Annexe A

Inégalités classiques

1 Sur les fonctions usuelles

- **Exponentielle.**
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x.$$
- **Logarithme**
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
- **Sinus.**
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.$$
- **Cosinus.**
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1.$$
- **Tangente et arc tangente.**
$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad x \leq \tan(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(x) \leq x.$$
- **Cosinus et sinus hyperboliques.**
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \leq \mathrm{sh}(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \frac{x^2}{2} \leq \mathrm{ch}(x).$$

2 Identité remarquable et valeur absolue (module)

- **Identité remarquable.**
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 2|x||y| \leq x^2 + y^2.$$
- **Racine carrée.**
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$
- **Inégalités triangulaires.**
$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \quad ||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$
- **Inégalité de Bernoulli.**
$$\forall x \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + nx \leq (1+x)^n$$

3 Accroissements finis

Théorème A.1: Inégalités des accroissements finis.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

1. *f est continue sur $[a,b]$;*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$;*
3. *f' est bornée sur $]a,b[$: $\exists M > 0,\ \|f'\|_{\infty,]a,b[} \leq M$.*

Alors on a :

$$\forall x, y \in [a,b], \quad |f(x) - f(y)| \leq \left\|f'\right\|_{\infty,]a,b[} |x-y|.$$

- **Conséquence sur la fonction sinus.**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|.$$

- **Conséquence sur la fonction cosinus.**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x-y|.$$

- **Conséquence sur les fonctions arc tangentes et tangentes.**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y| \quad \text{et} \quad \forall x, y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad |x-y| \leq |\tan(x) - \tan(y)|.$$

4 Formule de Taylor

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et si $a \in I$, alors la formule on a la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt. \\ &= \qquad S_n(x) \qquad\qquad + \qquad R_n(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous en déduisons une inégalité plus générale (implique l'IAF si $n = 0$) :

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leq \left\|f^{n+1}\right\|_{\infty,[a,x]} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cliquez ici pour une fiche encore plus détaillée!