TD 1

Exercice n° 1 :

a) 10 est un majorant de A : $\forall x \in A \quad x \leqslant 10$

b) A est majoré : $\exists m \in \mathbb{R} \ \forall x \in A \quad x \leqslant m$

c) A n'est pas majoré : $\forall m \in \mathbb{R} \ \exists x \in A \quad x > m$

d) A est borné : $\exists m, n \in \mathbb{R} \ \forall x \in A \quad \underbrace{n \leqslant x \leqslant m}$. $n \leqslant x$ et $x \leqslant m$

e) A n'est pas borné : $\forall m, n \in \mathbb{R} \ \exists x \in A \quad x < n$ ou $x > m$

Exercice n° 2 :

- $A = [0, 3[$ → minorée par -10
  → majorée par 5
  → $\text{Inf}(A) = 0$ car, 0 est le ppe. ; $\text{Sup}(A) = 3$ car, c'est le plus petit des majorants.

  ↳ Par l'absurde, supposons $x < 3$, majorant de A.
  Notons $y = 3 - x > 0$. Prenons $x + \frac{y}{2} \in A$.
  et $x + \frac{y}{2} > x \iff x + \frac{y}{2} = x + \frac{3-x}{2}$

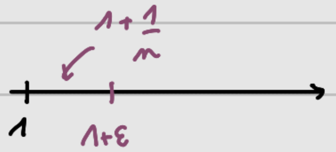
  $= \frac{x+3}{2} < 3$

  ABSURDE donc x n'est pas majorant de A. A n'a pas de majorant plus petit que 3. Donc, 3 est le plus petit majorant donc la borne sup.

- $A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ → majorée par 2
  → minorée par 0

  $\simeq]1 ; 2]$

  → $\text{Sup}(A) = 2$ car, $\text{pge}(A) = 2$
  → 1 est un minorant, montrons que c'est la borne inférieure.



Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$

exemple : $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n < E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ (def)

Donc : $1 \leqslant 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon \quad \Rightarrow \text{Inf}(A) = 1$

• $A = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid x \in]0;2[\right\}$ On pose $f(x) = x + \frac{1}{x}$ → $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

	0		1		2
f'		−	0	+	
f	$+\infty$	↘	2	↗	2,5

→ minorée par 2, qui est le ppe donc la borne inf.

→ $\not\exists$ majorée

Exercice n° 4 :

On a : $\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ majorée par } M \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ majorée par } m \end{array}\right\}$ est vrai pour tout majorant de f et g. Donc : $M = \text{Sup}(f)$ et $m = \text{Sup}(g)$

· $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq M + m$ ⇒ $f+g$ est majorée par $M+m$.

· $\text{Sup}(f+g)$ est le plus petit majorant de $A = \{ f(x) + g(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$

Montrons que $\text{Sup}(f) + \text{Sup}(g)$ est un majorant de A.

· $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = -f(x)$ → $(f+g)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sup(f+g) = 0 < \sup(f) + \sup(g) = 2$

Exercice n° 6 :

Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que (p et q 1ers entre eux)

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff \sqrt{2}\, q = p \iff 2q^2 = p^2$

⇒ p^2 est pair, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$ $\iff 2q^2 = 4k^2$

$\iff q^2 = 2k^2$

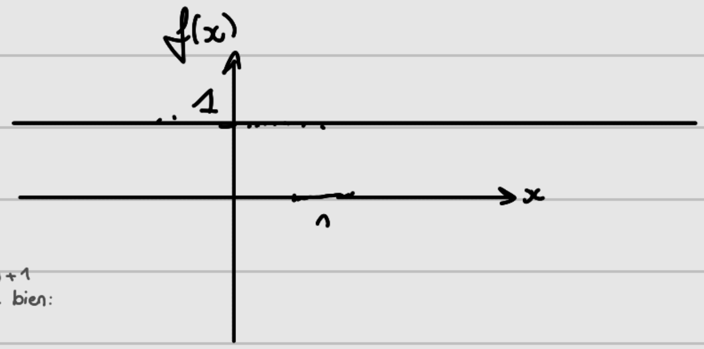
Donc q^2 est pair donc q est pair

ABSURDE car, p et q sont premiers entre eux.

⇒ $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Ex 8 : $f(x) = E(x+1) - E(x)$

$= x$



On a $E(x+1) = E(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$E(x+1) \leq x+1 \leq E(x+1) + 1$

$E(x) \leq x \leq E(x) + 1$

$+1$ ↳ $E(x) + 1 \leq x + 1 \leq (E(x) + 1) + 1$

Par unicité de la partie entière, on a bien :

$E(x+1) = E(x) + 1$

$g(x) = E\left(x+\frac{1}{2}\right) - E(x)$ → Soit $n \in \mathbb{Z}$

→ Si $n \leqslant x \leqslant n+\frac{1}{2}$:

$E(x) = n$

$E\left(x+\frac{1}{2}\right) = n$

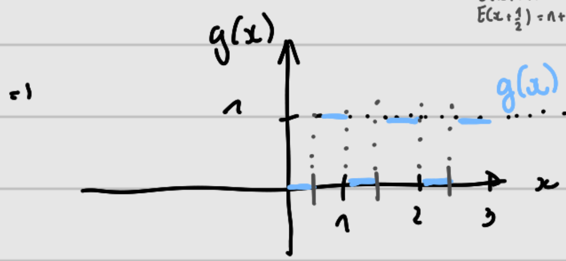
Donc $g(x) = 0$.

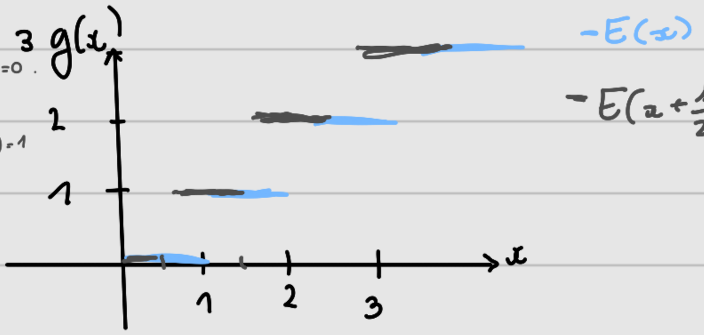
→ Si $n+\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant n+1$:

$E(x) = n$

$E\left(x+\frac{1}{2}\right) = n+1$

Donc $g(x) = 1$





Exercice n° 3 :

• $A = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 5 \right\}$ → minorée par $\frac{2}{3}$ qui est la borne inf de A car ppe(A) $= \frac{2}{3}$

$\approx \left[\frac{2}{3} ; 1\right[$

→ 1 est un majorant, montrons que 1 est la borne sup.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \quad 1-\varepsilon \leqslant x$

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $1-\varepsilon < \frac{n-1}{n+1}$

$\iff (1-\varepsilon)(n+1) < n-1$

$\iff n - n\varepsilon + 1 - \varepsilon < n-1$

$\iff 2-\varepsilon < n\varepsilon$

$\iff \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} < n \qquad \leqslant 1$

On prend $n = E\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right) + 1$. ou $\max\left(5, E\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)+1\right)$

• $A = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}^* \mid x = \frac{1}{y^2} + 3 \right\}$ → $\not\!\!$ majorée

$f(x) = \frac{1}{x^2} + 3 \qquad f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	‖	$-$
f	$3 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 3$

→ minorée par 3, montrons que 3 est la borne inf.

Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n \in A$ tel que $3+\varepsilon > \frac{1}{y^2} + 3 \geqslant 3$

$\iff \varepsilon > \frac{1}{y^2}$

$\iff y^2 > \frac{1}{\varepsilon}$

$\iff y > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$

On prend $x = 3 + \frac{1}{y^2}$ avec $y = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1$ (par exemple)

$3 \leqslant x < x + \varepsilon$ et $x \in A$ (pas besoin partie entière car on est dans $\mathbb{R}$ et non dans $\mathbb{N}$)

Exercice n°5: $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$; $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

Montrons que si les fonctions f et g sont croissantes alors les fonctions M et m sont croissantes.

Soit $x, y \in I$ tel que $x \geq y$. Montrons que $M(x) \geq M(y)$ et $m(x) \geq m(y)$

- On a: $f(x) \geq f(y)$ $\quad g(x) \geq g(y)$

Or: $\max(f(x), g(x)) \geq f(x) \geq f(y)$ ①

$M(x) = \max(f(x), g(x)) \geq g(x) \geq g(y)$ ②

Deux possibilités:

→ $\max(f(y), g(y)) = M(y) = f(y)$

Alors $M(x) \geq f(y) = M(y)$ avec ①

→ $M(y) = g(y)$. Alors $M(x) \geq g(y) = M(y)$ avec ② Donc, M est croissante.

- $f(x) \geq f(y) \geq \min(f(x), y(x)) = m(y)$

$g(x) \geq g(y) \geq \min(f(x), g(x)) = m(y)$

Deux possibilités:

→ $f(x) > g(x)$: $m(x) = g(x) \geq m(y)$

→ $g(x) > f(x)$: $m(x) = f(x) \geq m(y)$ Donc, m est croissante.

Exercice n°7: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists p, q \in \mathbb{Z}, x = p + q\sqrt{2}\}$ et $u = \sqrt{2} - 1$

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $v \in E$, il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $v = p + q\sqrt{2}$.

On a: $n \times v = n \times (p + q\sqrt{2})$

$= np + nq\sqrt{2}$

$= k + m\sqrt{2}$ avec $k = np \in \mathbb{Z}$ et $m = nq \in \mathbb{Z}$ car, p et $q \in \mathbb{Z}$.

<u>CCL</u>: $nv \in E$

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n \in E$.

→ initialisation: $n = 0$, $u^0 = 1 \in E$

→ Supposons que $u^n \in E$, montrons que $u^{n+1} \in E$.

$u^n \in E$ donc il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $u^n = p + q\sqrt{2}$

$u^{n+1} = (\sqrt{2} - 1)(p + q\sqrt{2}) = (-p + 2q) + \sqrt{2}(p - q)$. Donc $u^{n+1} \in E$.

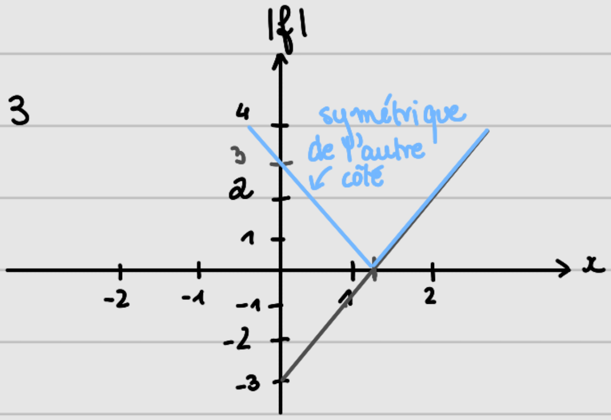
(*) (page 7)

Exercice n°9 :

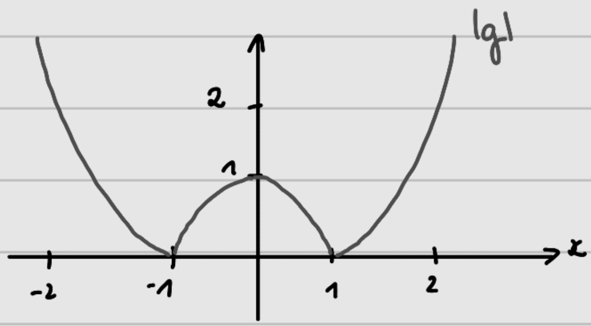
- $|x-3| \leq 4 \iff -4 \leq x-3 \leq 4 \iff -1 \leq x \leq 7$
- $|2x+5| \geq 2 \iff 2x+5 \geq 2$ ou $2x+5 \leq -2 \iff x \geq \frac{-3}{2}$ ou $x \leq \frac{-7}{2}$
- $\left|\frac{x}{2} - 1\right| \leq -1$ IMPOSSIBLE car, $|x| \geq 0$
- $|4x+8| \geq -3 \iff$ TJRS VRAI

Exercice n°10 :

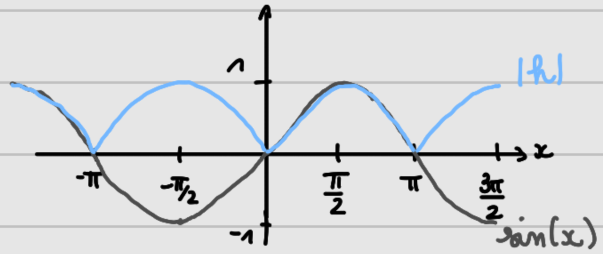
- $|f|$ avec $f : x \mapsto 2x - 3$



- $|g|$ avec $g : x \mapsto x^2 - 1$



- $|h|$ avec $h : x \mapsto \sin(x)$



Exercice n°11 :

Montrons que $|x-y| \leq |x-z| + |y-z|$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a : $|x-y| = |x - y + z - z|$

$$= |(x-z) - (y-z)| \leq |x-z| + |-(y-z)|$$

$$= |x-z| + |y-z|$$

par inégalité triangulaire.

Exercice n° 12 :

Soit $x, y \in \mathbb{R}$

Montrons que $(x = y) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ |x-y| \leq \varepsilon)$

$(\Rightarrow)$ Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que $x = y$. Alors $x - y = 0$ donc, $|x-y| = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, $|x-y| = 0 < \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ Soit $\varepsilon > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons par la contraposée que $x \neq y$.

Donc : $x - y \neq 0$. Donc $\delta = |x-y| > 0$.

En prenant, $\varepsilon = \frac{\delta}{2} > 0$ et $|x-y| > \varepsilon$

$\boxed{A \Rightarrow B \rightarrow \text{non}(B) \Leftarrow \text{non}(A)}$

Exercice n° 13 :

a) $A = \{x \in [0,1] : x \leq f(x)\}$. Montrons que A est une partie bornée de $\mathbb{R}$ non vide.

→ A est minorée par 0 et majorée par 1 donc A est bornée.

→ $0 \in A$ donc A non vide, $0 \leq f(0)$ car, $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$

b) On pose $a := \sup(A)$. Montrons que $0 \leq a \leq 1$.

→ Comme $0 \in A$ et a est un majorant de A : $0 \leq a$.

→ Comme 1 est un majorant de A, et a est le plus petit majorant : $a \leq 1$

c) Montrons que si $x \in A$ alors $x \leq f(a)$.

Soit $x \in A$. On a $x \leq f(x)$ et $x \leq a$. Comme f est croissante, alors $f(x) \leq f(a)$. Donc : $x \leq f(a)$

Montrons que $a \in A$, c'est-à-dire que $a \leq f(a)$.

On a montré que $\forall x \in A$ $x \leq f(a)$. Donc, $f(a)$ majore A.

Or, a est la borne sup, donc le plus petit des majorants.

Donc : $a \leq f(a)$

d) Supposons $a = 1$. Comme $a \in A$ alors $a \leq f(a)$ et $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ donc $f(a) \leq 1$. Donc $1 = a \leq f(a) \leq 1$.

e) Supposons que $a \in [0,1[$. Soit $x \in]a,1]$. Donc $x \notin A$, $x > f(x)$.

f est croissante : $f(x) \geqslant f(a)$. Donc $\forall x \in]a,1]$, $x \geqslant f(a)$

- Donc : $a \geqslant f(a)$.

↳ Par l'absurde, $a < f(a)$. Soit $a < x < f(a)$. Alors $x \in]a,1]$ et $x < f(a)$

ABSURDE.

$\Rightarrow$ Comme $a = \mathrm{Sup}(A)$, $a \leqslant f(a)$ et $a \geqslant f(a)$. On en conclut que $\sup(A) = f(a)$.

(*) (suite ex 4)

c) • On sait que $u = \sqrt{2} - 1$. Or $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2} \iff 1 < 2 < \frac{9}{4}$ car, $x \mapsto x^2$ est strict^t croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc $0 < u < \frac{1}{2}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. $u < \frac{1}{2}$ et $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc,

$$u^n < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

d) • Soit $a<b$. On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < b-a$. $\iff n > \frac{1}{b-a}$.

On prend $n = E\left(\frac{1}{b-a}\right) + 1$. $\Rightarrow 0 < u^n < \frac{1}{n} < b-a$.

- On suppose que $0 < a < b$.

D'après la propriété d'Archiméde, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k u^n > a$.

On prend le premier tel k. Vérifions que $k u^n < b$.

k étant le premier k tel que $k u^n > a$, on a : $(k-1) u^n < a$.

Donc : $u^n < a + u^n < a + \frac{1}{n} < b$.