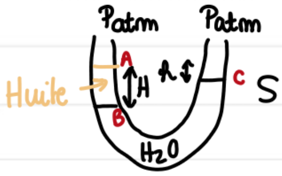
Exercice n° 1 :



$S = 1\,cm^2$

$V_{Huile} = 10\,cm^3$

$h_2 = 15\,mm$

a) Masse volumique de l'huile :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Soit H la hauteur d'huile, $V = S.H$

$$\Leftrightarrow H = \frac{V}{S} = \frac{10.10^{-6}}{1.10^{-4}} = 10.10^{-2}\ m = 10\ cm$$

Relation de l'hydrostatique :

$P + \rho g z = cst$ le long d'une ligne de courant pour un fluide donné

↦ Pour l'huile :

$$P_A + \rho_{huile}\, g\, z_A = P_B + \rho_{huile}\, g\, z_B$$

$$\Leftrightarrow P_{atm} + \rho_{huile}\, g\, z_A = P_B + \rho_{huile}\, g\, z_B$$

$$\Leftrightarrow \rho_{huile} = \frac{P_B - P_{atm}}{g(z_A - z_B)} = \frac{P_B - P_{atm}}{gH}$$

↦ Pour l'eau :

$$P_B + \rho_{eau}\, g\, z_B = P_C + \rho_{eau}\, g\, z_C$$

$$\Leftrightarrow P_B + \rho_{eau}\, g\, z_B = P_{atm} + \rho_{eau}\, g\, z_C$$

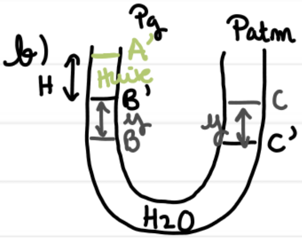
$$\Leftrightarrow P_B = P_{atm} + \rho_{eau}\, g\,(z_C - z_B)$$
$$= P_{atm} + \rho_{eau}\, g\,(H - h_2)$$

$\rho_{eau} = 1000\ kg/m^3$

Donc :
$$\rho_{huile} = \frac{\rho_{eau}\, g\,(H - h_2)}{gH} = \frac{\rho_{eau}\,(H - h_2)}{H} = \frac{1000\,(10.10^{-2} - 15.10^{-3})}{10.10^{-2}}$$
$$= 850\ kg/m^3$$

$$\boxed{\rho_{huile} = 850\ kg.m^{-3}}$$

b)



différence de hauteur $y = 15\,cm$.

D'après la loi de l'hydrostatique, on a :

$$\begin{cases} P_{A'} + \rho_{huile}\, g\, z_{A'} = P_{B'} + \rho_{huile}\, g\, z_{B'} \\ P_{B'} + \rho_{eau}\, g\, z_{B'} = P_{C'} + \rho_{eau}\, g\, z_{C'} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_g + \rho_{huile}\, g\, z_{A'} = P_{B'} + \rho_{huile}\, g\, z_{B'} \\ P_{B'} + \rho_{eau}\, g\, z_{B'} = P_{atm} + \rho_{eau}\, g\, z_{C'} \end{cases}$$

Donc : $P_{B'} = P_{atm} + \rho_{eau}\, g\, (z_{C'} - z_{B'})$ $\quad = (z_{C'} - z_C) + (z_C - z_A) + (z_A - z_{A'}) + (z_{A'} - z_{B'}) = -y - h_2 - y + H$

$$= P_{atm} - \rho_{eau}\, g\, (h_2 + 2y - H)$$

Alors : $P_g = P_{B'} + \rho_{huile}\, g\, (z_{B'} - z_{A'})$

$$= P_{atm} - \rho_{eau}\, g\, (h_2 + 2y - H) - \rho_{huile}\, g\, H$$

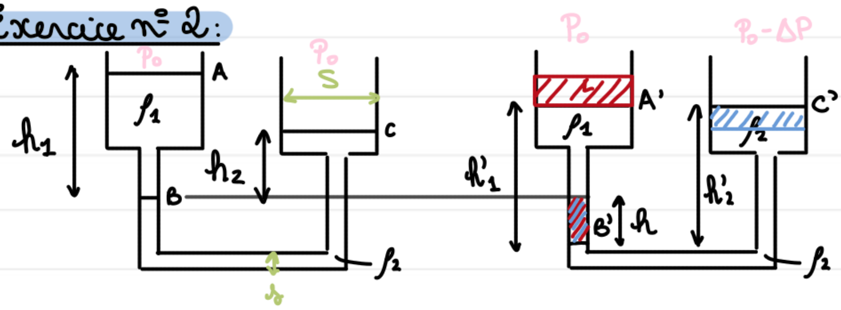
$P_{atm} = 10^5\ Pa$

$$= 10^5 - 1000 \cdot 10 \cdot (15 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 15 \cdot 10^{-2} - 10 \cdot 10^{-2}) - 850 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-2}$$
$$= 10^5 - 2150 - 850$$
$$= 97\,000\ Pa$$
$$= 0{,}97\ atm$$

CCL : la pression relative vaut :

$$\boxed{\begin{aligned} P_g - P_{atm} &= 0{,}97 - 1 = -0{,}03\ atm \\ &= -3000\ Pa \end{aligned}}$$

Exercice n° 2 :



a) D'après les lois de l'hydrostatiques, on a avec l'état 2 :

$$\begin{cases} P_{A'} + \rho_1\, g\, z_{A'} = P_{B'} + \rho_1\, g\, z_{B'} & (1) \\ P_{B'} + \rho_2\, g\, z_{B'} = P_{C'} + \rho_2\, g\, z_{C'} & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_0 + \rho_1 g z_{A'} = P_{B'} + \rho_1 g z_{B'} \\ P_{B'} + \rho_2 g z_{B'} = P_0 - \Delta P + \rho_2 g z_{C'} \end{cases}$$

On a : (2)

$$P_{B'} = P_0 - \Delta P + \rho_2 g (z_{C'} - z_{B'})$$

Alors : (1) $P_0 + \rho_1 g z_{A'} = P_0 - \Delta P + \rho_2 g (z_{C'} - z_{B'}) + \rho_1 g z_{B'}$

$$\Leftrightarrow \rho_1 g z_{A'} = -\Delta P + \rho_2 g (z_{C'} - z_{B'}) + \rho_1 g z_{B'}$$

$$\Leftrightarrow \rho_1 g (z_{A'} - z_{B'}) = -\Delta P + \rho_2 g (z_{C'} - z_{B'})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta P = \rho_2 g h'_2 - \rho_1 g h'_1} \quad \Leftrightarrow \boxed{\frac{\Delta P}{g} = \rho_2 h'_2 - \rho_1 h'_1}$$

D'après l'état 1, on a :

$$\begin{cases} P_A + \rho_1 g z_A = P_B + \rho_1 g z_B \\ P_B + \rho_2 g z_B = P_C + \rho_2 g z_C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_0 + \rho_1 g z_A = P_B + \rho_1 g z_B \\ P_B + \rho_2 g z_B = P_0 + \rho_2 g z_C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_0 = P_B - \rho_1 g h_1 & \text{car, } z_B - z_A = -h_1 \\ P_0 = P_B - \rho_2 g h_2 & \text{car, } z_B - z_C = -h_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad \Rightarrow \boxed{\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2}$$

Par conservation du volume :

$$h_2 + h + \sim = h_2'$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} & h \times s = S[h_1 + h - h_1'] \\ \text{et :} & h \times s = S[h_2' - h_2 - h] \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{h \times s}{S} - h = h_1 - h_1' \quad \Rightarrow h_1' = h\left(1 - \frac{s}{S}\right) + h_1$$

$$\frac{h \times s}{S} + h = h_2' - h_2 \quad \Rightarrow h_2' = h\left(1 + \frac{s}{S}\right) + h_2$$

Donc : $\Delta P = g\left[\rho_2\left(h_2 + h\left(1+\frac{s}{S}\right)\right)\right] - \left[\rho_1\left(h_1 + h\left(1-\frac{s}{S}\right)\right)\right]$

$$= g\left[\cancel{\rho_2 h_2} + \rho_2 h\left(1+\frac{s}{S}\right) - \cancel{\rho_1 h_1} - \rho_1 h\left(1-\frac{s}{S}\right)\right]$$

$$= gh\left(\rho_2\left(1+\frac{s}{S}\right) - \rho_1\left(1-\frac{s}{S}\right)\right)$$

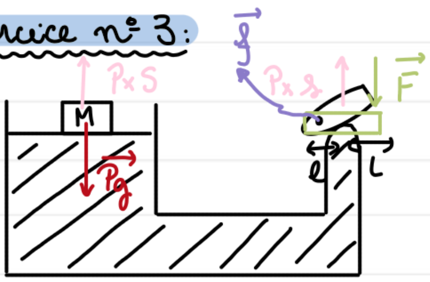
$$\boxed{\Delta P = hg\left[(\rho_2-\rho_1) + \frac{s}{S}(\rho_2+\rho_1)\right]}$$

b) La sensibilité est :

$s = \frac{h}{\Delta P}$ et sera d'autant plus élevée que $(\rho_2-\rho_1) + \frac{s}{S}(\rho_2+\rho_1)$ est petit.

C'est-à-dire lorsque : $\rho_2 \simeq \rho_1$
et $\frac{s}{S}$ petit $\Rightarrow S \gg s$

Exercice n°3 :



À gauche, à l'équilibre :

$$\vec{P_g} + \vec{P}\times S = 0$$
$$\Leftrightarrow -Mg + PS = 0$$
$$\Leftrightarrow PS = Mg$$
$$\Leftrightarrow P = \frac{Mg}{S} = \frac{Mg}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4Mg}{\pi D^2} = 19.10^5 \text{ Pa}$$

À droite, à l'équilibre :

$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$: pas interessant car on ne connait pas $\vec{f}$

Il faut donc écrire la somme des moments des forces.

Moment d'une force = intensité de la force × Distance à l'axe de rotation

$$\Sigma\vec{M} = \vec{M}(\vec{f}) + M(\vec{F}) + \vec{M}(\overrightarrow{P\times s}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow f\times 0 - F(L+l) + P\times s\times l = 0$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{P\times s\times l}{L+l} = \frac{P\times\pi d^2\times l}{4(L+l)} = 60{,}14 \text{ N}$$

Exercice n° 4 :

Référentiel en mouvement

Initialement, la surface du liquide est plane

Lorsque le container tourne, la surface du liquide n'est plus plane

La force centrifuge s'applique, plus on s'éloigne du centre, plus la force est importante.

1) À l'équilibre, les forces en présence :

- le poids : $\rho\vec{g} = -\rho g \vec{e_z}$

$$\vec{a_e} = \underbrace{\overrightarrow{a_{R_0}}(O_1)}_{\substack{=0 \\ \text{car, } O_1 \equiv O}} + \underbrace{\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)}_{\substack{\text{varia}^{\circ} \text{ temporelle} \\ \text{de la vitesse} \\ \text{angulaire } = 0}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

- la force d'entrainement centrifuge : $\rho\vec{a_e}$ avec $\vec{a_e} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

$$= -\omega^2 x \vec{e_x}$$

donc : $-\rho\vec{a_e} = -\rho\omega^2 x \vec{e_x}$

$\rho\vec{a_e} = \rho\omega^2 x \vec{e_x}$

$$\rightarrow \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times z - \omega \times 0 \\ \omega x - 0z \\ 0 \times 0 - 0 \times x \end{pmatrix}$$

La relation d'équilibre s'écrit pour un référentiel en mouvement.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, P = -\rho g \vec{e_z} + \rho\omega^2 x \vec{e_x} = \Sigma \vec{F}$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial P}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial P}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z} = -\rho g \vec{e_z} + \rho\omega^2 x \vec{e_x}$$

$$\begin{cases} \partial P / \partial x = \rho\omega^2 x \\ \partial P / \partial z = -\rho g \end{cases} \Rightarrow dP = \rho\omega^2 x\, dx - \rho g\, dz$$

Par intégration : $P = \rho\dfrac{\omega^2 x^2}{2} - \rho g z + cst$

Déterminons la constante d'intégration.

condition limite : À la surface libre, $P = P_{atm}$ et d'après l'énoncé en $x = 0$, $z = h_1$

D'où $P_{atm} = \rho\omega^2 \times 0 - \rho g h_1 + cst$

$\Rightarrow cst = P_{atm} + \rho g h_1$

$$P = \rho\omega^2\frac{x^2}{2} - \rho g z + P_a + \rho g h_1 \Rightarrow z = \frac{-P}{\rho g} + \frac{\omega^2 x^2}{2g} + \frac{P_a}{\rho g} + h_1$$

À la surface libre : $P = P_a$ d'où $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_1$

2) Équation de la surface libre en fonction de h_0 :

↦ Conservation du volume :

initialement, $V_i = \pi R^2 h_0$

Lorsque le container tourne : $V_t = \int_0^{z}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\theta\,dz$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} z(r)\, r\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^{R} \left(\frac{\omega^2 r^3}{2g} + h_1 r\right) dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{\omega^2 r^4}{8g} + \frac{h_1 r^2}{2}\right]_0^R$$

$$= \frac{\omega^2 \pi R^4}{4g} + h_1 \pi R^2$$

Donc : $\pi R^2 h_0 = \frac{\omega^2 \pi R^4}{4g} + h_1 \pi R^2$

$\Leftrightarrow \pi h_0 = \frac{\omega^2 \pi R^2}{4g} + h_1 \pi$

$\Leftrightarrow h_0 = \frac{\omega^2 R^2}{4g} + h_1$ $\Rightarrow z = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$

$$= h_0 + \frac{\omega^2}{4g}(2r^2 - R^2)$$

Exercice n° 5 :

1) • Expression de ρ en fonction de P, P_0 et ρ_0.

↦ loi polytropique : $\frac{P}{\rho^k} = cst$

d'où $\frac{P}{\rho^k} = \frac{P_0}{\rho_0^k}$

$$\Rightarrow \rho = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/k} \times \rho_0$$

• Expression de la pression en fonction de l'altitude.

↦ D'après la relation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur :

$$dP = -\rho g \, dz$$
$$= -\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/k} g \rho_0 \, dz = -P^{1/k} \cdot P_0^{-1/k} g \rho_0 \, dz$$

$$\Leftrightarrow \quad dP \cdot P^{-1/k} = -P_0^{-1/k} g \rho_0 \, dz$$

On intègre : $$\left[\frac{P^{-\frac{1}{k}+1}}{-\frac{1}{k}+1}\right]_{P_0}^{P} = -P_0^{-1/k} g \rho_0 [z]_{z_0}^{z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k}{k-1}\left(P^{\frac{k-1}{k}} - P_0^{\frac{k-1}{k}}\right) = -P_0^{-1/k} g \rho_0 (z - \underset{0}{z_0})$$

$$\Leftrightarrow \quad P_0^{\frac{k-1}{k}}\left[\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = -\frac{k-1}{k} P_0^{-1/k} \rho_0 g z$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 = -\frac{k-1}{k} P_0^{-1} \rho_0 g z$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g z}{P_0}$$

$$\Rightarrow \quad P = P_0 \left[1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g z}{P_0}\right]^{k/k-1}$$

- On en déduit $\rho(z)$:

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{P_0} z\right]^{k/k-1 \times \frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \rho_0 \left[1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{P_0} z\right]^{1/k-1}$$

- De plus, si l'air est considéré comme un GP :

$$P = \rho r T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{\rho r}$$

D'où :

$$T = \frac{P_0 \left[1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{P_0} z\right]^{k/k-1}}{\rho_0 \left[1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{P_0} z\right]^{1/k-1} r} = \frac{P_0}{\rho_0 r}\left[1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{P_0} z\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = T_0 - \frac{k-1}{k r} g z}$$

3) On a :

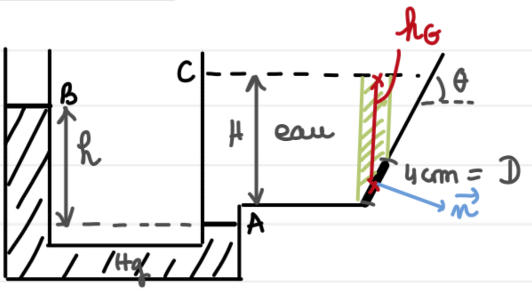
$$T_0 - T = \frac{k-1}{kr}\, g z \iff \frac{(T_0 - T)\, r}{g z} = \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k}$$

$$\iff 1 + \frac{(T - T_0)\, r}{g z} = \frac{1}{k}$$

$$\iff k = \frac{1}{1 + (T - T_0)\frac{r}{g z}}$$

$\mapsto$ A.N $= \dfrac{1}{1 + (-6{,}5) \times \frac{287}{10 \times 1000}} \simeq 1{,}23$

Exercice n° 7 :



La poussée exercée sur une surface plane par un fluide est égale au poids de la colonne de fluide ayant pour base la surface de la paroi et pour hauteur la profondeur du centre de gravité de la surface en dessous de la surface libre.

$\mapsto$ Force exercée sur la porte de la vidange :

$$\vec{F} = -\rho g \underbrace{S\, h_G}_{\text{volume}}\, \vec{n}$$

h_G : profondeur du centre de gravité

Or, $h_G = -\left(H - \frac{D}{2}\sin\theta\right)$

dénivélation ou profondeur — on sait que $\vec{F}$ est dans le sens de $\vec{n}$.

Donc :

$$\vec{F} = \rho_{eau}\, g\, \frac{\pi D^2}{4}\left(H - \frac{D}{2}\sin\theta\right)\vec{n}$$

On sait que $\|\vec{F}\| = 25$ N :

$$H = \frac{D}{2}\sin\theta + \frac{4F}{\rho_{eau}\, g \pi D^2} = \frac{0{,}04}{2}\sin(50°) + \frac{4 \times 25}{1000 \times 9{,}81\pi \times 0{,}04^2}$$

$$= 2{,}043 \text{ m}$$

• D'après la loi de l'hydrostatique, on a :

* $P_{atm} + \rho_{Hg}\, g\, z_B = P_A + \rho_{Hg}\, g\, z_A$

* $P_A + \rho_{eau}\, g\, z_A = P_{atm} + \rho_{eau}\, g\, z_C$

Donc :

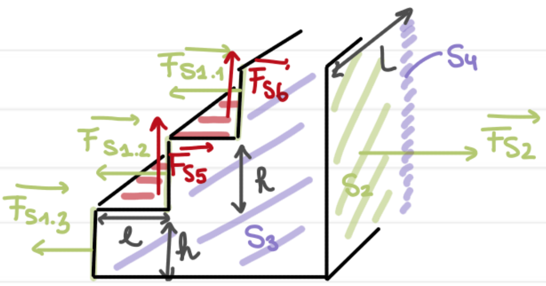
* $P_{atm} - P_A = \rho_{Hg}\, g\,(z_A - z_B) = -\rho_{Hg}\, g\, h$

* $P_{atm} - P_A = \rho_{eau}\, g\,(z_A - z_C) = -\rho_{eau}\, g\,(H + 2\,cm)$

$\Rightarrow \quad \rho_{Hg}\, g\, h = \rho_{eau}\, g\,(H + 2\,cm)$

$\Leftrightarrow \quad h = \dfrac{\rho_{eau}}{\rho_{Hg}}(H + 2\,cm) = \dfrac{1}{d_{Hg}}(H + 2\,cm) = 0{,}152\,cm = 15{,}2\,m$

Exercice n° 8 :



a) • Écrivons les différentes forces qui s'exercent sur les surfaces planes verticales :

← profondeur du centre de gravité

$$F = \rho g\, |z_G| \times S$$

$\rightarrow F_{S_{1.1}} = \rho_{béton}\, g\, \dfrac{h}{2}\,(hL) = \rho_{béton}\, g\, \dfrac{h^2}{2} L$

$\rightarrow F_{S_{1.2}} = \rho_{béton}\, g \left(h + \dfrac{h}{2}\right)(hL) = \rho_{béton}\, g\, \dfrac{3h^2}{2} L$

$\rightarrow F_{S_{1.3}} = \rho_{béton}\, g \left(2h + \dfrac{h}{2}\right)(hL) = \rho_{béton}\, g\, \dfrac{5h^2}{2} L$

$\rightarrow F_{S_2} = \rho_{béton}\, \dfrac{3h}{2}\,(3hL) = \rho_{béton}\, g\, \dfrac{9h^2}{2} L$

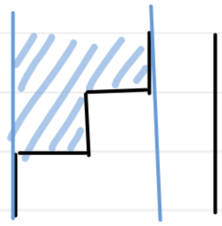
On a donc : $\overrightarrow{F_{S_2}} = \rho_{béton}\, g\, \dfrac{9h^2}{2} L\, \overrightarrow{n_2}$

$\overrightarrow{F_{S_1}} = \overrightarrow{F_{S_{1.1}}} + \overrightarrow{F_{S_{1.2}}} + \overrightarrow{F_{S_{1.3}}} = \rho_{béton}\, g\, \dfrac{9h^2}{2} L\, \overrightarrow{n_1}$

$\overrightarrow{F_{S1}}$ et $\overrightarrow{F_{S2}}$ ont la même norme, la même direction et sont de sens contraire.
$\Rightarrow$ Elles se compensent.

Les forces exercées sur S_3 et S_4 se compensent aussi. Donc la résultante des forces horizontales sur les surfaces verticales est nulle.

b) La poussée exercée sur une surface plane par un fluide est égale au poids d'une colonne de fluide ayant pour base la surface de la paroi et pour la hauteur la profondeur du centre de gravité en dessous de la surface libre.



- Calcul de la résultante des forces de pression verticales.
  Regardons le poids du fluide contenu dans le volume délimité par la surface du moule et par la surface libre.

$$F = \rho_{béton}\, g\, V_{hachuré}$$

$$\rightarrow V_{hachuré} = 3(\ell . L . h)$$

Alors : $F = 1000 \times 2{,}4 \times 9{,}81 \times 3(25{,}4.10^{-2} \times 20{,}3.10^{-2} \times 91.10^{-2})$
$= 3\,314 \text{ N}$

↳ Force verticale dirigée vers le haut.

c) On doit avoir :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}}\,(\text{moule}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{F_{béton}} + \overrightarrow{P_{moule}} + \overrightarrow{P_{masse}} = 0$$

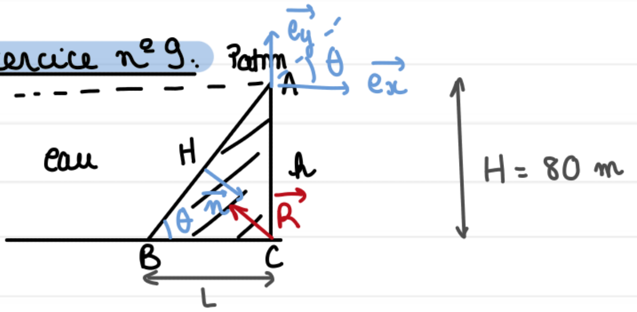
$$\Leftrightarrow 3\,314 - m_{moule}\, g - m_{masse}\, g = 0$$

$$\Leftrightarrow m_{masse} = \frac{3314 - m_{moule}\, g}{g}$$

$$= \frac{3\,314 - 38 . 9{,}81}{9{,}81}$$

$$= 300 \text{ kg}$$

Exercice n°9 :



a) Forces exercées sur le barrage :

→ le poids :

$$\vec{P_B} = -d_B \rho_{eau}\, b\, \frac{hL}{2}\, g\, \vec{e_y}$$

→ la force hydrostatique sur le côté H :

$$\vec{F_H} = \rho_{eau}\, g\, H b\, \frac{h}{2}\, \vec{n}$$

→ la réaction :

$$\vec{R} = -R_x \vec{e_x} + R_y \vec{e_y} \qquad R_x, R_y > 0$$

→ la pression atm sur le côté h :

$$\vec{F_{Pa}} = -P_a\, h\, b\, \vec{e_x}$$

→ la pression atm sur le côté H :

$$\vec{F_{Pa'}} = P_a H b\, \vec{n}$$

$$\left(\vec{n} = \sin\theta\, \vec{e_x} - \cos\theta\, \vec{e_y} \right)$$

À l'équilibre, $\sum \vec{F} = \vec{0}$:

→ projection sur $\vec{e_x}$:

$$-R_x - P_a h b + \rho_{eau}\, g H b\, \frac{h}{2} \sin\theta + P_a H b \sin\theta = 0$$

→ projection sur $\vec{e_y}$:

$$-d_B \rho_{eau}\, b\, \frac{hL}{2}\, g - \rho_{eau}\, g H b\, \frac{h}{2} \cos\theta + R_y - P_a H b \cos\theta = 0$$

Or, $\sin\theta = \frac{h}{H}$, $\cos\theta = \frac{L}{H}$ et $R_y = \frac{R_x}{C_f}$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_{eau}\, g\, H b\, \frac{h}{2}\, \frac{h}{H} - R_x - P_a h b + P_a H b\, \frac{h}{H} = 0 \\ -d_B \rho_{eau}\, \frac{hL}{2}\, g - \rho_{eau}\, g H b\, \frac{h}{2}\, \frac{L}{H} + \frac{R_x}{C_f} - P_a H b\, \frac{L}{H} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho_{eau}\, g\, b \dfrac{h^2}{2} - R_x = 0 \\ -d_B\, \rho_{eau} \dfrac{hL}{2} g - \rho_{eau}\, g\, b \dfrac{hL}{2} + \dfrac{R_x}{C_f} - P_a b L = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_x = \rho_{eau}\, g\, b \dfrac{h^2}{2} \\ -d_B\, \rho_{eau} \dfrac{hL}{2} g - \rho_{eau}\, g \dfrac{b h L}{2} + \rho_{eau}\, g \dfrac{b h^2}{2 C_f} - P_a b L = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} // \\ \rho_{eau}\, b h L g \left(- d_B - 1 - \dfrac{h}{L C_f} - \dfrac{2 P_a}{\rho_{eau}\, g h} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{L C_f} = d_B + 1 + \frac{2 P_a}{\rho_{eau}\, g h}$$

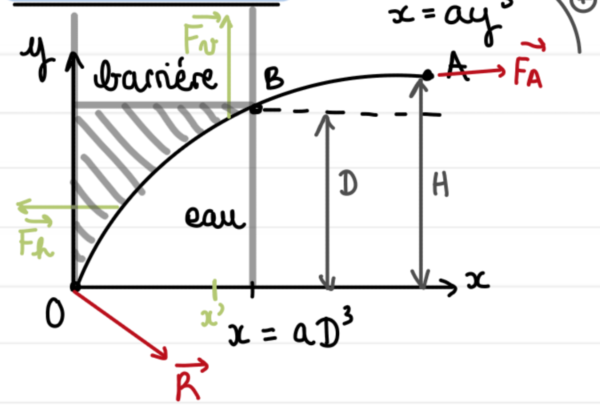
$$\Rightarrow \frac{h}{L} = \tan\theta = C_f \left[d_B + 1 + \frac{2 P_a}{\rho_{eau}\, g h} \right]$$

b) Pour $d_B = 2,4$:

$$\tan\theta = 0,48 \left(2,4 + 1 + \frac{2 \cdot 10^5}{1000 \times 9,81 \times 80} \right) = 1,754$$

$$\Rightarrow \theta \simeq 60,3°$$

Exercice n° 11 :



$$y = \left(\frac{x}{a}\right)^3$$

• Pour calculer l'intensité de la force verticale on trace 2 lignes verticales passant par O et B.

On trace la surface libre.

On doit calculer le poids de la colonne de fluide compris entre la surface libre, les 2 surfaces verticales et la barrière

On a :

$$S = \int_0^D \int_0^{aD^3} dx\,dy = \int_0^D [x]_0^{ay^3} dy = \int_0^D ay^3\,dy = a\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^D = \frac{aD^4}{4}$$

Donc : $F_v = \rho_{eau}\, g\, V = \rho_{eau}\, g\, S\, b = \rho_{eau}\, g\, \frac{aD^4}{4}\, b$

→ A.N : $F_v = 1000 \times 9{,}81 \times \frac{1 \times 1{,}2^4}{4} \times 1{,}5$

$F_v = 7{,}63\ kN$

On cherche la ligne d'action de F_v.

La ligne d'action passe par le centre de gravité.

$$x_G = \frac{1}{S}\int x\,dS = \frac{4}{aD^4}\int_0^D \int_0^{ay^3} x\,dx\,dy = \frac{4}{aD^4}\int_0^D \frac{a^2y^6}{2}\,dy = \frac{2a}{D^4} \times \frac{D^7}{7} = \frac{2aD^3}{7} = 0{,}5\,m$$

Moment de la force :

$$\mathcal{M}_{\vec{F_v}/O} = x' \times F_v = \int_{y=0}^{y=D} \int_{x=0}^{x=ay^3} x\,\rho g b\,dx\,dy$$

$$= \rho g b \int_0^D \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{ay^3} dy$$

$$= \rho g b \int_0^D \frac{a^2y^6}{2}\,dy$$

$$= \rho g b \frac{a^2}{2}\left[\frac{y^7}{7}\right]_0^D$$

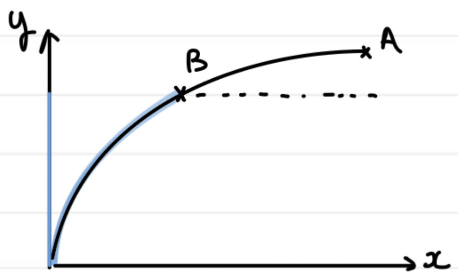
$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\vec{F_v}/0} = \rho g b \frac{a^2}{2} \frac{D^4}{4}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{F_v}/0} = 1000 \times 9,81 \times 1,5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1,2^4}{4} = 3,76 \text{ kN.m}$$

<u>Donc:</u> $x' = \frac{\mathcal{M}_{\vec{F_v}/0}}{F_v} = \frac{3,76}{4,63} = 0,5 \text{ m}$

- Calcul intensité de la force horizontale :

On va projeter la surface mouillée sur une droite verticale.



F_H est égale à la force qui s'exerce sur cette pseudo-plaque.

On peut donc utiliser la relation de la force qui s'applique sur une paroi plane.

$F_H = \rho g S \times$ norme de la profondeur du centre de gravité de la plaque

surface pseudo-plaque

$$F_H = \rho g (D b) \frac{D}{2} = \rho g \frac{b}{2} D^2$$

<u>A.N:</u> $F_H = 10\ 594 \text{ N}$

La ligne d'action par la force passe par le centre de poussée C :

$$z_C = z_G + \sin^2\theta \frac{I_{Gy}}{2}$$

$\boxed{z_C = -\frac{2}{3} h}$ $\Rightarrow$ tjrs valable pour les plaques verticales (et m̂ inclinées)

cours

Ce résultat appliqué à notre exo :

$$y' = \frac{1}{3} D$$

<u>A.N:</u> $y' = \frac{1}{3} \times 1,2 = 0,4 \text{ m}$

• Équilibre de la barrière ?

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Sigma \overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{F}/0}} = \vec{0}$$

Forces exercées :

* $\vec{F_H} = -F_H \vec{e_x}$
* $\vec{F_v} = F_v \vec{e_y}$
* $\vec{F_A} = F_A \vec{e_x}$
* $\vec{R} = R_x \vec{e_x} - R_y \vec{e_y} \qquad (R_x, R_y > 0)$

On a :

→ projection sur $\vec{e_x}$:

$$-F_H + F_A + R_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = F_H - F_A$$

→ projection sur $\vec{e_y}$:

$$F_v - R_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = F_v = 4{,}63 \text{ kN}$$

→ $\mathcal{M}_{\vec{F_v}/0} + \mathcal{M}_{\vec{F_H}/0} + \underbrace{\mathcal{M}_{\vec{R}/0}}_{=0 \text{ car, } R \text{ s'applique en } 0} + \mathcal{M}_{\vec{F_A}/0} = 0$

$\Leftrightarrow y' F_H + x' F_V - H F_A = 0$

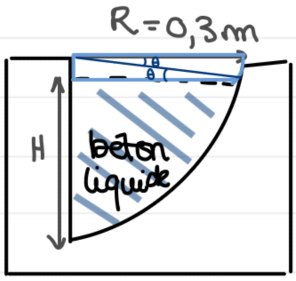
$\Leftrightarrow F_A = \dfrac{y' F_H + x' F_V}{H} = 5{,}4 \text{ kN}$

Donc :

$R_x = F_H - F_A = 4{,}88 \text{ kN}$

<u>Remarque</u> : On pourrait prendre en compte les forces dues à la P_{atm} mais la barrière n'ayant pas d'épaisseur, les forces se compensent.

Exercice n° 10 :



• On cherche F_v du béton sur le moule.

$$F_v = \rho_{béton}\, g\, V \quad \text{où} \quad V = V_{béton} = S_{hachurée} \times b$$

→ $S_{hachurée} = S_{\frac{1}{4}\text{ cercle}} - S_{bleu} = \frac{1}{4}\pi R^2 - S_{bleu}$

→ $S_{bleu} = S_{\text{triangle rectangle}} + S_{\text{morceau cercle}}$

$$= \frac{1}{2}(R-H) \times R\cos(\theta) + \frac{R^2\theta}{2}$$

→ $S_{\text{morceau\_cercle}}$:

qd $\theta = 2\pi \rightarrow S = \pi R^2$

$\theta = ? \rightarrow S = \frac{\pi R^2 \theta}{2\pi} = \frac{R^2\theta}{2}$

Donc :

$$S_{hachurée} = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}(R-H)(R\cos\theta) - \frac{R^2\theta}{2}$$

Or, $\sin\theta = \frac{R-H}{R} \Rightarrow \theta = \text{Arcsin}\left(\frac{R-H}{R}\right) = 0,2$ rad

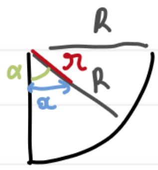
$$\Rightarrow S_{hachurée} = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}(R-H)R\cos(\theta) - \frac{R^2\theta}{2}$$

$$\simeq 0,053 \text{ m}^2$$

Donc : $F_V = d_B \times \rho_{eau}\, g\, V_{hachurée}$

$= 2,5 \times 1000 \times 9,81 \times 0,053 \times 4,25$

$\simeq 1625$ N



• ligne d'action :

→ centre de gravité :

$$x_G = \frac{1}{S}\int x\, dS$$ avec $x = r\sin\theta$

et $dS = r\,dr\,d\alpha$

$$x_G = \frac{1}{S}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\int_l^R r\sin(\alpha)\, r\,dr\,d\theta$$ avec $l = \frac{R-H}{\cos\theta}$

→ Moment de la force :

$$\mathcal{M} = x F_V$$

$$= \rho g b \int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\int_l^R r\sin(\alpha)\, r\,dr\,d\theta$$ avec $l = \frac{R-H}{\cos\theta}$

Exercice n°12 :

a) Poussée de l'air sur le ballon :

Force d'Archimède = poids du volume du fluide déplacé.

$$\vec{F_A} = \rho g V \vec{e_z}$$

air ≡ gaz parfait

Alors, $\rho = \dfrac{P_0}{r T_0}$

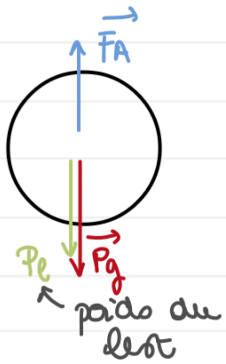
D'où,

$$F_A = \frac{P_0}{r T_0} g \frac{4}{3}\pi R^3$$

→ A.N. : $r_{air} = \dfrac{R}{M} = 287$ J/kg.K

$$F_A = \frac{10^5}{287(20+273)} \times 9{,}81 \times \frac{4}{3}\pi 5^3 = 6\,108 \text{ N}$$

b)



Force ascensionnelle $\vec{f}$:

$$\sum \vec{F} = \vec{f}$$

$$\Leftrightarrow F_A - P_g - P_e = f$$

$$\Leftrightarrow f = F_A - (M + m_1) g \qquad m_1 : \text{masse du lest}$$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{-f + F_a}{g} - M$$

→ A.N. : $m_1 = \dfrac{-200 + 6108}{9{,}81} - 400 = 202$ kg.

c) À l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow F_A = (M + m_2) g \qquad m_2 : \text{masse de lest présente sur le ballon}$$

Or, on doit recalculer F_A car, elle dépend de l'altitude.

/!\ ρ_{air} change quand l'altitude augmente !

Jusqu'à 11 000 m, l'atmosphère peut être considéré comme une évolution polytropique : $\dfrac{T}{\rho^{\gamma-1}} = cst$ avec $\gamma = 1{,}4$ pour l'air.

$$\Rightarrow \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \frac{T_0}{\rho_0^{\gamma-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1/\gamma-1} \rho_0 \quad = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{p_0}{r T_0}$$

$T = 6°C \quad \Rightarrow \quad \rho = \left(\frac{6+273}{20+273}\right)^{\frac{1}{0,4}} \times \frac{10^5}{287 \times (20+273)} = 1,05 \ kg/m^3$

$$F_A = \rho g V = 1,05 \times 9,81 \times \frac{4}{3}\pi 5^3 = 5393 \ N$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{F_A}{g} - M = \frac{5393}{9,81} - 400 = 149,4 \ kg$$

Donc : $m_{jetée} = m_1 - m_2 = 202 - 149,4 = 52,22 \ kg.$