CHAPITRE 2

LES SUITES RÉELLES

1/ Définitions et premières propriétés

Définition :

Une suite réelle est une application d'une partie infinie $I \subset \mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

Remarque :

On peut se ramener à $I = \mathbb{N}$

→ notations : $u = (u_n)_{n \in I}$ ou $(u_n)_n$

Définition :

On définit la somme, le produit de deux suites par $u = (u_n)_{n \in I}$, $v = (v_n)_{n \in I}$, $w = (u_n + v_n)_{n \in I}$ et $t = (u_n \times v_n)_{n \in I}$

On définit $\lambda u = (\lambda u_n)_{n \in I}$ et $\frac{u}{v}$, si $v_n \neq 0$ $\forall n \in I$, est défini par $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in I}$

2/ Suites convergentes

Définition :

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

Exemple : Montrons que $u = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

Soit $\varepsilon > 0$ (fixé). On cherche $N = N(\varepsilon)$ tel que $n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \leq \varepsilon$

On remarque que $\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$

$$\Leftrightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Prenons $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+1$. Alors $n \geq N$, $n \geq E\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+1 \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1}-0\right| \leq \varepsilon$

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si $\forall A>0$, $\exists N=N(A)\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq N \Rightarrow u_n \geq A$.

→ en $-\infty$. $\forall A<0$, $\exists N = N(A)\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq N \Rightarrow u_n\leq A$.

Exemple :

$u_n = n^2$, $n\geq 0$

Soit $A>0$ (fixé). On cherche $N=N(A)$ tel que $n\geq N \Rightarrow n^2\geq A \Leftrightarrow n=\sqrt{A}$

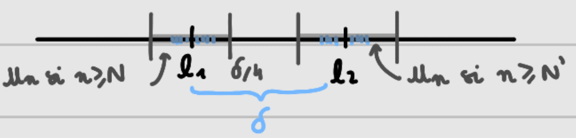
Prenons $N = E(A)+1$. Alors $n\geq N \Rightarrow n\geq\sqrt{A} \Rightarrow n^2\geq A$

Proposition :

Lorsqu'une suite converge, il y a unicité de la limite.

Preuve : Par l'absurde :

Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 et l_2 avec $l_1\neq l_2$, $l_1<l_2$.



Soit $\delta = l_2-l_1>0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 : $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$ tq $|u_n-l_1|\leq\varepsilon$

En particulier si l'on choisit $\varepsilon=\frac{\delta}{4}$. Alors $\exists N=N\left(\frac{\delta}{4}\right)$ tq $n\geq N \Rightarrow |u_n-l_1|\leq\frac{\delta}{4}$

$\Leftrightarrow -\frac{\delta}{4}\leq u_n-l_1\leq\frac{\delta}{4}$

$\Leftrightarrow l_1-\frac{\delta}{4}\leq u_n\leq l_1+\frac{\delta}{4}$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_2 : $\forall\varepsilon>0$, $\exists N'=N'(\varepsilon)$ tq $|u_n-l_2|\leq\varepsilon$

On choisit $\varepsilon=\frac{\delta}{4}$. Alors $\exists N'=N'\left(\frac{\delta}{4}\right)$ tq $n\geq N' \Rightarrow |u_n-l_2|\leq\frac{\delta}{4} \Rightarrow l_2-\frac{\delta}{4}\leq u_n\leq l_2+\frac{\delta}{4}$

Donc si $n\geq \max(N,N')$ alors $u_n\in\left[l_1-\frac{\delta}{4} ; l_1+\frac{\delta}{4}\right]$ et $u_n\in\left[l_2-\frac{\delta}{4} ; l_2+\frac{\delta}{4}\right]$.

Or, ces deux intervalles sont disjoints.

ABSURDE donc $l_1=l_2$.

Proposition :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ alors elle est bornée.

↳ **Preuve :**

Soit $\varepsilon = 1$. Alors il existe N tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq 1$, c'est-à-dire

$-1 \leq u_n - l \leq 1 \iff \boxed{l-1 \leq u_n \leq l+1}$

Soit $M = \max(u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$

$m = \min(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) \iff \boxed{m \leq u_n \leq M \quad \text{si } 0 \leq n \leq N-1}$

Donc : $\min(l-1, m) \leq u_n \leq M_0 = \max(l+1, M)$

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l_1 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l_2.
Alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_1 + l_2$ et $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_1 \times l_2$.

↳ **Preuve :**

- Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N = N(\varepsilon)$ tel que $n \geq N$ alors $|u_n + v_n - (l_1 + l_2)| \leq \varepsilon$.

$$\iff |(u_n - l_1) + (v_n - l_2)| \leq \varepsilon$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1, $\exists N_1$ tq $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_2, $\exists N_2$ tq $n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$.

Si $n \geq N \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

et donc : $\underbrace{|(u_n - l_1) + (v_n - l_2)|}_{= |u_n + v_n - (l_1 + l_2)|} \leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

- Soit $\varepsilon > 0$ (fixé). On cherche $N = N(\varepsilon)$ tq $n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - l_1 l_2| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - l_1 l_2| &= |u_n v_n - l_1 v_n + l_1 v_n - l_1 l_2| \\
&= |v_n(u_n - l_1) + l_1(v_n - l_2)| \\
&\leq |v_n||u_n - l_1| + |l_1||v_n - l_2| \\
&\leq M|u_n - l_1| + |l_1||v_n - l_2| \quad \text{avec } M > 0,\ |v_n| \leq M \text{ pour tout } n.
\end{aligned}$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1, $\exists N_1$ tq $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_2, $\exists N_2$ tq $n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l_2| \leq \frac{\varepsilon}{2(|l_1|+1)}$

Pour $N = \max(N_1, N_2)$, si $n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - l_1 l_2| \leq \varepsilon$ d'après les calculs précédents.

3/ Suites monotones

Définition :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ $\forall n$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ $\forall n$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Les suites constantes sont les suites croissantes et décroissantes.

Proposition :

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Elle converge si et seulement si elle est majorée. Si elle n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.

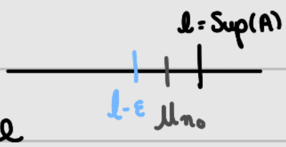
(2) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Elle converge si et seulement si elle est minorée. Si elle n'est pas minorée, elle diverge vers $-\infty$.

Remarque : $u_n = (-1)^n$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne converge pas.

↳ **Preuve :**

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

$A = \{u_n : n\in\mathbb{N}\} \neq \emptyset$ majorée, $A \subset \mathbb{R}$. Donc : $\mathrm{Sup}(A) = l$ existe.



$\forall \varepsilon > 0$, $\exists u_n \in A$ (u_{n_0} dépend de ε) tq $l - \varepsilon < u_{n_0} \leq l$

Comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $l \geq u_n \geq u_{n_0} > l - \varepsilon$ si $n \geq n_0$

Donc : $N = n_0$ et $|u_n - l| \leq \varepsilon$, si $n \geq n_0$

Théorème :

Tout nombre réel x est la limite d'une suite de nombres rationnels et la limite d'une suite d'irrationnels.

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right[$ contient un nombre rationnel noté x_n (chap.1)
Il contient aussi un irrationnel y_n. Alors :

$$x-\frac{1}{n} < x_n < x+\frac{1}{n}$$

$$x-\frac{1}{n} < y_n < x+\frac{1}{n}$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$.

A/ Limites et inégalités

Théorème des gendarmes :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir de n_0. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon)$ tel que $n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$

$(l-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant l+\varepsilon)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, $\exists N_2 = N_2(\varepsilon)$ tel que $n \geqslant N_2 \Rightarrow |w_n - l| \leqslant \varepsilon$

$(l-\varepsilon \leqslant w_n \leqslant l+\varepsilon)$

Donc, pour $n \geqslant N = \max(N_1, N_2, n_0)$ $\begin{cases} l-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant l+\varepsilon \\ l-\varepsilon \leqslant w_n \leqslant l+\varepsilon \\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \end{cases}$

Donc : $l-\varepsilon \leqslant v_n \leqslant l+\varepsilon$, $n \geqslant N \iff |v_n - l| \leqslant \varepsilon$

Théorème de comparaison :

- Supposons que $u_n \geqslant v_n$ à partir du rang n_0 avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Supposons que $u_n \leq v_n$ à partir du rang n_0 avec $\lim_{n \to \infty} v_n = -\infty$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

↳ **Preuve:**

• $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ signifie $\forall A \geq 0 \ \exists N = N(A)$ tel que $n \geq N \Rightarrow v_n \geq A$.

Comme $u_n \geq v_n$ si $n \geq n_0$, alors $u_n \geq A$ si $n \geq \max(N, n_0)$. Donc: $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

• $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ signifie $\forall A \leq 0 \ \exists N = N(A)$ tel que $n \geq N \Rightarrow v_n \leq A$.

Comme $u_n \leq v_n$ si $n \geq n_0$, $u_n \leq A$ si $n \geq \max(N, n_0)$. Donc: $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

B/ Suites extraites ou sous-suites

Définition:

On dit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou une suite extraite s'il existe $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $v_n = u_{\Phi(n)}$

Exemple: $\Phi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \right.$ (strictement croissante)

$(u_{\Phi(n)})_{n \geq 0} = (u_{2n})_{n \geq 0}$

Proposition:

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$, alors $\forall \Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, $(u_{\Phi(n)})_{n \geq 0}$ converge vers l.

(Toutes les sous-suites ou suites extraitent convergent vers l).

↳ **Conséquence:**

Si l'on trouve deux sous-suites de $(u_n)_{n \geq 0}$ ayant deux limites différentes, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ ne converge vers pas !

ex: $u_n = (-1)^n$

$u_{2n} = 1$ — $(u_{2n})_{n \geq 0}$ converge vers 1

$u_{2n+1} = -1$ — $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ converge vers -1

$\Big\}$ $1 \neq -1$ Donc: $(u_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas.

↳ **Preuve :**

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N = N(\varepsilon)$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$.

Comme Φ est strictement croissant et $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\Phi(n) \geq n$

H_n : "$\Phi(n) \geq n$"

H_0 : $\Phi(0) \geq 0$ car $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ✓

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $\Phi(k) \geq k$.

$\Phi(k+1) > \Phi(k)$ car Φ strictement croissante

Donc : $\Phi(k+1) > k$

$\Leftrightarrow$ $\Phi(k+1) \geq k+1$ car $\Phi(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.

Donc H_n est vrai $\forall n \geq 0$.

$|u_{\Phi(n)} - l| \leq \varepsilon$ si $n \geq N$ car $\Phi(n) \geq n$.

Proposition :

Si $(u_{2n})_{n\geq 0}$ converge vers l et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers l, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.

↳ **Preuve :**

- $(u_{2n})_{n\geq 0}$ converge vers l : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 = N_1(\varepsilon)$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$.
  $2n \geq 2N_1$
- $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ converge vers l : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2 = N_2(\varepsilon)$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$
  $2n+1 \geq 2N_2 + 1$

Soit $n \geq N$, $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ $\Rightarrow$ $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

C/ Suites adjacentes

Définition :

Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes si $(u_n)_{n\geq 0}$ croissante et $(v_n)_{n\geq 0}$ décroissante et $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème :

Deux suites adjacentes convergent et elles ont la même limite.

↳ Preuve:

$(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ est croissante car $(u_n)_{n\geq 0} \nearrow$ et $(-v_n)_{n\geq 0} \nearrow$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ par hypothèse. Donc, $u_n - v_n \leq 0 \ \forall n \Rightarrow u_n \leq v_n \ \forall n$.

→ Donc: $u_n \leq v_n \leq v_0$.

$(u_n)_{n\geq 0}$ croissante et majorée par v_0, converge vers l_1

→ Donc: $u_0 \leq u_n \leq v_n$

$(v_n)_{n\geq 0}$ décroissante, minorée par u_0, converge vers l_2.

→ De plus $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $l_1 - l_2$.

Par hypothèse, $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Par unicité de la limite d'une suite, $l_1 - l_2 = 0$

Théorème de Bolzano-Weierstrass:

Toute suite bornée a une sous-suite convergente.

Rappel: $(u_n)_{n\geq 0}$ converge $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $(u_n)_{n\geq 0}$ bornée $\Rightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge.

↳ Preuve:

Supposons $M > 0$ tel que $-M \leq u_n \leq M$. Posons $a_0 = -M$, $b_0 = M$

L'un des deux segments $[-M, 0]$ ou $[0, M]$, autrement dit $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ contient une infinité de u_n.

Si dans $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ il y a une infinité de u_n, $a_1 := a_0$ et $b_1 := \frac{a_0+b_0}{2}$

Si dans $\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$ il n'y a qu'un nombre fini de u_n, cela signifie qu'il y a nécessairement un nombre infini de u_n dans $\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$ et dans ce cas $a_1 := \frac{a_0+b_0}{2}$, $b_1 := b_0$.

On veut construire $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

$\Phi(1) = n_1$ de sorte $u_{n_1} \in [a_1, b_1]$

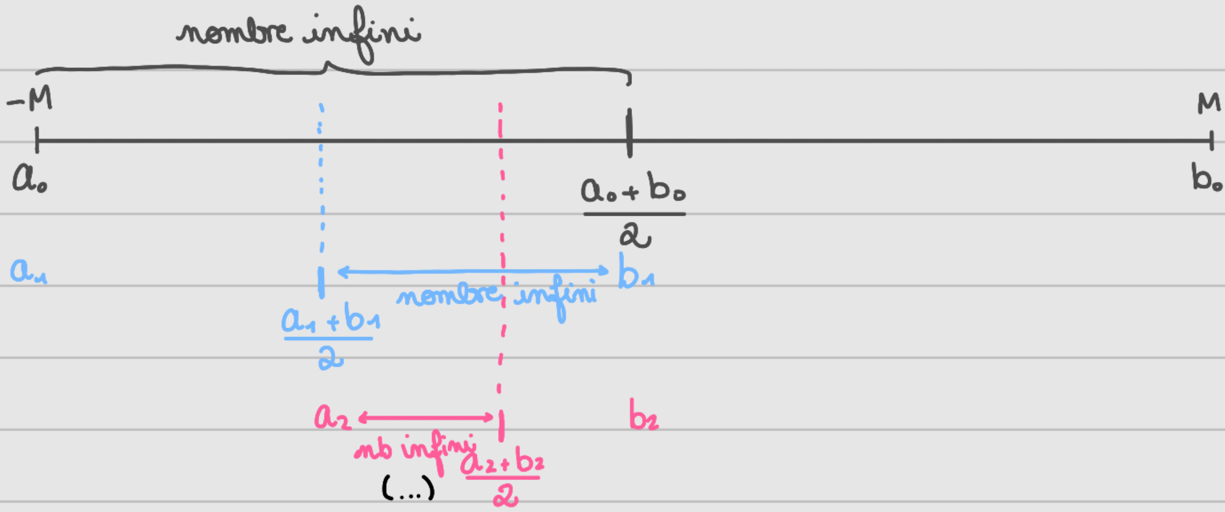
On construit a_n, b_n tel que $b_n - a_n = \frac{b_{n+1} - a_{n+1}}{2}$

$\Phi(2) = n_2 > n_1$ $\quad u_{n_2} \in [a_2, b_2]$ $\quad \Rightarrow u_{n_k} \in [a_k, b_k]$

On construit $(a_n)_n \nearrow$, $(b_n)_n \searrow$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ $\quad \left(b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{2M}{2^n}\right)$

Alors $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers l car, elles sont adjacentes.

Comme $a_n \leq u_{\Phi(n)} \leq b_n$, d'après le théorème des gendarmes, $(u_{\Phi(n)})_n$ converge vers l.



D/ Suites équivalentes, suites négligeables

Définition:

On dit que deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont équivalentes si $u_n = v_n w_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

Remarque:

- Si $v_n \neq 0$, ceci est équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ pour tout n.

  ex: $u_n = n^2$, $v_n = n^2 + 16$

$u_n = v_n w_n \iff w_n = \frac{n^2}{n^2+16}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

En effet, $\frac{n^2}{n^2+16} = \frac{n^2}{n^2(1+16/n^2)} = \frac{1}{1+16/n^2}$ et $\frac{16}{n^2} \to 0$ si $n \to +\infty$

/!\ • $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ ne signifie pas qu'elles sont équivalentes

• On peut avoir deux suites équivalentes avec $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) \neq 0$

<u>ex:</u> $u_n = n^2$ et $v_n = n^2 + 16$

Définition:

$(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites. On dit que $(v_n)_{n\geq 0}$ est négligeable devant $(u_n)_{n\geq 0}$ si: $v_n = u_n \times w_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$

Exemple:

① $u_n = n^2$, $n \geq 1$

$v_n = n$, $n \geq 1$ $\qquad v_n = u_n w_n \iff w_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ $\qquad w_n \to 0$ si $n \to +\infty$.

② $u_n = e^n$

$v_n = n^{100}$ $\qquad (v_n)_{n\geq 1}$ est négligeable devant $(u_n)_{n\geq 1}$. $v_n = u_n \times w_n$

$\iff w_n = \frac{n^{100}}{e^n} \to 0$ si $n \to +\infty$

par croissance comparée.

③ $v_n = 0{,}1n$, $n \geq 1$

$u_n = 100n$, $n \geq 1$ $\qquad v_n = u_n w_n \iff w_n = \frac{0{,}1n}{100n} = 10^{-3}$

$\lim_{n\to+\infty} w_n = 10^{-3} \neq 0 \implies (v_n)_{n\geq 1}$ n'est pas négligeable devant $(u_n)_{n\geq 1}$

4/ Suites de Cauchy

Notion qui permet de prouver qu'une suite converge sans deviner la valeur de sa limite.

Définition:

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall p \geq q \geq N$, $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$

Théorème :

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente si et seulement si $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

↳ **Preuve :**

Supposons que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Donc, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient $p \geq q \geq N$.

Alors $|u_p - u_q| = |(u_p - l) + (l - u_q)| \leq |u_p - l| + |l - u_q| = |u_p - l| + |u_q - l|$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$(u_n)_{n\geq 0}$ est donc de Cauchy.

Réciproquement, supposons que $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. On veut montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Tout d'abord, on montre que si $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

Soit $\varepsilon = 1$. Alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq q \geq N$ alors $|u_p - u_q| \leq 1$.

En particulier en prenant $q = N$ on obtient $|u_p - u_N| \leq 1$

$\boxed{\text{Rappel : } |a-b| \geq ||a| - |b||}$ $\Rightarrow |u_p| - |u_N| \leq ||u_p| - |u_N|| \leq |u_p - u_N| \leq 1$

$\Rightarrow |u_p| \leq |u_N| - 1$ si $p \geq N$

Donc : $|u_n| \leq \underbrace{\max(|u_0|, \dots |u_{N-1}|, |u_N| + 1)}_{= C > 0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(u_n)_{n\geq 0}$ a une sous-suite qui converge vers l $(u_{\Phi(n)})_{n\geq 0}$ où $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Il reste à prouver que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Comme $(u_{\Phi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers l, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ tel que $n \geq N$ alors $|u_{\Phi(n)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$|u_n - l| = |u_n - u_{\Phi(n)} + u_{\Phi(n)} - l| \leq |u_n - u_{\Phi(n)}| + |u_{\Phi(n)} - l|$

Comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, $\exists N' \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq q \geq N'$ alors $|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Si $n \geq N'$ alors $\underbrace{\Phi(n)}_{=p} \geq \underbrace{n}_{=q} \geq N'$ car, Φ est strictement croissante et donc

$|u_{\Phi(n)} - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $N'' = \max(N, N')$. Par construction, si $n \geq N''$, $|u_{\Phi(n)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $|u_{\Phi(n)} - u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc : $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

CCL : La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.

Exemple :

$$u_n = \frac{\cos(0)}{10^0} + \frac{\cos(1)}{10} + \frac{\cos(2)}{10^2} + \dots + \frac{\cos(n)}{10^n}$$

Montrons que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

On va utiliser le fait que $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, c'est-à-dire que

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ tel que $p \geq q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

On a $p \geq q$:

$$|u_p - u_q| = \left|\left(\frac{\cos(0)}{10^0} + \frac{\cos(1)}{10} + \dots + \frac{\cos(p)}{10^p}\right) - \left(\frac{\cos(0)}{10^0} + \frac{\cos(1)}{10} + \dots + \frac{\cos(q)}{10^q}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{\cos(q+1)}{10^{q+1}} + \dots + \frac{\cos(p)}{10^p}\right| \leq \left|\frac{\cos(q+1)}{10^{q+1}}\right| + \dots + \left|\frac{\cos(p)}{10^p}\right|$$

$$\leq \frac{1}{10^{q+1}} + \dots + \frac{1}{10^p} = \frac{1}{10^{q+1}}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{p-q-1}}\right)}_{= \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{p-q}}{1 - \frac{1}{10}} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}}$$

Donc $|u_p - u_q| \leq \frac{10}{9} \times \frac{1}{10^{q+1}} = \frac{1}{9 \times 10^q} \leq \frac{1}{10^q}$

$\rightarrow \frac{1}{10^q} \leq \varepsilon \iff 10^q \geq \frac{1}{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$

$$\iff e^{q\ln(10)} \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff q\ln(10) \geq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \iff q \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln(10)} = \ln\left(\frac{1}{10\varepsilon}\right)$$

Prenons $N = E\left(\ln\left(\frac{1}{10\varepsilon}\right)\right) + 1$.

D'après nos calculs, si $p \geq q \geq N$ alors $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

Donc : $(u_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Elle est donc convergente.