Suites et séries de fonctions : CC1.

Durée : 1h30.

Les documents de cours et les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, etc...) ne sont pas autorisés. Tous les résultats devront être soigneusement justifiés, la qualité de la rédaction sera prise en considération.

N'oubliez pas d'écrire votre nom et votre prénom et sur votre copie.

Exercice 1. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \ln\left(e^x + \dfrac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f à préciser.

2. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+\sin(x)^2)^n}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers une fonction f à préciser.

2. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$? Justifier votre réponse.

3. Soient $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[a, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 2]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[\\ -n^2 x + 2n & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[\\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 2\right]. \end{cases}$$

1. Sur un même graphique, représenter les fonctions f_2 et f_4.

2. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0, 2]$.

3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0, 2]$.

Exercice 4. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\infty,I} \leq M$.

Montrer que la suite $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f^2.