<u>Rappel:</u> TVI → Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I. Soient $a<b$ deux réels dans I.
Alors f atteint sur $[a,b]$ toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$

Théorème des bornes: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ où $a<b$ sont deux réels, continue sur $[a,b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.
C'est-à-dire, il existe x_+ et $x_- \in [a,b]$ tel que $f(x_+) = \sup\limits_{[a,b]} f$ et $f(x_-) = \inf\limits_{[a,b]} f$.

Exercice n° 1:

4) $f(x) = x^5 - 5x + 1$

$f'(x) = 5x^4 - 5$ $\quad f'(x) = 0 \iff 5x^4 = 5 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗ (0)	5	↘ (0)	-3	↗ (0)	$+\infty$

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(x^4 - 5 + 1/x) = +\infty$

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Montrons que f s'annule exactement 3 fois.
On montre que f s'annule exactement une fois sur $]-\infty, -1]$, exactement une fois sur $[-1, 1]$ et exactement une fois sur $[1, +\infty[$.
→ Montrons que f s'annule exactement une fois sur $]-\infty, -1]$.
Comme f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ (car $f' > 0$ sur $]-\infty, -1]$) alors f est injective sur $]-\infty, -1]$ donc ne s'y annule au plus qu'une fois.
Comme $f(-2) = -21 < 0$ et $f(-1) = 5 \geq 0$, et comme f est continue sur $\mathbb{R}$ alors par le TVI, il existe $x \in [-2, -1]$ tq $f(x) = 0$.
Pareil pour les 2 autres intervalles
$\Rightarrow$ f s'annule exactement 3 fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 2 :

1) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et $g : x \mapsto f(x) - x$.

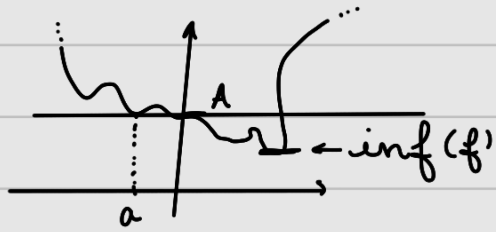
On cherche $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$.

On a : $g(0) = \underbrace{f(0)}_{\in[0,1]} - 0 \geq 0$, $g(1) = \underbrace{f(1)}_{\in[0,1]} - 1 \leq 0$

Donc, comme g est continue sur $[0,1]$, par le TVI il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, càd $f(x_0) = x_0$

Exercice n° 5 :

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Posons $A = f(0)$.

Comme $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, il existe $b > 0$ tq $\forall x \geq b$, $f(x) \geq f(0)$

Comme $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$, il existe $a < 0$ tq $\forall x \leq a$, $f(x) \geq f(0)$

Comme f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ alors par le thm des bornes, f est minorée sur $[a,b]$ et atteint son inf sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \inf_{[a,b]} f$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \geq f(x_0)$

→ si $x \in [a,b]$, par déf de x_0 on a $f(x) \geq f(x_0)$

→ si $x \notin [a,b]$ alors on a $f(x) \geq f(0) \underbrace{\geq}_{\text{car, } 0 \in [a,b]} f(x_0)$

Donc : f est minorée et $f(x_0) = \inf_{\mathbb{R}} f$

2)