CC1 Cinématique et Dynamique du point

octobre 2022

Ex. 1 : Analyse dimensionnelle

Principe : les relations entre les grandeurs φ doivent être homogènes.

a) $[F] = M.L.T^{-2}$

or $[F] = \left[G \dfrac{mM}{(r+R)^2} \right] = \dfrac{[G][m]^2}{[r]^2}$

$(=) \quad [G] = [F] \times [m]^{-2} \times [r]^2 = M.L.T^{-2}.M^{-2}.L^2$

soit $[G] = L^3.M^{-1}.T^{-2}$

$\text{unité}_{SI}(G) = m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

b) p = portée $(=)$ $[p] = L$ et $[g] = L.T^{-2}$, $[v_0] = L.T^{-1}$

① $p = \dfrac{mg}{v_0}\cos(2\alpha)$: $[p] = \left[\dfrac{mg\cos 2\alpha}{v_0}\right]$

$\dfrac{[m][g][\cos(2\alpha)]}{[v_0]} = M \times \dfrac{L.T^{-2}}{L.T^{-1}}.1 = M.T^{-1} \neq [p] = L$

expression impossible car inhomogène.

② $\left[\dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}\right] = \dfrac{[v_0]^2}{[g]}[\sin(2\alpha)] = \dfrac{L^2.T^{-2}}{L.T^{-2}}.1 = L = [p]$.

possible car homogène.

③ $\left[\dfrac{g^2}{v_0}\tan(2\alpha)\right] = \dfrac{[g]^2[\tan(2\alpha)]}{[v_0]} = \dfrac{L^2.T^{-4}.1}{L.T^{-1}} = L.T^{-3} \neq [p]$

impossible car inhomogène.

Ex 2. Opérations sur les vecteurs

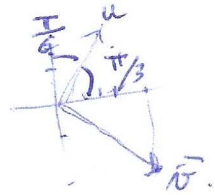
$$\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}\ ; \quad \vec{v} = 2\sqrt{3}\,\vec{i} - 2\vec{j}\ ; \quad \vec{w} = \vec{u} + (\sqrt{3}-1)\,\vec{v}.$$

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{4\times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4.$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (1\times 2\sqrt{3}) + (\sqrt{3})\times -2 = 0$ $\quad$ les vecteurs sont $\perp$. l'angle est de $(-90)°$.

c) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{i}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{i}\|} = \dfrac{1}{2\times 1} = \dfrac{1}{2}$



donc $(\widehat{\vec{u},\vec{i}}) = \dfrac{\pi}{3}$

$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{j}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{j}\|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{j}}) = \dfrac{\pi}{6}$

d) $\vec{w} = \vec{u} + (\sqrt{3}-1)\,\vec{v}$

$= \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j} + (\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}\,\vec{i} - 2\vec{j}) =$

$= \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j} + \underbrace{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\,\vec{i}}_{2\times 3\,\vec{i}} - 2\sqrt{3}\,\vec{j} - 2\sqrt{3}\,\vec{i} + 2\vec{j}$

$=$

$= (1 + 6 - 2\sqrt{3})\,\vec{i} + (\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2)\,\vec{j}$

$\vec{w} = (7 - 2\sqrt{3})\,\vec{i} + (2 - \sqrt{3})\,\vec{j}$

donc $w_x = 7 - 2\sqrt{3}$ et $w_y = 2 - \sqrt{3}$.

Ex 3 : Cinématique en coordonnées cartésiennes.

$$\vec{r}(t) = (t^3 - 3t^2 + 10)\,\vec{u_x}$$

a) $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = (3t^2 - 6t)\,\vec{u_x}$

b) $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = (6t - 6)\,\vec{u_x}$

c) $\vec{a}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{6}{6} = 1\,s$

$\vec{v}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow 3t^2 - 6t = 0$

$\Leftrightarrow 3t(t-2) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0\,s \text{ ou } t - 2 = 0 \\ \qquad\qquad\quad t = 2\,s \end{cases}$

d)

t	0		1		2		$+\infty$
$a(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
$v_x(t)$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	
$a(t)\cdot v_x(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variation		accéléré		retardé		accéléré	

Ex. 4 : Force de tension et chute libre.

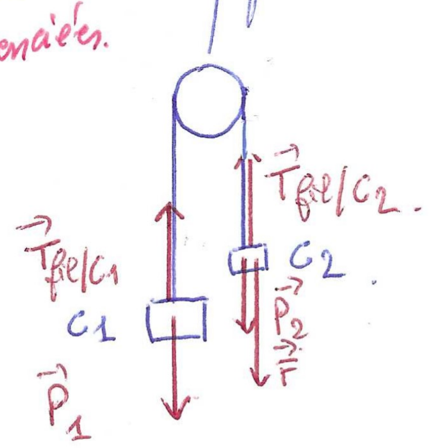
a) 1) système 1 {C_1 : charge}, BdF : Poids de C_1 $\vec{P_1}$
tension du fil sur C_1 : $\vec{T}_{fil/C_1}$.

S 2 {C_2 : contrepoids}, BdF : Poids de C_2 $\vec{P_2}$
tension du fil sur C_2 : $\vec{T}_{fil/C_2}$
force du moteur : $\vec{F}$

2) PFD pour C_1 :

⚠ les masses et les accélérations doivent être différenciées.

schéma simplifié



$(1) \Leftrightarrow M\vec{a}_1 = \vec{P}_1 + \vec{T}_{fil/C_1}$

PFD pour C_2 :

$(2) \Leftrightarrow m\,\vec{a}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}_{fil/C_2} + \vec{F}$

en projetant sur (Oz) :

$(1) \Leftrightarrow M a_{1z} = -Mg + T_{fil/C_1}$ avec $\vec{T}_{fil/C_1} = +T_{fil/C_1}\vec{u}_z$

$(2) \Leftrightarrow m a_{2z} = -mg + T_{fil/C_2} - F$ avec $\begin{cases} \vec{T}_{fil/C_2} = -T_{fil/C_2}\vec{u}_z \\ \vec{F} = -F\vec{u}_z \end{cases}$

3) Pour un cable tendu inextensible de masse négligeable nous avons : $\begin{cases} T_{fil/C_1} = T_{fil/C_2} = \underline{T} \\ a_{1z} = -a_{2z} = \underline{a} \end{cases}$

4) Les équations deviennent : $\begin{cases} (1) & Ma = -Mg + T \\ (2) & -ma = -mg + T - F \end{cases}$ 2 inconnues (T, a) et 2 équations.

Il faut obtenir une expression pour T sans faire intervenir a. On exprime a à partir de (1) que l'on substitue dans (2).

$(1) \Leftrightarrow a = -g + T/M \Rightarrow$ dans (2) $-m\left(-g + \frac{T}{M}\right) = -mg + T - F$

donc $mg - \frac{m}{M}T = -mg + T - F$

$\Leftrightarrow 2mg + F = T + \frac{m}{M}T = T\left(1 + \frac{m}{M}\right) = T\left(\frac{M+m}{M}\right)$

Finalement : $T = \frac{M}{(M+m)} \times (2mg + F)$

5) A.N. : $T = \frac{700}{700+300}\left(2 \times 300 \times 10 + 5.10^3\right)$

$T = 7700 < T_{max}$ donc le cable résiste à la force appliqué.

b) $F = 0$; les $\not{s}$ sont en chute

1) Tout comme au a)③ ; les tensions ont m̂ norme et direction et sens et les accélérations ont des composantes opposées. si $a_{1z} = a_z$ alors $a_{2z} = -a_z$

2) Les équations du a)④ deviennent : $\boxed{\begin{cases} Ma_z = -Mg + T & (1) \\ -ma_z = -mg + T & (2) \end{cases}}$

Avec (1) on obtient : $T = M(a_z + g)$
que l'on remplace dans (2) : $-ma_z = -mg + M(a_z+g)$

$mg = ma_z + Ma_z + Mg$

$a_z(m+M) = g(m-M)$

finalement : $\boxed{a_z = g\dfrac{(m-M)}{(m+M)}} = \underline{cste.}$

On remarque que $a_z < 0$ car $m < M$ ce qui est cohérent avec une chute du corps le ⊕ lourd (C_1). Par ailleurs, a_z est une constante.

3) On détermine $z(t)$ à partir de $a_z(t)$ avec <u>2 intégrations successives</u> (2 recherches de primitives, en tenant compte des conditions initiales)

* $v_z(t) = a_z \times t + v_z(0)$ avec $v_z(0) = 0 \Rightarrow v_z(t) = a_z \times t$.

* $z(t) = \frac{1}{2} a_z \times t^2 + z(0)$ avec $z(0) = 8$ m et $a_z = 10 \times \dfrac{300-700}{300+700} = -4$ m/s²

donc $\boxed{z(t) = -2t^2 + 8}$.

Le temps de chute : t_c, est tel que $\underline{z(t_c) = 0} \Leftrightarrow -2t_c^2 + 8 = 0$

soit $t_c^2 = \frac{8}{2} = 4 \Leftrightarrow \boxed{t_c = \sqrt{4} = 2\ s.}$