UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

L1 - S2
Electrocinétique 2
Avril 2018
Durée : 2h

Sans document - Calculatrice autorisée

NOM : **Prénom :** **Groupe de TD :**

1. Phaseur - Impédance

6 points

Le circuit linéaire présenté sur la figure 1 est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de forme $u(t) = \cos(2\pi t - \pi/6)$. Le courant sinusoïdal $i(t)$ traversant le générateur présente la forme suivante : $i(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi t + \pi/6)$.

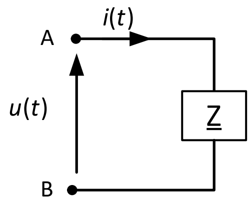


Figure 1

a. Quelle est la fréquence de fonctionnement du générateur ?

$$\omega = 2\pi f = 1 \text{ donc } f = 1/$$

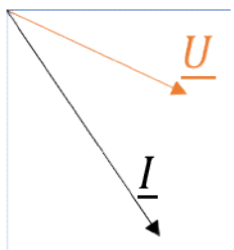
b. Présenter les phaseurs de la tension $u(t)$ et du courant $i(t)$.

$$\underline{U} = 1e^{-j\pi/6}$$

$$i(t) = \sqrt{2}\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\underline{I} = \sqrt{2}e^{-j\pi/3}$$

c. Présenter le diagramme des phaseurs de la tension et du courant dans le plan complexe.



d. Préciser les valeurs efficaces du courant et de la tension.

$$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

e. Calculer l'impédance complexe $(\underline{Z})$ du circuit linéaire sous formes exponentielle et cartésienne.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1e^{-j\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-j\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{+j\pi/6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

f. Calculer la puissance active associée au dipôle Z. Cette puissance est-elle générée ou dissipée ?

$$P = UIcos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} * 1 * \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.61W$$

Cette puissance est dissipée.

2. Circuit RC

5 points

La figure 2 présente un circuit constitué d'un résistor de résistance R en série avec un condensateur de capacité C et alimenté par une source de tension sinusoïdale de forme $u(t) = U_{max} \cos(\omega t)$.

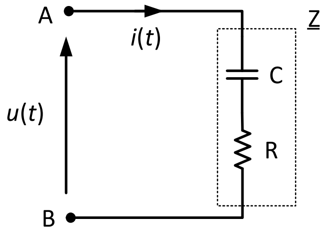


Figure 2

Remarque : Aucune valeur numérique n'est fournie.

a. Déterminer l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit RC sous forme cartésienne.

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

b. En utilisant la définition de l'impédance, déterminer le phaseur de l'intensité de courant $\underline{I}$.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U_{max}}{Ze^{j\varphi_z}} = \frac{U_{max}}{Z}e^{-j\varphi_z} = \frac{U_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}e^{-j*\arctan\left(-1/_{\omega RC}\right)}$$

c. Donner la forme temporelle de l'intensité de courant $i(t)$.

$$i(t) = \frac{U_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}\cos\left(\omega t + \arctan\left(1/_{\omega RC}\right)\right)$$

d. L'intensité du courant est-elle en avance ou en retard de phase par rapport à la tension ?

On sait que

$$0 \leq \arctan\left(1/_{\omega RC}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

Donc le courant est en avance de phase par rapport à la tension.

e. Si $\omega \to \infty$, quel est le déphasage entre la tension et l'intensité de courant ?

$$1/_{\omega RC} \to 0$$

$$\arctan\left(1/_{\omega RC}\right) \to 0$$

Pas de déphasage entre courant et tension

3. Circuit RL

5 points

On considère le circuit de la figure 3 constitué d'un résistor de résistance R en parallèle avec une bobine d'inductance L. Ce circuit RL est alimenté par une source de courant idéale de paramètre i de la forme $i = I_{max} \cos(\omega t)$.

Données numériques **:** R = 10 Ω, L = 60 mH, I_{max}=1 A, f = 50 Hz.

a. A l'aide de la formule du pont diviseur de courant, exprimer i_1 et i_2 en fonction de R, L et i.

$$i_1 = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} i \text{et } i_2 = \frac{R}{R+jL\omega} i$$

b. Calculer les intensités des courants $i_0(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$. On exprimera chaque intensité sous la forme $i_n(t)=I_{MAXn} \cos(\omega_n t- \varphi_n)$ et on calculera les paramètres I_{MAXn}, ω_n, *et* φ_n (avec n=0, 1 et 2).

$$\underline{I} = I_{max} = 1 \text{ et } i(t) = i_0(t) = I_{max} \cos(\omega t)$$

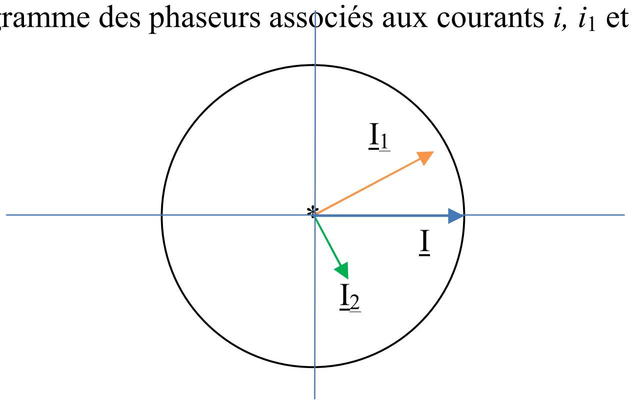
$$\underline{I_1} = \frac{jL\omega}{R+jL\omega}\underline{I} = \frac{j18.85}{10+j18.85}\underline{I} = \frac{j18.85(10-j1\ \ .85)}{(10+j1\ \ .85)(10-j1\ \ .85)}\underline{I} = \frac{355.3+j188.5}{455.3}\underline{I} = (0.78 + j0.414)\underline{I}$$

$$\text{et } i_1(t) = 0.88e^{j0.48} = 0.88e^{j28°} = 0.88\cos(\omega t + 28°)$$

$$\underline{I_2} = \frac{R}{R+jL\omega}\underline{I} = \frac{10}{10+j18.85}\underline{I} = \frac{10(10-j18.85)}{(10+j1\ \ .85)(10-j1\ \ .85)}\underline{I} = \frac{100-j188.5}{455.3}\underline{I} = (0.22 - j0.414)\underline{I}$$

$$\text{et } i_2(t) = 0.47e^{-j1.08} = 0.47e^{-j62°} = 0.47\cos(\omega t - 62°)$$

c. Représenter le diagramme des phaseurs associés aux courants i, i_1 et i_2.



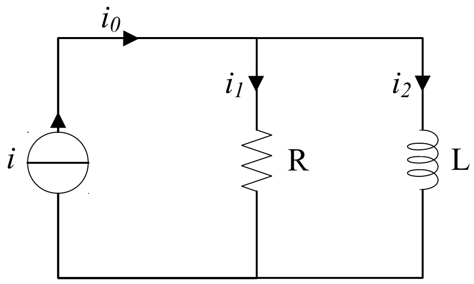


Figure 3

4. Equivalence série-parallèle **4 points**

On considère sur la figure 4 deux dipôles. Le premier est constitué d'un résistor de résistance R_1 en série avec un condensateur de capacité C_1. Le second est constitué d'un résistor de résistance R_2 en parallèle avec un condensateur de capacité C_2.

a. Exprimer l'impédance équivalente de ces deux dipôles.

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{jC_1\omega} = R_1 - j\frac{1}{C_1\omega}$$

$$Z_2 = \frac{R_2 \times \frac{1}{jC_2\omega}}{R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega} = \frac{R_2(1 - jR_2C_2\omega)}{(1 + jR_2C_2\omega)(1 - jR_2C_2\omega)} = \frac{R_2(1 - jR_2C_2\omega)}{1 + (R_2C_2\omega)^2}$$

b. Déterminer les conditions d'équivalence entre R_1, R_2, C_1, C_2 pour que les deux dipôles présentent la même impédance à une vitesse angulaire ω donnée.

$$R_1 - j\frac{1}{C_1\omega} = \frac{R_2}{1 + (R_2C_2\omega)^2} - j\frac{{R_2}^2C_2\omega}{1 + (R_2C_2\omega)^2}$$

Egalité de la partie réelle :

$$R_1 = \frac{R_2}{1 + (R_2C_2\omega)^2}$$

Egalité de la partie imaginaire :

$$\frac{1}{C_1\omega} = \frac{{R_2}^2C_2\omega}{1 + (R_2C_2\omega)^2}$$

$$C_1 = \frac{1 + (R_2C_2\omega)^2}{{R_2}^2C_2\omega^2}$$

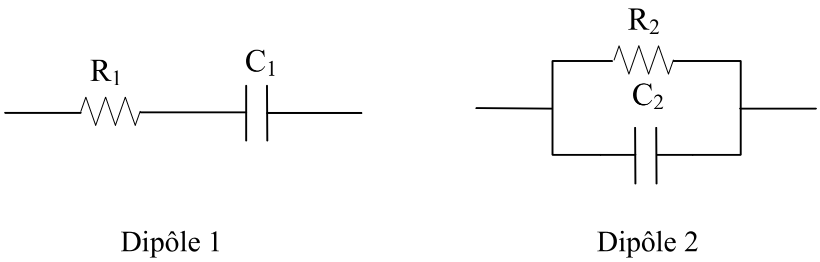


Figure 4