Chapitre 1

Déterminant

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1/ Le groupe symétrique

a) Définition:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.
Une telle bijection est aussi appellée permutation. Si $n = 1$, $S_1 = \{Id\}$ et on supposera par la suite que $n \geqslant 2$.

On note $\circ$ l'opération de composition des fonctions : c'est la loi de composition interne sur S_n, c'est-à-dire une application de $S_n \times S_n$ dans S_n.

Proposition:
$(S_n, \circ)$ est un groupe de cardinal $n!$ On l'appelle groupe symétrique.

→ **Preuve :**
(fait en méthodo) Moralement :
- $\circ$ est associative $\forall f \in S_n$, $\forall g \in S_n$, $\forall h \in S_n$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- S_n possède un (unique) élément neutre, c'est Id :
  $\forall f \in S_n$, $f \circ Id = Id \circ f = f$
- Tout élément de S_n possède un (unique) symétrique $\forall f \in S_n$, $\exists g \in S_n$ ($g = f^{-1}$) tels que $f \circ g = g \circ f = Id$

Voici 2 exemples fondamentaux de permutations:

- **Les transpositions :**

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$.
L'application τ définie par : $\tau(i) = j$; $\tau(j) = i$ et $\forall x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$, $\tau(x) = x$ est une permutation (c'est une involution, c'est-à-dire $\tau \circ \tau = Id$) qu'on appelle transposition et que l'on note (i, j)

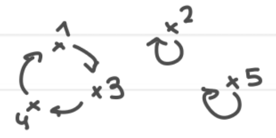
ex: dans S_4 : $(2, 3)$

- **Les p-cycles :**

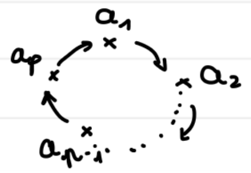
Soit p un entier tel que $n \geqslant p \geqslant 2$
Soit $a_1, \dots, a_p$ des éléments de $\{1, \dots, n\}$ tous distincts.
L'application σ définie par
$\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$, $\sigma(a_p) = a_1$, $\forall x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$, $\sigma(x) = x$ est une

permutation. On l'appelle p-cycle ou cycle d'ordre p et on le note $(a_1, \dots, a_p)$
Une transposition n'est rien d'autre qu'une 2-cycle.

ex: dans S_5 : $(1,3,4)$



Remarque :



(1) $(i,j) = (j,i)$

(2) $(i,j)^{-1} = (i,j)$

(3) $(a_1, a_2, \dots, a_p) = (a_2, a_3, \dots, a_p, a_1) = (a_p, a_1, \dots, a_{p-1})$

(4) $(a_1, \dots, a_p)^{-1} = (a_1, a_p, \dots, a_2)$

Exemple : $S_3 = \{ Id, (2,3), (1,2), (1,3), (1,2,3), (1,3,2) \}$

/!\ Pour $n \geq 4$, il existe des permutations dans S_n qui ne sont pas des p-cycles.

Dans S_6, $\sigma(1) = 6$ $\quad \sigma(3) = 2$ $\quad \sigma(5) = 3$

$\sigma(2) = 5$ $\quad \sigma(4) = 4$ $\quad \sigma(6) = 1$ n'est pas un p-cycle.

b) Propriétés :

On adoptera la convention suivante :

si $\sigma \in S_n$ et $\tau \in S_n$, la composée $\sigma \circ \tau$ sera notée $\sigma\tau$ et on dira produit

Proposition :

$(S_n, \circ)$ est un groupe commutatif si et seulement si $n \leq 2$.

→ **Preuve :**

$S_1 = \{Id\}$ et $S_2 = \{Id, (1,2)\}$ sont bien évidemment commutatifs.

Inverse : Soit $n \geq 3$. On a :

$(1,2)(1,3) = (1,3,2)$ et $(1,3)(1,2) = (1,2,3)$

d'où $(1,2)(1,3) \neq (1,3)(1,2)$ et S_n n'est pas commutatif $\square$

Remarquons qu'on peut, dès S_n, écrire le p-cycle $(a_1, \dots, a_p)$ comme suit :

$(a_1, \dots, a_p) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \dots (a_{p-1}, a_p)$ comme produit de $p-1$ transpositions.

Théorème :

Tout élément de S_n peut se décomposer comme produit d'au plus $n-1$ transpositions.

→ **Preuve:** (à omettre en 1^e lecture)

On procède par récurrence sur l'entier $n \geq 2$. Pour $n=2$, c'est évident! Soit $n \geq 2$. Supposons que tout élément de S_n peut se décomposer comme produit d'au plus $n-1$ transpositions. Soit $\sigma \in S_{n+1}$.

Notons $i = \sigma(n+1)$

- Si $i = n+1$, c'est-à-dire si σ fixe $n+1$, $\sigma_{\{1,\dots,n\}} \in S_n$ et par hypothèse de récurrence σ se décompose comme produit d'au plus $n-1 \leq n$ transpositions.
- Si $i \neq n+1$, posons $\sigma' = (i, n+1)\sigma$.

Alors $\sigma'(n+1) = n+1$ et comme précédemment, σ' se découpe en produit d'au plus $n-1$ transpositions et, puisque $\sigma = (i, n+1)\sigma'$, σ se découpe bien en produit d'au plus n transpositions. □

Exo: Soit $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$
$$i \longmapsto n+1-i$$
Alors σ est une permutation (c'est une involution) et:
$$\sigma = \begin{cases} (1, \dots, n) \dots (p, p+1) & \text{si } n = 2p \\ (1, \dots, n) \dots (p-1, p+1) & \text{si } n = 2p-1 \end{cases}$$

c) Signature:

Définition:
Soit $\sigma \in S_n$. Soit i, j deux éléments de $\{1, \dots, n\}$.
On dit que le couple (i, j) est une inversion de σ si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ.

Avant de faire des exemples de calculs d'inversion d'une permutation, introduisons une manière d'écrire une permutation très commode pour le calcul du nombre d'inversions.

Pour représenter une permutation de S_n, on peut écrire une ligne tous les entiers de 1 jusqu'à n et, en-dessous, l'image de chaque entier.

Par exemple, dans S_6, soit σ donnée par $\sigma(1) = 4$ $\quad \sigma(4) = 3$
$$\sigma(2) = 1 \quad \sigma(5) = 2$$
$$\sigma(3) = 6 \quad \sigma(6) = 5$$

On peut alors écrire σ comme suit: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad \sigma = (1, 4, 3, 6, 5, 2)$

Pour calculer le nombre d'inversions, il suffit de compter, pour chaque entier de la 2^e ligne, le nombre d'entiers qui suivent et qui sont strictement plus petits, puis de donner ces nombres.

Avec l'exemple ci-dessus, $I(\sigma) = 3+0+3+1+0 = 7$ et les couples d'inversion sont : $(1,2)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(4,5)$

Exemples :

① $I(Id) = 0$

② Dans S_8, soit σ donnée par : $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(5) = 7$, $\sigma(6) = 8$, $\sigma(7) = 6$, $\sigma(8) = 5$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{4}} & 2 & \underline{7} & \underline{\underline{8}} & \underline{\underline{6}} & 5 \end{pmatrix}$$

(Rem : $\sigma = (2,3,4)(5,7,6,8)$)

$I = 0+1+1+0+2+2+1 = 7$

Couples d'inversion : $(2,4)$, $(3,4)$, $(5,7)$, $(5,8)$, $(6,7)$, $(6,8)$, $(7,8)$

Définition :

Soit $\sigma \in S_n$. On appelle **signature de σ** le réel, noté $\varepsilon(\sigma)$, donné par :
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$$
On dira que σ est une permutation **paire** si $\varepsilon(\sigma) = 1$ et qu'elle est **impaire** si $\varepsilon(\sigma) = -1$

Proposition :

La signature d'une transposition est -1.

→ **Preuve :**

Dans S_n, soit (i,j) une transposition. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $i<j$.

Les couples d'inversion de (i,j) sont :
- (i,k) et (k,j) avec $i<k<j$
- (i,j)

D'où $I((i,j)) = 2(j-i-1)+1 = 2(j-i)-1$ qui est impair $\square$

Théorème :

Soit $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_n$. Alors $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau)$

(La signature est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$)

→ **Preuve :** (à omettre en 1re lecture)

Soit $A = \{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} : i<j\}$ que l'on découpe en les 4 parties disjointes suivantes.

$A_1 = \{(i,j) \in A : \tau(i) < \tau(j) \text{ et } \sigma(\tau(i)) < \sigma(\tau(j))\}$
$A_2 = \{(i,j) \in A : \tau(i) < \tau(j) \text{ et } \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j))\}$
$A_3 = \{(i,j) \in A : \tau(i) > \tau(j) \text{ et } \sigma(\tau(i)) < \sigma(\tau(j))\}$
$A_4 = \{(i,j) \in A : \tau(i) > \tau(j) \text{ et } \sigma(\tau(i)) > \sigma(\tau(j))\}$

dont on note respectivement n_1, n_2, n_3, n_4 le cardinal.

Alors $\begin{cases} I(\tau) = n_3 + n_4 \\ I(\sigma\tau) = n_2 + n_4 \end{cases}$

Soit les applications :

$f : A_2 \to f(A_2) = \{(k,l) \in A : \tau^{-1}(k) < \tau^{-1}(l) \text{ et } \sigma(k) > \sigma(l)\}$
$(i,j) \mapsto (\tau(i), \tau(j))$

$g : A_3 \to g(A_3) = \{(k,l) \in A : \tau^{-1}(k) > \tau^{-1}(l) \text{ et } \sigma(k) > \sigma(l)\}$
$(i,j) \mapsto (\tau(j), \tau(i))$

Les images de ces 2 applications bijectives sont des ensembles disjoints dont la réunion est égale à l'ensemble des inversions de σ.

On a donc $I(\sigma) = n_2 + n_3$

D'où : $I(\sigma\tau) - (I(\sigma) + I(\tau)) = -2n_3$

donc $\varepsilon(\sigma\tau) = (-1)^{I(\sigma\tau)} = (-1)^{I(\sigma) + I(\tau) - 2n_3}$
$= (-1)^{I(\sigma)} (-1)^{I(\tau)}$
$= \varepsilon(\sigma)\, \varepsilon(\tau)$ $\square$

Corollaire :

Soit $\sigma \in S_n$ décomposée comme suit en produit de transpositions :
$\sigma = \tau_1 \dots \tau_p$. Alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$

En particulier, un p-cycle a pour signature $(-1)^{p-1}$

d) Le groupe alterné :

Définition :

On appelle **groupe alterné**, noté A_n, le sous-ensemble des permutations paires de S_n.

Remarque :

La terminologie groupe est justifiée car, c'est un sous-groupe de S_n comme noyau du morphisme signature.

Par exemple, $A_3 = \{Id, (1,2,3), (1,3,2)\}$

Proposition :

Soit $\tau \in S_n$ impaire. Alors l'ensemble des permutations impaires est $A_n\tau = \{\sigma\tau, \sigma \in A_n\}$

On a alors A_n qui est de cardinal $\frac{n!}{2}$

→ **Preuve :**

- Soit $\sigma \in A_n$.

  Alors $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -1$ ce qui prouve que $\sigma\tau$ est impaire.

- Soit σ une permutation impaire. Écrivons $\sigma = (\sigma\tau^{-1})\tau$

  ↪ Or, $\sigma\tau^{-1} \in A_n$ car,

$$\underbrace{\varepsilon(\tau\tau^{-1})}_{=\varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau^{-1})} = \varepsilon(Id) = 1 \qquad \varepsilon(\sigma\tau^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\underbrace{\varepsilon(\tau^{-1})}_{=\varepsilon(\tau)=-1} = 1$$

2/ Applications p-linéaires

Dans cette section, $p \in \mathbb{N}^*$ et F désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

a) Définition :

Définition :

Une application $f : E \times E \times \dots \times E \to F$ est dite p-linéaire si pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in E$ et pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ l'application $\begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \dots, u_p) \end{cases}$ est linéaire.

Si $F = \mathbb{K}$, on dira plutôt forme p-linéaire.

Exemples :

- Les applications 1-linéaires sont les applications linéaires.
- L'application $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2$ est une forme 2-linéaire (on dit plutôt bi-linéaire)
- L'application $f : C^0([0,1], \mathbb{R}) \times C^0([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(u, v) \longmapsto \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$ est une forme 2-linéaire.

b) Expression d'une application p-linéaire en dimension finie :

Rappelons que E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Notons n cette dimension et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

Proposition :
Soit $f : E^p \to F$ une application p-linéaire.
Soit $u_1, \dots, u_p$ p- vecteurs de E tels que : $\forall j \in \{1, \dots, p\}$ $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$
Alors $f(u_1, \dots, u_p) = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_p,p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$

Preuve :

On procède par récurrence sur l'entier $p \geq 1$.
Soit f une application 1-linéaire (c'est-à-dire une application linéaire) et soit $u_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i$.

Alors $f(u_1) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} f(e_i)$.
Soit $p \geq 1$. On suppose vérifiée la formule. Soit $f : E^{p+1} \to F$ une application $(p+1)$-linéaire.
Soit $u_1, \dots, u_{p+1}$ $(p+1)$- vecteurs de E tels que $\forall j \in \{1, \dots, p+1\}$, $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$
L'application : $E \to F$
$x \mapsto f(u_1, \dots, u_p, x)$ est linéaire, donc on a :
$$f(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}) = \sum_{i_{p+1}=1}^{n} a_{i_{p+1}, p+1} f(u_1, \dots, u_p, e_{i_{p+1}})$$

Soit $i_{p+1} \in \{1, \dots, n\}$.
L'application : $E^p \to F$
$(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p, e_{i_{p+1}})$ est p-linéaire donc, par hypothèse de récurrence, on a donc pour tout $i_{p+1} \in \{1, \dots, n\}$,
$$f(u_1, \dots, u_p, e_{i_{p+1}}) = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p} a_{i_1,1} \dots a_{i_p,p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{i_{p+1}})$$

On en déduit que $f(u_1, \dots u_p, u_{p+1}) = \sum_{i_{p+1}=1}^{n} a_{i_{p+1},p+1} \left(\sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^p} a_{i_1,1} \dots a_{i_p,p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{i_{p+1}}) \right)$

$$= \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \{1, \dots, n\}^{p+1}} a_{i_1,1} \dots a_{i_{p+1},p+1} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_{p+1}}) \quad \square$$

c) Application p-linéaire alternée :

Définition :
Soit $f : E^p \to F$ une application p-linéaire.
Elle est dite alternée si pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et tout $i \neq p$

$u_i = u_j \Rightarrow f(u_1, \dots, u_p) = 0$

Proposition:

Soit $f : E^p \to F$ une application p-linéaire alternée.
Alors f est antisymétrique, c'est-à-dire vérifie pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et tout $i<j$.

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = - f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p)$$

Remarque: La réciproque est bien évidemment vraie.

↳ **Preuve:**

Soit $g : E \times E \to F$
$(x,y) \mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, y, u_{j+1}, \dots, u_p)$ car, f est alternée
Alors g est bilinéaire et vérifie pour tout $x \in E$, $g(x,x) = 0$
Il nous suffit de montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $g(x,y) = -g(x,y)$
Soit $x \in E$ et $y \in E$.

$$\underbrace{g(x+y, x+y)}_{=0} = g(x, x+y) + g(y, x+y) = g(x,x) + g(x,y) + g(y,x) + g(y,y)$$

linéarité par rapport à la 2ᵉ variable

d'où $g(x,y) = -g(x+y)$ □

Proposition:

Soit $f : E^p \to F$ une application p-linéaire alternée.
Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ tel que la famille de vecteurs $u_1, \dots, u_p$ de E est liée.
Alors $f(u_1, \dots, u_p) = 0$

↳ **Preuve:**

Par hypothèse, il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $u_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \lambda_j u_j$

Alors $f(u_1, \dots, u_{i-1}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \lambda_j u_j, u_{i+1}, u_p) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \lambda_j f(u_1, \dots u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_p)$

par linéarité par rapport à la iᵉ variable

Or, pour tout $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$, le p-uplet $(u_1, \dots u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_p)$ a (au moins) 2 vecteurs égaux, donc $f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_p) = 0$ car, f est alternée et le résultat s'en déduit □

Corollaire :

Soit $f : E^p \to F$ une application p-linéaire alternée
Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et soit $i \in \{1, \dots, p\}$
Soit $x \in E$ tel que $x = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \lambda_j u_j$.

Alors $f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + x, u_{i+1}, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_p)$

↳ **Preuve :**

Par linéarité par rapport à la i^e variable,

$$f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + x, u_{i+1}, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_p) + \underbrace{f(u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \dots, u_p)}_{=0 \text{ d'après la proposition préc.}}$$

□

d) Expression d'une application n-linéaire alternée en dimension finie n :

Soit $f : E^n \to F$ une application n-linéaire alternée.
Puisque f est antisymétrique, on a pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et toute transposition $\tau \in S_n$.

$$\begin{aligned} f(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(n)}) &= -f(u_1, \dots, u_n) \\ &= \varepsilon(\tau) f(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Puisque toute permutation σ se décompose en produit de transpositions et que la signature d'un produit est le produit de signatures, on en déduit immédiatement le résultat suivant.

Proposition :

Soit $f : E^n \to F$ une application n-linéaire alternée. Soit $\sigma \in S_n$. Alors, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, on a : $f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \dots, u_n)$.

Notons $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Soit $u_1, \dots, u_n$ n-vecteurs de E tels que $\forall j \in \{1, \dots, n\}$
$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.
On a, en utilisant la proposition du II/ b) :

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, n\}^n} a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \{1, \dots, n\}^{\{1, \dots, n\}}} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

car, pour tout $\sigma \in \{1, \dots, n\}^{\{1, \dots, n\}}$ non bijective, on a $\underbrace{f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}_{=0}$ car f alternée.

D'où $\boxed{f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} f(e_1, \dots, e_n)}$

3/ Déterminant

Commençons par signaler que l'ensemble des applications p-linéaires $f : E^p \to F$ est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E^p, F)$.

En particulier, l'ensemble des formes p-linéaires $f : E^p \to \mathbb{K}$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel que l'on note $\Lambda^{*p}(E)$.

a) Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension finie n:

Théorème :

Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

(1) Il existe une unique forme n-linéaire alternée ϕ_0 telle que $\phi_0(e_1, \dots, e_n) = 1$

(2) Toute forme n-linéaire alternée $\phi : E^n \to \mathbb{K}$ est proportionnelle à ϕ_0.

En particulier, $\Lambda^{*n}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

↳ **Preuve :**

b) Diverses notions de déterminants :

- **Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base**

Définition :

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Notons $\phi_0 : E^n \to \mathbb{K}$ forme n-linéaire telle que $\underbrace{\phi_0(e_1, \dots, e_n)}_{\phi_0(B)} = 1$

Soit $u_1, \dots, u_n$ n vecteurs de E.

On appelle déterminant de la famille de vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dans la base B le scalaire $\phi_0(u_1, \dots, u_n)$. On le note $\det_B(u_1, \dots, u_n)$.

L'application : $\begin{array}{l} E^n \longrightarrow \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) \longmapsto \det_B(u_1, \dots, u_n) \end{array}$ est notée $\det_B$.

Remarque : Notons $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Alors, $\det_{B'}$ est une forme n-linéaire alternée de $E^n \to \mathbb{K}$. Or, $\det_B$ est une base de $\Lambda^{*n}(E)$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{B'} = \lambda \det_B$, c'est-à-dire pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$: $\det_{B'}(u_1, \dots, u_n) = \lambda \det_B(u_1, \dots, u_n)$

En particulier, $\det_{B'}(B) = \lambda \underbrace{\det_B(B)}_{=1}$

donc pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$: $\det_{B'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{B'}(B) \det_B(u_1, \dots, u_n)$.

En évaluant en B', on obtient alors :

$$\det_{B'}(B) \det_B(B') = 1$$

- **Déterminant d'un endomorphisme**

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique scalaire tel que pour toute base de E et tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$: $\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \det_B(u_1, \dots, u_n)$

Le n-scalaire λ est appelé déterminant de f et on le note $\det(f)$ ou $\det f$ et vérifie pour toute base B de E, $\det f = \det_B(f(B))$

↳ **Preuve :**

- <u>unicité</u> : Si λ convient, alors pour toute base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E et tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, on a : $\det_B(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \det_B(u_1, \dots, u_n)$

  En particulier, pour $(u_1, \dots, u_n) = (e_1, \dots, e_n)$, on obtient : $\lambda = \det_B(f(B))$, ce qui prouve l'unicité.

- <u>existence</u> : Soit B une base de E. L'application $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est une forme n-linéaire alternée sur E^n : elle est donc proportionnelle à $\det_B$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$

$$\det_B(f(u_1),\dots,f(u_n)) = \lambda \det_B(u_1,\dots,u_n) \quad (*)$$

Soit B' une base de E. Puisque $\det_{B'}$ est une forme n-linéaire alternée sur E^n, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{B'} = \alpha \det_B$

En multipliant $(*)$ par α, on obtient pour tout $(u_1,\dots,u_n) \in E^n$:

$$\det_{B'}(f(u_1,\dots,u_n)) = \lambda \det_{B'}(u_1,\dots,u_n) \qquad \square$$

Exemples :

- $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$
- Soit $\sigma \in S_n$ et $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E.
  On considère l'endomorphisme f donné pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$
  On a alors : $\det(f) = \det_B(f(e_1),\dots,f(e_n)) = \det_B(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$
  $$= \varepsilon(\sigma)\det_B(e_1,\dots,e_n)$$
  $$= \varepsilon(\sigma)$$

• Déterminant d'une matrice carrée

Définition :

On appelle déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On le note $\det(A)$ ou $\det A$.

Notation : Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Proposition :

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$

Exemples :

- $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_2} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} = \varepsilon(\mathrm{Id})\, a_{\mathrm{Id}(1),1}\, a_{\mathrm{Id}(2),2} + \varepsilon((1,2))\, a_{(1,2)(1)}\, a_{(1,2)(2)}$
  $$= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

- $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_3} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2}\, a_{\sigma(3),3}$

$= \varepsilon(Id)\, a_{Id(1),1}\, a_{Id(2),2}\, a_{Id(3),3} + \varepsilon((1,2))\, a_{(1,2)(1),1}\, a_{(1,2)(2),2}\, a_{(1,2)(3),3}$
$+ \varepsilon((1,3))\, a_{(1,3)(1),1}\, a_{(1,3)(2),2}\, a_{(1,3)(3),3} + \varepsilon((2,3))\, a_{(2,3)(1),1}\, a_{(2,3)(2),2}\, a_{(2,3)(3),3}$
$+ \varepsilon((1,2,3))\, a_{(1,2,3)(1),1}\, a_{(1,2,3)(2),2}\, a_{(1,2,3)(3),3} + \varepsilon((1,3,2))\, a_{(1,3,2)(1),1}\, a_{(1,3,2)(2),2}\, a_{(1,2,3)(3),3}$

$= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{2,1} a_{1,2} a_{3,3} - a_{3,1} a_{2,2} a_{1,3} - a_{1,1} a_{3,2} a_{2,3} + a_{2,1} a_{3,2} a_{1,3}$
$+ a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3}$

Corollaire :

(1) Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille de n vecteurs de E dont on note A la matrice des composantes dans une base B de E, alors $\det_B(u_1, \dots, u_n) = \det(A)$

(2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. On note A la matrice de f dans la base B. Alors $\det(f) = \det(A)$ (tous les 2 égaux au déterminant de la famille $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ dans la base B)

Exemple :

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux.
Alors $\det(D) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. En effet, D est une matrice de la famille de vecteurs

$\{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n\}$ dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.
D'où : $\det(D) = \det_B(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) \underset{\text{par } n\text{-linéarité}}{=} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \det_B(e_1, \dots, e_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

c) Propriétés des déterminants:

Théorème :

Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E muni d'une base B.
On a équivalence entre :

(1) $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de E

(2) $\det_B(u_1, \dots, u_n) \neq 0$

↳ **Preuve:**

- Supposons que $B' = \{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de E.
On a vu que $\det_B(B') \det_{B'}(B) = 1$, ce qui amène que $\det_B(B') \neq 0$.
- Supposons maintenant que $\{u_1, \dots, u_n\}$ n'est pas une base de E.
Cette famille de n-vecteurs est donc liée. D'après la 2^e proposition du II/c),
on a $\det_B(u_1, \dots, u_n) = 0$ □

Proposition :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors : $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$, alors : $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$

↳ **Preuve :**

Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

1) On a : $\det(\lambda f) = \det_B(\lambda f(e_1), \dots, \lambda f(e_n)) = \lambda^n \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \lambda^n \det(f)$
2) On a :
$$\begin{aligned}\det(f \circ g) &= \det_B((f\circ g)(e_1), \dots, (f \circ g)(e_n)) \\ &= \det_B(f(g(e_1)), \dots, f(g(e_n))) \\ &= \det(f)\det_B(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= \det(f)\det(g)\end{aligned}$$

Proposition :

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$

↳ **Preuve :**

1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.
La matrice de λf par rapport à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est λA et on a alors : $\det(\lambda A) = \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f) = \lambda^n \det(A)$

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A et soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à B.
La matrice de $(f \circ g)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est AB et on a alors :
$\det(AB) = \det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(A)\det(B)$ □

Théorème :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est bijectif (c'est-à-dire est un automorphisme) si et seulement si $\det(f) \neq 0$
Dans ce cas, on a $\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elle est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

↳ **Preuve :**

1) Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E. On a : $\det(f) = \det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))$
On a vu que $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de E si et seulement si $\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n)) \neq 0$ (cf le thm précédent dans cette sous-section)
Or, f est un automorphisme si et seulement si $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de E,

d'où le résultat.

De plus, on a alors : $\det(Id_E) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(f)\det(f^{-1}) = 1$.

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. On sait que $\det(A) = \det(f)$ et que A est inversible si et seulement ssi f est bijectif.
On en déduit que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
On a alors : $\det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ □

Proposition :

Le déterminant d'une matrice carrée est une forme n-linéaire alternée de ses lignes.

↳ **Preuve :**

La formule $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$ assure que c'est une forme n-linéaire de ses lignes car, dans chacun des produits ci-dessus apparait un et un seul coefficient de chaque ligne.
De plus, elle est alternée car, si une matrice a deux lignes égales, alors elle est non inversible et on a alors $\det(A) = 0$. □

Corollaire :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : $\det(A) = \det({}^tA)$

↳ **Preuve :**

Les applications : $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $(C_1, \dots, C_n) \mapsto \det(C_1 \dots C_n)$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $(C_1, \dots, C_n) \mapsto \det\begin{pmatrix} {}^tC_1 \\ \vdots \\ {}^tC_n \end{pmatrix}$

sont des formes n-linéaires alternées (non nulles)
Elles sont donc proportionnelles, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a : $\det(A) = \lambda \det({}^tA)$.
En particulier, pour $A = I_n$, on obtient $\lambda = 1$ et c'est le résultat attendu □.

Remarque :

Cette formule s'écrit aussi $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$

On peut le montrer en prouvant que pour tout $\sigma \in S_n$, on a (permutation des termes dans le produit : $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$

4/ Techniques de calculs du déterminant

Comme on l'a vu dans la section précédente, le calcul du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base ou le calcul d'un déterminant d'un endomorphisme peut se ramener au calcul du déterminant d'une matrice carrée, que l'on appellera plus simplement déterminant.

a) Opérations sur les lignes ou les colonnes d'un déterminant:

Le déterminant d'une matrice carrée étant une forme n-linéaire alternée de ses lignes ou de ses colonnes, les propriétés des formes n-linéaires alternées permettent d'énoncer les quelques règles suivantes:

- un déterminant dont une ligne (resp. une colonne) est composé que de zéro est nul.
- un déterminant dont 2 lignes (resp. 2 colonnes) sont identiques est nul.
- un déterminant dont une ligne (resp. une colonne) est combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes) est nul.
- l'échange de 2 lignes (resp. 2 colonnes) d'un déterminant multiplie sa valeur par (-1).
- on ne change pas la valeur d'un déterminant si on ajoute à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes)
- si on multiplie tous les coefficients d'une ligne (resp. d'une colonne) d'un déterminant par $\lambda \in \mathbb{K}$, le déterminant est multiplié par λ.

Exemples:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 0$ car, on a deux colonnes identiques

2) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 \\ -2 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 15 & -4 & 13 \end{vmatrix} = 0$ car, $L_1 + L_2 = L_4$

b) Développement du déterminant suivant une ligne ou une colonne:

Dans cette section, $n \geqslant 2$.

Proposition:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme: $A = \left(\begin{array}{c|c} A' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline * \cdots * & a_{n,n} \end{array}\right)$ alors $\det(A) = a_{n,n} \det(A')$

↳ **Preuve :**

Écrivons $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$. Or, on a pour tout $\sigma \in S_n$ $\sigma(n) \neq n \Rightarrow a_{\sigma(n),n} = 0$

D'où $\det(A) = a_{n,n} \cdot \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n-1),n-1}$. Or, la restriction d'une permutation

$\sigma \in S_n$ vérifiant $\sigma(n) = n$ est une permutation $s \in S_{n-1}$ et, réciproquement, si $s \in S_{n-1}$, on peut la prolonger en une permutation $\sigma \in S_n$ en posant $s(n) = n$.
De plus, on a $\varepsilon(s) = \varepsilon(\sigma)$ car, une décomposition de σ en produit de k transpositions dans la même décomposition de s en produit de k transpositions.
D'où : $\det(A) = a_{n,n} \sum_{s \in S_{n-1}} \varepsilon(s) a_{s(1),1} \dots a_{s(n-1),n-1}$

$= a_{n,n} \det(A')$ □

Corollaire :

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Alors :
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

↳ **Preuve :**

Quitte à transposer (puisque $\det({}^tA) = \det(A)$), on peut supposer que A est triangulaire inférieure. Il suffit alors de faire une récurrence et d'utiliser le résultat précédent. □

Exemple :

Soient a, b, c 3 réels.

mise en facteur par $(b-a)$ dans L_2 et par $(c-a)$ dans L_3

Alors
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

triangulaire supérieur donc $= 1 \times 1 \times (c-b)$

Définitions :

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$.

On appelle :

1) mineur de $a_{i,j}$: le déterminant obtenu à partir de A en supprimant sa i^e ligne et sa j^e colonne. On le note $\Delta_{i,j}$
2) cofacteur de $a_{i,j}$: le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$.

Exemple: si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 3}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le cofacteur de $a_{2,1}$ est :
$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -11$$

Théorème:

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) développement du déterminant suivant une colonne:
$$\forall j \in \{1, \dots, n\},\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

2) développement du déterminant suivant une ligne:
$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Exemples:

développement du déterminant suivant L_2

- $$\begin{vmatrix} 1^{+} & 2^{-} & 7^{+} \\ -3^{-} & 4^{+} & 5^{-} \\ 6^{+} & -1^{-} & 2^{+} \end{vmatrix} = -3 \times \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 5 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}_{1\times(-1)-2\times 6}$$
$$= 33 - 160 + 65$$
$$= -62$$

- $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}^{+} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}^{-} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}^{+} \end{vmatrix} = a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} - a_{2,3}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} + a_{3,3}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

développement suivant C_3

Preuve:

Il suffit de prouver le 1er point (le 2e se fait en passant par la transposée)

Notons $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,
$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}}\left(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i, C_{j+1}, \dots, C_n\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

linéarité du déterminant par rapport à la j^e variable

Reste à montrer que: $\det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n) = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$

On a: $$\det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On procède à un échange de $(n-j)$ colonnes pour emmener C_j en dernière position puis à un échange de $(n-i)$ lignes pour emmener L_i en dernière position.
On a alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{j-1},e_i,C_{j+1},\dots,C_n) = \underbrace{(-1)^{n-j}(-1)^{n-i}}_{(-1)^{i+j}} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}}_{\Delta_{i,j} \text{ (on utilise la 1ère proposition du IV/ b))}}$$

c) Comatrice :

Définition :
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On appelle comatrice de A, notée $\mathrm{Com}(A)$ ou $\mathrm{Com}A$, la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des cofacteurs de A ($b_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$)

Exemple :
Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors : $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

Proposition :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)\,A = \det(A)\, I_n$$

En particulier, si A est inversible, $\det(A) \neq 0$ et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$

Exemple :
Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $ad-bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\,{}^t\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

↳ **Preuve :**
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et notons $B = \mathrm{Com}(A) = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

et $C = A\,{}^tB = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}$, on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{j+k}\Delta_{j,k}$$

- Si $j=i$: on a $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k}\Delta_{i,k} = \det(A)$
  formule du déterminant développé suivant la i^e ligne.

- Si $j\neq i$: Notons $A' = (a'_{i,k})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice obtenue à partir de A

en recopiant sa i^e ligne dans la j^e ligne. Puisque A' a deux lignes identiques, son déterminant est nul.

D'où $0 = \det(A') = \sum_{k=1}^{n} a'_{j,k}(-1)^{j+k}\Delta'_{j,k}$

développement du déterminant suivant la j^e ligne.

Par construction, $a'_{j,k} = a_{i,k}$ et $\Delta'_{j,k} = \Delta_{j,k}$ car, A et A' sont identiques à l'exception de la j^e ligne. D'où $0 = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{j+k}\Delta_{j,k} = c_{i,j}$ □

d) Formules de Cramer :

Rappelons qu'un système linéaire (S) à n-équations et n-inconnues est dit de Cramer s'il possède une unique solution, ce qui est équivalent au fait que la matrice associée au système soit inversible.

Théorème : (formules de Cramer)

Soit (S) un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$.

Si $(x_1,\dots,x_n)$ désigne l'unique n-uplet solution de (S), alors on a :

$\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$, où A_i est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa i^e colonne par B.

Exemple :

Soit a, b, c, d, e, f 6 réels et soit le système linéaire (S) : $\begin{cases} ax+by=e\\ cx+dy=f.\end{cases}$

(S) possède une unique solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$

et dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} e & b\\ f & d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}} = \dfrac{ed-fb}{ad-bc}\\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & e\\ c & f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}} = \dfrac{af-ec}{ad-bc}\end{cases}$$

↳ Preuve :

Notons $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.

Alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\det(A_i) = \det_{\mathcal{B}'}(C_1, \dots C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)$

$= \det_{\mathcal{B}'}(C_1, \dots, C_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j C_j, C_{i+1}, \dots, C_n)$

par linéarité du det par rapport à la i^e variable ↳ $= \sum_{j=1}^{n} x_j \det_{\mathcal{B}'}(C_1, \dots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \dots, C_n)$

si $i \neq j$, on utilise le caractère alterné → $= x_i \det_{\mathcal{B}'}(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n)$

$= x_i \det(A)$ $\square$