数学物理方法

Methods of Mathematics and Physics

Dait

目 录

第一章　偏微分方程的定解问题

例 1.0.1: 弦振动

线密度为 ρ 的弦在自身张力 T 的作用下平衡位置在 x 轴，横向位移 $u=u(x,t)$，取 (x_1,x_2) 段进行受力分析

$$
\begin{aligned}
T_2\cos\theta_2 - T_1\cos\theta_2 &= 0,\\
T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_2 &= \rho\,\delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.
\end{aligned}
$$

限定 $\theta\ll 1$，有 $\cos\theta\doteq 1$, $\sin\theta\doteq\theta$,

$$
\begin{aligned}
T_1 = T_2 &=: T,\\
T\,\delta\theta &= \rho\,\delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.
\end{aligned}
$$

又 $\theta=\partial u/\partial x$，得到波动方程

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a^2 := \frac{T}{\rho}. \tag{1.1}
$$

例 1.0.2: 热传导

由 Fourier 热传导定律，一段时间内流入物体 Ω 的热量为

$$
Q = \int_{t_1}^{t_2}\oint_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} k\nabla^2 u\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t,
$$

其中 k 为介质的热传导系数，$u=u(x,y,z,t)$ 为各点温度.
另一方面，从比热容 c 的角度看，

$$
Q = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t.
$$

其中 ρ 为物体的体密度.
因为上式对任意 $\Omega\times(t_1,t_2)$ 均成立，得到热传导方程

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\nabla^2 u,\quad a^2 := \frac{k}{c\rho}. \tag{1.2}
$$

1.1　定解问题及适定性

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ 内 m 阶 PDE 形如

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0,$$

其中 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$. 在本笔记中，偏微分 $\partial u/\partial x$ 可以简记为 u_x.

定义 1.1.1: 定解条件

确定解中函数的条件称为定解条件，包括初始条件和边界条件

$$\begin{array}{llll} \text{I. (Dirichlet)} & u|_{x=0} = f, & & u|_{\partial V} = f; \\ \text{II. (Neumann)} & u_t|_{x=0} = f, & & u_t|_{\partial V} = f; \\ \text{III. (Robin)} & (u_t + \sigma u)_{x=0} = f, & & \left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)_{\partial V} = f. \end{array}$$

定义 1.1.2: 解相关的术语

古典解：符合方程且各阶偏导数连续；
通解：m 阶 PDE 有 m 个任意函数的解；
特解：不包含任何任意函数或任意常数的解；
适定解：存在、唯一且稳定.

1.2　一阶线性方程的通解法

方法 1.2.1: 常数变易法

对于 $u(x, y)$ 的方程

$$u_x + Ax = B.$$

有解

$$\begin{cases} \varphi = \exp\left(-\displaystyle\int A \, \mathrm{d}x\right), \\ \psi = \displaystyle\int B\varphi^{-1} \, \mathrm{d}x \end{cases} \implies u = \varphi(\psi + g(y)).$$

其中 $g \in \mathscr{C}$.

方法 1.2.2: 变量代换

$u = u(x, y)$ 的方程

$$au_x + bu_y + cu = f,$$

作变量代换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}\implies\begin{cases}u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x\\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y\end{cases}$$

变成 $u=u(\xi,\eta)$ 的方程

$$(a\xi_x+b\xi_y)\,u_\xi+(a\eta_x+b\eta_y)\,u_\eta+cu=f.$$

使 $a\xi_x+b\xi_y=0$，得到**特征方程**和**特征曲线**

$$\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{\mathrm{d}y}{b},\implies\xi(x,y)=\mathrm{const}.\tag{1.3}$$

剩下

$$(a\eta_x+b\eta_y)\,u_\eta+cu=f.$$

对 η 积分便可求出通解．注意：要 $a\eta_x+b\eta_y\neq 0$，应有 Jacobi 行列式不为 0

$$\det J(\xi,\eta)=\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}\xi_x&\xi_x\\ \eta_x&\eta_y\end{vmatrix}\neq 0.$$

1.3　波动方程的行波解和 d'Alembert 公式

例 1.3.1: 行波解

一维波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad a>0.$$

可分解为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0.$$

定义

$$\begin{cases}\xi=x-at,\\ \eta=x+at.\end{cases}$$

方程化为

$$\frac{\partial^2u}{\partial\eta\partial\xi}=0,\implies u=f(\xi)+g(\eta).$$

即**行波解**

$$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at),\quad f,g\in\mathscr{C}^2.\tag{1.4}$$

定理 1.3.1: d'Alembert 公式

无限长弦自由振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

将初值问题带入通解

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} &= -af'(x) + ag'(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

因此

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{1.5}$$

对于 $\varphi \in \mathscr{C}^2, \psi \in \mathscr{C}$, 解是适定的.

非无限情况，可以延拓至无限.

例 1.3.2: 延拓

端点固定的半无限边界条件：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

对 φ, ψ 进行奇延拓

$$\varphi_o(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geqslant 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

问题便适用 d'Alembert 公式，解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\varphi_o(x-at) + \varphi_o(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_o(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, & x \geqslant at, \\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at) - \varphi(at-x)\right] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, & x < at. \end{cases} \end{aligned}$$

端点自由半无限弦 $(u_t(0,t) = 0)$ 采用偶延拓;

有界弦：两端均延拓.

例 1.3.3: 中心对称球面波

中心对称的球面波 $u=u(r)$，采用球坐标

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

波动方程变为

$$u_{tt}=a^2\left(u_{rr}+\frac{2}{r}u_r\right)=\frac{a^2}{r}(ru)_{rr}.$$

设 $v=ru$，则可解得

$$u(r)=\frac{1}{r}\big[f(r-at)+g(r+at)\big].$$

掺入边界条件 $\varphi(r),\psi(r)$ 后，作奇延拓即可.

例 1.3.4: 三维波动方程与球面平均法

一般的三维波动方程

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z).\end{cases}$$

采用球面平均法，定义 u 在以 M 为球心、r 为半径的球面 $S_r(M)$ 上的平均

$$\overline{u}(r,t;M)=\frac{1}{4\pi r^2}\oint_{S_r(M)}u(x,y,z,t)\,\mathrm{d}S,$$

略去证明过程，问题转化为中心对称球面波问题

$$\begin{cases}\overline{u}_{tt}=\dfrac{1}{r}\left(r\overline{u}\right)_{rr},\\ (r\overline{u})_{r=0}=0,\\ \overline{u}(r,0)=\overline{\varphi}(r),\quad \overline{u}_t(r,0)=\overline{\psi}(r).\end{cases}$$

奇延拓解，注意：$(r\varphi)_{\mathrm{o}}=r\varphi_{\mathrm{e}}$，

$$r\overline{u}(r,t)=\frac{1}{2}\big[(r-at)\overline{\varphi}_{\mathrm{e}}(r-at)+(r+at)\overline{\varphi}_{\mathrm{e}}(r+at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\rho\overline{\psi}_{\mathrm{e}}(\rho)\,\mathrm{d}\rho.$$

为得到 $u(x,y,z,t)$, 取极限

$$u(M,t)=\lim_{r\to0^+}\overline{u}(r,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\overline{\varphi}(at)\right)+t\overline{\psi}(at),$$

上式称为 Possion 公式.

求解三维波动方程的关键在于计算球面平均

$$\begin{aligned} u(M,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\oint_{S_{at}}\varphi\,\mathrm{d}S\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\oint_{S_{at}}\psi\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}t\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}t\psi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi, \end{aligned} \tag{1.6}$$

例 1.3.5: 二维波动方程与升维法

二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}), \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x,y). \end{cases}$$

采用升维法

$$U(x,y,z,t)=u(x,y,t), \quad \varPhi(x,y,z)=\varphi(x,y),$$
$$U(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\oint_{S_{at}}\varPhi\,\mathrm{d}S\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\oint_{S_{at}}\varPsi\,\mathrm{d}S$$

由于 $U,\varPhi,\varPsi$ 取值与 z 无关，故积分区域可投影到 xy 平面上．记 D_r 是以 (x,y) 为圆心，r 为半径的圆内区域，在 D_r 上

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2}\,\mathrm{d}A=\frac{r\,\mathrm{d}A}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

故

$$\begin{aligned} u(x,y,t)=&\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{D_{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \\ &+\frac{1}{2\pi a}\int_{D_{at}}\frac{\psi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

注. (1.6) 是在球面上积分，而 (1.7) 是在圆域上积分．这个差别在物理上产生了截然不同的效果：对三维情况，波的传播既有清晰的前阵面，也有清晰的后阵面，可用于传播信号，这称为 Huygens 原理；对二维情况，波的传播有清晰的前阵面，但没有后阵面，这称为波的弥漫，或说这种波具有后效现象，不适合于传播信号．

例 1.3.6: 一维波动方程

对一维弦振动方程，也可升二维，再将积分投影到 $[x-at,x+at]$ 上．记 C_r 是以 (x,y) 为圆心，r 为半径的圆，在 C_r 上

$$\mathrm{d}\ell=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi=\frac{r\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2}}.$$

故

$$\begin{aligned}\int_{D_{at}} \frac{\Phi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} &= \int_0^{at}\oint_{C_r}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\,\mathrm{d}\ell\,\mathrm{d}r \\ &= 2\int_0^{at}\int_{x-r}^{x+r}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\frac{r\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2}}\,\mathrm{d}r \\ &= \left(\int_x^{x+at}\int_{\xi-x}^{at}+\int_{x-at}^{x}\int_{x-\xi}^{at}\right)\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\frac{2r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2}}\,\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

推出 d'Alembert 公式：

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

1.4　二阶线性偏微分方程及标准型

两个自变量的二阶其次线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=0.$$

进行变量代换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}\qquad \text{其中 } \det J(\xi,\eta)\neq 0.$$

变成

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu=0.$$

其中

$$\begin{aligned}A_{11}&=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\ A_{12}&=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\ A_{22}&=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2;\\ B_1&=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y,\\ B_2&=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y,\end{aligned}$$

用矩阵表达即

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{12}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_x&\xi_x\\\eta_x&\eta_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_x&\xi_x\\\eta_x&\eta_y\end{bmatrix}^\top.$$

考虑使 $A_{11}=0$ 或 $A_{22}=0$ 则有

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0.$$

其判别式

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}.$$

$\Delta>0$，**双曲型**　不妨设 $a_{11}\neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}}\implies\begin{cases}\xi(x,y)=\mathrm{const}\\ \eta(x,y)=\mathrm{const}'\end{cases}\tag{1.8}$$

继而 $A_{11}=A_{22}=0$,

$$A_{12}=-\frac{2\Delta}{a_{11}}\xi_y\eta_y\neq 0,$$
$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2A_{12}}\left(B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu\right)=0.\tag{1.9}$$

上式就是**双曲型方程的标准型**.

若再作变量替换 $p=(\xi+\eta)/2,\ q=(\xi-\eta)/2$, 方程可化为

$$u_{pp}-u_{qq}+\frac{1}{A_{12}}\left[\left(B_1+B_2\right)u_q+\left(B_1-B_2\right)u_p+cu\right]=0.\tag{1.10}$$

$\Delta=0$，**抛物型**　只有一个线性 ODE，不妨设 $a_{11}\neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}}{a_{11}}\implies\xi(x,y)=\mathrm{const}.\tag{1.11}$$

任取 $\eta(x,y)$，可得 $A_{11}=A_{12}=0$

$$u_{\eta\eta}+\frac{1}{A_{22}}\left(B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu\right)=0.\tag{1.12}$$

$\Delta<0$，**椭圆型**　ODE 解为复函数，不妨设 $a_{11}\neq 0$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}\pm\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{a_{11}}\implies\xi(x,y)\pm\mathrm{i}\eta(x,y)=\mathrm{const}.\tag{1.13}$$

其中 ξ,η 为实函数，$A_{12}=0, A_{11}=A_{22}\neq 0$,

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{A_{11}}\left(B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu\right)=0.\tag{1.14}$$

1.5　叠加原理和齐次化原理

定义算子为从函数类到函数类的映射 $\mathcal{T}$.

定理 1.5.1: 叠加原理

线性算子 $\mathcal{L}$ 可与 $\lim,\sum,\int$ 等运算符交换.

齐次化原理也称冲量原理，源于求解有外力的弦振动方程

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x).\end{cases}$$

利用叠加原理，解 $u=u_0+w$；其中 u_0 表示 $f\equiv 0$ 的齐次化解；w 表示 $\varphi,\psi\equiv 0$ 的解，即纯受迫振动.

考虑时间段 $(\tau, \tau+\delta\tau)$ 内，位移分布 $w(x,t) =: v(x,t;\tau)\,\delta\tau$，外力冲量 $f(x,\tau)\,\delta\tau$，有

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ v|_{t=\tau} = 0 \quad v_t|_{t=\tau} = f(x,\tau). \end{cases} \implies v(x,t;\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi.$$

叠加得

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{1.15}$$

定理 1.5.2: 齐次化原理

定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m u}{\partial t^m} = \mathcal{P}u + f(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cdots = \left.\dfrac{\partial^{m-1}u}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

其中 $\mathcal{P}$ 为常系数线性偏微分算子，有解

$$u(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t v(\boldsymbol{x},t;\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

v 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m v}{\partial t^m} = \mathcal{P}v, & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \\ v|_{t=\tau} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=\tau} = \cdots = \left.\dfrac{\partial^{m-2}v}{\partial t^{m-2}}\right|_{t=\tau} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial^{m-1}v}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=\tau} = f(\boldsymbol{x},\tau). \end{cases}$$

当 $\boldsymbol{x}\in V\subsetneq\mathbb{R}^n$ 时，还应加上其次边界条件

$$\mathcal{P}u|_{\partial V} = 0, \quad \mathcal{P}v|_{\partial V} = 0.$$

第二章　分离变量法

回忆一些典型 ODE 方程的基本解法

方法 2.0.1: 二阶常系数齐次方程

形如

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{2.1}$$

其特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的解 $\lambda_{1,2}$

I. $\Delta > 0, \quad y = A\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + B\,\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$;

II. $\Delta = 0, \quad \lambda_{1,2} = \lambda, \quad y = (A + Bx)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$;

III. $\Delta < 0, \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta, \quad y = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$.

方法 2.0.2: 二阶非齐次方程

形如

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \tag{2.2}$$

二阶非齐次方程根据叠加定理，其解 $y = y_0 + y_s$; 其中 y_0 为 $f(x) \equiv 0$ 时的齐次通解，y_s 为特解.

若 y_1, y_2 为对应的齐次方程线性无关解，则可求出一特解

$$y_s(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)}{y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_1'(\xi)y_2(\xi)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad \forall x_0. \tag{2.3}$$

特解满足齐次边界条件

$$y_s(x_0) = 0, \quad y_s'(x_0) = 0.$$

方法 2.0.3: Euler 方程

形如

$$x^2y'' + axy' + by = f(x). \tag{2.4}$$

令 $x = \mathrm{e}^t$, $u(t) = y(\mathrm{e}^t) = y(x)$ 方程变为

$$u'' + (a-1)u' + bu = f(\mathrm{e}^t). \tag{2.5}$$

2.1 特征值和特征函数

在讨论分离变量前，先引入 Fourier 级数的概念.

定义 2.1.1: Fourier 级数

$f(x)$ 周期为 2ℓ，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\mathrm{FS}\, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right). \tag{2.6}$$

其中 Fourier 系数

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \,\mathrm{d}x; \\ b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

定理 2.1.1: Parserval 等式

若 $f \in \mathscr{L}^2\left[-\ell, \ell\right]$ 即平方可积，则

$$\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^2(x) \,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

定理 2.1.2: Dirichlet 收敛定理

若

1. f, f' 连续或分段连续，至多有有限个第一类间断点；
2. f 至多有有限个极值点；

则

$$\mathrm{FS}\, f(x) = \begin{cases} \left(f(x^+) + f(x^-)\right)/2, & x \in (-\ell, \ell) \\ \left(f(-\ell^+) + f(\ell^-)\right)/2, & x = \pm\ell \end{cases}$$

在 f 连续点处，$\mathrm{FS}\, f = f$.

例 2.1.1: 有界弦问题

有界弦

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, L)\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

假设变量是可以分离的，即 $u(x,t)=X(x)T(t)$，则引入**特征值** λ

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}=-\lambda.$$

要使 $X''+\lambda X=0$ 且 $X(0)=X(L)=0$ 仅有

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L},\quad n=1,2,\ldots.$$

进而 $T''+a^2\lambda T=0$

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi at}{L}+D_n\sin\frac{n\pi at}{L}.$$

因此原方程应有形式解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\frac{n\pi at}{L}+D_n\sin\frac{n\pi at}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2.7}$$

C_n, D_n 由初始条件确定

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\varphi(x),$$
$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}=\psi(x).$$

恰好对应 Fourier 正弦系数 $\varphi_n^{\mathrm{s}},\psi_n^{\mathrm{s}}$

$$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=:\varphi_n^{\mathrm{s}},$$
$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^L\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=:\frac{L}{n\pi a}\psi_n^{\mathrm{s}}.$$

至于形式解是否符合条件，不是考试涉及的范围.

例 2.1.2: 圆域 Laplace 方程

圆域上的 Laplace 方程，采用极坐标

$$\begin{cases}\nabla^2u=u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, & r<r_0\\ u(r_0,\theta)=\varphi(\theta)\end{cases}$$

还应包括自然条件，即

$$\limsup_{r\to0^+}|u(r,\theta)|<\infty.$$

和周期边界条件

$$u(r,0)=u(r,2\pi),\quad u_\theta(r,0)=u_\theta(r,2\pi).$$

分离变量 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$

$$\begin{cases} r^2R''+rR'-\lambda R=0 \\ \Theta''+\lambda\Theta=0. \end{cases}$$

由周期条件，特征值 $\lambda=n^2$，$n=0,1,2,\dots$

$$\Theta_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta.$$

再解 R 的 Euler 方程，可得

$$R_n(r)=\begin{cases} c_0+d_0\ln r, & n=0 \\ c_nr^n+d_nr^{-n}, & n\geqslant 1 \end{cases}$$

再由自然条件 $|R(0)|<\infty$，可知 $d_i\equiv 0$，进而

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\theta+b_b\sin n\theta),$$

结合边界条件 $u(r_0,\theta)=\varphi(\theta)$，求得系数

$$a_n=\frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\cos n\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta,\quad b_n=\frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\sin n\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta.$$

因此

$$\begin{aligned} u(r,\theta)=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta+ \\ &\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)(\cos n\vartheta\cos n\theta+\sin n\vartheta\sin n\theta)\,\mathrm{d}\vartheta \\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n(\theta-\vartheta)\right]\mathrm{d}\vartheta \end{aligned}$$

又由 Euler 公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos n\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\,k^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\mathrm{Re}\,\frac{1}{1-k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1-k\cos\theta}{1+k^2-2k\cos\theta}.$$

故得到圆域内的 Poisson 公式

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2-r^2)\varphi(\vartheta)}{r_0^2+r^2-2r_0r\cos(\theta-\vartheta)}\,\mathrm{d}\vartheta \tag{2.8}$$

积分内式子称为 Poisson 核.

例 2.1.3: 圆域 Neumann 问题

圆域上的 Neumann 问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad r < R \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = \varphi(\theta) \end{cases}$$

由 Green 公式

$$\int_{D_R} \nabla^2 u \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{r=R} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}\ell = R \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \, \mathrm{d}\theta = 0.$$

剩下的证明留给读者

2.2 Sturm-Liouville 定理

例 2.2.1: 有限杆热传导

设杆温度 $u = u(x,t)$，则定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in (0,L)\,,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u_t(L,t) + hu(L,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

其中热交换常数 $h > 0$.
分离常数 $u(x,t) = X(x)T(t)$,

$$\begin{cases} X'' + \beta^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(L) + hX(L) = 0. \end{cases} \implies \beta + h\tan\beta L = 0.$$

$\implies X_n(x) = \sin\beta_n x, \quad T_n(t) = C_n\,\mathrm{e}^{-\beta_n^2 a^2 t}.$
可以验证 X_n 是正交的，即

$$\langle X_m, X_n\rangle = \int_0^L X_m(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n.$$

形式解

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\beta_n^2 a^2 t}\sin\beta_n x.$$

再根据初始条件

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\beta_n x = \varphi(x).$$

在后面可以看到，这是广义 Fourier 级数，其系数

$$C_n = \frac{\langle \varphi, \sin\beta_n x\rangle}{\langle \sin\beta_n x, \sin\beta_n x\rangle} = \frac{\int_0^L \varphi(x)\sin\beta_n x\,\mathrm{d}x}{\int_0^L \sin^2\beta_n x\,\mathrm{d}x}.$$

定义 2.2.1: 加权内积

定义在 $[a,b]$ 上的实函数 f,g 的 ρ - 加权内积

$$\langle f,g\rangle_\rho := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

其中权函数 $\rho \geqslant 0$ 分段连续且零点孤立.
加权平方可积函数空间

$$\mathscr{L}_\rho^2[a,b] := \left\{ f \,\middle|\, \|f\|_\rho < \infty \right\}.$$

定理 2.2.1: 广义 Fourier 级数

若 $f_1, f_2, \dots$ 在 $\mathscr{L}^2_\rho$ 中完备且加权正交，则 $\forall f \in \mathscr{L}^2_\rho$ 有广义 Fourier 级数展开

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x), \quad a_i = \frac{\langle f, f_i \rangle_\rho}{\|f_i\|_\rho^2}.$$

且有 Parserval 等式

$$\|f\|_\rho^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle f, \frac{f_i}{\|f_i\|_\rho} \right\rangle_\rho^2.$$

定义 2.2.2: Sturm-Liouville 方程

定义域 $[a,b]$，常见一维特征值问题都可以化为

$$(k(x)f'(x))' - q(x)f(x) + \lambda\rho(x)f(x) = 0.$$

其中 λ 为参数，k, q, ρ 为实函数．记

$$\mathcal{L}[f] := -\frac{(kf')' - qf}{\rho}.$$

则

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho - \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho = \left[k(fg' - f'g)\right]_a^b.$$

好的边界条件可以使上式等于 0.

定义 2.2.3: 正则 Sturm-Liouville 问题

正则 Sturm-Liouville 问题

$$\mathcal{L}[f](x) = \lambda f(x).$$

正则条件：保证 Sturm-Liouville 方程在 $[a,b]$ 上没有奇点．

$$k \in \mathscr{C}^2[a,b],\ q, \rho \in \mathscr{C}[a,b];\ k, \rho > 0.$$

好的边界条件：

$$\text{可分：}\begin{cases} c_1 f(a) + c_2 f'(a) = 0, \\ d_1 f(b) + d_2 f'(b) = 0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{周期：}\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b) \end{cases}$$

可使 $\mathcal{L}$ 是对称算子，即

$$\langle \mathcal{L}[f], g \rangle_\rho = \langle f, \mathcal{L}[g] \rangle_\rho.$$

定理 2.2.2: Sturm-Liouville 定理 1

正则 Sturm-Liouville 问题

1. 有可数多个实特征值
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$
2. 特征函数加权 ρ - 正交；
3. 特征值的特征子空间至多 2 维，
   可分边界条件下，特征子空间为 1 维；
4. 特征函数构成 $\mathscr{L}^2_\rho$ 上完备的正交基底.

奇异 Sturm-Liouville 问题：不满足正则条件或区间无界；但若
$$a \text{ (或 } b\text{) 是 } k(x) \text{ 的一级零点，是 } q(x) \text{ 的至多一级极点}$$
时，称 a (或 b) 是方程的正则奇点．定理结论依旧成立！

定理 2.2.3: Sturm-Liouville 定理 2

若正则 Sturm-Liouville 问题还满足 $q \geqslant 0$；可分边界条件下还需满足 $c_1c_2 \leqslant 0$, $d_1d_2 \geqslant 0$.

1. 所有特征值非负；
   特别地，存在 0 特征值 (对应特征函数 1) 的充要条件是 $q \equiv 0$ 且两端为第二类边界条件；
2. 若正则条件为周期条件，那么其对应于每一个非最小特征值 λ_0 的特征值有两个相互正交的特征函数.

例 2.2.2: 扇形域 Dirichlet 问题

扇形域上的 Dirichlet 问题
$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad r \in (1, \mathrm{e}), \ \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right). \\ u(1,\theta) = u(\mathrm{e},\theta) = 0, \\ u(r,0) = 0, \quad u\left(r, \dfrac{\pi}{2}\right) = g(r). \end{cases}$$
化为 Sturm-Liouville 型
$$(rR')' + \frac{\lambda}{r} R = 0,$$
对应 $k = r$, $q = 0$, $\rho = \dfrac{1}{r}$，因此 $\lambda > 0$，进而
$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad R_n(r) = \sin(n\pi \ln r), \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$\varTheta_n(\theta) = A_n\,\mathrm{e}^{n\pi\theta} + B_n\,\mathrm{e}^{-n\pi\theta}.$$
再结合 u 的边界条件即可解出.

2.3　非齐次方程

对非齐次方程，有时可靠直觉找出特解 v，但对一般的非齐次方程，需要借助齐次化原理转化为齐次方程：

方法 2.3.1: 齐次化原理法

设 $\mathcal{D}_t$ 中关于 2 阶导数的系数为 1

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x,t), \quad x \in (a,b),\ t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, \quad (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

由 9 页的定理 1.5.2 知，有解

$$u(x,t) = \int_0^t v(x, t-\tau; \tau)\,\mathrm{d}\tau$$

v 满足

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x v + \mathcal{D}_t v = 0, \quad x \in (a,b),\ t > 0 \\ (\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = 0, \quad (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = f(x,\tau). \end{cases}$$

方法 2.3.2: 广义 Fourier 展开法

对于

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x,t), \quad x \in (a,b),\ t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = 0, \quad (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

1. 首先分离变量，求出 $f \equiv 0$ 对应的特征值问题

$$\mathcal{D}_x X = -\lambda X.$$

   解出特征值 $\{\lambda_n\}$ 和本征函数 $\{X_n(x)\}$，注意 n 的取值是否含 0.
2. 根据 Sturm-Liouville 定理判断 $\{X_n\}$ 的完备性，展开

$$u(x,t) = \sum T_n(t) X_n(x), \quad f(x) = \sum f_n(t) X_n(x),$$
$$\varphi(x) = \sum \varphi_n X_n(x), \quad \psi(x) = \sum \psi_n X_n(x).$$

   求解

$$\begin{cases} \mathcal{D}_t T_n(t) - \lambda_n T_n(t) = f_n(t), \\ T_n(t) = \varphi_n, \quad T_n'(t) = \psi_n. \end{cases}$$

3. 解出 $T_n(t)$，得 $u(x,t)$

方法 2.3.3: 一般地非齐次问题

对于一般地非齐次问题

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x u + \mathcal{D}_t u = f(x,t), \quad x \in (a,b),\ t > 0 \\ (\alpha_1 u - \beta_1 u_x)_{x=a} = g_1(t), \quad (\alpha_2 u + \beta_2 u_x)_{x=b} = g_2(t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

首先将非齐次边界条件齐次化，寻找 $v(x,t)$ 满足

$$(\alpha_1 v - \beta_1 v_x)_{x=a} = g_1(t), \quad (\alpha_2 v + \beta_2 v_x)_{x=b} = g_2(t).$$

显然 v 不唯一，若无法直觉看出，可设为 x 的线性函数

$$v(x,t) = A(t)x + B(t),$$

整理得

$$\begin{cases} (\alpha_1 a - \beta_1)A(t) + \alpha_1 B(t) = g_1(t), \\ (\alpha_2 b + \beta_2)A(t) + \alpha_2 B(t) = g_2(t). \end{cases}$$

便可解出 A, B 若无解还可设为 x 的二次函数.

这样便可将 u 分解为 $u = v + w$，而 w 的边界条件是齐次化的：

$$\begin{cases} \mathcal{D}_x w + \mathcal{D}_t w = f(x,t) - \mathcal{D}_x v - \mathcal{D}_t v, \quad x \in (a,b),\ t > 0 \\ (\alpha_1 w - \beta_1 w_x)_{x=a} = 0, \quad (\alpha_2 w + \beta_2 w_x)_{x=b} = 0, \\ w|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0}, \quad w_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0}. \end{cases}$$

这在前面已解决.

第三章　积分变换法

定义 3.0.1: 积分变换

积分变换

$$\mathcal{T}[f](\xi) = \int_a^b f(x)K(x,\xi)\,\mathrm{d}x.$$

其中 K 是核函数 (kernel).

3.1　Fourier 变换

定义 3.1.1: Fourier 变换

定义 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) \equiv \mathcal{F}[f](\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

及其逆变换

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Fourier 变换的相关性质见第 41 页的附录内容.

例 3.1.1: 无限长杆热传导

无限长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{u}_t = -a^2\xi^2\hat{u} + \hat{f}, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\varphi). \end{cases}$$

因此

$$\hat{u}(\xi,t) = \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\left[\int_0^t \hat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{e}^{a^2\xi^2\tau}\,\mathrm{d}\tau + \hat{\varphi}(\xi)\right].$$

再用 Fourier 逆变换

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \hat{f}(\xi,\tau)\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right] + \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\right] \\
&= \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\xi,\tau)\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau + \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\xi)] * \mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\right] \\
&= \int_0^t f(x,t) * \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\eta)\,\mathrm{e}^{-(x-\eta)^2/4a^2 t}\,\mathrm{d}\eta \\
&= \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta,\tau)\,\mathrm{e}^{-(x-\eta)^2/4a^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau + \\
&\quad \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\eta)\,\mathrm{e}^{-(x-\eta)^2/4a^2 t}\,\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

以上只是形式解.

3.1.1 Fourier 正余弦变换

对于定义在 $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 上的函数，可将其奇偶延拓至 $\mathbb{R}$ 后再作 4ier 变换

定义 3.1.2: Fourier 正余弦变换

正余弦变换分别为

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_{\mathrm{s}}(\xi) \equiv \mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[f\right](\xi) &:= \int_0^{+\infty} f(x)\sin\xi x\,\mathrm{d}x; \\
\hat{f}_{\mathrm{c}}(\xi) \equiv \mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[f\right](\xi) &:= \int_0^{+\infty} f(x)\cos\xi x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

其反变换

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}_{\mathrm{s}}(\xi)\sin\xi x\,\mathrm{d}\xi =: \mathcal{F}_{\mathrm{s}}^{-1}\left[\hat{f}_{\mathrm{s}}(\xi)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}_{\mathrm{c}}(\xi)\cos\xi x\,\mathrm{d}\xi =: \mathcal{F}_{\mathrm{c}}^{-1}\left[\hat{f}_{\mathrm{c}}(\xi)\right]
\end{aligned}
$$

变换的性质见第 42 页的附录内容.

例 3.1.2: 半无限长杆热传导

半无限长杆热传导方程问题

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx}, & x>0,\ t>0 \\
u(x,0) = 0, \\
u_x(0,t) = \varphi(x)
\end{cases}
$$

自然边界条件

$$
\lim_{x\to\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\infty} u_t(x,t) = 0
$$

若用 Fourier 正弦变换，则会出现 $u(0,t)$，此边界条件没有给出，因此只能用余弦变换，记 $U(\xi,t)=\mathcal{F}_c\left[u(x,t)\right]$

$$
\begin{aligned}
U_t(\xi,t)&=a^2\big[u_x(x,t)\cos\xi x-\xi u(x,t)\sin\xi x\big]_0^{+\infty}-a^2\xi^2U(\xi,t)\\
&=-a^2\varphi(t)-a^2\xi^2U(\xi,t).
\end{aligned}
$$

故

$$U(\xi,t)=-a^2\int_0^t\varphi(\tau)\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

逆变换

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=-\frac{2a^2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t\varphi(\tau)\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\xi x\,\mathrm{d}\xi\\
&=-\frac{2a^2}{\pi}\int_0^t\varphi(\tau)\left[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\cos\xi x\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau\\
&=-a\int_0^t\varphi(\tau)\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4a^2(t-\tau)}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

例 3.1.3: 半无限长弦振动

半无界弦振动问题

$$
\begin{cases}
u_{tt}=a^2u_{xx}, & x>0,\ t>0\\
u_x(0,t)=f(t),\\
u(x,0)=u_t(x,0)=0
\end{cases}
$$

自然边界条件 $\lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=\lim\limits_{x\to\infty}u_t(x,t)=0$.

$$U_{tt}(\xi,t)=-a^2f(t)-a^2\xi^2U(\xi,t).$$

其次方程通解 $\cos a\xi t$, $\sin a\xi t$，运用 (2.3) 和边界条件 $U(\xi,0)=U_t(\xi,0)=0$

$$
\begin{aligned}
U(\xi,t)&=\int_0^t-a^2f(\tau)\frac{\cos a\xi\tau\sin a\xi t-\cos a\xi t\sin a\xi\tau}{\cos a\xi\tau\,(\sin a\xi\tau)'-(\cos a\xi\tau)'\sin a\xi\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&=-\frac{a}{\xi}\int_0^t f(\tau)\sin a\xi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

逆变换

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{a}{\xi}\int_0^t f(\tau)\sin a\xi(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\xi x\,\mathrm{d}\xi\\
&=-2a\int_0^t f(\tau)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\xi}\sin a\xi(t-\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

由

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin a\xi}{\xi}\right]=\frac{\mathrm{H}(x+a)-\mathrm{H}(x+a)}{2}.$$

其中 $\mathrm{H}(x)$ 为 Heaviside 跳跃函数，故

$$u(x,t) = -a\int_0^{t-x/a} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \quad x < at$$

3.1.2 Fourier 变换与分离变量法

无界区域是否有相应的分离变量法？

例 3.1.4: 无界长杆热传导

无界长杆热传导

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

分离变量 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 特征值

$$X'' + \lambda X = 0,\ T' + \lambda a^2 T = 0$$

讨论知 $\lambda = \xi^2 \geqslant 0$

$$X = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}, \quad T = \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}.$$

故

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi)X(x,\xi)T(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

边界条件

$$u(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi \equiv \mathcal{F}^{-1}[A] = \varphi(x),$$

故 $\varphi(x)$ 是 $A(\xi)$ 的 Fourier 变换.

可见对无界区间上的问题，分离变量法依然适用，只是特征值是连续分布的.

3.2 Laplace 变换

定义 3.2.1: Laplace 变换

定义 Laplace 变换

$$\bar{f}(\xi) = \mathcal{L}\,[f]\,(\xi) := \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \operatorname{Re}\xi > \sigma_0.$$

其逆变换

$$f(x)=\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{f}(\xi)\right]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\bar{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\xi x}\,\mathrm{d}\xi,\quad x\geqslant 0.$$

注意 Laplace 变换存在条件需要 $\exists M,\sigma_0$ 使得

$$|f(x)|<M\,\mathrm{e}^{\sigma_0 x},\quad \forall x>0.$$

其逆变换中 $\sigma>\sigma_0$;注意,Laplace 变换的积分中本身不包含 $\mathbb{R}_{<0}$ 的部分,一般认为 $f(<0)\equiv 0$.

定理 3.2.1: 第一展开定理

设 $F(\xi)$ 在 ∞ 邻域内有 Laurent 展开式

$$F(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\xi^n},$$

则

$$f(x)=\mathcal{L}^{-1}[F(\xi)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}x^{n-1},\quad x\geqslant 0$$

定理 3.2.2: 第二展开定理

设 $F(\xi)=A(\xi)/B(\xi)$ 是有理函数,$\deg A<\deg B$,$B(\xi)$ 只有单零点 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 且是 $F(\xi)$ 的单极点,则

$$f(x)=\mathcal{L}^{-1}[F(\xi)]=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(\xi_k)}{B'(\xi_k)}\,\mathrm{e}^{\xi_k x}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(\xi)\,\mathrm{e}^{\xi x},\xi_k\right].$$

若 $F(\xi)$ 满足

1. 在 $\mathbb{C}$ 上除了有限个奇点 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 外解析;
2. 在半平面 $\mathrm{Re}\,\xi>\sigma_0$ 上解析;
3. $\exists M>0,\ R>0$ 使得当 $|\xi|>R$ 时

$$|F(\xi)|\leqslant\frac{M}{|\xi|},$$

则对于 $x\geqslant 0$ 有

$$f(x)=\mathcal{L}^{-1}[F(\xi)]=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[F(\xi)\,\mathrm{e}^{\xi x},\xi_k\right].$$

例 3.2.1: 有限杆热传导

有限杆热传导

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad x \in (0, L),\ t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) = A, \\ u(x, 0) = B. \end{cases}$$

关于 t 作 Laplace 变换，记 $U(x, s) = \mathcal{L}\left[u(x, t)\right](s)$

$$sU(x, s) - u(x, 0) = U_{xx}(x, s),$$

由 $u(x, 0) = B$，

$$U(x, s) = c_1 \cosh \sqrt{s} x + c_2 \sinh \sqrt{s} x + \frac{B}{s}.$$

再由 $U_x(0, s) = 0,\ U(L, s) = A/s$

$$U(x, s) = \frac{(A - B) \cosh \sqrt{s} x}{s \cosh \sqrt{s} L} + \frac{B}{s}.$$

逆变换

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(A - B) \cosh \sqrt{s} x}{s \cosh \sqrt{s} L}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B}{s}\right](t) \\ &= (A - B)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\cosh \sqrt{s} x}{s \cosh \sqrt{s} L}\right](t) + B. \end{aligned}$$

括号内函数的孤立奇点[I]应使得 $\cosh \sqrt{s} L = 0$

$$s_n = -\left[\frac{(2n - 1)\pi}{2L}\right]^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

由

$$\begin{aligned} u(x, t) &= B + (A - B)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Res}\left[\frac{\cosh \sqrt{s} x}{s \cosh \sqrt{s} L} \mathrm{e}^{st}, s_n\right]\right) \\ &= A + \frac{4(A - B)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n - 1} \cos\left[\frac{(2n - 1)\pi}{2L} x\right] \exp\left[-\frac{(2n - 1)^2 \pi^2}{4L^2} t\right]. \end{aligned}$$

[I]注意，0 不是此函数的孤立奇点，不能用留数算出．逆变换结果中的 1 是围道积出来的．详情可见附录

例 3.2.2: 有限长弦受迫振动

有限长弦受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u_t(L, t) = A \sin \omega t \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

关于 t 作 Laplace 变换，记 $U(x,s)=\mathcal{L}\left[u(x,t)\right](s)$

$$s^2U(x,s)-su(x,0)-u_t(x,0)=a^2U_{xx}(x,s).$$

结合 $U_x(L,s)=A\omega/(s^2+\omega^2)$

$$U(x,s)=\frac{Aa\omega}{s(s^2+\omega^2)}\sinh\frac{xs}{a}\operatorname{sech}\frac{Ls}{a}.$$

其所有的孤立奇点：可去奇点 0；一级奇点 $\pm\mathrm{i}\omega_k$，

$$\omega_k:=\begin{cases}\omega, & k=0\\ \dfrac{2k-1}{2L}\pi a, & k\geqslant 1\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{Res}[U(x,s)\,\mathrm{e}^{st},\mathrm{i}\omega_k]+\operatorname{Res}[U(x,s)\,\mathrm{e}^{st},-\mathrm{i}\omega_k]\\
&=2\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{Res}[U(x,s)\,\mathrm{e}^{st},\mathrm{i}\omega_k]\\
&=2\operatorname{Re}\left[\frac{Aa\omega}{s(s+\mathrm{i}\omega)}\sinh\frac{xs}{a}\operatorname{sech}\frac{Ls}{a}\,\mathrm{e}^{st}\right]_{\mathrm{i}\omega}+\\
&\qquad 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{Aa\omega}{s(s^2+\omega^2)}\sinh\frac{xs}{a}\cdot\frac{a}{L}\operatorname{csch}\frac{Ls}{a}\,\mathrm{e}^{st}\right]_{\mathrm{i}\omega_k}\\
&=\frac{Aa}{\omega}\sinh\frac{\omega x}{a}\sec\frac{\omega L}{a}\sin\omega t+\\
&\qquad 16Aa\omega^2L\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)[4\omega^2L^2-(2k-1)^2\pi^2a^2]}\sin\frac{\omega_k x}{a}\sin\omega_k t.\end{aligned}$$

第四章　基本解方法

4.1　广义函数

定义 4.1.1: δ 函数

源于物理中对集中分布物理量的数学描述．满足

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} f(x), & 0 \in (a,b) \\ 0, & 0 \notin (a,b) \end{cases}$$

因此 $f * \delta(\xi) = f(\xi)$.

定理 4.1.1: δ 复合函数

设 $u(x) \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ 且在实轴上只有单零点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，则

$$\delta(u(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(x - x_k)}{|u'(x_k)|}. \tag{4.1}$$

比如 $\delta(ax) = \delta(x)/a$.

广义函数

定义 4.1.2: 线性泛函

函数空间 $\mathscr{V}$ 到数域 $\mathbb{F}$ 的映射 $\mathcal{T}$，若

$$\mathcal{T}(au + bv) = a\mathcal{T}u + b\mathcal{T}v$$

$\forall a, b \in \mathbb{F}$, $u, v \in \mathscr{V}$ 均成立，则 $\mathcal{T}$ 是 $\mathscr{V}$ 上的线性泛函，即广义函数．$\mathscr{V}$ 上所有线性泛函构成一个线性空间，称作 $\mathscr{V}$ 的对偶空间 $\mathscr{V}^*$.

例 4.1.1: 支撑集

记实函数 f 的支撑集

$$\operatorname{supp} f := \{x \mid f(x) \neq 0\}. \tag{4.2}$$

并记

$$\mathscr{L}_0(\mathbb{R}) := \left\{ f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty,\ \operatorname{supp} f\,\text{有界} \right\}$$

则 $\forall f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{R})$，$f$ 确定了 $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ 上一个线性泛函：

$$\mathcal{T}_f\left[\varphi(x)\right] \equiv \langle f, \varphi\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

定理 4.1.2: 广义函数的导数

定义函数空间

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}) := \left\{ f \,\middle|\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \operatorname{supp} f\,\text{有界} \right\} \tag{4.4}$$

广义函数 $f \in \mathscr{D}^*(\mathbb{R})$，定义其 n 阶导数

$$\left\langle f^{(n)}, \varphi \right\rangle := (-1)^n \left\langle f, \varphi^{(n)} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{4.5}$$

特别地，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

泛函意义下，任意一个广义函数都是无穷阶可导的.

定理 4.1.3: 广义函数的卷积

给定 $f, g \in \mathscr{D}^*(\mathbb{R})$ 的卷积 $f * g(x)$ 也是广义函数

$$\langle f * g, \varphi\rangle := \Big\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle \Big\rangle. \tag{4.6}$$

一般地，对常系数微分算子 $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * \mathcal{D}g.$$

定理 4.1.4: 广义函数的 Fourier 变换

速降函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$，

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \,\middle|\, \lim_{x\to\infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}. \tag{4.7}$$

比如 $\varphi(x) = p(x)\,\mathrm{e}^{-ax^2}$，$p(x)$ 是多项式，$a > 0$，则 $\varphi(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
给定广义函数 $f \in \mathscr{S}^*$，f 的 Fourier 变换及其逆变换也是广义函数，定义为

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}[f], \varphi \right\rangle &= \left\langle f, \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle \\ \left\langle \mathcal{F}^{-1}[f], \varphi \right\rangle &= \left\langle f, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \right\rangle \end{aligned}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}. \tag{4.8}$$

Fourier 变换作用转移到基本函数上，它们保持着经典意义下的基本性质.

定理 4.1.5: 广义函数序列的收敛性

设广义函数列 $\{f_i\}$ 及广义函数 f，若对基本函数空间的 φ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle\,.$$

则称 f_n 弱收敛到 f，本笔记记作 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\doteq f(x)$.

定理 4.1.6

若基本函数空间为 $\mathscr{S}$，则

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\doteq f(x)\iff\lim_{n\to\infty} f_n'(x)\doteq f'(x).$$

定理 4.1.7: 高维广义函数

与一维类似，函数空间

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\equiv\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n):=\left\{f\,\middle|\,f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp}f\text{ 有界}\right\},$$

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n):=\left\{\varphi\,\middle|\,\lim_{|X|\to\infty}|X|^m\frac{\partial^k\varphi(X)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}=0,\quad\forall m,k\in\mathbb{Z}^+\right\}$$

对函数空间 $\mathscr{V}$ 上的线性泛函 f

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}f(X)\varphi(X)\,\mathrm{d}X,\quad\forall\varphi\in\mathscr{V}$$

构成 $\mathscr{V}^*$.

广义函数 $f\in\mathscr{D}^*(\mathbb{R}^n)$ 的偏导数定义为

$$\left\langle\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\varphi\right\rangle:=(-1)^k\left\langle f,\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\right\rangle$$

特别地，$f=\delta$ 时

$$\left\langle\frac{\partial^k\delta}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\varphi\right\rangle=(-1)^k\frac{\partial^k\varphi(\mathbf{0})}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}.$$

例 4.1.2: δ 函数与 Laplace 算子

$$\delta(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\nabla^2\ln r, & n=2\\ -\dfrac{1}{(n-2)S_n}\nabla^2\dfrac{1}{r^{n-2}}, & n\geqslant 3\end{cases}\tag{4.9}$$

其中 $r=|\boldsymbol{x}|$，S_n 为 n 维单位球的表面积．特别地，$S_3=4\pi$.

广义函数的卷积

$$\langle f*g,\varphi\rangle:=\Big\langle f(X),\langle g(Y),\varphi(X+Y)\rangle\Big\rangle.$$

4.2　$\mathcal{P}u = 0$ 型方程的基本解

讨论用基本解方法求解方程

$$\mathcal{P}u(M) = f(M), \quad M \in \mathbb{R}^n,$$

其中，$\mathcal{P}$ 是常系数线性偏微分算子.

视 f, u 为广义函数，它们在广义函数空间里可以自由地进行各种运算和交换. 通过这种方式得到的解叫广义函数解，简称作**广义解**. 如果解是一个正则广义函数，甚至还有足够的光滑性，那么这种解是经典解.

定义 4.2.1: $\mathcal{P}u = 0$ 型方程的基本解

方程

$$\mathcal{P}U(M) = \delta(M) \tag{4.10}$$

的解 $U(M)$ 称作 $\mathcal{P}u = 0$ 型方程的基本解.

对一般的函数 f，其对应的解是一般的源所产生的物理场. 故基本解也叫点源函数.

若 $\mathcal{P}u = 0$ 型方程有基本解 $U(M)$，令

$$u(M) := U * f(M) = \int U(M-N)f(N)\,\mathrm{d}N. \tag{4.11}$$

由积分叠加原理

$$\mathcal{P}u(M) = \int \mathcal{P}U(M-N)f(N)\,\mathrm{d}N = \int \delta(M-N)f(N)\,\mathrm{d}N = f(M).$$

即 u 满足方程 $\mathcal{P}u = f$.

例 4.2.1

求下面方程的基本解：

$$y' + ay = f(x), \quad a > 0$$

基本解 U 满足

$$U' + aU = \delta(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(U\,\mathrm{e}^{ax}) = \delta(x)\,\mathrm{e}^{ax} = \delta(x), \implies U(x) = \mathrm{H}(x)\,\mathrm{e}^{-ax}.$$

因此原方程的解

$$y(x) = U * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{H}(\xi)\,\mathrm{e}^{-a\xi} f(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-a(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

例 4.2.2: 3 维 Helmholtz 方程

求 3 维 Helmholtz 方程的基本解：

$$\nabla^2 u + cu = 0$$

由于只有一个点源，方程具有对称性，可设方程有球对称基本解 $U(r)$，当 $r>0$ 时，$\delta(r)=0$，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)+cU=\frac{1}{r}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rU)+crU\right]=0,$$

当 $c=0$ 时，化为 Laplace 方程

$$(rU)''=0, \implies U(r)=\frac{A}{r}+\cancel{B}.$$

记 B_r 为半径为 r 的球内部分，则

$$\int_{B_r}\nabla^2 U\,\mathrm{d}V=\int_{B_r}\delta(x,y,z)\,\mathrm{d}V=1.$$

由 Green 公式

$$\int_{B_r}\nabla^2 U\,\mathrm{d}V=\oint_{\partial B_r}\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}S=-\frac{A}{r^2}\cdot 4\pi r^2=1, \implies U(r)=-\frac{1}{4\pi r}.$$

当 $c<0$ 时，记 $k:=\sqrt{-c}$

$$(rU)''-k^2 rU=0, \implies U=A\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}+B\frac{\mathrm{e}^{kr}}{r}.$$

由积分条件

$$\int_{B_r}\nabla^2 U-k^2U\,\mathrm{d}V=\oint_{\partial B_r}\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}S-k^2\int_{B_r}U\,\mathrm{d}V=1,$$

且

$$\oint_{\partial B_r}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\mathrm{e}^{k\rho}}{\rho}\right)_r r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi-k^2\int_{B_r}\frac{\mathrm{e}^{k\rho}}{\rho}\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$=4\pi(kr-1)\,\mathrm{e}^{kr}-4\pi\left[(k\rho-1)\,\mathrm{e}^{k\rho}\right]_0^r=-4\pi.$$

故 $-4\pi(A+B)=1$，即

$$U(r)=-\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{4\pi r},\ -\frac{\mathrm{e}^{kr}}{4\pi r}.$$

当 $c>0$ 时，记 $k:=\sqrt{c}$

$$U=A\frac{\cos kr}{r}+\cancel{B\frac{\sin kr}{r}}.$$

$\sin kr/r$ 在 $\mathbb{C}$ 上是整函数，无奇异性，不能作为基本解．积分 $-4\pi A=1$

$$U(r)=-\frac{\cos kr}{4\pi r}.$$

4.3 Possion 方程 Green 函数法

首先引入 Green 公式.

定理 4.3.1: Green 公式

设非空有界开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 满足边界 $\partial\Omega$ 光滑，则 $\forall u,v\in\mathscr{C}^2(\Omega)\cap\mathscr{C}(\bar{\Omega})$，有

$$\int_\Omega v\nabla^2 u\,\mathrm{d}V=\oint_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S-\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla u\,\mathrm{d}V;\tag{4.12}$$

$$\int_\Omega(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}V=\oint_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.\tag{4.13}$$

证明. 由散度定理

$$\int_\Omega\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V=\oint_{\partial\Omega}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,\tag{4.14}$$

取 $\boldsymbol{A}=v\nabla u$，可得式 (4.12)：

$$\oint_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S\equiv\oint_{\partial\Omega}v\nabla u\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\int_\Omega\nabla\cdot(v\nabla u)\,\mathrm{d}V=\int_\Omega(\nabla v\cdot\nabla u+v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}V.$$

将 u,v 互换位置并与原式相减，即得式 (4.13). □

Poisson 方程第 I 边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=-f(M), & M\in V\subseteq\mathbb{R}^3\\ u|_{\partial V}=\varphi(M),\end{cases}\tag{4.15}$$

物理上看，这是静电场的基本问题：空间区域 V 内有电荷体密度 $\rho=-\varepsilon f$，边界上电位已知为 φ，求 V 内电位 u.

由叠加原理，$u=v+w$，v,w 分别满足

$$\begin{cases}\nabla^2 v=-f(M),\\ v|_{\partial V}=0,\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla^2 w=0,\\ w|_{\partial V}=\varphi(M),\end{cases}$$

其中 v 表示在边界接地条件下体内电荷产生的电场，w 表示由边界约束引起的电场.

定义 4.3.1: Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数

定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2 G(M;N)=-\delta(M-N),\\ G|_{\partial V}=0.\end{cases}\tag{4.16}$$

的解 $G(M;N)$ 称为 Poisson 第 I 边值问题的 Green 函数.

物理上看，Green 函数就是边界接地条件下，置于 V 内 N 点电荷为 $+\varepsilon$ 的点源在 V 内 M 点产生的电场，仍然是一个基本解.

$$u(M)=\int_V f(N)G(M;N)\,\mathrm{d}N-\oint_{\partial V}\varphi(N)\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S. \tag{4.17}$$

证明.

$$\begin{aligned} u(M)&=\int_V u(N)\,\delta(M-N)\,\mathrm{d}N=-\int_V u(N)\,\Delta G(M;N)\,\mathrm{d}N\\ &=-\int_V u\,\Delta G\,\mathrm{d}N+\int_V G\,\Delta u\,\mathrm{d}N-\int_V G\,\underline{\Delta u}\,\mathrm{d}N \qquad \text{(Green-II)}\\ &=\oint_{\partial V}\cancel{G}\frac{\partial u}{\partial n}-\underline{u}\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S+\int_V Gf\,\mathrm{d}N\\ &=-\oint_{\partial V}\psi\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S+\int_V Gf\,\mathrm{d}N. \end{aligned}$$

□

Fourier 方法是求 Green 函数的基本方法，但对于一些特殊的区域，可以采用一些特殊方法，如镜像法.

方法 4.3.1: 镜像法

分解 $G=U+g$，U 满足 $\nabla^2U=-\delta(M-N)$，可取

$$U=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\ln r, & n=2\\ \dfrac{1}{4\pi r}, & n=3\end{cases}$$

而 g 满足

$$\begin{cases}\nabla^2 g=0,\\ g|_{\partial V}=-U,\end{cases}$$

是 N 的点电荷在边界上的感应电荷产生的电场.
区域外的点源在 V 内产生的电场满足 Laplace 方程，可以将边界感应电荷产生的电场 g 看作区域外. 某些虚设电荷产生的等效电场，这种来源于物理效应的方法叫镜像法.

例 4.3.1: 镜像法应用・半空间

求上半空间 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数.
V 内 $N(\xi,\eta,\zeta)$ 点的正电荷 ε 在空间 (x,y,z) 产生的电场为

$$U_0=\frac{1}{4\pi r}=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

可虚设电荷 $-\varepsilon$ 于 N 关于 $z=0$ 平面对称的点 $M_1(\xi,\eta,-\zeta)$，产生的电场

$$U_1=\frac{-1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}},$$

在边界上 $U_0|_{z=0} = -U_1|_{z=0}$

$$G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}}\right],$$

边界方向导数

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\zeta=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = \frac{-z}{2\pi\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}$$

故对于上半空间 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & z > 0 \\ u|_{z=0} = \varphi(x,y) \end{cases}$$

解的 Poisson 公式

$$u(x,y,z) = \frac{z}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\right]^{3/2}}$$

二维情况

$$G = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \quad u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2+y^2}$$

例 4.3.2: 镜像法应用・球域

求半径为 R 的球域内 Poisson 方程第 I 边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases} \nabla^2 G(M;N) = -\delta(M-N), & 0 \leqslant r < R \\ G|_{r=R} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=R} = \frac{R^2-r^2}{4\pi R(R^2+r^2-2Rr\cos\psi)^{3/2}}.$$

故球内 Dirichlet 问题，解的 Poisson 形式

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & 0 \leqslant r < R \\ u|_{r=R} = \varphi(\theta,\phi) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u(r,\theta,\phi) = \frac{1}{4\pi R}\oint_{S_R} \frac{(R^2-r^2)\varphi(\theta_0,\phi_0)\,\mathrm{d}S_0}{(R^2+r^2-2Rr\cos\psi)^{3/2}}.$$

Fourier 法 Fourier 法是求 Green 函数的基本方法，主要思想是按照特征函数作广义 Fourier 展开，包括分离变量与积分变换.

例 4.3.3: Fourier 法应用

求矩形区域 $\Omega = [0,L]\times[0,M]$ 上第 I 类边值 Poisson 方程的 Green 函数

$$\begin{cases}\nabla^2 G(x,y;\xi,\eta) = -\delta(x-\xi,y-\eta), \quad x,\xi\in[0,L];\ y,\eta\in[0,M]\\ G(0,y)=G(L,y)=G(x,0)=G(x,M)=0,\end{cases}$$

有特征值

$$G(x,y)=\sum_{m,n} C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{M}.$$

系数

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2\right]C_{mn} &= \frac{4}{LM}\int_0^M\int_0^L \delta(x-\xi,y-\eta)\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi y}{M}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{4}{LM}\sin\frac{m\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi\eta}{M}.\end{aligned}$$

后略.

例 4.3.4: Fourier 法应用・有限高

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, \quad x>0, y\in[0,a]\\ u(x,0)=\varphi(x),\ \ u(x,a)=\psi(x),\\ u(0,y)=0,\end{cases}$$

有

$$\begin{aligned}u(x,y) &= -\left[\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\eta=0}\mathrm{d}\xi+\int_0^{+\infty}\psi(\xi)\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\eta=a}\mathrm{d}\xi\right]\\ &= \int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left.\frac{\partial G}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}\mathrm{d}\xi-\int_0^{+\infty}\psi(\xi)\left.\frac{\partial G}{\partial \eta}\right|_{\eta=a}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

进而

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}=\sum_{n=1}^{\infty}4n\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\xi\sin\omega x}{n^2\pi^2+a^2\omega^2}\mathrm{d}\omega\cdot\cos\frac{n\pi\eta}{a}\cos\frac{n\pi y}{a};$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}4n\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\xi\sin\omega x}{n^2\pi^2+a^2\omega^2}\left[\varphi(\xi)-(-1)^n\psi(\xi)\right]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\xi\cdot\cos\frac{n\pi y}{a}.$$

*Poisson 方程第 II, III 边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = -f(M), & M\in V\subseteq\mathbb{R}^n\\ \left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_{\partial V}=\varphi(M), & \alpha,\beta\neq 0.\end{cases}\tag{4.18}$$

相应的 Green 函数

$$\begin{cases}\nabla^2 G = -\delta(M-N), & M,N\in V\subseteq\mathbb{R}^n\\ \left(\alpha G+\beta\dfrac{\partial G}{\partial n}\right)_{\partial V}=0, & \alpha,\beta\neq 0.\end{cases}$$

原问题的解

$$u(M)=\int_V f(N)G(M;N)\,\mathrm{d}N+\frac{1}{\beta}\oint_{\partial V}\varphi(N)G(M;N)\,\mathrm{d}S \tag{4.19}$$

$$=\int_V f(N)G(M;N)\,\mathrm{d}N-\frac{1}{\alpha}\oint_{\partial V}\varphi(N)\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{4.20}$$

$\beta=0$ 即第 I 边值问题．$\alpha=0$ 即第 II 边值问题，但此时表示内部有热源而边界绝热的稳恒温度场，这是不可能的，因此需要修正为

$$\begin{cases}\nabla^2 G = -\delta(M-N)+\dfrac{1}{v},\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial V}=0,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\nabla^2 G = -\delta(M-N),\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial V}=-\dfrac{1}{s},\end{cases}$$

其中 v,s 为 V 的体积和表面积．有解

$$u(M)=\int_V f(N)G(M;N)\,\mathrm{d}N+\oint_{\partial V}\varphi(N)G(M;N)\,\mathrm{d}S+\text{const}. \tag{4.21}$$

相容性条件

$$\int_V f(M)\,\mathrm{d}M+\oint_{\partial V}\varphi(M)\,\mathrm{d}S=0. \tag{4.22}$$

4.4　初值问题的基本解方法

本节主要用基本解方法来求解发展方程，如 $u_t=\mathcal{P}u$ 型方程

$$\begin{cases}u_t=\mathcal{P}u+f(M,t), & M\in\mathbb{R}^n, t>0\\ u(M,0)=\varphi(M).\end{cases} \tag{4.23}$$

这里所涉及的 $\mathcal{P}$ 是关于空间变量 M 的常系数线性偏微分算子．

定义 4.4.1: $u_t=\mathcal{P}u$ 型方程初值问题的基本解

基本解 $U(M,t)$ 满足

$$\begin{cases}U_t=\mathcal{P}U, & M\in\mathbb{R}^n, t>0\\ U(M,0)=\delta(M).\end{cases} \tag{4.24}$$

有

$$u(M,t)=U(M,t)*\varphi(M)+\int_0^t U(M,t-\tau)*f(M,\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.25}$$

证明过程略．

以及 $u_{tt}=\mathcal{P}u$ 型方程

$$\begin{cases} u_{tt}=\mathcal{P}u+f(M,t), & M\in\mathbb{R}^n, t>0 \\ u(M,0)=\varphi(M),\ \ u_t(M,0)=\psi(M). \end{cases} \tag{4.26}$$

定义 4.4.2: $u_{tt}=\mathcal{P}u$ 型方程初值问题的基本解

基本解 $U(M,t)$ 满足

$$\begin{cases} U_{tt}=\mathcal{P}U, & M\in\mathbb{R}^n, t>0 \\ U(M,0)=0,\ \ U_t(M,0)=\delta(M). \end{cases} \tag{4.27}$$

有

$$u(M,t)=U*\psi+\frac{\partial}{\partial t}(U*\varphi)+\int_0^t U(M,t-\tau)*f(M,\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.28}$$

*** 混合问题的 Green 函数** 对于发展方程的混合问题通常用分离变量法或积分变换法求解，当然也可以用 Green 函数 (点源函数) 法.

例 4.4.1: 一维波动方程的混合问题

一维波动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), & x\in(0,L),\ t>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

Green 函数 $G(x,t;\xi)$ 满足

$$\begin{cases} G_{tt}=a^2G_{xx}, & x,\xi\in(0,L),\ t>0 \\ G(0,t)=G(L,t)=0 \\ G(x,0)=0, & G_t(x,0)=\delta(x-\xi) \end{cases}$$

利用 Fourier 方法可得

$$G(x,t;\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi a}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi at}{L},$$

进而解

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\int_0^L\psi(\xi)G\,\mathrm{d}\xi+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L\varphi(\xi)G\,\mathrm{d}\xi+ \\ &\int_0^t\int_0^L f(\xi,\tau)G(x,t-\tau;\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{4.29}$$

附录 A 附录

A.1 特征值问题

1. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

2. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

3. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(L) = 0 \end{cases}$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

4. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$

$$\lambda_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}\right]^2, \quad X_n = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

5. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \implies \gamma = -hL\tan\gamma > 0,$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \sin\frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

6. $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases} \implies \gamma = -hL\cot\gamma > 0,$

$$\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{L}\right)^2, \quad X_n = \cos\frac{\gamma_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

7. $$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) - h_1 X'(0) = 0 \\ X(L) + h_2 X'(L) = 0 \end{cases} \implies \tan L\gamma = \frac{(h_1 + h_2)\gamma}{h_1 h_2 \gamma^2 - 1},$$

$$\lambda_n = \gamma_n^2, \quad X_n = \sin\gamma_n x + h_1\gamma_n \cos\gamma_n x, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

8. $$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \end{cases}$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n = A\cos nx + B\sin nx, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

A.2 Fourier 和 Laplace

Fourier 级数 定义实函数 f, g 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的内积

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = 0. \tag{A.1a}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x + \cos(n+m)x\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{nm}; \tag{A.1b}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x\,\mathrm{d}x = 0; \tag{A.1c}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x - \cos(n+m)x\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{nm}. \tag{A.1d}$$

因此

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \ldots\}$$

构成 $[-\pi, \pi]$ 上一组完备的基底，归一化之

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}.$$

用这一组基可将周期为 2π 的函数 $f(x)$ 展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \cos nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\langle f, \sin nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Fourier 变换 利用 $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$，可得到 Fourier 级数的复数形式：

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x.$$

对于其他周期 $T = \lambda,\ k = 2\pi/\lambda$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nkx}, \quad c_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nkx}\,\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$ 不是周期函数时，就不能用 Fourier 级数展开．然而，若认为其周期 $\lambda = 2N$ 充分大，令 $\xi = nk$，

$$f(x) = \sum_{\xi}\left[\frac{k}{2\pi}\int_{-N}^{N} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}.$$

再让 $N \to \infty,\ k \to 0$，定义

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x,$$

以及

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi,$$

这就是 Fourier 变换．

A.2.1 Fourier 系数

下面简要介绍不同函数的 Fourier 系数如何计算．

多项式函数 只需要利用分部积分将 x^k 不断微分降幂，

$$\begin{aligned}
\int x\cos ax\,\mathrm{d}x &= \frac{x\sin ax}{a} + \frac{\cos ax}{a^2} + \text{const}.\\
\int x\sin ax\,\mathrm{d}x &= -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} + \text{const}.\\
\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2\sin ax}{a} + \frac{2x\cos ax}{a^2} - \frac{2\sin ax}{a^3} + \text{const}.\\
\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x &= -\frac{x^2\cos ax}{a} + \frac{2x\sin ax}{a^2} + \frac{2\cos ax}{a^3} + \text{const}.\\
\int x^3\cos ax\,\mathrm{d}x &= \frac{x^3\sin ax}{a} + \frac{3x^2\cos ax}{a^2} - \frac{6x\sin ax}{a^3} - \frac{6\cos ax}{a^4} + \text{const}.\\
\int x^3\sin ax\,\mathrm{d}x &= -\frac{x^3\cos ax}{a} + \frac{3x^2\sin ax}{a^2} + \frac{6x\cos ax}{a^3} - \frac{6\sin ax}{a^4} + \text{const}.
\end{aligned}$$

注. 可以证明，按照降幂顺序，系数的规律是：

- 正弦系数的符号 $-,+,+,-$，余弦系数的符号 $+,+,-,-$；
- 共有 $n+1$ 项，系数分别为

$$\frac{1}{a},\ \frac{n}{a^2},\ \frac{n(n-1)}{a^3},\ \ldots,\ \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

- 正弦函数 cos 打头，余弦 sin 打头，然后正余弦交替．

三角函数 积分结果已经在 (A.1) 中给出.

指数函数 对于指数函数的 Fourier 系数，只需记住

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &:= \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\cdot\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + \mathrm{const};\\ \mathcal{J} &:= \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\cdot\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + \mathrm{const}.\end{aligned}$$

证明. 分部积分

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}\sin bx = \frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\mathcal{J};\\ \mathcal{J} &= -\frac{1}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}\cos bx = -\frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\mathcal{I}.\end{aligned}$$

即可解得上式. □

双曲函数 有

$$\begin{aligned}\int \cosh ax\cos bx\,\mathrm{d}x &= \frac{a\sinh ax\cos bx + b\cosh ax\sin bx}{a^2+b^2} + \mathrm{const},\\ \int \cosh ax\sin bx\,\mathrm{d}x &= \frac{a\sinh ax\sin bx - b\cosh ax\cos bx}{a^2+b^2} + \mathrm{const},\\ \int \sinh ax\cos bx\,\mathrm{d}x &= \frac{a\cosh ax\cos bx + b\sinh ax\sin bx}{a^2+b^2} + \mathrm{const},\\ \int \sinh ax\sin bx\,\mathrm{d}x &= \frac{a\cosh ax\sin bx - b\sinh ax\cos bx}{a^2+b^2} + \mathrm{const}.\end{aligned}$$

对数函数 对数函数乘正弦函数分部积分后会出现 $\mathrm{Si}\,x$.

反三角函数 反三角函数更是没有积分结果.

A.2.2 Fourier 变换

Fourier 变换的性质 Fourier 变换的定义见第 20 页定义 3.0.1.

1. 线性

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g];$$

2. 微分

$$\mathcal{F}[f'] = \mathrm{i}\xi\hat{f}.$$

3. 积分

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\xi}\hat{f}.$$

   其中积分式的 Fourier 变换存在，且 $\hat{f}(0) = 0$.

4. $\hat{f}(\xi)$ 微分

$$\hat{f}'(\xi) = \mathcal{F}[-\mathrm{i}xf](\xi).$$

5. $\hat{f}(\xi)$ 积分

$$\int_{-\infty}^{\xi} \hat{f}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \mathcal{F}\left[\frac{f(x)}{-\mathrm{i}x}\right](\xi) + C_1, \tag{A.2}$$

$$\int_{\xi}^{+\infty} \hat{f}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \mathcal{F}\left[\frac{f(x)}{\mathrm{i}x}\right](\xi) + C_2. \tag{A.3}$$

6. 位移性质

$$\mathcal{F}\left[f(x-a)\right](\xi) = \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi},$$
$$\hat{f}(\xi-\alpha) = \mathcal{F}\left[f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\right](\xi).$$

7. 相似

$$\mathcal{F}\left[f(kx)\right](\xi) = \frac{1}{|k|}\hat{f}\left(\frac{\xi}{k}\right).$$

8. 卷积[I]

$$\mathcal{F}\left[f*g\right] = \hat{f}\hat{g}.$$

9. 象函数卷积

$$\hat{f}*\hat{g} = 2\pi\mathcal{F}\left[fg\right]$$

10. 反射

$$\mathcal{F}\left[\hat{f}(\xi)\right](x) = 2\pi f(-x).$$

因此 Fourier 逆变换

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

在 f 连续点处 $\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{f}(\xi)\right](x) = f(x)$.

高维下 Fourier 变换的性质是相似的.

Fourier 正余弦变换的性质 [II]

1. 微分

$$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[f'\right](\xi) = f(x)\sin\xi x\big|_{x=0}^{+\infty} - \xi\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[f\right](\xi);$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[f'\right](\xi) = f(x)\cos\xi x\big|_{x=0}^{+\infty} + \xi\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[f\right](\xi);$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[f''\right](\xi) = \left[f'(x)\sin\xi x - \xi f(x)\cos\xi x\right]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[f\right](\xi);$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[f''\right](\xi) = \left[f'(x)\cos\xi x - \xi f(x)\sin\xi x\right]_{x=0}^{+\infty} - \xi^2\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[f\right](\xi).$$

2. 积分

$$\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[\int_0^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right](\xi) = \frac{1}{\xi}\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[f\right](\xi);$$
$$\mathcal{F}_{\mathrm{c}}\left[\int_0^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right](\xi) = -\frac{1}{\xi}\mathcal{F}_{\mathrm{s}}\left[f\right](\xi).$$

其中 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

[I] f, g 的卷积

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta)g(x-\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

且有 $f*g = g*f$.

[II] 定义见第 21 页 3.1.2.

3. 象函数微分

$$\hat{f}_s' = -\mathcal{F}_c[xf] \qquad \hat{f}_s'' = -\mathcal{F}_s\left[x^2 f\right]$$
$$\hat{f}_c' = \mathcal{F}_s[xf] \qquad \hat{f}_c'' = -\mathcal{F}_c\left[x^2 f\right].$$

4. 相似

$$\mathcal{F}_s[f(kx)](\xi) = \frac{1}{k}\hat{f}_s\left(\frac{\xi}{|k|}\right),$$
$$\mathcal{F}_c[f(kx)](\xi) = \frac{1}{|k|}\hat{f}_c\left(\frac{\xi}{|k|}\right)$$

5. 反射

$$\mathcal{F}_s\left[\hat{f}_s(x)\right](\xi) = -\frac{\pi}{2}f(-\xi),$$
$$\mathcal{F}_c\left[\hat{f}_c(x)\right](\xi) = \frac{\pi}{2}f(-\xi).$$

Fourier 变换函数表

1. $\mathcal{F}[\delta(x)] = 1, \qquad \mathcal{F}\left[\delta^{(n)}(x)\right] = (\mathrm{i}\xi)^n;$
2. $\mathcal{F}[1] = 2\pi\,\delta(\xi), \qquad \mathcal{F}[x^n] = 2\pi\mathrm{i}^n\,\delta^{(n)}(\xi);$
3. $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\right] = 2\pi\,\delta(\xi - a);$
4. $\mathcal{F}[\cos ax] = \pi\left[\delta(\xi - a) + \delta(\xi + a)\right];$
5. $\mathcal{F}[\sin ax] = -\mathrm{i}\pi\left[\delta(\xi - a) - \delta(\xi + a)\right];$
6. $\mathcal{F}\left[\cos ax^2\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{\xi^2}{4a} + \sin\frac{\xi^2}{4a}\right);$
7. $\mathcal{F}\left[\sin ax^2\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{\xi^2}{4a} - \sin\frac{\xi^2}{4a}\right);$
8. $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-a|x|}\right] = \frac{2a}{a^2 + \xi^2};$
9. $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-ax^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/4a};$
10. $\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\xi^2/4a - \pi/4\right)};$
11. $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = -\mathrm{i}\pi\,\mathrm{sgn}\,\xi;$
12. $\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^n}\right] = -\mathrm{i}\pi\frac{(-\mathrm{i}\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{sgn}\,\xi, \qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2}\right] = -\pi\xi\,\mathrm{sgn}\,\xi;$
13. $\mathcal{F}[|x|^\alpha] = -2\Gamma(\alpha + 1)\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)|\xi|^{-1-\alpha};$
14. $\mathcal{F}[\mathrm{H}(x)] = \frac{1}{\mathrm{i}\xi} + \pi\,\delta(\xi);$
15. $\mathcal{F}[\Lambda(x)] = \mathrm{sinc}\,\frac{\xi}{2}$;(系数应该是错的)
16. $\mathcal{F}[\mathrm{sinc}\,x] = \Pi\left(\frac{\xi}{2}\right)$(系数应该是错的)

Heaviside 阶梯函数

$$\mathrm{H}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

A.2.3　Laplace 变换

Laplace 变换的性质　注：$x<0$ 函数值取 0.

1. 线性
2. 微分

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f'\right]&=\xi\bar{f}-f(0);\\ \mathcal{L}\left[f''\right]&=\xi^2\bar{f}-\xi f(0)-f'(0);\\ \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right]&=\xi^n\bar{f}-\left(\xi^{n-1}f(0)+\xi^{n-2}f'(0)+\cdots+f^{(n-1)}(0)\right).\end{aligned}$$

3. 积分
$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]=\frac{1}{\xi}\bar{f}.$$
4. 像函数微分
$$\bar{f}'=\mathcal{L}\left[-xf\right].$$
5. 像函数积分
$$\int_\xi^{+\infty}\bar{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\mathcal{L}\left[\frac{f}{x}\right].$$
积分路径 $\mathrm{Re}\,\xi>\sigma_0$.
6. 复频移与时滞
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\right]&=\bar{f}(\xi-\alpha),\quad &\alpha\in\mathbb{C}\\ \mathcal{L}\left[f(x-a)\right]&=\bar{f}\,\mathrm{e}^{-a\xi},\quad &a\geqslant 0\end{aligned}$$
7. 相似
$$\mathcal{L}\left[f(kx)\right]=\frac{1}{k}\bar{f}\left(\frac{\xi}{k}\right),\quad k>0$$
8. 卷积
$$\mathcal{L}\left[f*g\right]=\mathcal{L}\left[f\right]\mathcal{L}\left[g\right]$$
9. 像函数卷积
$$\mathcal{L}\left[fg\right](\xi)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\bar{f}(\zeta)\bar{g}(\xi-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$
其中 $\xi>\max(\sigma_f,\sigma_g)$

Laplace 变换函数表

1. $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=1,\quad \mathcal{L}\left[\delta^{(n)}(t)\right]=s^n;$
2. $\mathcal{L}\left[\mathrm{sgn}\,t\right]=\mathcal{L}\left[\mathrm{H}(t)\right]=\dfrac{1}{s},\quad \mathcal{L}\left[t\,\mathrm{H}(t)\right]=\dfrac{1}{s^2};$
3. $\mathcal{L}\left[\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{s}};$
4. $\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{at}\right]=\dfrac{1}{s-a};$
5. $\mathcal{L}\left[\sin at\right]=\dfrac{a}{s^2+a^2},\quad \mathcal{L}\left[\sinh at\right]=\dfrac{a}{s^2-a^2};$
6. $\mathcal{L}\left[\cos at\right]=\dfrac{s}{s^2+a^2},\quad \mathcal{L}\left[\cosh at\right]=\dfrac{s}{s^2-a^2};$