \end{cases}$$

方法 2.3.2: 广义 Fourier 展开法

对于

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x, t), & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

1. 首先分离变量, 求出 $f \equiv 0$ 对应的特征值问题

$$\mathcal{D}_x X = -\lambda X.$$

解出特征值 $\{\lambda_n\}$ 和本征函数 $\{X_n(x)\}$, 注意 n 的取值是否含 0.

2. 根据 Sturm-Liouville 定理判断 $\{X_n\}$ 的完备性, 展开

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum T_n(t) X_n(x), & f(x) &= \sum f_n(t) X_n(x), \\ \varphi(x) &= \sum \varphi_n X_n(x), & \psi(x) &= \sum \psi_n X_n(x). \end{aligned}$$

求解

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t T_n(t) - \lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(t) = \varphi_n, & T'_n(t) = \psi_n. \end{cases}$$

3. 解出 $T_n(t)$, 得 $u(x, t)$

方法 2.3.3: 一般的非齐次问题

对于一般的非齐次问题

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x, t), & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = g_1(t), & (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = g_2(t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

首先将非齐次边界条件齐次化, 寻找 $v(x, t)$ 满足

$$(\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = g_1(t), \quad (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = g_2(t).$$

显然 v 不唯一, 若无法直觉看出, 可设为 x 的线性函数

$$v(x, t) = A(t)x + B(t),$$

整理得

$$\begin{cases} (\alpha_1 a - \beta_1)A(t) + \alpha_1 B(t) = g_1(t), \\ (\alpha_2 b + \beta_2)A(t) + \alpha_2 B(t) = g_2(t). \end{cases}$$

便可解出 A, B 若无解还可设为 x 的二次函数.

这样便可将 u 分解为 $u = v + w$, 而 w 的边界条件是齐次化的:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x w + \mathcal{D}_t w = f(x, t) - \mathcal{D}_x v - \mathcal{D}_t v, & x \in (a, b), t > 0 \\ (\alpha_1 w - \beta_1 w_x)_{x=a} = 0, & (\alpha_2 w + \beta_2 w_x)_{x=b} = 0, \\ w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0}, & w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0}. \end{cases}$$

这在前面已解决.

第三章 积分变换法

定义 3.0.1: 积分变换

积分变换

$$\mathcal{T}[f](\xi) = \int_a^b f(x)K(x, \xi) dx.$$

其中 K 是核函数 (kernel).

3.1 Fourier 变换

定义 3.1.1: Fourier 变换

定义 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) \equiv \mathcal{F}[f](\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

及其逆变换

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Fourier 变换的相关性质见第 41 页的附录内容.

例 3.1.1: 无限长杆热传导

无限长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \hat{u}_t = -a^2 \xi^2 \hat{u} + \hat{f}, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\varphi). \end{cases}$$

因此

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-a^2 \xi^2 t} \left[\int_0^t \hat{f}(\xi, \tau) e^{a^2 \xi^2 \tau} d\tau + \hat{\varphi}(\xi) \right].$$

再用 Fourier 逆变换

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[\int_0^t \hat{f}(\xi, \tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau \right] + \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{\varphi}(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t} \right] \\
 &= \int_0^t \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{f}(\xi, \tau) \right] * \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} \right] d\tau + \\
 &\quad \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{\varphi}(\xi) \right] * \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-a^2 \xi^2 t} \right] \\
 &= \int_0^t f(x, \tau) * \frac{e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau + \\
 &\quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) e^{-(x-\eta)^2/4a^2 t} d\eta \\
 &= \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta, \tau) e^{-(x-\eta)^2/4a^2(t-\tau)} d\eta d\tau + \\
 &\quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) e^{-(x-\eta)^2/4a^2 t} d\eta.
 \end{aligned}$$

以上只是形式解.

3.1.1 Fourier 正余弦变换

对于定义在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上的函数, 可将其奇偶延拓至 \mathbb{R} 后再作 Fourier 变换

定义 3.1.2: Fourier 正余弦变换

正余弦变换分别为

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_s(\xi) &\equiv \mathcal{F}_s[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x) \sin \xi x dx; \\
 \hat{f}_c(\xi) &\equiv \mathcal{F}_c[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x) \cos \xi x dx.
 \end{aligned}$$

其反变换

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\xi) \sin \xi x d\xi =: \mathcal{F}_s^{-1}[\hat{f}_s(\xi)] \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\xi) \cos \xi x d\xi =: \mathcal{F}_c^{-1}[\hat{f}_c(\xi)]
 \end{aligned}$$

变换的性质见第 42 页的附录内容.

例 3.1.2: 半无限长杆热传导

半无限长杆热传导方程问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = \varphi(x) \end{cases}$$

自然边界条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_t(x, t) = 0$$

若用 Fourier 正弦变换, 则会出现 $u(0, t)$, 此边界条件没有给出, 因此只能用余弦变换, 记 $U(\xi, t) = \mathcal{F}_c[u(x, t)]$

$$\begin{aligned} U_t(\xi, t) &= a^2 [u_x(x, t) \cos \xi x - \xi u(x, t) \sin \xi x]_0^{+\infty} - a^2 \xi^2 U(\xi, t) \\ &= -a^2 \varphi(t) - a^2 \xi^2 U(\xi, t). \end{aligned}$$

故

$$U(\xi, t) = -a^2 \int_0^t \varphi(\tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{2a^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^t \varphi(\tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau \right] \cos \xi x d\xi \\ &= -\frac{2a^2}{\pi} \int_0^t \varphi(\tau) \left[\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} \cos \xi x d\xi \right] d\tau \\ &= -a \int_0^t \varphi(\tau) \frac{e^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau. \end{aligned}$$

例 3.1.3: 半无限长弦振动

半无限弦振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0 \\ u_x(0, t) = f(t), \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

自然边界条件 $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} u_t(x, t) = 0$.

$$U_{tt}(\xi, t) = -a^2 f(t) - a^2 \xi^2 U(\xi, t).$$

其次方程通解 $\cos a\xi t, \sin a\xi t$, 运用 (2.3) 和边界条件 $U(\xi, 0) = U_t(\xi, 0) = 0$

$$\begin{aligned} U(\xi, t) &= \int_0^t -a^2 f(\tau) \frac{\cos a\xi \tau \sin a\xi t - \cos a\xi t \sin a\xi \tau}{\cos a\xi \tau (\sin a\xi \tau)' - (\cos a\xi \tau)' \sin a\xi \tau} d\tau \\ &= -\frac{a}{\xi} \int_0^t f(\tau) \sin a\xi(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{a}{\xi} \int_0^t f(\tau) \sin a\xi(t-\tau) d\tau \right] \cos \xi x d\xi \\ &= -2a \int_0^t f(\tau) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi} \sin a\xi(t-\tau) e^{i\xi x} d\xi d\tau \end{aligned}$$

由

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin a\xi}{\xi} \right] = \frac{H(x+a) - H(x-a)}{2}.$$

其中 $H(x)$ 为 Heaviside 跳跃函数, 故

$$u(x, t) = -a \int_0^{t-x/a} f(\tau) d\tau. \quad x < at$$

3.1.2 Fourier 变换与分离变量法

无界区域是否有相应的分离变量法?

例 3.1.4: 无界长杆热传导

无界长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

分离变量 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 特征值

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + \lambda a^2 T = 0$$

讨论知 $\lambda = \xi^2 \geq 0$

$$X = e^{i\xi x}, \quad T = e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

故

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) X(x, \xi) T(t, \xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{i\xi x} e^{-a^2 \xi^2 t} d\xi. \end{aligned}$$

边界条件

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) e^{i\xi x} d\xi \equiv \mathcal{F}^{-1}[A] = \varphi(x),$$

故 $\varphi(x)$ 是 $A(\xi)$ 的 Fourier 变换.

可见对无界区间上的问题, 分离变量法依然适用, 只是特征值是连续分布的.

3.2 Laplace 变换

定义 3.2.1: Laplace 变换

定义 Laplace 变换

$$\bar{f}(\xi) = \mathcal{L}[f](\xi) := \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\xi x} dx, \quad \operatorname{Re} \xi > \sigma_0.$$

其逆变换

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(\xi)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(\xi) e^{\xi x} d\xi, \quad x \geq 0.$$

注意 Laplace 变换存在条件需要 $\exists M, \sigma_0$ 使得

$$|f(x)| < M e^{\sigma_0 x}, \quad \forall x > 0.$$

其逆变换中 $\sigma > \sigma_0$; 注意, Laplace 变换的积分中本身不包含 $\mathbb{R}_{<0}$ 的部分, 一般认为 $f(<0) \equiv 0$.

定理 3.2.1: 第一展开定理

设 $F(\xi)$ 在 ∞ 邻域内有 Laurent 展开式

$$F(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\xi^n},$$

则

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} x^{n-1}, \quad x \geq 0$$

定理 3.2.2: 第二展开定理

设 $F(\xi) = A(\xi)/B(\xi)$ 是有理函数, $\deg A < \deg B$, $B(\xi)$ 只有单零点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 且是 $F(\xi)$ 的单极点, 则

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{k=1}^n \frac{A(\xi_k)}{B'(\xi_k)} e^{\xi_k x} = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(\xi) e^{\xi x}, \xi_k].$$

若 $F(\xi)$ 满足

1. 在 \mathbb{C} 上除了有限个奇点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 外解析;
2. 在半平面 $\operatorname{Re} \xi > \sigma_0$ 上解析;
3. $\exists M > 0, R > 0$ 使得当 $|\xi| > R$ 时

$$|F(\xi)| \leq \frac{M}{|\xi|},$$

则对于 $x \geq 0$ 有

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(\xi)] = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[F(\xi) e^{\xi x}, \xi_k].$$

例 3.2.1: 有限杆热传导

有限杆热传导

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & u(L, t) = A, \\ u(x, 0) = B. \end{cases}$$

关于 t 作 Laplace 变换, 记 $U(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)](s)$

$$sU(x, s) - u(x, 0) = U_{xx}(x, s),$$

由 $u(x, 0) = B$,

$$U(x, s) = c_1 \cosh \sqrt{s}x + c_2 \sinh \sqrt{s}x + \frac{B}{s}.$$

再由 $U_x(0, s) = 0$, $U(L, s) = A/s$

$$U(x, s) = \frac{(A - B) \cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} + \frac{B}{s}.$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(A - B) \cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} \right] (t) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B}{s} \right] (t) \\ &= (A - B) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} \right] (t) + B. \end{aligned}$$

括号内函数的孤立奇点¹应使得 $\cosh \sqrt{s}L = 0$

$$s_n = - \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} \right]^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

由

$$\begin{aligned} u(x, t) &= B + (A - B) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res} \left[\frac{\cosh \sqrt{s}x}{s \cosh \sqrt{s}L} e^{st}, s_n \right] \right\} \\ &= A + \frac{4(A - B)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right] \exp \left[-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2} t \right]. \end{aligned}$$

¹注意, 0 不是此函数的孤立奇点, 不能用留数算出. 逆变换结果中的 1 是围道积出来的. 详情可见附录

例 3.2.2: 有限长弦受迫振动

有限长弦受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = 0, & u_t(L, t) = A \sin \omega t \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

关于 t 作 Laplace 变换, 记 $U(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)](s)$

$$s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) = a^2 U_{xx}(x, s).$$

结合 $U_x(L, s) = A\omega/(s^2 + \omega^2)$

$$U(x, s) = \frac{Aa\omega}{s(s^2 + \omega^2)} \sinh \frac{xs}{a} \operatorname{sech} \frac{Ls}{a}.$$

其所有的孤立奇点: 可去奇点 0; 一级奇点 $\pm i\omega_k$,

$$\omega_k := \begin{cases} \omega, & k = 0 \\ \frac{2k-1}{2L}\pi a, & k \geq 1 \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}[U(x, s) e^{st}, i\omega_k] + \operatorname{Res}[U(x, s) e^{st}, -i\omega_k] \\ &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Res}[U(x, s) e^{st}, i\omega_k] \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{Aa\omega}{s(s + i\omega)} \sinh \frac{xs}{a} \operatorname{sech} \frac{Ls}{a} e^{st} \right]_{i\omega} + \\ &\quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{Aa\omega}{s(s^2 + \omega^2)} \sinh \frac{xs}{a} \cdot \frac{a}{L} \operatorname{csch} \frac{Ls}{a} e^{st} \right]_{i\omega_k} \\ &= \frac{Aa}{\omega} \sinh \frac{\omega x}{a} \sec \frac{\omega L}{a} \sin \omega t + \\ &\quad 16Aa\omega^2 L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)[4\omega^2 L^2 - (2k-1)^2 \pi^2 a^2]} \sin \frac{\omega_k x}{a} \sin \omega_k t. \end{aligned}$$

第四章 基本解方法

4.1 广义函数

定义 4.1.1: δ 函数

源于物理中对集中分布物理量的数学描述. 满足

$$\int_a^b f(x)\delta(x) dx = \begin{cases} f(x), & 0 \in (a, b) \\ 0, & 0 \notin (a, b) \end{cases}$$

因此 $f * \delta(\xi) = f(\xi)$.

定理 4.1.1: δ 复合函数

设 $u(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 且在实轴上只有单零点 x_1, x_2, \dots, x_n , 则

$$\delta(u(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(x - x_k)}{|u'(x_k)|}. \quad (4.1)$$

比如 $\delta(ax) = \delta(x)/a$.

广义函数

定义 4.1.2: 线性泛函

函数空间 \mathcal{V} 到数域 \mathbb{F} 的映射 \mathcal{T} , 若

$$\mathcal{T}(au + bv) = a\mathcal{T}u + b\mathcal{T}v$$

$\forall a, b \in \mathbb{F}, u, v \in \mathcal{V}$ 均成立, 则 \mathcal{T} 是 \mathcal{V} 上的线性泛函, 即广义函数. \mathcal{V} 上所有线性泛函构成一个线性空间, 称作 \mathcal{V} 的对偶空间 \mathcal{V}^* .

例 4.1.1: 支撑集

记实函数 f 的支撑集

$$\text{supp } f := \{x \mid f(x) \neq 0\}. \quad (4.2)$$

并记

$$\mathcal{L}_0(\mathbb{R}) := \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty, \text{supp } f \text{ 有界} \right\}$$

则 $\forall f \in \mathcal{L}_0(\mathbb{R})$, f 确定了 $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 上一个线性泛函:

$$\mathcal{T}_f[\varphi(x)] \equiv \langle f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

定理 4.1.2: 广义函数的导数

定义函数空间

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) := \{ f \mid f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } f \text{ 有界} \} \quad (4.4)$$

广义函数 $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$, 定义其 n 阶导数

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle := (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \quad (4.5)$$

特别的

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x) dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

泛函意义下, 任意一个广义函数都是无穷阶可导的.

定理 4.1.3: 广义函数的卷积

给定 $f, g \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ 的卷积 $f * g(x)$ 也是广义函数

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \left\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle. \quad (4.6)$$

一般的, 对常系数微分算子 \mathcal{D}

$$\mathcal{D}(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * \mathcal{D}g.$$

定理 4.1.4: 广义函数的 Fourier 变换

速降函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \mid \lim_{x \rightarrow \infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}. \quad (4.7)$$

比如 $\varphi(x) = p(x)e^{-ax^2}$, $p(x)$ 是多项式, $a > 0$, 则 $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

给定广义函数 $f \in \mathcal{S}^*$, f 的 Fourier 变换及其逆变换也是广义函数, 定义为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle &= \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ \langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \rangle &= \langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Fourier 变换作用转移到基本函数上, 它们保持着经典意义下的基本性质.

定理 4.1.5: 广义函数序列的收敛性

设广义函数列 $\{f_i\}$ 及广义函数 f , 若对基本函数空间的 φ 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

则称 f_n 弱收敛到 f , 本笔记记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \doteq f(x)$.

定理 4.1.6

若基本函数空间为 \mathcal{S} , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \doteq f(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \doteq f'(x).$$

定理 4.1.7: 高维广义函数

与一维类似, 函数空间

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) &\equiv \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f \mid f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \text{supp } f \text{ 有界}\}, \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &:= \left\{ \varphi \left| \lim_{|X| \rightarrow \infty} |X|^m \frac{\partial^k \varphi(X)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = 0, \quad \forall m, k \in \mathbb{Z}^+ \right. \right\} \end{aligned}$$

对函数空间 \mathcal{V} 上的线性泛函 f

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(X) \varphi(X) dX, \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}$$

构成 \mathcal{V}^* .

广义函数 $f \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ 的偏导数定义为

$$\left\langle \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \varphi \right\rangle := (-1)^k \left\langle f, \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\rangle$$

特别的, $f = \delta$ 时

$$\left\langle \frac{\partial^k \delta}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \frac{\partial^k \varphi(\mathbf{0})}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

例 4.1.2: δ 函数与 Laplace 算子

$$\delta(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \Delta_2 \ln r, & n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)S_n} \Delta_n \frac{1}{r^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases} \quad (4.9)$$

其中 $r = |\mathbf{x}|$, S_n 为 n 维单位球的表面积. 特别的, $S_3 = 4\pi$.

广义函数的卷积

$$\langle f * g, \varphi \rangle := \langle f(X), \langle g(Y), \varphi(X+Y) \rangle \rangle.$$

4.2 $\mathcal{P}u = 0$ 型方程的基本解

讨论用基本解方法求解方程

$$\mathcal{P}u(M) = f(M), \quad M \in \mathbb{R}^n,$$

其中, \mathcal{P} 是常系数线性偏微分算子.

视 f, u 为广义函数, 它们在广义函数空间里可以自由地进行各种运算和交换. 通过这种方式得到的解叫广义函数解, 简称作**广义解**. 如果解是一个正则广义函数, 甚至还有足够的光滑性, 那么这种解是经典解.

定义 4.2.1: $\mathcal{P}u = 0$ 型方程的基本解

方程

$$\mathcal{P}U(M) = \delta(M) \quad (4.10)$$

的解 $U(M)$ 称作 $\mathcal{P}u = 0$ 型方程的基本解.

对一般的函数 f , 其对应的解是一般的源所产生的物理场. 故基本解也叫点源函数.

若 $\mathcal{P}u = 0$ 型方程有基本解 $U(M)$, 令

$$u(M) := U * f(M) = \int U(M - N) f(N) dN. \quad (4.11)$$

由积分叠加原理

$$\mathcal{P}u(M) = \int \mathcal{P}U(M - N) f(N) dN = \int \delta(M - N) f(N) dN = f(M).$$

即 u 满足方程 $\mathcal{P}u = f$.

例 4.2.1

求下面方程的基本解:

$$y' + ay = f(x), \quad a > 0$$

基本解 U 满足

$$U' + aU = \delta(x),$$

即

$$\frac{d}{dx}(U e^{ax}) = \delta(x) e^{ax} = \delta(x), \implies U(x) = H(x) e^{-ax}.$$

因此原方程的解

$$y(x) = U * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\xi) e^{-a\xi} f(x - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^x f(\xi) e^{-a(x-\xi)} d\xi.$$

例 4.2.2: 3 维 Helmholtz 方程

求 3 维 Helmholtz 方程的基本解:

$$\Delta_3 u + cu = 0$$

由于只有一个点源, 方程具有对称性, 可设方程有球对称基本解 $U(r)$, 当 $r > 0$ 时, $\delta(r) = 0$,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + cU = \frac{1}{r} \left[\frac{d^2}{dr^2} (rU) + crU \right] = 0,$$

当 $c = 0$ 时, 化为 Laplace 方程

$$(rU)'' = 0, \implies U(r) = \frac{A}{r} + B.$$

记 B_r 为半径为 r 的球内部分, 则

$$\int_{B_r} \Delta U \, dV = \int_{B_r} \delta(x, y, z) \, dV = 1.$$

由 Green 公式

$$\int_{B_r} \Delta U \, dV = \oint_{\partial B_r} \frac{\partial U}{\partial n} \, dS = -\frac{A}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 1, \implies U(r) = -\frac{1}{4\pi r}.$$

当 $c < 0$ 时, 记 $k := \sqrt{-c}$

$$(rU)'' - k^2 rU = 0, \implies U = A \frac{e^{-kr}}{r} + B \frac{e^{kr}}{r}.$$

由积分条件

$$\int_{B_r} \Delta U - k^2 U \, dV = \oint_{\partial B_r} \frac{\partial U}{\partial n} \, dS - k^2 \int_{B_r} U \, dV = 1,$$

且

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial B_r} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{e^{k\rho}}{\rho} \right)_r r^2 \sin \theta \, d\theta d\phi - k^2 \int_{B_r} \frac{e^{k\rho}}{\rho} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta d\phi \\ &= 4\pi(kr - 1)e^{kr} - 4\pi[(k\rho - 1)e^{k\rho}]_0^r = -4\pi. \end{aligned}$$

故 $-4\pi(A + B) = 1$, 即

$$U(r) = -\frac{e^{-kr}}{4\pi r}, -\frac{e^{kr}}{4\pi r}.$$

当 $c > 0$ 时, 记 $k := \sqrt{c}$

$$U = A \frac{\cos kr}{r} + B \frac{\sin kr}{r}.$$

$\sin kr/r$ 在 \mathbb{C} 上是整函数, 无奇异性, 不能作为基本解. 积分 $-4\pi A = 1$

$$U(r) = -\frac{\cos kr}{4\pi r}.$$

4.3 Poisson 方程 Green 函数法

首先引入 Green 公式.

定理 4.3.1: Green 公式

设非空有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ 满足边界 $\partial\Omega$ 光滑, 则
 $\forall u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, 有

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dV = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dV; \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dV = \oint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS. \quad (4.13)$$

证明. 由散度定理

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (4.14)$$

取 $\mathbf{A} = v \nabla u$, 可得式 (4.12):

$$\oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS \equiv \oint_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) \, dV = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u + v \nabla^2 u) \, dV.$$

将 u, v 互换位置并与原式相减, 即得式 (4.13). \square

Poisson 方程第 I 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M \in V \subseteq \mathbb{R}^3 \\ u|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases} \quad (4.15)$$

物理上看, 这是静电场的基本问题: 空间区域 V 内有电荷体密度 $\rho = -\varepsilon f$, 边界上电位已知为 φ , 求 V 内电位 u .

由叠加原理, $u = v + w$, v, w 分别满足

$$\begin{cases} \Delta v = -f(M), \\ v|_{\partial V} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta w = 0, \\ w|_{\partial V} = \varphi(M), \end{cases}$$

其中 v 表示在边界接地条件下体内电荷产生的电场, w 表示由边界约束引起的电场.

定义 4.3.1: Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数

定解问题

$$\begin{cases} \Delta G(M; N) = -\delta(M - N), \\ G|_{\partial V} = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

的解 $G(M; N)$ 称为 Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数.

物理上看, Green 函数就是边界接地条件下, 置于 V 内 N 点电荷为 $+\varepsilon$ 的点源在 V 内 M 点产生的电场, 仍然是一个基本解.

$$u(M) = \int_V f(N)G(M; N) dN - \oint_{\partial V} \varphi(N) \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (4.17)$$

证明.

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_V u(N) \delta(M - N) dN = - \int_V u(N) \Delta G(M; N) dN \\ &= - \int_V u \Delta G dN + \int_V G \Delta u dN - \int_V G \underline{\Delta u} dN \quad (\text{Green-II}) \\ &= \oint_{\partial V} \underline{G} \frac{\partial u}{\partial n} - \underline{u} \frac{\partial G}{\partial n} dS + \int_V G f dN \\ &= - \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial G}{\partial n} dS + \int_V G f dN. \end{aligned}$$

□

Fourier 方法是求 Green 函数的基本方法, 但对于一些特殊的区域, 可以采用一些特殊方法, 如镜像法.

方法 4.3.1: 镜像法

分解 $G = U + g$, U 满足 $\Delta U = -\delta(M - N)$, 可取

$$U = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln r, & n = 2 \\ \frac{1}{4\pi r}, & n = 3 \end{cases}$$

而 g 满足

$$\begin{cases} \Delta g = 0, \\ g|_{\partial V} = -U, \end{cases}$$

是 N 的点电荷在边界上的感应电荷产生的电场.

区域外的点源在 V 内产生的电场满足 Laplace 方程, 可以将边界感应电荷产生的电场 g 看作区域外某些虚设电荷产生的等效电场, 这种来源于物理效应的方法叫镜像法.

例 4.3.1: 镜像法应用 · 半空间

求上半空间 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数.

V 内 $N(\xi, \eta, \zeta)$ 点的正电荷 ε 在空间 (x, y, z) 产生的电场为

$$U_0 = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}},$$

可虚设电荷 $-\varepsilon$ 于 N 关于 $z = 0$ 平面对称的点 $M_1(\xi, \eta, -\zeta)$, 产生的电场

$$U_1 = \frac{-1}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}},$$

在边界上 $U_0|_{z=0} = -U_1|_{z=0}$

$$G = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}} \right],$$

边界方向导数

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\zeta=0} = - \left. \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \frac{-z}{2\pi [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

故对于上半空间 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z > 0 \\ u|_{z=0} = \varphi(x, y) \end{cases}$$

解的 Poisson 公式

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

二维情况

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

例 4.3.2: 镜像法应用 · 球域

求半径为 R 的球域内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta_3 G(M; N) = -\delta(M - N), & 0 \leq r < R \\ G|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\rho=R} = \frac{R^2 - r^2}{4\pi R(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}.$$

故球内 Dirichlet 问题, 解的 Poisson 形式

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & 0 \leq r < R \\ u|_{r=R} = \varphi(\theta, \phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi R} \oint_{S_R} \frac{(R^2 - r^2) \varphi(\theta_0, \phi_0) dS_0}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}}.$$

Fourier 法 Fourier 法是求 Green 函数的基本方法, 主要思想是按照特征函数作广义 Fourier 展开, 包括分离变量与积分变换.

例 4.3.3: Fourier 法应用

求矩形区域 $\Omega = [0, L] \times [0, M]$ 上第 I 类边值 Poisson 方程的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta_2 G(x, y; \xi, \eta) = -\delta(x - \xi, y - \eta), & x, \xi \in [0, L]; y, \eta \in [0, M] \\ G(0, y) = G(L, y) = G(x, 0) = G(x, M) = 0, \end{cases}$$

有特征值

$$G(x, y) = \sum_{m, n} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{M}.$$

系数

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{M} \right)^2 \right] C_{mn} &= \frac{4}{LM} \int_0^M \int_0^L \delta(x - \xi, y - \eta) \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{M} dx dy \\ &= \frac{4}{LM} \sin \frac{m\pi \xi}{L} \sin \frac{n\pi \eta}{M}. \end{aligned}$$

后略.

例 4.3.4: Fourier 法应用 · 有限高

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & x > 0, y \in [0, a] \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u(x, a) = \psi(x), \\ u(0, y) = 0, \end{cases}$$

有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= - \left[\int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\eta=0} d\xi + \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\eta=a} d\xi \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\xi - \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=a} d\xi \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \sum_{n=1}^{\infty} 4n \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \xi \sin \omega x}{n^2 \pi^2 + a^2 \omega^2} d\omega \cdot \cos \frac{n\pi \eta}{a} \cos \frac{n\pi y}{a}; \\ u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} 4n \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \xi \sin \omega x}{n^2 \pi^2 + a^2 \omega^2} [\varphi(\xi) - (-1)^n \psi(\xi)] d\omega d\xi \cdot \cos \frac{n\pi y}{a}. \end{aligned}$$

*Poisson 方程第 II, III 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M \in V \subseteq \mathbb{R}^n \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\partial V} = \varphi(M), & \alpha, \beta \neq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

相应的 Green 函数

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(M - N), & M, N \in V \subseteq \mathbb{R}^n \\ \left(\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \right)_{\partial V} = 0, & \alpha, \beta \neq 0. \end{cases}$$

原问题的解

$$u(M) = \int_V f(N)G(M; N) dN + \frac{1}{\beta} \oint_{\partial V} \varphi(N)G(M; N) dS \quad (4.19)$$

$$= \int_V f(N)G(M; N) dN - \frac{1}{\alpha} \oint_{\partial V} \varphi(N) \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (4.20)$$

$\beta = 0$ 即第 I 边值问题. $\alpha = 0$ 即第 II 边值问题, 但此时表示内部有热源而边界绝热的稳恒温度场, 这是不可能的, 因此需要修正为

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(M - N) + \frac{1}{v}, \\ \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial V} = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \Delta G = -\delta(M - N), \\ \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\partial V} = -\frac{1}{s}, \end{cases}$$

其中 v, s 为 V 的体积和表面积. 有解

$$u(M) = \int_V f(N)G(M; N) dN + \oint_{\partial V} \varphi(N)G(M; N) dS + \text{const.} \quad (4.21)$$

相容性条件

$$\int_V f(M) dM + \oint_{\partial V} \varphi(M) dS = 0. \quad (4.22)$$

4.4 初值问题的基本解方法

本节主要用基本解方法来求解发展方程, 如 $u_t = \mathcal{P}u$ 型方程

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{P}u + f(M, t), & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(M, 0) = \varphi(M). \end{cases} \quad (4.23)$$

这里所涉及的 \mathcal{P} 是关于空间变量 M 的常系数线性偏微分算子.

定义 4.4.1: $u_t = \mathcal{P}u$ 型方程初值问题的基本解

基本解 $U(M, t)$ 满足

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{P}U, & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(M, 0) = \delta(M). \end{cases} \quad (4.24)$$

有

$$u(M, t) = U(M, t) * \varphi(M) + \int_0^t U(M, t - \tau) * f(M, \tau) d\tau. \quad (4.25)$$

证明过程略.

以及 $u_{tt} = \mathcal{P}u$ 型方程

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{P}u + f(M, t), & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(M, 0) = \varphi(M), \quad u_t(M, 0) = \psi(M). \end{cases} \quad (4.26)$$

定义 4.4.2: $u_{tt} = \mathcal{P}u$ 型方程初值问题的基本解

基本解 $U(M, t)$ 满足

$$\begin{cases} U_{tt} = \mathcal{P}U, & M \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ U(M, 0) = 0, \quad U_t(M, 0) = \delta(M). \end{cases} \quad (4.27)$$

有

$$u(M, t) = U * \psi + \frac{\partial}{\partial t}(U * \varphi) + \int_0^t U(M, t - \tau) * f(M, \tau) d\tau. \quad (4.28)$$

* 混合问题的 Green 函数 对于发展方程的混合问题通常用分离变量法或积分变换法求解, 当然也可以用 Green 函数 (点源函数) 法.

例 4.4.1: 一维波动方程的混合问题

一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Green 函数 $G(x, t; \xi)$ 满足

$$\begin{cases} G_{tt} = a^2 G_{xx}, & x, \xi \in (0, L), t > 0 \\ G(0, t) = G(L, t) = 0 \\ G(x, 0) = 0, \quad G_t(x, 0) = \delta(x - \xi) \end{cases}$$

利用 Fourier 方法可得

$$G(x, t; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi a} \sin \frac{n\pi\xi}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L},$$

进而解

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^L \psi(\xi) G d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \varphi(\xi) G d\xi + \\ & \int_0^t \int_0^L f(\xi, \tau) G(x, t - \tau; \xi) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (4.29)$$

附录 A 附录

A.1 特征值问题

$$1. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$2. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$3. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$4. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$5. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \implies \gamma = -hL \tan \gamma > 0,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$6. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \implies \gamma = -hL \cot \gamma > 0,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos \frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$7. \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - h_1 X'(0) = 0 \\ X(L) + h_2 X'(L) = 0 \end{cases} \implies \tan L\gamma = \frac{(h_1 + h_2)\gamma}{h_1 h_2 \gamma^2 - 1},$$

$$\lambda_n = \gamma_n^2, \quad X_n = \sin \gamma_n x + h_1 \gamma_n \cos \gamma_n x, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$8. \begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases}$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n = A \cos nx + B \sin nx, \quad n = 0, 1, \dots$$

A.2 Fourier 和 Laplace

Fourier 级数 定义实函数 f, g 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的内积

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx.$$

注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0. \quad (\text{A.1a})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x + \cos(n+m)x \, dx = \pi \delta_{nm}; \quad (\text{A.1b})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x \, dx = 0; \quad (\text{A.1c})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x - \cos(n+m)x \, dx = \pi \delta_{nm}. \quad (\text{A.1d})$$

因此

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots\}$$

构成 $[-\pi, \pi]$ 上一组完备的基底, 归一化之

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$

用这一组基可将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \langle f, \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Fourier 变换 利用 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 可得到 Fourier 级数的复数形式:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

对于其他周期 $T = \lambda$, $k = 2\pi/\lambda$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inkx}, \quad c_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-inkx} dx.$$

当 $f(x)$ 不是周期函数时, 就不能用 Fourier 级数展开. 然而, 若认为其周期 $\lambda = 2N$ 充分大, 令 $\xi = nk$,

$$f(x) = \sum_{\xi} \left[\frac{k}{2\pi} \int_{-N}^N f(x) e^{-i\xi x} dx \right] e^{i\xi x}.$$

再让 $N \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$, 定义

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

以及

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

这就是 Fourier 变换.

A.2.1 Fourier 系数

下面简要介绍不同函数的 Fourier 系数如何计算.

多项式函数 只需要利用分部积分将 x^k 不断微分降幂,

$$\begin{aligned} \int x \cos ax dx &= \frac{x \sin ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2} + \text{const.} \\ \int x \sin ax dx &= -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} + \text{const.} \\ \int x^2 \cos ax dx &= \frac{x^2 \sin ax}{a} + \frac{2x \cos ax}{a^2} - \frac{2 \sin ax}{a^3} + \text{const.} \\ \int x^2 \sin ax dx &= -\frac{x^2 \cos ax}{a} + \frac{2x \sin ax}{a^2} + \frac{2 \cos ax}{a^3} + \text{const.} \\ \int x^3 \cos ax dx &= \frac{x^3 \sin ax}{a} + \frac{3x^2 \cos ax}{a^2} - \frac{6x \sin ax}{a^3} - \frac{6 \cos ax}{a^4} + \text{const.} \\ \int x^3 \sin ax dx &= -\frac{x^3 \cos ax}{a} + \frac{3x^2 \sin ax}{a^2} + \frac{6x \cos ax}{a^3} - \frac{6 \sin ax}{a^4} + \text{const.} \end{aligned}$$

注. 可以证明, 按照降幂顺序, 系数的规律是:

- 正弦系数的符号 $-, +, +, -, \dots$, 余弦系数的符号 $+, +, -, -, \dots$;
- 共有 $n+1$ 项, 系数分别为

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{n}{a^2}, \quad \frac{n(n-1)}{a^3}, \quad \dots, \quad \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

- 正弦函数 \cos 打头, 余弦 \sin 打头, 然后正余弦交替.

三角函数 积分结果已经在 (A.1) 中给出.

指数函数 对于指数函数的 Fourier 系数, 只需记住

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &:= \int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \cdot \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const}; \\ \mathcal{J} &:= \int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const}.\end{aligned}$$

证明. 分部积分

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{b} \int e^{ax} \, d \sin bx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \mathcal{J}; \\ \mathcal{J} &= -\frac{1}{b} \int e^{ax} \, d \cos bx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \mathcal{I}.\end{aligned}$$

即可解得上式. □

双曲函数 有

$$\begin{aligned}\int \cosh ax \cos bx \, dx &= \frac{a \sinh ax \cos bx + b \cosh ax \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const}, \\ \int \cosh ax \sin bx \, dx &= \frac{a \sinh ax \sin bx - b \cosh ax \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const}, \\ \int \sinh ax \cos bx \, dx &= \frac{a \cosh ax \cos bx + b \sinh ax \sin bx}{a^2 + b^2} + \text{const}, \\ \int \sinh ax \sin bx \, dx &= \frac{a \cosh ax \sin bx - b \sinh ax \cos bx}{a^2 + b^2} + \text{const}.\end{aligned}$$

对数函数 对数函数乘正弦函数分部积分后会出现 $\text{Si } x$.

反三角函数 反三角函数更是没有积分结果.

A.2.2 Fourier 变换

Fourier 变换的性质 Fourier 变换的定义见第 20 页定义 3.0.1.

1. 线性

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g];$$

2. 微分

$$\mathcal{F}[f'] = i\xi \hat{f}.$$

3. 积分

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(\eta) \, d\eta\right] = \frac{1}{i\xi} \hat{f}.$$

其中积分式的 Fourier 变换存在, 且 $\hat{f}(0) = 0$.

4. $\hat{f}(\xi)$ 微分

$$\hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}[-ixf](\xi).$$

5. $\hat{f}(\xi)$ 积分

$$\int_{-\infty}^{\xi} \hat{f}(\zeta) d\zeta = \mathcal{F} \left[\frac{f(x)}{-ix} \right] (\xi) + C_1, \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{\xi}^{+\infty} \hat{f}(\zeta) d\zeta = \mathcal{F} \left[\frac{f(x)}{ix} \right] (\xi) + C_2. \quad (\text{A.3})$$

6. 位移性质

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-ia\xi},$$

$$\hat{f}(\xi - \alpha) = \mathcal{F}[f(x) e^{i\alpha x}](\xi).$$

7. 相似

$$\mathcal{F}[f(kx)](\xi) = \frac{1}{|k|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{k}\right).$$

8. 卷积^I

$$\mathcal{F}[f * g] = \hat{f}\hat{g}.$$

9. 象函数卷积

$$\hat{f} * \hat{g} = 2\pi \mathcal{F}[fg]$$

10. 反射

$$\mathcal{F}[\hat{f}(\xi)](x) = 2\pi f(-x).$$

因此 Fourier 逆变换

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

在 f 连续点处 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)](x) = f(x)$.

高维下 Fourier 变换的性质是相似的.

Fourier 正余弦变换的性质 ^{II}

1. 微分

$$\mathcal{F}_s[f'](\xi) = f(x) \sin \xi x|_{x=0}^{+\infty} - \xi \mathcal{F}_c[f](\xi);$$

$$\mathcal{F}_c[f'](\xi) = f(x) \cos \xi x|_{x=0}^{+\infty} + \xi \mathcal{F}_s[f](\xi);$$

$$\mathcal{F}_s[f''](\xi) = [f'(x) \sin \xi x - \xi f(x) \cos \xi x]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2 \mathcal{F}_s[f](\xi);$$

$$\mathcal{F}_c[f''](\xi) = [f'(x) \cos \xi x - \xi f(x) \sin \xi x]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2 \mathcal{F}_c[f](\xi).$$

2. 积分

$$\mathcal{F}_s \left[\int_0^x f(\eta) d\eta \right] (\xi) = \frac{1}{\xi} \mathcal{F}_c[f](\xi);$$

$$\mathcal{F}_c \left[\int_0^x f(\eta) d\eta \right] (\xi) = -\frac{1}{\xi} \mathcal{F}_s[f](\xi).$$

其中 $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0$.

^I f, g 的卷积

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) g(x - \eta) d\eta.$$

且有 $f * g = g * f$.

^{II}定义见第 21 页 3.1.2.

3. 象函数微分

$$\begin{aligned}\hat{f}'_s &= -\mathcal{F}_c[xf] & \hat{f}''_s &= -\mathcal{F}_s[x^2f] \\ \hat{f}'_c &= \mathcal{F}_s[xf] & \hat{f}''_c &= -\mathcal{F}_c[x^2f].\end{aligned}$$

4. 相似

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[f(kx)](\xi) &= \frac{1}{k} \hat{f}_s\left(\frac{\xi}{|k|}\right), \\ \mathcal{F}_c[f(kx)](\xi) &= \frac{1}{|k|} \hat{f}_c\left(\frac{\xi}{|k|}\right)\end{aligned}$$

5. 反射

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[\hat{f}_s(x)](\xi) &= -\frac{\pi}{2} f(-\xi), \\ \mathcal{F}_c[\hat{f}_c(x)](\xi) &= \frac{\pi}{2} f(-\xi).\end{aligned}$$

Fourier 变换函数表

1. $\mathcal{F}[\delta(x)] = 1, \quad \mathcal{F}[\delta^{(n)}(x)] = (i\xi)^n;$
2. $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\xi), \quad \mathcal{F}[x^n] = 2\pi i^n \delta^{(n)}(\xi);$
3. $\mathcal{F}[e^{iax}] = 2\pi\delta(\xi - a);$
4. $\mathcal{F}[\cos ax] = \pi[\delta(\xi - a) + \delta(\xi + a)];$
5. $\mathcal{F}[\sin ax] = -i\pi[\delta(\xi - a) - \delta(\xi + a)];$
6. $\mathcal{F}[\cos ax^2] = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left(\cos \frac{\xi^2}{4a} + \sin \frac{\xi^2}{4a} \right);$
7. $\mathcal{F}[\sin ax^2] = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left(\cos \frac{\xi^2}{4a} - \sin \frac{\xi^2}{4a} \right);$
8. $\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2 + \xi^2};$
9. $\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a};$
10. $\mathcal{F}[e^{-iax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{i(\xi^2/4a - \pi/4)};$
11. $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = -i\pi \operatorname{sgn} \xi;$
12. $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^n}\right] = -i\pi \frac{(-i\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \operatorname{sgn} \xi, \quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2}\right] = -\pi\xi \operatorname{sgn} \xi;$
13. $\mathcal{F}[|x|^\alpha] = -2\Gamma(\alpha+1) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |\xi|^{-1-\alpha};$
14. $\mathcal{F}[H(x)] = \frac{1}{i\xi} + \pi\delta(\xi);$
15. $\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \operatorname{sinc} \frac{\xi}{2};$ (系数应该是错的)
16. $\mathcal{F}[\operatorname{sinc} x] = \Pi\left(\frac{\xi}{2}\right)$ (系数应该是错的)

Heaviside 阶梯函数

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

A.2.3 Laplace 变换

Laplace 变换的性质 注: $x < 0$ 函数值取 0.

1. 线性
2. 微分

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'] &= \xi \bar{f} - f(0); \\ \mathcal{L}[f''] &= \xi^2 \bar{f} - \xi f(0) - f'(0); \\ \mathcal{L}[f^{(n)}] &= \xi^n \bar{f} - (\xi^{n-1} f(0) + \xi^{n-2} f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)).\end{aligned}$$

3. 积分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\eta) d\eta\right] = \frac{1}{\xi} \bar{f}.$$

4. 像函数微分

$$\bar{f}' = \mathcal{L}[-xf].$$

5. 像函数积分

$$\int_{\xi}^{+\infty} \bar{f}(\xi) d\xi = \mathcal{L}\left[\frac{f}{x}\right].$$

积分路径 $\operatorname{Re} \xi > \sigma_0$.

6. 复频移与时滞

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(x) e^{\alpha x}] &= \bar{f}(\xi - \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C} \\ \mathcal{L}[f(x - a)] &= \bar{f} e^{-a\xi}, \quad a \geq 0\end{aligned}$$

7. 相似

$$\mathcal{L}[f(kx)] = \frac{1}{k} \bar{f}\left(\frac{\xi}{k}\right), \quad k > 0$$

8. 卷积

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g]$$

9. 像函数卷积

$$\mathcal{L}[fg](\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(\zeta) \bar{g}(\xi - \zeta) d\zeta,$$

其中 $\xi > \max(\sigma_f, \sigma_g)$

Laplace 变换函数表

1. $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n;$
2. $\mathcal{L}[\operatorname{sgn} t] = \mathcal{L}[H(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[tH(t)] = \frac{1}{s^2};$
3. $\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right] = \frac{1}{\sqrt{s}};$
4. $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a};$
5. $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2};$
6. $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2};$