TD 2

Exercice n° 1 :

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$.
- La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M$.
- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N$
  $|u_n - 2| \leqslant \varepsilon$
- La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$: $\forall A > 0 \ \exists N = N(A) \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N$
  $y_n \geqslant A$
- La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente : $\exists l \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant N$
  $|z_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Exercice n° 2 :

- $\forall n \geqslant 0, \ a_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$ $\quad \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n}(2-1/n)}{\cancel{n}(1+1/n)} = 2$

$a_n - 2 = \dfrac{2n-3-2(n+1)}{n+1} = \dfrac{-5}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad |a_n - 2| \leqslant \dfrac{5}{n+1}$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N(\varepsilon)$ tel que $|a_n - 2| \leqslant \varepsilon$.

Si on a $\dfrac{5}{N+1} < \varepsilon$ alors $|a_n - 2| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{\varepsilon} - 1 < N$

Si on prend $N = E\left(\dfrac{5}{\varepsilon}\right)$, on a $\forall n \geqslant N \quad |a_n - 2| \leqslant \varepsilon$.

- $\forall n \geqslant 0, \ b_n = \dfrac{\sin n}{n}$ $\quad \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$: $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$
  $\Leftrightarrow \dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

$b_n - 0 = b_n$ donc $|b_n| \leqslant \dfrac{\sin n}{n}$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N(\varepsilon)$ tel que $\forall n \geqslant N, |b_n| < \varepsilon$ or $|b_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$

Donc : si $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ alors $|b_n| \leqslant \varepsilon$.

On prend $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. Alors $\forall n \geq N \quad |b_n| \leq \varepsilon$.

- $\forall n \geqslant 1, \quad c_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$

$$\rightarrow \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad n - \frac{1}{n} \leqslant c_n \leqslant n + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad n - 1 \leqslant c_n \qquad \text{car, } \frac{1}{n} \leqslant 1$$

Donc: $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = +\infty$.

Soit $A > 0$. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N \quad c_n \geqslant A$. On sait que $c_n \geqslant n-1$ donc si $n - 1 \geqslant A$ alors $c_n \geqslant A$.

On prend $N = E(A) + 2$. Alors $\forall n \geqslant \quad c_n \geqslant A$.

- $\forall n \geqslant 0, \quad d_n = \sqrt{n^2 + n} - n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) = n\left[\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}\right]$

$$= n\left[\frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}\right] = n\left[\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}\right] = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}$$

$\Rightarrow$ Donc: $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \frac{1}{2}$

$\rightarrow d_n - \frac{1}{2} = \frac{1 - (1 + 1/n)}{2(\sqrt{1 + 1/n} + 1)^2}$ $\qquad \sqrt{1 + 1/n} \geqslant 1$ donc $\sqrt{1 + 1/n} + 1 \geqslant 2$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\sqrt{1 + 1/n} + 1)^2 \geqslant 8$$

Donc: $\left|d_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1/n}{8}$

• $\forall n \geq 1,\ e_n = \dfrac{\ln(n)}{2+\sin(n)}$

$-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq 2+\sin(n) \leq 3$

$\Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{1}{2+\sin(n)} \geq \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 0 \geq \dfrac{\ln(n)}{2+\sin(n)} \geq \dfrac{\ln(n)}{3}$

Donc: $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$

Soit $A>0$. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N\ \ e_n \geq A$.

On sait que $e_n \geq \dfrac{\ln(n)}{3}$.

Si $\dfrac{\ln(n)}{3} \geq A$, alors $e_n \geq A$.

$\Leftrightarrow \ln(n) \geq 3A$

$\Leftrightarrow n \geq e^{3A}$

On prend $N = E(e^{3A})+1$ et on a $\forall n \geq N\ \ e_n \geq A$.

• Limite finie l

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N\ \ |u_n - l| \leq \varepsilon$

OBJECTIF: 1) trouver l

2) majorer $|u_n - l|$

• $u_n \to +\infty$

$\forall A > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N\ \ u_n \geq A$

1) minorer u_n.

Exercice n° 3:

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ Montrons que $l \in \mathbb{N}$. (u_n: suite d'entiers)

Supposons par l'absurde que $l \notin \mathbb{N}$. On a: $E(l) \leq l < E(l)+1$.

Soit $\delta = \min(|E(l)+1-l|, |l-E(l)|)$, la distance de l à l'entier plus proche.

Donc: c'est le $|u_n - l|$ minimum qu'on peut atteindre.

On prend $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2} > 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |u_n - l| \geq \delta > \dfrac{\delta}{2}$.

ABSURDE car, $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Donc $l \in \mathbb{N}$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

Donc : $\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |u_n - l| \leq \varepsilon$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On a montré que $u_n - l \in \mathbb{Z}$ donc $|u_n - l| \in \mathbb{N}$

Si $|u_n - l| \leq \frac{1}{2}$. Alors $|u_n - l| = 0$.

Donc $\forall n \geq N\quad u_n = l \Rightarrow u_n$ est constante à partir de N.

Exercice n° 9 :

1) Faux → contre-exemple : $u_n = (-1)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n^2 = 1$

Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers 2 limites différentes ($u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1\quad \forall n$). Donc : (u_n) diverge.

2) Vrai → $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \qquad \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ ||u_n|| \leq \varepsilon$

→ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \qquad \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ u_n \leq \varepsilon$

3) Faux → contre-exemple : $u_n = \frac{\sin n}{n}$

⤳ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

⤳ fonction sinusoïdale : $\not\!\!$ monotone

4) Faux → contre-exemple : $u_n = n$, croissante, positive $\lim_{+\infty} = +\infty$

→ exemple bon : suite décroissante et positive, $\lim_{+\infty} = 0$.

5) Faux → contre-exemple : $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$

6) Vrai → $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad$ Donc $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |u_n - l| \leq \varepsilon$.

$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - l - (u_n - l)$

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc $\forall n \geq N$ $|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - l| + |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

Exercice n° 5 :

- $\forall n \geq 1$, $f_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$. Montrons que $\forall n \geq 1$, f_n est divergente.

On regarde les sous-suites (f_{2n}) et (f_{2n+1}) :

→ $f_{2n} = \frac{1}{2n} + 1$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_{2n} = 1$

→ $f_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - 1$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} f_{2n+1} = -1$

Donc : deux sous-suites de (f_n) ont des limites différentes.

<u>CCL</u> : (f_n) diverge

- $\forall n \geq 0$, $g_n = \frac{n(-1)^n}{n+1}$. Montrons que $\forall n \geq 0$, g_n diverge.

On regarde les sous-suites (g_{2n}) et (g_{2n+1}) :

→ $g_{2n} = \frac{2n \times 1}{2n+1} = \frac{1}{1 + 1/2n}$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} g_{2n} = 1$

→ $g_{2n+1} = \frac{(2n+1)(-1)}{2n+2} = \frac{-1 - 1/2n}{1 + 2/2n}$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} g_{2n+1} = -1$

Deux sous-suites de (g_n) ont des limites différentes donc (g_n) diverge.

Exercice n° 6 :

- $\forall n \geq 1$, $h_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad$ → $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = 1$ (par changement de variable et taux d'accroissement)

- $\forall n \geq 1$, $i_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1 + \frac{1}{n})}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} i_n = \lim\limits_{y \to 0^+} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e^{\ln'(1)} = e^1$

• $\forall n \geq 1$, $j_n = n(e^{1/n} - 1)$

$$\lim_{n\to+\infty} j_n = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = (e)'(0) = e^0 = 1$$

• $\forall n \geq 1$, $k_n = n^{1/n}$

Par croissances comparées : $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1/n)}{1/n} = 1$

Exercice n° 8 :

$u_n = \frac{E(10^n \pi)}{10^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

→ Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}$

$E(x) \leq x \leq E(x+1) = E(x) + 1$

$\Leftrightarrow x - 1 < E(x) \leq x$

Donc : $10^n\pi - 1 \leq 10^n u_n = E(10^n \pi) \leq 10^n \pi$

$\Leftrightarrow \pi - \frac{1}{10^n} \leq u_n \leq \pi$

$|u_n - \pi| \leq \frac{1}{10^n}$ Donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pi$ et (u_n) est une suite de nombre décimal qui tend vers π.

Exercice n° 4 :

1) Montrons que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante , donc $\forall t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Donc : $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$

2) On a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(k+1) - \ln(k)$

<u>Donc :</u> $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$

3) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geq \ln(n+1)$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$

Donc : $H_n = \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k} \geq \sum_1^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n) - \ln(n-1) + \dots$

$-\ln(1) \geq \ln(n+1) - \ln(1)$

$= \ln(n+1)$

4) Montrons que (U_n) et (V_n) sont adjacents.

- Montrons que (U_n) est décroissante.

$U_{n+1} - U_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n)$

$= H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n)$

$= \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$ (d'après q° 2))

- Montrons que (V_n) est croissante.

$V_{n+1} - V_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - \dfrac{1}{n+1} - H_n + \ln(n) + \dfrac{1}{n}$

$= \underbrace{H_{n+1} - H_n}_{= 1/n+1} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geq 0$

- $V_n - U_n = \dfrac{-1}{n}$ Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |V_n - U_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

=> (U_n) décroissante, (V_n) croissante et $(U_n - V_n)$ tend vers 0.

Donc : (U_n) et (V_n) sont adjacentes et convergent vers une limite commune.

Exercice n° 10 :

- $l_n = \dfrac{2n^2+1}{n^3-n^2+3}$

OBJECTIF : Trouver un u_n simple tel que l_n et u_n équivalent donc $\dfrac{l_n}{u_n} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

$u_n = \dfrac{2n^2}{n^3} = \dfrac{2}{n}$ $\rightarrow$ $\dfrac{l_n}{u_n} = \dfrac{2n^3+n}{2n^3-2n^2+6} = \dfrac{1+1/2n^2}{1-1/n+1/n^3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{l_n}{u_n} = 1$

- $m_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$u_n = \dfrac{1}{n}$ $\rightarrow$ $\dfrac{m_n}{u_n} = \dfrac{\ln(1+1/n)}{1/n} = \dfrac{\ln(1+1/n) - \ln(1)}{1/n - 0}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{m_n}{u_n} = 1$

$= \ln'(1)$

<u>Donc</u> : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \\ \sin(1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \\ e^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \end{array}}$$

- $n_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$

$= \dfrac{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n+1}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}$ comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n_n = \dfrac{1}{3}$

On prend $u_n = \dfrac{1}{3}$ et on a (n_n) et (u_n) équivalentes car $\dfrac{n_n}{u_n} = \dfrac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Exercice n° 11 :

- $o_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ On a : $\sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$

On prend $u_n = \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$. Alors $\dfrac{o_n}{u_n} = n^3 \sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

- $p_n = \dfrac{n\ln(n)}{n^2+1}$ On prend $u_n = \dfrac{n\ln(n)}{n^2} = \dfrac{\ln(n)}{n}$

Alors $\frac{P_n}{U_n} = \frac{n\ln(n)}{n^2+1} \times \frac{n}{\ln(n)} = \frac{n^2\ln(n)}{(n^2+1)\ln(n)} = \frac{1}{1+1/n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

<u>Donc:</u> (U_n) et (P_n) sont équivalents.

• $Q_n = \exp\left(\frac{-n^2+n}{n+1}\right)$

Si on prend $U_n = \exp(-\frac{n^2}{n}) = \exp(n) \rightarrow \frac{Q_n}{U_n} = \exp\left(\frac{-n^2+n}{n+1} + n\right) = \exp\left(\frac{-n^2+n+n^2+n}{n+1}\right)$

$= \exp\left(\frac{2}{1+1/n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^2$

Ceci ne marche pas donc on essaie encore mais avec une cst.

On multiplie par $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$, $\frac{Q_n}{U_n} \times \frac{1}{e^2} = e^0 = 1$.

Donc on prend finalement $U_n = \exp(-n)\exp(2)$

Ex 12:

• $r_n = n^3 e^{-n}$ $\quad S_n = \frac{1}{n^2+1}$ $\quad t_n = \frac{\ln n}{n^3}$

$\frac{r_n}{S_n} = (n^2+1)n^3 e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées

$r_n \underset{n\to+\infty}{=} o(S_n)$

(r_n) négligeable devant (S_n)

$\frac{r_n}{T_n} = \frac{n^3 e^{-n}}{\frac{\ln(n)}{n^3}} = \frac{n^6 e^{-n}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées)

$r_n \underset{n\to+\infty}{=} o(T_n)$ $\quad (r_n)$ négligeable devant (T_n)

$\frac{T_n}{S_n} = \frac{\ln(n)(n^2+1)}{n^3} = \frac{n^3\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^3}\right)}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $\quad (T_n)$ est négligeable devant (S_n)

Ex 7:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$n \in \mathbb{N}^*$

Pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{n+1} \iff \frac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\rightarrow \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc par le théorème des gendarmes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Exo prof:

Limites de : $\cdot\ a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$

$\cdot\ b_n = \dfrac{\cos(n) - \sin^2(n)}{n}$

$\cdot\ C_n = \dfrac{n^3}{n+1} e^{-n}$

Équivalent de : $\cdot\ a_n = \dfrac{6n^3 - 7n + 5}{3n^2+n-4}$

$\cdot\ B_n = n^2(e^{1/n} - 1) + \sqrt{n}$

$\cdot\ C_n = \ln(n^2+1) - 2\ln(n)$

$\cdot\ D_n = \exp\left(\dfrac{-2n^2+1}{n+1}\right)$

1) LIMITES :

$$\cdot\ a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} = \frac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} = \frac{n^2-n+1}{n\sqrt{1-1/n^2}+\sqrt{n}} = \frac{n(1-1/n+1/n^2)}{\sqrt{1+1/n^2}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1-1/n-1/n^2)}{\sqrt{1+1/n^2}+\frac{1}{\sqrt{n}}} = +\infty$$

$$\cdot\ B_n = \frac{\cos(n) - \sin^2(n)}{n}$$

$$0 \leqslant \sin^2(n) \leqslant 1$$
$$\iff -1 \leqslant -\sin^2(n) \leqslant 0$$
$$\iff -2 \leqslant \cos(n) - \sin^2(n) \leqslant 1$$
$$\iff \frac{-2}{n} \leqslant \frac{\cos(n) - \sin^2(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} B_n = 0$$

PHOTO AVEC ε.

- $C_n = \dfrac{n^3}{n+1} e^{-n} = \dfrac{n^2}{1+1/n} e^{-n}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 0$ (croissances comparées)

$= \dfrac{n^3}{e^n} \times \dfrac{1}{n+1}$

2) ÉQUIVALENTS :

- $a_n = \dfrac{6n^3+7n+5}{3n^2+n-4} = \dfrac{6n^3(1+7/6n^2+5/6n^3)}{3n^2(1+1/3n-4/3n^2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2n$

$u_n = 2n$ donc $\dfrac{a_n}{u_n} = \dfrac{6n^3(1+7/6n^2+5/6n^3)}{6n^3(1+1/3n-4/3n^2)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{u_n} = 1$

- $B_n = n^2(e^{1/n}-1)+\sqrt{n}$ $\quad e^{1/n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ $\Leftarrow$ $n^2(e^{1/n}-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} n$

On prend ($u_n = n$) : $\dfrac{B_n}{u_n} = n(e^{1/n}-1) + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $e^{1/n}$ équivalent à $1/n$

- $C_n = \ln(n^2+1) - 2\ln(n)$

$= \ln(n^2+1) - \ln(n^2)$

$= \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$

$= \ln(1+1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ $\quad u_n = \dfrac{1}{n^2}$

- $D_n = \exp\left(\dfrac{-2n^2+1}{n-1}\right) = \exp\left(\dfrac{-2n(1+1/2n^2)}{1-1/n}\right)$

Si $u_n = \exp(-2n)$: $\dfrac{D_n}{u_n} = \exp\left(\dfrac{-2n(1+1/2n^2)+2n(1-1/n)}{1-1/n}\right)$

$= \exp\left(\dfrac{-2n-\frac{1}{n}+2n-1/n}{1-1/n}\right)$

$= \exp\left(\dfrac{-2/n}{1-1/n}\right)$

Donc u_n doit être égal à $\exp(-2n-2)$.

$$\exp\left(\frac{-2n\cdot 1/n + (2n+2)(1-1/n)}{1-1/n}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{\cancel{-2n\cdot 1/n} + \cancel{2n} - \cancel{2} + \cancel{2} - 2/n}{1-1/n}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{-1/n}{1-1/n}\right) \longrightarrow 0.$$

CORRECTION:

$$D_n = \exp\left(\frac{-2n^2+1}{n-1}\right)$$

$$\leadsto -2n^2+1 = (\ ?\ )\times(n-1) + cst$$

$$= (-2n-2)(n-1) - 1$$

Donc : $\dfrac{-2n^2+1}{n-1} = -2n-2-\dfrac{1}{n+1}$

$$u_n = \exp(-2n-2)$$

$$\frac{D_n}{u_n} = \frac{\exp\left(\frac{-2n+1}{n-1}\right)}{\exp(-2n-2)} = \frac{\exp\left(-2n-2-\frac{1}{n-1}\right)}{\exp(-2n-2)} = \exp\left(\frac{-1}{n-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$