Étude des circuits en régime sinusoïdal

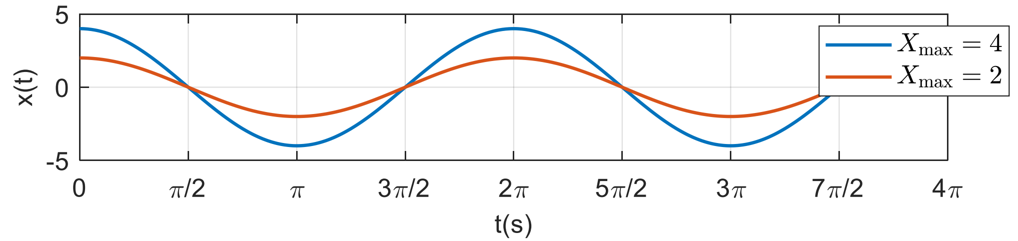
Représentation temporelle

- On considère une grandeur physique réelle évoluant de manière sinusoïdale avec le temps :

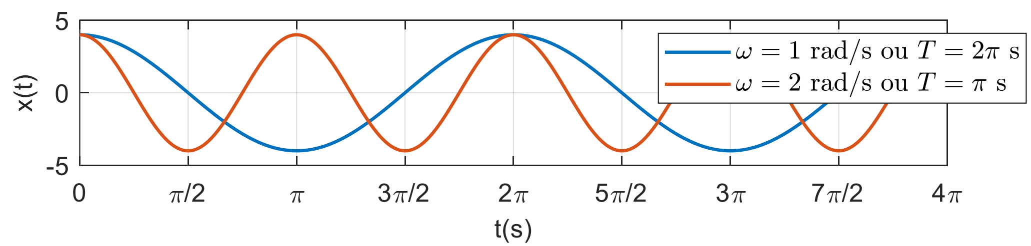
$$x(t) = X_{max}\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{où :} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Xmax : valeur maximale (amplitude)
ω : pulsation (vitesse angulaire)
φ : phase à l'origine (phase à t=0)

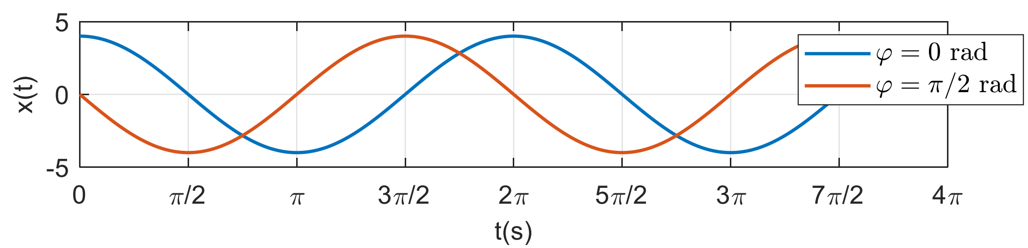
Variation de l'amplitude :



Variation de la pulsation :



Variation de la phase à l'origine :



Représentation complexe

- On associe à cette grandeur réelle une grandeur complexe de manière suivante :

$$\underline{x} = X_{max} e^{j(\omega t + \varphi)} \qquad -\pi < \varphi \leq \pi$$

- D'après la formule d'Euler :

$$\underline{x} = \underbrace{X_{max} \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{Partie réelle}} + jX_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$

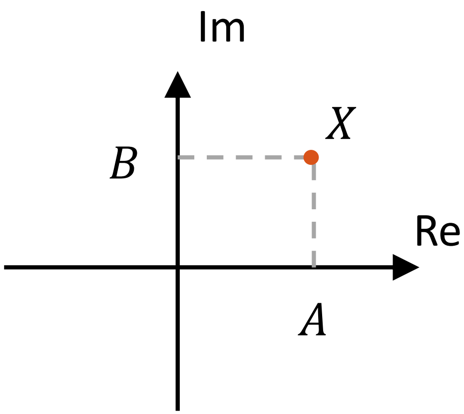
- On remarque que la partie réelle de $\underline{x}$ correspond à $x(t)$:

$$\mathrm{Re}\{\underline{x}\} = X_{max} \cos(\omega t + \varphi) = x(t)$$

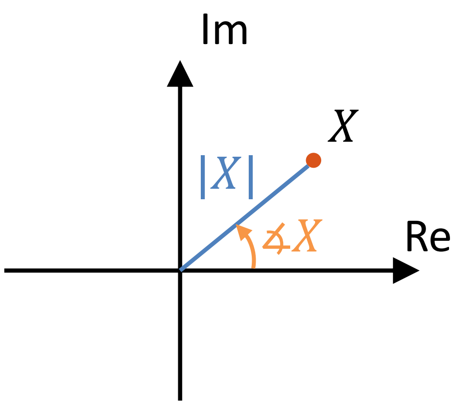
Grandeur sinusoïdale

Rappel – Plan complexe

- Dans un plan complexe, l'abscisse désigne la partie réelle et l'ordonnée la partie imaginaire. Un nombre complexe est donc situé dans le plan à l'aide de ses coordonnées : parties réelle et imaginaire.



$X = A + jB$ (ici A>0 et B>0)



$X = |X| e^{j\measuredangle X}$

Module : $|X| = \sqrt{A^2 + B^2}$

Argument : $\measuredangle \mathrm{X} = \arg(\mathrm{X})$

$$\arg(\mathrm{X}) = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\dfrac{B}{A}\right) & A > 0 \\ \operatorname{atan}\left(\dfrac{B}{A}\right) + \pi & A < 0, B > 0 \\ \operatorname{atan}\left(\dfrac{B}{A}\right) - \pi & A < 0, B < 0 \end{cases}$$

- La distance du point à l'origine

indique le **module** du nombre complexe et l'angle par rapport à l'abscisse indique son **argument**.

Représentation complexe

- La grandeur complexe $\underline{x}$ définie pour la grandeur sinusoïdale $x(t)$ peut également être présentée dans le plan complexe.

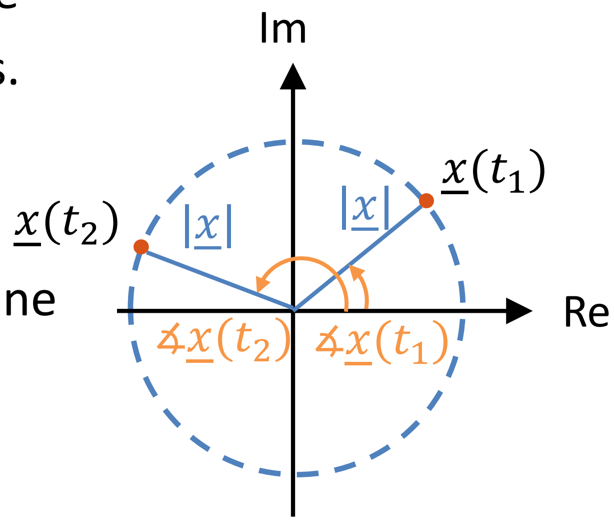
$$\underline{x} = X_{max} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

où :

$|\underline{x}| = X_{max}$ Amplitude

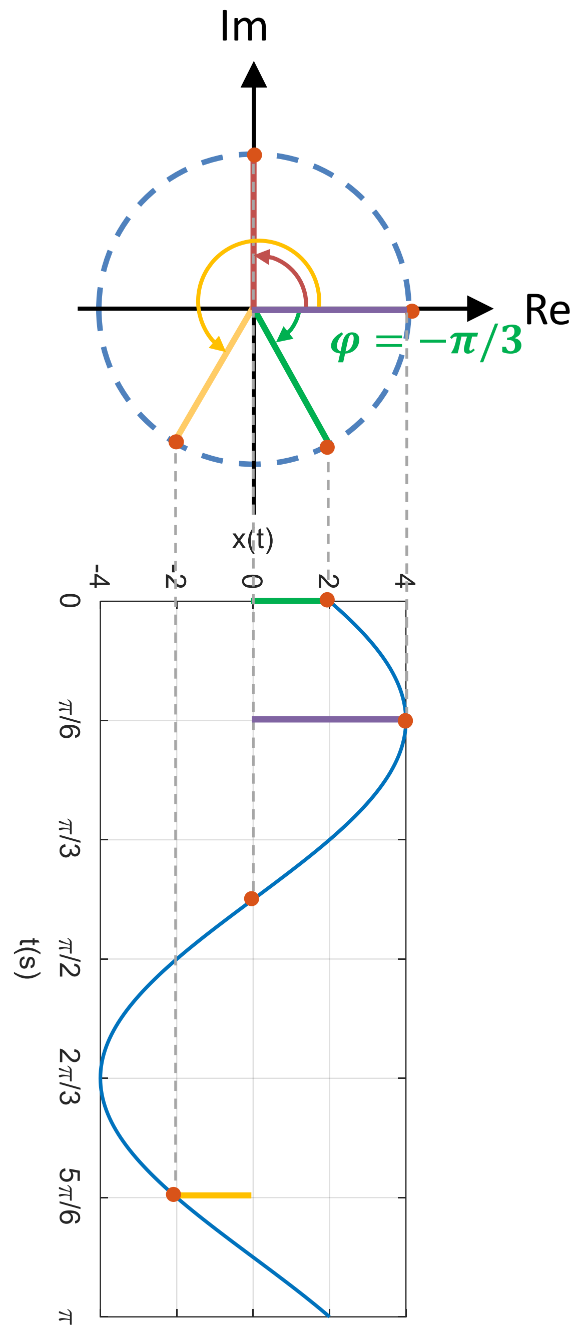
$\measuredangle \underline{x} = \omega t + \varphi$ Phase

- L'amplitude X_{max} est constante, donc la distance par rapport à l'origine reste la même dans le temps.
- La phase $\omega t + \varphi$ n'est pas constante et varie avec le temps.
- La position du point dans le plan complexe dessine un cercle de rayon X_{max} dans le temps avec une vitesse angulaire ω rad/s.
- Le point fait un tour complet du cercle entre $t = 0$ ($\measuredangle \underline{x} = \varphi$) et $t = T$ ($\measuredangle \underline{x} = 2\pi + \varphi$).



- Exemple: $x(t) = 4\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$

$\omega = 2$ rad/s $\rightarrow$ T $= \pi$ s



$$t = 0 : x(0) = 4\cos\left(2\times 0 - \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$t = \frac{\pi}{6} :\ x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(2\times\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos(0) = 4$$

$$t = \frac{5\pi}{12} : x\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 4\cos\left(2\times\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$t = \frac{5\pi}{6} :\ x\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\cos\left(2\times\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2$$

Grandeur sinusoïdale

Phaseur

- Si toutes les grandeurs dans le circuit oscillent à la même pulsation ω, on peut faire abstraction de cette information. Dans l'écriture complexe, on ne gardera que l'amplitude et la phase :

$$\underline{x} = X_{max}e^{j(\omega t+\varphi)} = X_{max}\underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Commun entre toutes les grandeurs du circuit}}e^{j\varphi}$$

Le **phaseur** est ainsi défini par :

$$\underline{X} = X_{max}e^{j\varphi} \qquad -\pi < \varphi \leq \pi$$

- Le phaseur est une grandeur constante dans le temps. Il porte toutes les informations utiles : amplitude et phase à l'origine.

Phaseurs

Propriétés – Addition algébrique (1)

- La somme (ou soustraction) des deux phaseurs est un phaseur.

$$x_1(t) = X_{max1}\cos(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow \underline{X_1} = X_{max1}e^{j\varphi_1} \quad \text{Phaseur 1}$$

$$x_2(t) = X_{max2}\cos(\omega t + \varphi_2) \longrightarrow \underline{X_2} = X_{max2}e^{j\varphi_2} \quad \text{Phaseur 2}$$

  - Notons bien que la pulsation ω est identique pour les deux grandeurs.

$$x_1(t) + x_2(t) = X_{max1}\cos(\omega t + \varphi_1) + X_{max2}\cos(\omega t + \varphi_2) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{t=T/4}]{\text{t=0}} \begin{cases} X_{max1}\cos(\varphi_1) + X_{max2}\cos(\varphi_2) = A\cos(\varphi) \\ X_{max1}\sin(\varphi_1) + X_{max2}\sin(\varphi_2) = A\sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{[X_{max1}\cos(\varphi_1) + X_{max2}\cos(\varphi_2)]^2 + [X_{max1}\sin(\varphi_1) + X_{max2}\sin(\varphi_2)]^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{X_{max1}\sin(\varphi_1) + X_{max2}\sin(\varphi_2)}{X_{max1}\cos(\varphi_1) + X_{max2}\cos(\varphi_2)} \end{cases}$$

$$\underline{X_1} + \underline{X_2} = X_{max1}e^{j\varphi_1} + X_{max2}e^{j\varphi_2}$$

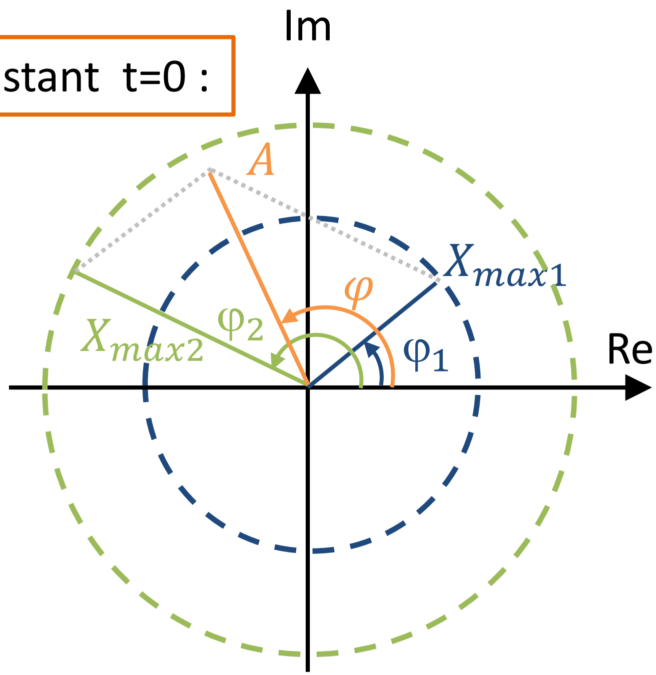
$$= X_{max1}\cos(\varphi_1) + jX_{max1}\sin(\varphi_1) + X_{max2}\cos(\varphi_2) + jX_{max2}\sin(\varphi_2)$$

$$= \sqrt{[X_{max1}\cos(\varphi_1) + X_{max2}\cos(\varphi_2)]^2 + [X_{max1}\sin(\varphi_1) + X_{max2}\sin(\varphi_2)]^2}\, e^{j\mathrm{atan}\left[\frac{X_{max1}\sin(\varphi_1)+X_{max2}\sin(\varphi_2)}{X_{max1}\cos(\varphi_1)+X_{max2}\cos(\varphi_2)}\right]}$$

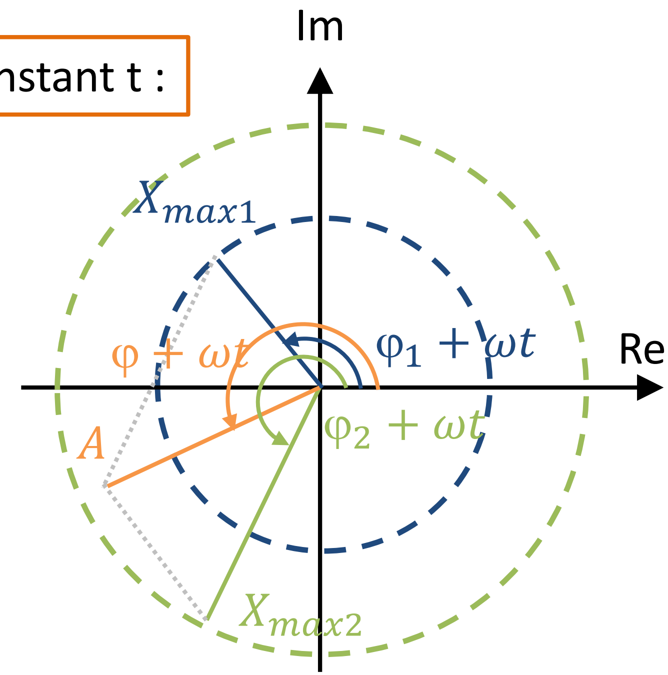
Propriétés – Addition algébrique (2)

- A l'instant t=0 le schéma présente les phases à l'origine des deux grandeurs ainsi que celle de l'addition. A l'instant t, les phases des grandeurs évoluent avec la même vitesse ω.

A l'instant t=0 :



A l'instant t :



$$A = \sqrt{[X_{max1}\cos(\varphi_1) + X_{max2}\cos(\varphi_2)]^2 + [X_{max1}\sin(\varphi_1) + X_{max2}\sin(\varphi_2)]^2}$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\left[\frac{X_{max1}\sin(\varphi_1) + X_{max2}\sin(\varphi_2)}{X_{max1}\cos(\varphi_1) + X_{max2}\cos(\varphi_2)}\right]$$

Phaseurs

Propriétés – Produit

- Le produit (quotient) des deux phaseurs **n'est pas** un phaseur.

$$x_1(t) = X_{max1}\cos(\omega t + \varphi_1) \longrightarrow \underline{X_1} = X_{max1}e^{j\varphi_1} \quad \text{Phaseur 1}$$

$$x_2(t) = X_{max2}\cos(\omega t + \varphi_2) \longrightarrow \underline{X_2} = X_{max2}e^{j\varphi_2} \quad \text{Phaseur 2}$$

Rappel : $\boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]}$

$$x_1(t) \times x_2(t) = X_{max1}\cos(\omega t + \varphi_1) \times X_{max2}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= \frac{X_{max1}X_{max2}}{2}[\cos(\omega t + \varphi_1 + \omega t + \varphi_2) + \cos(\omega t + \varphi_1 - \omega t - \varphi_2)]$$

$$= \frac{X_{max1}X_{max2}}{2}[\underbrace{\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)}_{\text{Pulsation} = 2\omega} + \underbrace{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\text{Pulsation} = 0}]$$

- Il faut que la pulsation du résultat soit la même que celle des deux grandeurs initiales. Le résultat d'un produit n'est donc pas un phaseur.

Phaseurs

Propriétés – Dérivation (1)

- La dérivation temporelle d'une grandeur sinusoïdale donne un phaseur.

$$x(t) = X_{max}\cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\text{Phaseur}} \underline{X} = X_{max}e^{j\varphi}$$

Rappel : $\boxed{\begin{aligned} \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin a \\ \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos a \end{aligned}}$

Même pulsation que x(t)

$$\underset{\text{dérivée}}{\dot{x}\ (t)} = \frac{dx(t)}{dt} = -X_{max}\omega\sin(\omega t + \varphi) = X_{max}\omega\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Phaseur}} \quad \underline{\dot{X}} = X_{max}\omega e^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}X_{max}e^{j\varphi} = \omega \underbrace{e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}}\underline{X} = j\omega\underline{X}$$

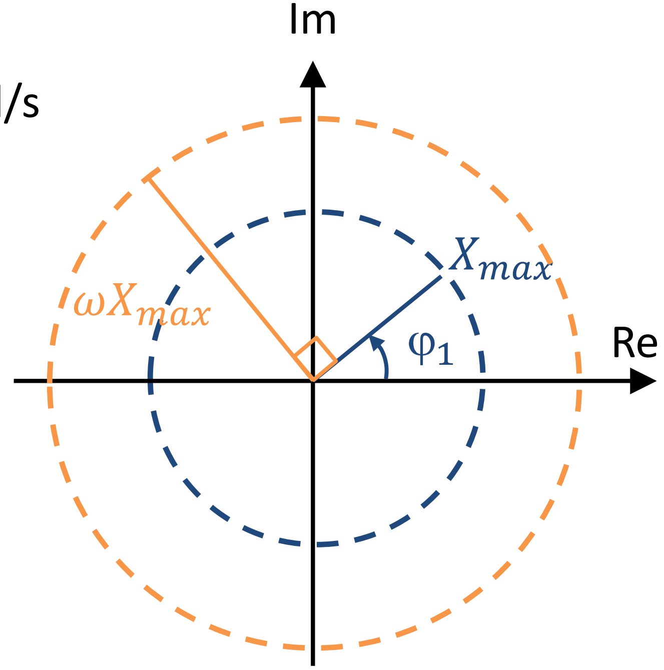
$$e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j$$

Phaseur de la dérivée de x(t) $\boxed{\underline{\dot{X}} = j\omega\underline{X}}$

Propriétés – Dérivation (2)

- Dans le plan complexe, le phaseur de la **dérivée temporelle** d'une grandeur s'obtient en **multipliant** le module du phaseur de la grandeur par ω et en faisant tourner le phaseur de 90° dans le sens trigonométrique (**sens antihoraire**).

Pour ω>1 rad/s



Propriétés – Intégration (1)

- L'intégration temporelle d'une grandeur sinusoïdale donne un phaseur.

$$x(t) = X_{max}\cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{\text{Phaseur}} \underline{X} = X_{max}e^{j\varphi}$$

Même pulsation que x(t)

$$\underbrace{y(t)}_{\text{primitive}} = \int x(t)dt = \frac{X_{max}}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) = \frac{X_{max}}{\omega}\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Phaseur}} \quad \underline{Y} = \frac{X_{max}}{\omega}e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\omega}e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}X_{max}e^{j\varphi} = \frac{1}{\omega}\underbrace{e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}\underline{X} = -\frac{j}{\omega}\underline{X}$$

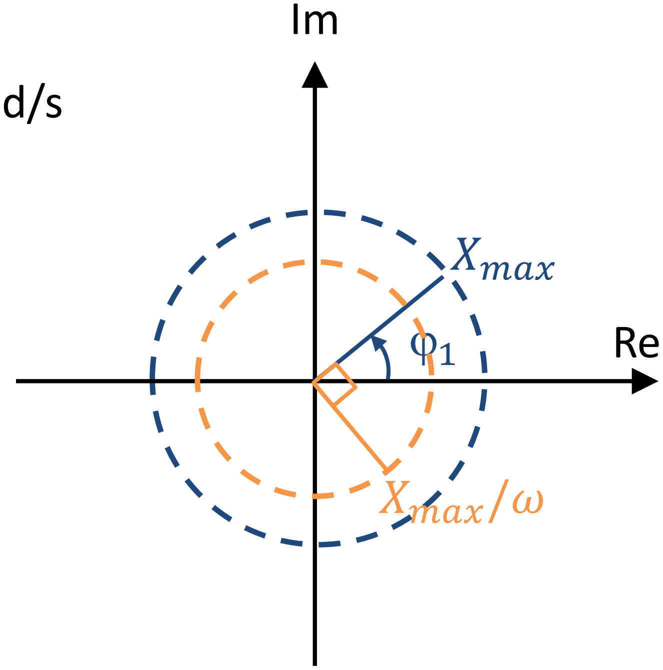
$$e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j$$

Phaseur de la primitive de x(t) $\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{j\omega}\underline{X}}$

Propriétés – Intégration (2)

- Dans le plan complexe, le phaseur de la **primitive temporelle** d'une grandeur s'obtient en **divisant** le module du phaseur de la grandeur par ω et en faisant tourner le phaseur de 90° à l'opposé du sens trigonométrique (**sens horaire**).

Pour ω>1 rad/s



Loi d'Ohm généralisée

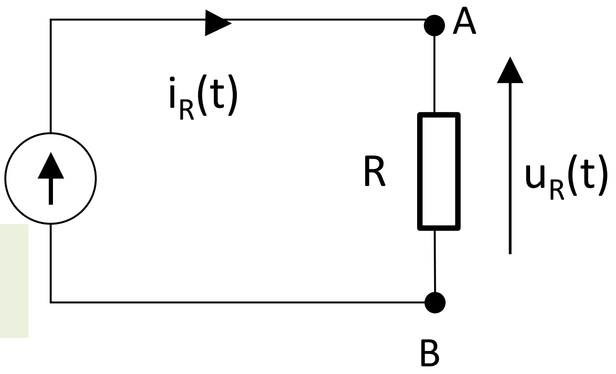
Résistance – Courant complexe

Solution permanente

$$\begin{cases} i_R(t) = I_0 e^{j\omega t} \\ u_R(t) = R i_R(t) \end{cases}$$

Formule d'Euler

$$I_0 e^{j\omega t} = I_0 \cos(\omega t) + j\, I_0 \sin(\omega t)$$



Loi d'Ohm :

$$u_R(t) = R I_0 e^{j\omega t} = \boxed{R}\, i_R(t)$$

$$u_R(t) = R I_0 \left[\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)\right]$$

- Par identification :

$$\mathrm{Re}\left[u_R(t)\right] = R I_0 \cos(\omega t)$$

$$\mathrm{Im}\left[u_R(t)\right] = R I_0 \sin(\omega t)$$

Rappel

Condensateur – Courant complexe

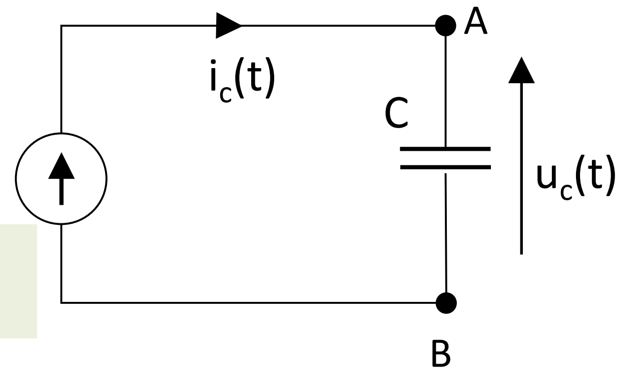
Solution permanente

$$\begin{cases} i_C(t) = I_0 e^{j\omega t} \\ i_C(t) = C\dfrac{du_c(t)}{dt} \end{cases}$$

Formule d'Euler

$$I_0 e^{j\omega t}$$

$$I_0\cos(\omega t) + jI_0\sin(\omega t)$$



$$C\frac{du_c(t)}{dt} = I_0 e^{j\omega t} \longrightarrow u_C(t) = \int \frac{I_0 e^{j\omega t}}{C}dt = \frac{I_0}{C(j\omega)}e^{j\omega t} = \boxed{\frac{1}{jC\omega}} i_C(t)$$

$$u_C(t) = \frac{I_0}{j\omega C}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right] = \frac{I_0}{C\omega}\left[-j\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right]$$

- Par identification : $\mathrm{Re}\left[u_C(t)\right] = \dfrac{I_0}{C\omega}\sin(\omega t)$

Solution permanente à l'excitation en courant $I_0 \cos(\omega t)$

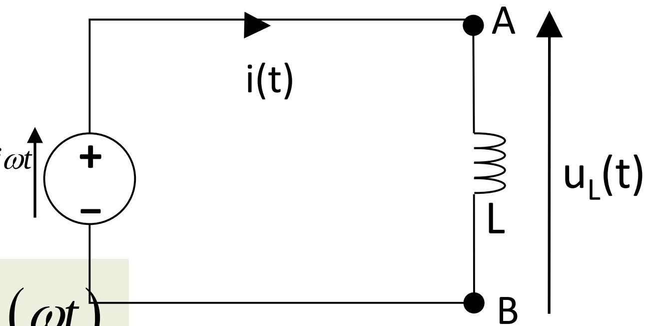
$$\mathrm{Im}\left[u_C(t)\right] = -\frac{I_0}{C\omega}\cos(\omega t)$$

Solution permanente à l'excitation en courant $I_0 \sin(\omega t)$

Rappel

Bobine – Tension complexe

Solution permanente



$$\begin{cases} u_L(t) = E_0 e^{j\omega t} \\ u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

Formule d'Euler

$$E_0 e^{j\omega t} = E_0\cos(\omega t) + jE_0\sin(\omega t)$$

$$i_L(t) = \int \frac{E_0 e^{j\omega t}}{L}dt = \frac{E_0}{j\omega L}e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega L}u_L(t) \longrightarrow u_L(t) = \boxed{j\omega L}\, i_L(t)$$

$$i_L(t) = \frac{E_0}{L\omega}\left[-j\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right]$$

- Par identification :

$$\mathrm{Re}\left[i_L(t)\right] = \frac{E_0}{L\omega}\sin(\omega t)$$

Solution permanente à l'excitation en tension $E_0 \cos(\omega t)$

$$\mathrm{Im}\left[i_L(t)\right] = -\frac{E_0}{L\omega}\cos(\omega t)$$

Solution permanente à l'excitation en tension $E_0 \sin(\omega t)$

Loi d'Ohm généralisée

Impédance (1)

- Dans le régime continu, lorsqu'une résistance R présentant une tension U à ses bornes, est traversée par un courant d'intensité I, la loi d'Ohm peut être appliquée : $$R = \frac{U}{I}$$

- Lorsque les grandeurs sont sinusoïdales de même pulsation, on peut leur associer un phaseur :

$$u(t) = U_{max}\cos(\omega t + \varphi_u) \xrightarrow{\text{Phaseur}} \underline{U} = U_{max}e^{j\varphi_u}$$

$$i(t) = I_{max}\cos(\omega t + \varphi_i) \xrightarrow{\text{Phaseur}} \underline{I} = I_{max}e^{j\varphi_i}$$

Par analogie avec la loi d'Ohm, l'impédance d'un dipôle avec $\underline{U}$ et $\underline{I}$ à son niveau est définie par :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

Loi d'Ohm généralisée
Impédance (2)

- Forme exponentielle :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{max}e^{j\varphi_u}}{I_{max}e^{j\varphi_i}} = \frac{U_{max}}{I_{max}}e^{j(\varphi_u-\varphi_i)}$$

Module : $|\underline{Z}| = \dfrac{U_{max}}{I_{max}}$

Argument : $\measuredangle\underline{Z} = \varphi_u - \varphi_i$

- Forme cartésienne :

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= |\underline{Z}|\cos\measuredangle\underline{Z} + j|\underline{Z}|\sin\measuredangle\underline{Z}\\ &= \frac{U_{max}}{I_{max}}\cos(\varphi_u-\varphi_i) + j\frac{U_{max}}{I_{max}}\sin(\varphi_u-\varphi_i)\\ &= R + jX\end{aligned}$$

R : Partie réelle ou résistance [Ω]
X : Partie imaginaire ou réactance [Ω]

$$\longrightarrow \quad |\underline{Z}| = \sqrt{R^2+X^2} \qquad \measuredangle\underline{Z} = \operatorname{atan}\left(\frac{X}{R}\right)$$

Loi d'Ohm généralisée

Admittance

- L'admittance d'un dipôle avec les phaseurs $\underline{U}$ et $\underline{I}$ à son niveau est définie par :

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}}}$$

  - Forme exponentielle :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I_{max} e^{j\varphi_i}}{U_{max} e^{j\varphi_u}} = \frac{I_{max}}{U_{max}} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$$

Module : $\left|\underline{Y}\right| = \frac{I_{max}}{U_{max}} = \frac{1}{|\underline{Z}|}$

Argument : $\measuredangle \underline{Y} = \varphi_i - \varphi_u = -\measuredangle \underline{Z}$

  - Forme cartésienne :

$$\underline{Y} = \left|\underline{Y}\right| \cos \measuredangle \underline{Y} + j\left|\underline{Y}\right| \sin \measuredangle \underline{Y}$$

$$= G + jB$$

G : Partie réelle ou conductance [1/Ω]

B : Partie imaginaire ou susceptance [1/Ω]

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} \longrightarrow \begin{cases} G = \dfrac{R}{R^2 + X^2} \\ B = -\dfrac{X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

Impédances des dipôles linéaires (1)

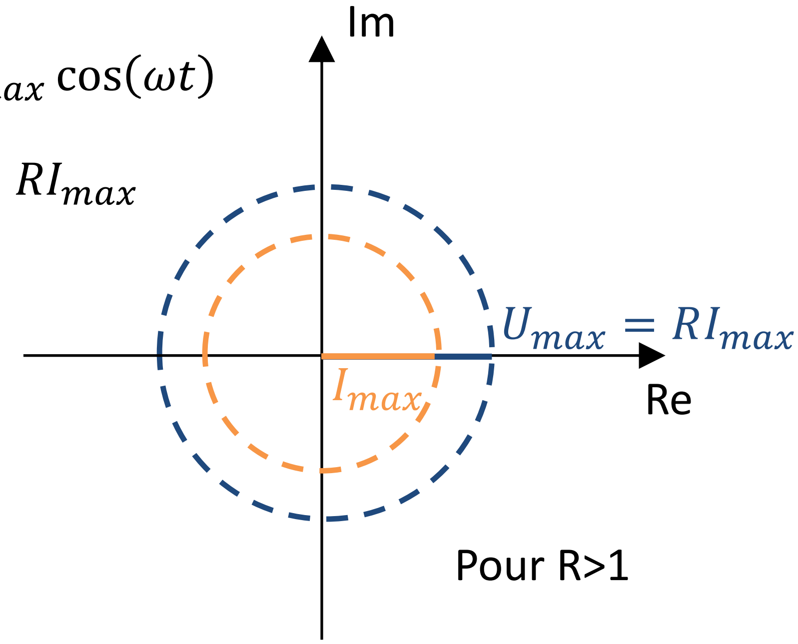
Pour tous les calculs, sans perte de généralité, on suppose la forme suivante pour le courant :

$$i(t) = I_{max}\cos(\omega t) \xrightarrow{\text{Phaseur}} \underline{I} = I_{max}e^{j0} = I_{max}$$

Résistance

- Domaine temporel : $u_R(t) = Ri(t) = RI_{max}\cos(\omega t)$
- Domaine complexe : $\underline{U_R} = RI_{max}e^{j0} = RI_{max}$
- Impédance : $\underline{Z_R} = \dfrac{\underline{U_R}}{\underline{I}} = \dfrac{RI_{max}}{I_{max}} = R$

$$\boxed{\underline{Z_R} = R}$$



- La tension et le courant sont **en phase**.

Loi d'Ohm généralisée

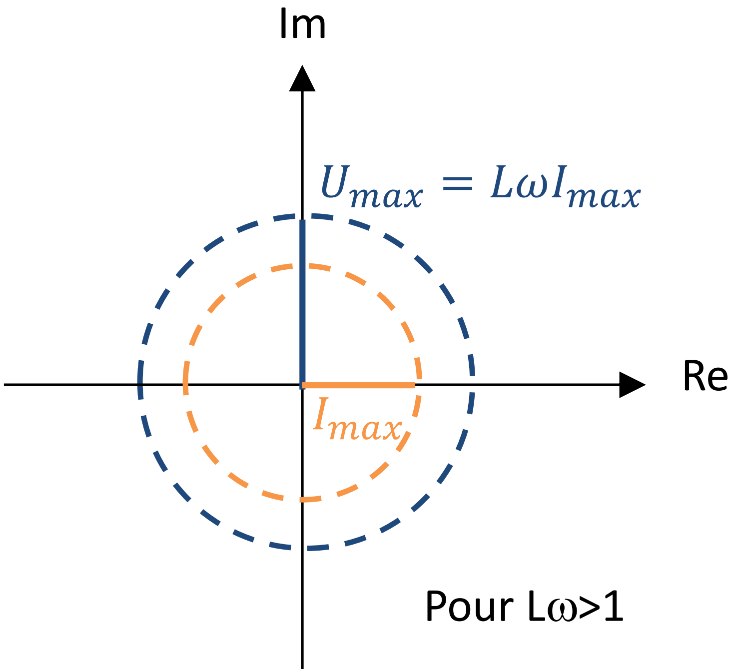
Impédances des dipôles linéaires (2)

Bobine

- Domaine temporel : $u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} = -LI_{max}\omega\sin(\omega t) = LI_{max}\omega\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$
- Domaine complexe : $\underline{U_L} = L\omega I_{max}e^{j\frac{\pi}{2}}$
- Impédance : $\underline{Z_L} = \dfrac{\underline{U_L}}{\underline{I}} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$

$$\boxed{\underline{Z_L} = j\omega \mathrm{L}}$$

- La tension est en **avance** de phase (+90°) par rapport au courant.



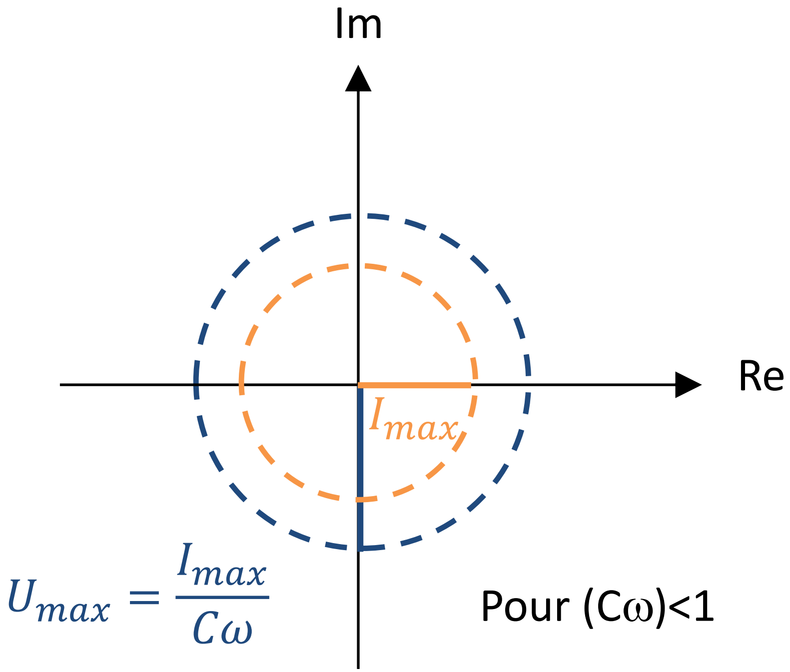
Impédances des dipôles linéaires (3)

Condensateur

- Domaine temporel : $u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = \frac{I_{max}}{C\omega}\sin(\omega t) = \frac{I_{max}}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$
- Domaine complexe : $\underline{U_C} = \frac{I_{max}}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$
- Impédance : $\underline{Z_C} = \frac{\underline{U_C}}{\underline{I}} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

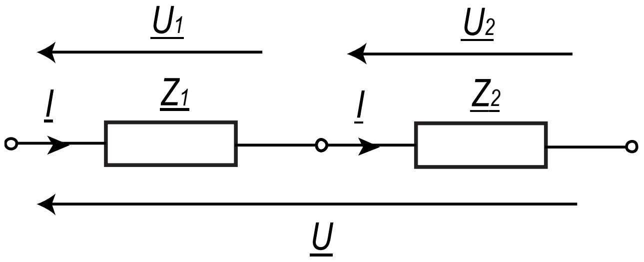
$$\boxed{\underline{Z_C} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}}$$

- La tension est en **retard** de phase (-90°) par rapport au courant.



Association des dipôles(1)

- Deux dipôles sont **en série** lorsqu'ils sont sur la même branche et qu'ils sont traversés par le même courant.



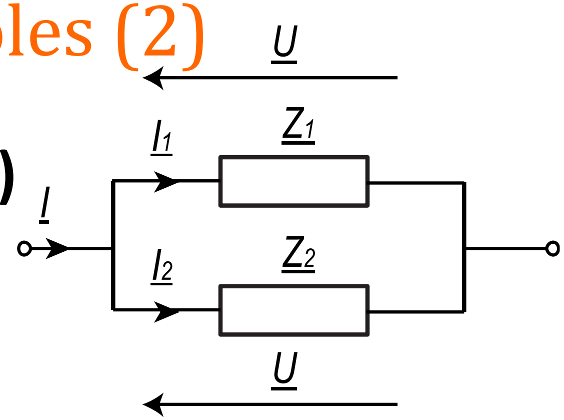
- Loi d'Ohm généralisée pour chaque dipôle : $\underline{U_1} = \underline{Z_1}\underline{I}$ et $\underline{U_2} = \underline{Z_2}\underline{I}$

- Additivité des tensions : $\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2} = \underbrace{\left(\underline{Z_1} + \underline{Z_2}\right)}_{\text{Impédance équivalente}} \underline{I} = \underline{Z}.\underline{I}$

- Impédance équivalente : $\boxed{\underline{Z} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\underline{Y_1}} + \frac{1}{\underline{Y_2}}}$

- Pour *N* dipôles en série : $\boxed{\underline{Z} = \sum_{i=1}^{N} \underline{Z_i}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{\underline{Y}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\underline{Y_i}}}$

Association des dipôles (2)

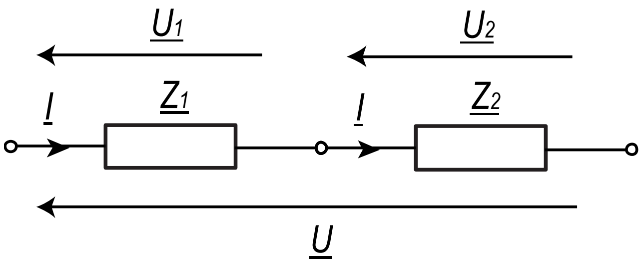


- Deux dipôles sont **en dérivation (en parallèle)** lorsqu'ils ont les mêmes bornes et donc la même tension à leurs bornes.

  - Loi d'Ohm généralisée pour chaque dipôle : $\underline{U} = \underline{Z_1}.\underline{I_1}$ et $\underline{U} = \underline{Z_2}.\underline{I_2}$
  - Lois des nœuds : $\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = \underline{U}\left(\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}\right) \longrightarrow \underline{U} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}\right)}\underline{I} = \underbrace{\frac{\underline{Z_1}.\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}}_{\text{Impédance équivalente}}\underline{I}$
  - Impédance équivalente : $\boxed{\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}} \longrightarrow \boxed{\underline{Y} = \underline{Y_1} + \underline{Y_2}}$
  - Pour *N* dipôlse en parallèle : $\boxed{\frac{1}{\underline{Z}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z_i}}} \longrightarrow \boxed{\underline{Y} = \sum_{i=1}^{N} \underline{Y_i}}$

Pont diviseur de tension

- Deux dipôles en série : $\underline{I_1} = \underline{I_2}$



  - Loi d’Ohm généralisée pour chaque dipôle : $\underline{U_1} = \underline{Z_1}\,\underline{I}$ et $\underline{U_2} = \underline{Z_2}\,\underline{I}$

  - Additivité des tensions : $\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2}$

$$\underline{U} = \underline{Z_1}\,\underline{I} + \underline{Z_2}\,\underline{I} \longrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

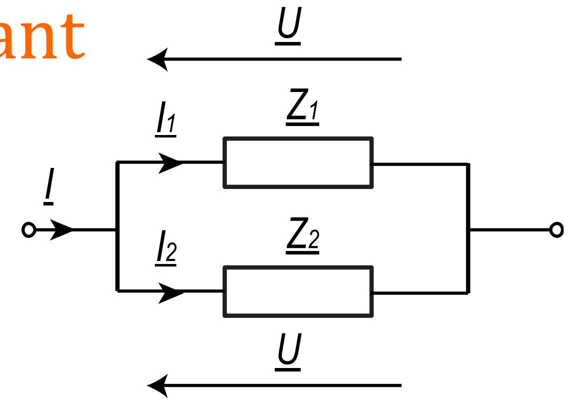
  - Tension aux bornes de chaque dipôle :

Pont diviseur de tension

$$\boxed{\underline{U_1} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\,\underline{U}} \qquad \boxed{\underline{U_2} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\,\underline{U}}$$

Loi d'Ohm généralisée

Pont diviseur de courant



- Deux dipôles en dérivation : $\underline{U_1} = \underline{U_2} = \underline{U}$

  - Loi d'Ohm généralisée pour chaque dipôle : $\underline{I_1} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z_1}}$ et $\underline{I_2} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z_2}}$

  - Loi des nœuds : $\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_1}} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z_2}} = \underline{U}\left(\frac{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}{\underline{Z_1}\underline{Z_2}}\right) \longrightarrow \underline{U} = \underline{I}\left(\frac{\underline{Z_1}\,\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\right)$$

  - Tension aux bornes de chaque dipôle :

Pont diviseur de courant $\boxed{\underline{I_1} = \dfrac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{I}}$ $\boxed{\underline{I_2} = \dfrac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{I}}$

Puissance en régime périodique

Puissance en régime périodique

Valeur efficace – Sens physique

- On suppose deux expériences distinctes :

1. En **régime continu**, on suppose un résistor de résistance R parcouru par un courant continu d'intensité I. L'énergie dissipée par cette résistance pendant un intervalle de temps T est égale à :

$$W_1 = PT = UIT = RI^2T$$

2. En **régime variable dans le temps**, on suppose la même résistance R parcourue par un courant périodique d'intensité i avec une période T. L'énergie dissipée par cette résistance pendant la période T est égale à :

$$W_2 = \int_{t_0}^{t_0+T} pdt = \int_{t_0}^{t_0+T} uidt = \int_{t_0}^{t_0+T} Ri^2dt = R\int_{t_0}^{t_0+T} i^2dt$$

Valeur efficace – Sens physique

Si l'on suppose que les deux expériences sont équivalentes du point de vue énergétique ($W_1 = W_2$), on peut écrire :

$$RI^2T = R\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt \rightarrow I^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt$$

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt}}$$

Où I, l'intensité du courant continu dans l'expérience 1, est aussi appelée l'**intensité efficace** du courant périodique i dans l'expérience 2.

- Définition physique : L'intensité efficace d'un courant périodique i est définie par l'intensité du courant continu I qui provoque la même dissipation d'énergie sur une période T.

Valeur efficace – Définition mathématique

- Définition mathématique : Soit x une grandeur périodique de période T, sa valeur efficace X est donnée par :

$$\boxed{X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2 dt}}$$

  - En anglais cette valeur est appelée **valeur RMS (Root Mean Square)**, car cette opération consiste à :
    - Mettre la grandeur à la puissance 2 (en anglais *Square*)
    - Intégrer sur un période et diviser par la période, autrement dit moyenner sur une période (en anglais *Mean*)
    - Prendre la racine carrée (en anglais *Root*)

Valeur efficace – Deux cas particuliers

- Pour une grandeur continue : $x = A$
  - On peut supposer une période infinie pour une grandeur constante.

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} A^2 T} = A$$

  - La valeur efficace d'une grandeur continue est égale à sa valeur constante.

Valeur efficace – Deux cas particuliers

- Pour une grandeur sinusoïdale : $x = X_{max}\cos(\omega t + \varphi)$

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} X_{max}^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\, dt} = \sqrt{\frac{X_{max}^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t + \varphi)\, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{X_{max}^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1 + \cos(2(\omega t + \varphi))}{2} dt}$$

D'après l'identité : $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

$$= \sqrt{\frac{X_{max}^2}{2T}\left[\underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} 1\, dt}_{\text{T}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\frac{2\pi}{T}t + 2\varphi)dt}_{0}\right]}$$

Car l'intégrale de la fonction sinus ou cosinus sur une période est égale à 0.

$$\boxed{X = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}}$$

- Remarque : La valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale dépend uniquement de son amplitude.

Valeur efficace – Quelques remarques

- La notion de valeur efficace s'applique à la tension et l'intensité du courant en régime sinusoïdale.

$$u = U_{max}\cos(\omega t + \varphi_U) \qquad \xrightarrow{\text{Valeur efficace}} \qquad U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$

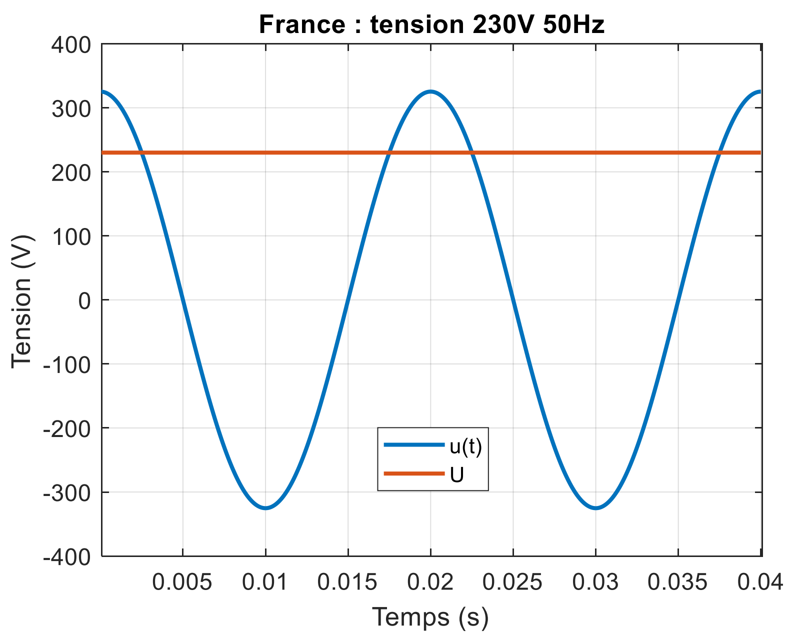
$$i = I_{max}\cos(\omega t + \varphi_I) \qquad \qquad I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

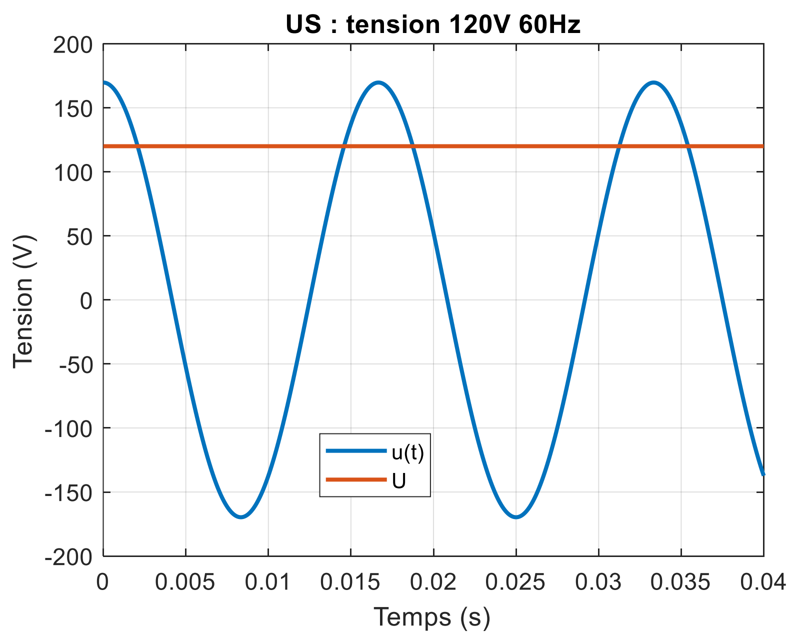
- Les valeurs efficaces de la tension et de l'intensité du courant peuvent être mesurées par un multimètre en mode AC.

- Dans les réseaux électriques, les valeurs annoncées sont des valeurs efficaces. Par exemple : EDF 230 V 50 Hz

Valeur efficace – Quelques remarques

- Exemples de tensions standardisées fournies sur les réseaux nationaux





Puissance instantanée

- Puissance instantanée
  - Soit un dipôle quelconque traversé par un courant i et soumis à une différence de potentiel u, la puissance instantanée p s'exprime par :

$\boxed{p = u.i}$ En Watts : W **Attention à la convention**

  - En régime sinusoïdal, les grandeurs u et i s'expriment par les relations :

$$u = U_{max}\cos(\omega t + \varphi_U) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_U)$$

$$i = I_{max}\cos(\omega t + \varphi_I) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$p = u.i = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_U).\,I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_I)$$

D'après l'identité : $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$

$\boxed{p = u.i = UI\cos(\varphi) + UI\cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)}$ Avec $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$

  - En régime sinusoïdal, la puissance instantanée évolue dans le temps

Puissance en régime sinusoïdal

Puissance instantanée

- Analyse de la puissance instantanée

$$p = u.i = \underbrace{UI\cos(\varphi)}_{\text{Terme constant}} + \underbrace{UI\cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)}_{\text{Terme oscillant}}$$

  — La puissance oscille à une pulsation 2ω autour d'une valeur constante.

  — La valeur constante correspond à la puissance moyenne.

- Exemple :

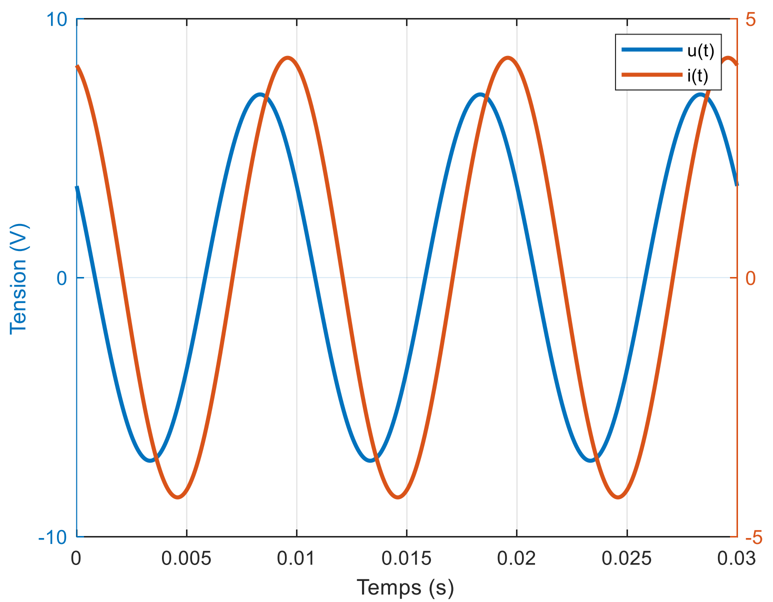
$\omega = 200\pi$

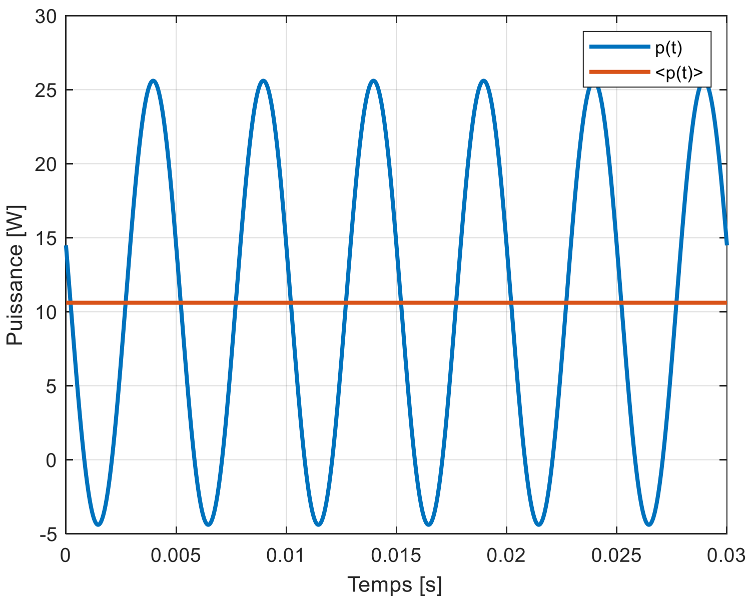
$U = 5V$

$\varphi_U = \dfrac{\pi}{3}$

$I = 3A$

$\varphi_I = \dfrac{\pi}{12}$





Puissance en régime sinusoïdal

Puissance moyenne

- Puissance active ou puissance moyenne
  - Généralement on indique la puissance active ou puissance moyenne
  - On la note P, c'est la moyenne temporelle de la puissance instantanée :

$$P = < p > = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p \, dt$$

$$P = < p > = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} UI\cos(\varphi) + UI\cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I) \; dt$$

$$P = < p > = UI\cos(\varphi) + \underbrace{\frac{UI}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I) \; dt}_{0}$$

$$\boxed{P = < p > = UI\cos(\varphi)}$$

En Watts : W

Car l'intégrale de la fonction sinus ou cosinus sur une période est égale à 0.

  - Comme en régime continu, cette puissance est égale au produit des valeurs efficaces de la tension par l'intensité, pondéré par le cosinus du déphasage φ entre la tension et l'intensité.

Puissances active et réactive

- Réécriture de la puissance instantanée sous forme générale :

$$p = u.i$$

$$= U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_U).\, I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$= UI\cos(\varphi_U - \varphi_I) + UI\cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)$$

$$= UI\cos(\varphi_U - \varphi_I) + UI\cos(2\omega t + \varphi_U - \varphi_I + 2\varphi_I)$$

$$= UI\cos(\varphi_U - \varphi_I) + UI\cos(2\omega t + \varphi_U - \varphi_I)\cos(2\varphi_I) - UI\sin(2\omega t + \varphi_U - \varphi_I)\sin(2\varphi_I)$$

$$= UI\cos(\varphi_U - \varphi_I) + UI\cos(2\omega t)\cos(\varphi_U - \varphi_I)\cos(2\varphi_I) - \mathrm{UI}\sin(2\omega t)\sin(\varphi_U - \varphi_I)\cos(2\varphi_I)$$
$$- UI\sin(2\omega t)\cos(\varphi_U - \varphi_I)\sin(2\varphi_I) - \mathrm{UI}\cos(2\omega t)\sin(\varphi_U - \varphi_I)\sin(2\varphi_I)$$

$$= UI\cos(\varphi_U - \varphi_I) + UI\cos(\varphi_U - \varphi_I)\cos(2\omega t + 2\varphi_I) - UI\sin(\varphi_U - \varphi_I)\sin(2\omega t + 2\varphi_I)$$

$$= UI\cos(\varphi_U - \varphi_I)\underbrace{[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_I)]}_{\text{Oscillant à la pulsation } 2\omega \text{, Moyenne égale à 1}} - UI\sin(\varphi_U - \varphi_I)\underbrace{\sin(2\omega t + 2\varphi_I)}_{\text{Oscillant à la pulsation } 2\omega \text{, Moyenne nulle}}$$

Puissance en régime sinusoïdal

Puissances active et réactive

- Il est plus facile d'écrire la tension et l'intensité de manière suivante :

$$\begin{cases} i = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_I) \\ u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_U) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i = I\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Avec $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$

$$p = u.i = \underbrace{UI\cos(\varphi)\,[1+\cos(2\omega t)]}_{1} - \underbrace{UI\sin(\varphi)\sin(2\omega t)}_{2}$$

$$p = u.i = P[1+\cos(2\omega t)] - Q\sin(2\omega t)$$

1 Puissance > 0

Oscillant à la pulsation 2ω

Amplitude P : puissance active

$$\boxed{P = UI\cos(\varphi)}$$

En Watts : W

2 Puissance > 0 ou <0

Oscillant à la pulsation 2ω

Amplitude Q : puissance réactive

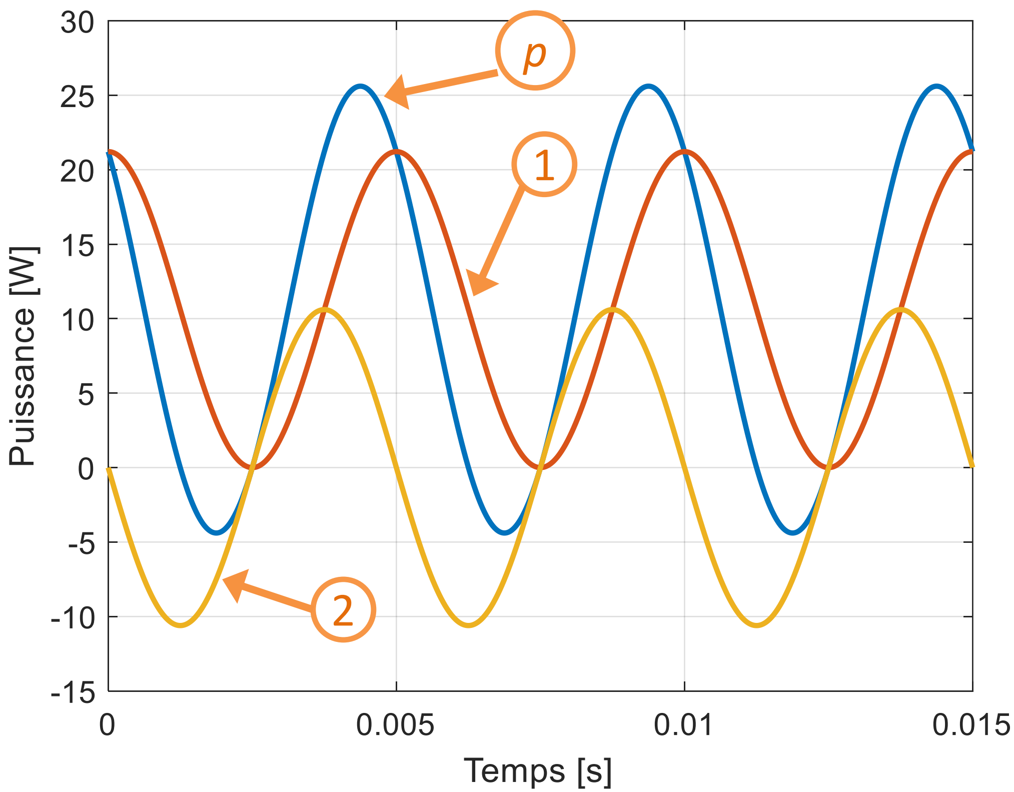
$$\boxed{Q = UI\sin(\varphi)}$$

En Voltampère réactif : VAR

Puissance en régime sinusoïdal

Puissances active et réactive

- $p = u.i = \underbrace{UI\cos(\varphi)\,[1+\cos(2\omega t)]}_{1} - \underbrace{UI\sin(\varphi)\sin(2\omega t)}_{2}$



Puissance et impédance

Rappel loi d'Ohm généralisée

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \longrightarrow Z = \frac{U}{I}$$

- Lien avec l'impédance :
  - Rappel : $\underline{Z} = Z\,e^{j\varphi} = Z(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$
  - D'où : $\mathcal{R}\{\underline{Z}\} = Z\cos(\varphi) \longrightarrow \cos(\varphi) = \dfrac{\mathcal{R}\{\underline{Z}\}}{Z}$

    $\mathfrak{Im}\{\underline{Z}\} = Z\sin(\varphi) \longrightarrow \sin(\varphi) = \dfrac{\mathfrak{Im}\{\underline{Z}\}}{Z}$

  - Puissance active P :

$$P = UI\frac{\mathcal{R}\{\underline{Z}\}}{Z} \qquad \boxed{P = \mathcal{R}\{\underline{Z}\}I^2}$$

  - Puissance réactive Q :

$$Q = UI\frac{\mathfrak{Im}\{\underline{Z}\}}{Z} \qquad \boxed{Q = \mathfrak{Im}\{\underline{Z}\}I^2}$$

Puissance et admittance

Rappel

$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \longrightarrow Y = \frac{I}{U}$

- Lien avec l'admittance :
  - Rappel : $\underline{Y} = Y\,e^{-j\varphi} = Y(\cos(\varphi) - j\sin(\varphi))$
  - D'où : $\mathcal{R}\{\underline{Y}\} = Y\cos(\varphi) \longrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\mathcal{R}\{\underline{Y}\}}{Y}$

    $\mathfrak{Im}\{\underline{Y}\} = -Y\sin(\varphi) \longrightarrow \sin(\varphi) = -\frac{\mathfrak{Im}\{\underline{Y}\}}{Y}$

  - Puissance active P :

$$P = UI\,\frac{\mathcal{R}\{\underline{Y}\}}{Y} \qquad \boxed{P = \mathcal{R}\{\underline{Y}\}U^2}$$

  - Puissance réactive Q :

$$Q = -UI\,\frac{\mathfrak{Im}\{\underline{Y}\}}{Y} \qquad \boxed{Q = -\mathfrak{Im}\{\underline{Y}\}U^2}$$

Puissance en régime sinusoïdal

Puissance complexe

- Puissance complexe : $\underline{S}$
  - La puissance complexe est définie comme la somme complexe de la puissance active P et de la puissance réactive Q :

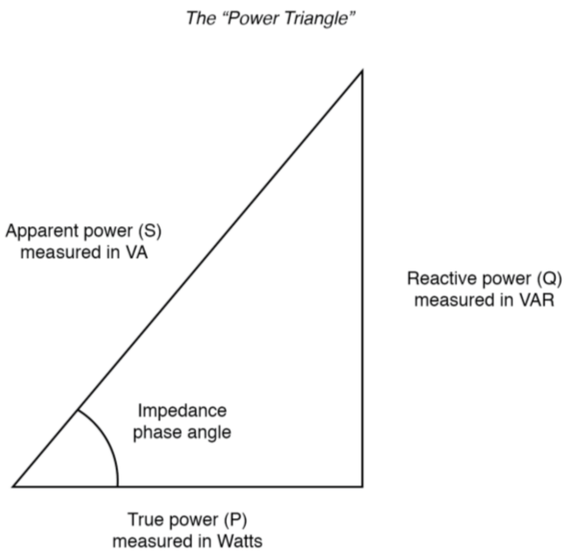
$$\boxed{\underline{S} = P + jQ}$$

En Voltampère (VA)

$$P = \mathcal{R}\{\underline{S}\}$$

$$Q = \Im m\{\underline{S}\}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Q}{P}$$



  - Le module de la puissance complexe est la puissance apparente notée *S*

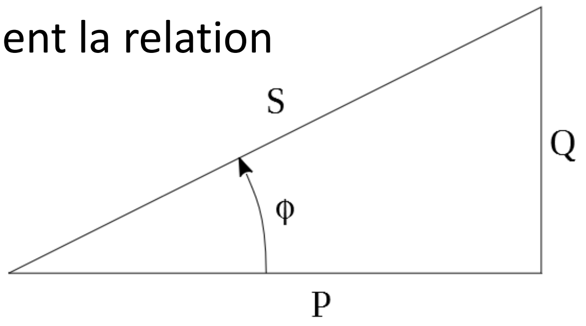
Puissance apparente

- Puissance apparente : S
  - La puissance apparente d'un circuit est égale au produit des valeurs efficaces de la tension à ses bornes par l'intensité du courant qui le traverse :

$$\boxed{S = UI}$$ En Voltampère (VA)

  - S est la puissance telle qu'elle apparaît à la source d'alimentation du circuit, elle sera toujours positive s'il existe un courant et une tension
  - En régime sinusoïdal, les trois puissances vérifient la relation

$$\boxed{S^2 = P^2 + Q^2}$$

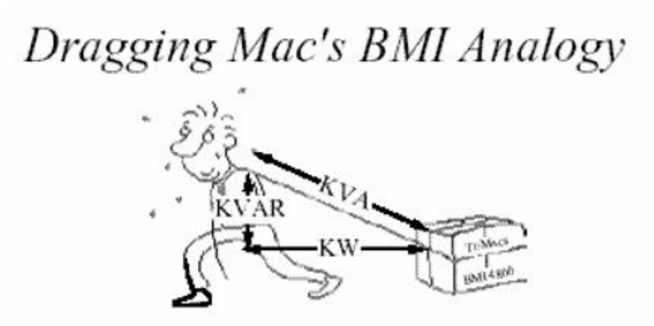


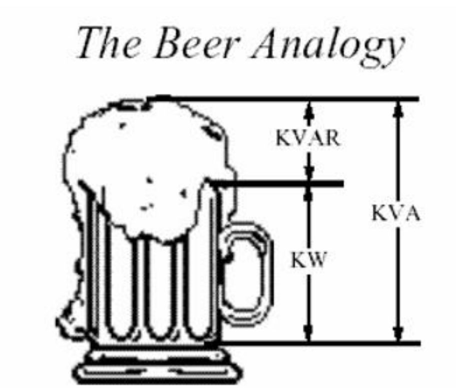
Puissance – Signification physique

- Notions physiques sur les puissances
  - Puissance active *P* : puissance utile, crée un travail
  - Puissance réactive *Q* : puissance inutile, échangée entre la source et la charge
  - Puissance apparente *S* : puissance vue par la source.
- Critère d'efficacité : facteur de puissance

$$\boxed{\lambda = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S} = \cos(\varphi)}$$

Idéalement λ=1



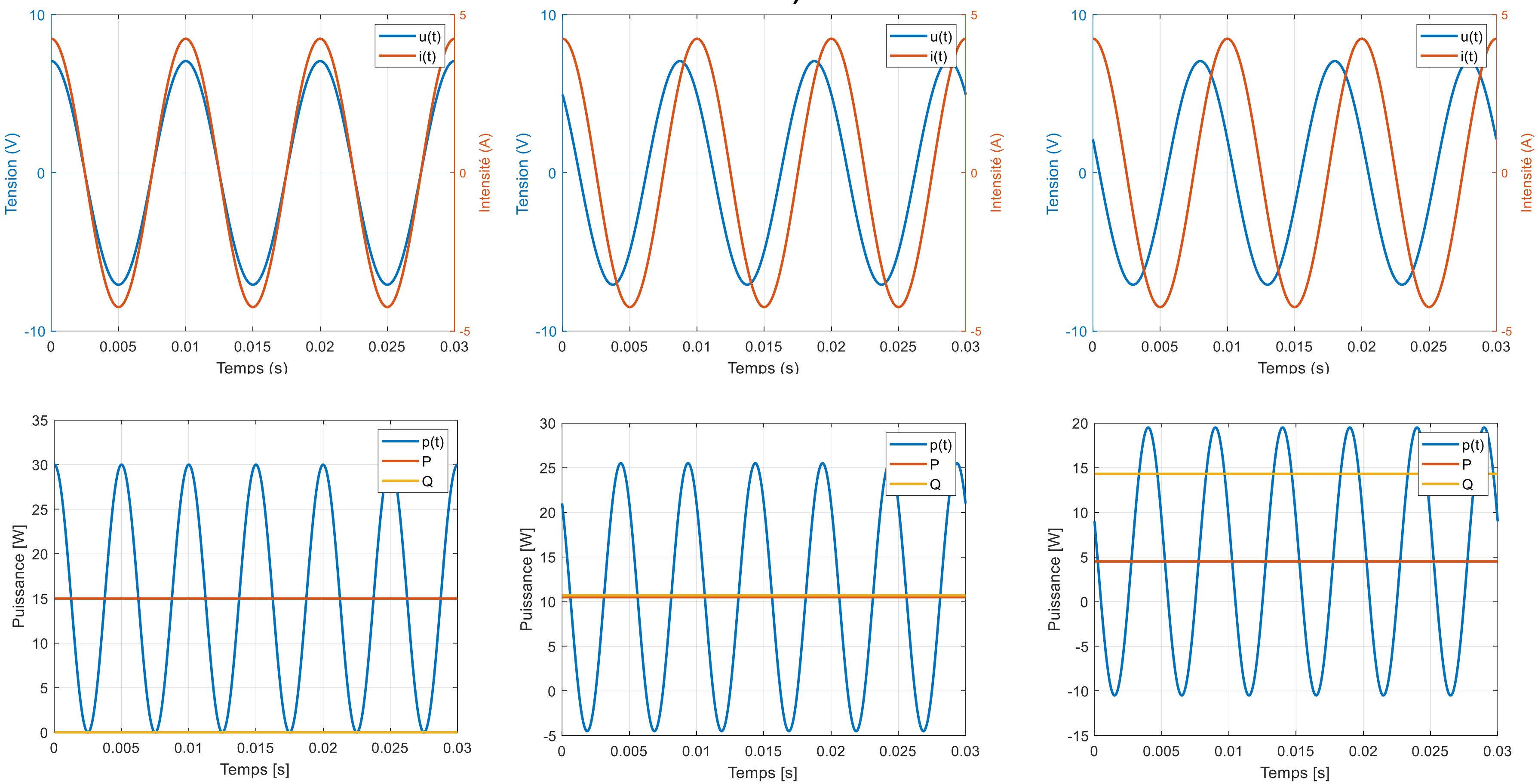


Source

Puissance – Signification physique

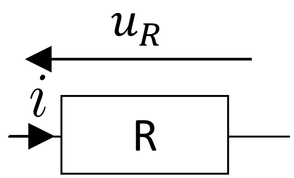
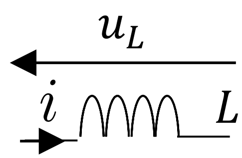
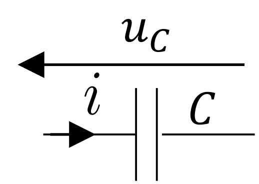
- Facteur de puissance $\boxed{\lambda = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S} = \cos(\varphi)}$

λ=1 λ=0,7 λ=0,3



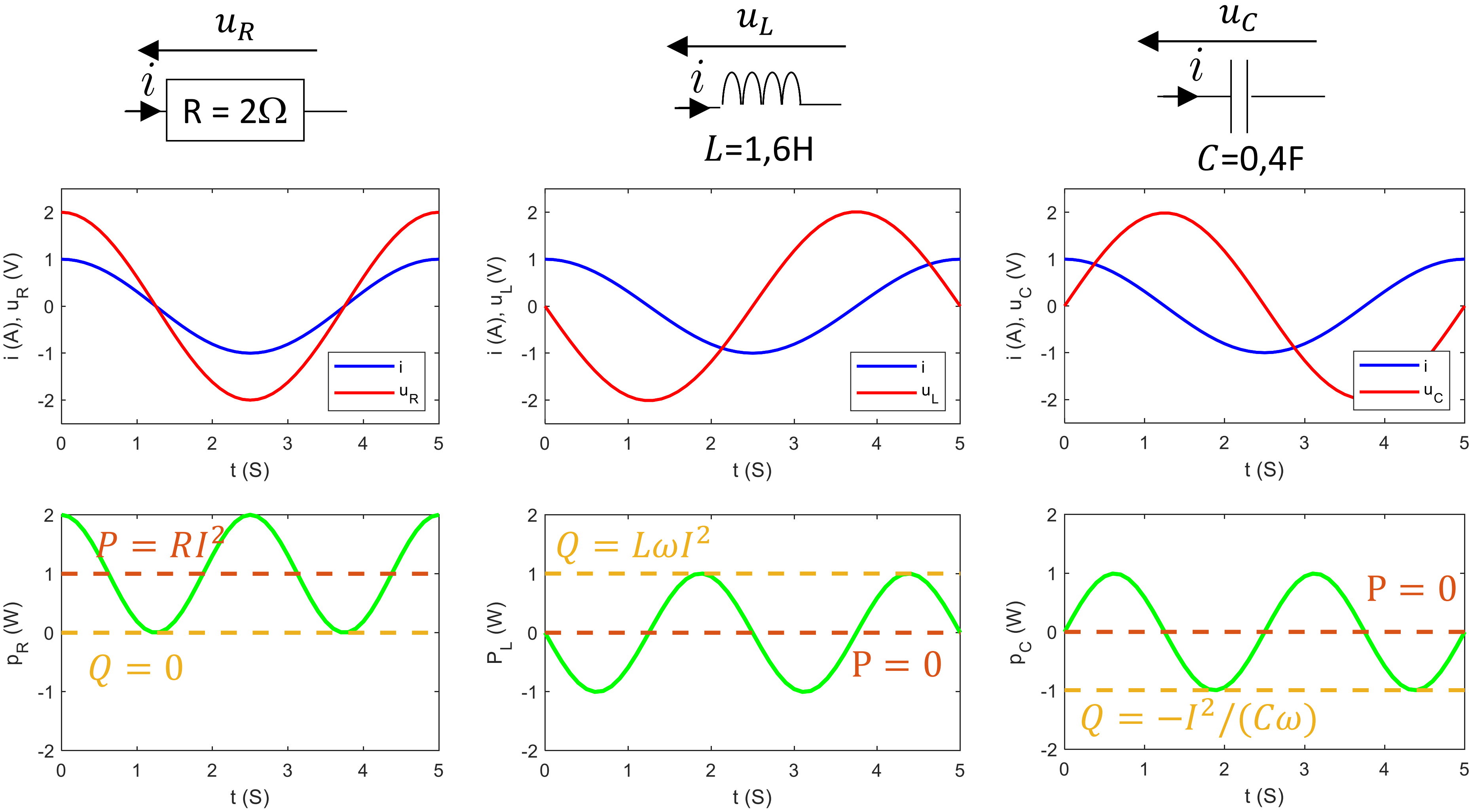
Puissance en régime sinusoïdal

Puissance dans les dipôles élémentaires

Dipôle			
Impédance Admittance Déphasage	$\underline{Z} = R$ $\underline{Y} = \dfrac{1}{R}$ $\varphi = 0$	$\underline{Z} = j\omega L$ $\underline{Y} = \dfrac{1}{j\omega L} = -j\dfrac{1}{\omega L}$ $\varphi = \pi/2$	$\underline{Z} = \dfrac{1}{j\omega C} = -j\dfrac{1}{\omega C}$ $\underline{Y} = j\omega C$ $\varphi = -\pi/2$
Puissance active	$P = RI^2 = \dfrac{U^2}{R}$	$\mathrm{P} = 0$	$\mathrm{P} = 0$
Puissance réactive	$Q = 0$	$Q = L\omega I^2 = \dfrac{U^2}{L\omega}$	$Q = -\dfrac{I^2}{C\omega} = -C\omega U^2$

Puissance dans les dipôles élémentaires

- On suppose pour tous les dipôles : $i = \cos(\omega t)$ avec T = 5 s



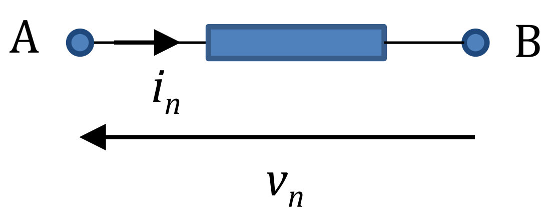
Théorème de Tellegen (1)

- Dans un circuit électrique composé de N dipôles, la somme des puissances instantanées de tous les dipôles est égale à zéro.

$$\sum_{n=1}^{N} p_n(t) = \sum_{n=1}^{N} v_n(t) i_n(t) = 0$$

  - Le circuit peut être linéaire ou non linéaire, passif ou actif, variable ou non dans le temps.

  - On considère que les dipôles sont tous en convention récepteur (ou générateur). Par exemple :



$$v_n = v_A - v_B$$

$$i_n = i_{AB}$$

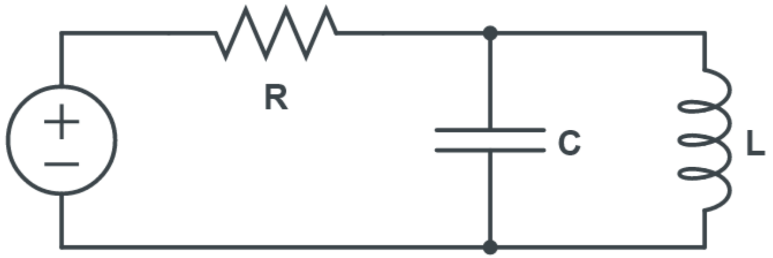
Théorème de Tellegen (2)

- Le théorème de Tellegen peut s'écrire dans le domaine complexe et en utilisant les phaseurs de tension et de courant :

$$\sum_{n=1}^{N} \underline{V_n}.\underline{I_n} = 0$$

- Exemple : En utilisant les ponts diviseurs de tension et de courant, vérifier la validité du théorème de Tellegen pour le circuit suivant dans le domaine complexe.

$u(t)$



$$u(t) = U_{max} \cos(\omega t + \varphi_U)$$