TD 4

Exercice n°3 :

1) $f(x) = \begin{cases} x\sin(e^{1/x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme deux composées et produit de 3 fonctions continues et dérivables.
- Montrons que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad -x \leq f(x) \leq x$

  Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \quad \Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f'(x) = u'v + uv'$ $\qquad \rightarrow u = x \quad u' = 1$

  $= \sin(e^{1/x}) - \dfrac{x}{x^2} e^{1/x} \cos(e^{1/x})$ $\qquad \rightarrow v = \sin(e^{1/x}) \quad v' = (e^{1/x})' \cos(e^{1/x})$

  $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{-1}{x^2} e^{1/x} \cos(e^{1/x})$

  $= \sin(e^{1/x}) - \dfrac{e^{1/x}}{x} \cos(e^{1/x})$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin(e^{1/x})$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

$\rightarrow$ Il n'y a pas de limite en 0^+.

Donc : f est dérivable à gauche de 0 mais pas à droite. Donc pas dérivable en 0.

Exercice n°4 :

1) $f(x) = \sqrt{|x|} \qquad g(x) = \sin(\sqrt{x})$

$\rightarrow f$ et g sont continues sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions continues.

$\rightarrow \forall x > 0 : \quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

$\rightarrow \forall x > 0 : \quad \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}$

On sait que $\dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$, donc $\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \to 1$

Donc : $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = +\infty$ donc g n'est pas dérivable en 0.

2) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ de classe C^1 (continue, dérivable, dérivée continue).

h est continue en $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ (polynômes)

Montrons que $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = h(0) \left(= \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) \right)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x^2 = 0$

$h(0) = 0 \qquad \Rightarrow h$ est continue sur $\mathbb{R}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (polynômes)

avec $\forall x > 0 \quad h'(x) = 2x$

$\forall x < 0 \quad h'(x) - 2x$

$\forall x > 0 \quad \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = x \qquad \lim\limits_{0^+} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0$

$\forall x < 0 \quad \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = -x \qquad \lim\limits_{0^-} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0$

Donc : h est dérivable en 0 et alors sur $\mathbb{R}$, avec :

$h'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} \qquad h'$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{0^+} h'(x) = \lim\limits_{0^-} h'(x) = 0$ donc h' est continue sur $\mathbb{R}$.

CCL: h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\forall x > 0$: $\dfrac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} = \dfrac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{0^+} \dfrac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} = 2$

$\forall x < 0$: $\dfrac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} = \dfrac{-2x}{x} = -2 \Rightarrow \lim\limits_{0^-} \dfrac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} = -2$

CCL: h' n'est pas dérivable en 0.

Exercice n° 6:

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

car, f paire

$$f'(-x_0) = \lim_{y \to -x_0} \frac{f(y) - f(-x_0)}{y + x_0} \xrightarrow{x = -y} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x + x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{-(x - x_0)}$$

Donc: si f est paire, f' est impaire. $= -f'(x_0)$

Exercice n° 7:

1) Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

2) $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$

→ f est C^∞ comme produit de fonction C^∞ (exp et polynôme)

→ On pose $h(x) = ax^2 + bx + c$

$h'(x) = 2ax + b$

$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$h''(x) = 2a$

$h^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k > 2$

Donc: $f^{(n)}(x) = (ax^2 + bx + c)e^x + \underset{\binom{n}{1}}{\underset{\shortparallel}{n}}(2ax + b)e^x + \underset{\binom{n}{2}}{\underset{\shortparallel}{\dfrac{n(n-1)}{2}}}\, 2ae^x$

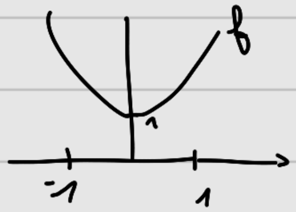
Exercice n° 9 :

• $e^{|x|}$, $x \in [-1, 1]$

→ $e^{|x|}$ continue sur $[-1, 1]$

→ $f(-1) = e^{|-1|} = e^1 = f(1)$

→ f pas dérivable en 0 : $\forall x \geq 0$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - 1}{x}$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$



$\forall x \leq 0$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-x} - 1}{x}$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$

• e^{x^2}, $x \in [-1, 1]$

→ continue, $f(-1) = e^1 = f(1)$

→ dérivable $]-1, 1[$ $\Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2}$ (composée de 2 fonctions dérivables)

$\Rightarrow$ $c = 0$

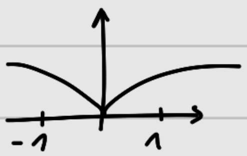
Donc on peut appliquer le théorème de Rolle

• $\log(1 + |x|)$, $x \in [-1, 1]$

→ continue, $f(-1) = \log(2) = f(1)$

→ pas dérivable en 0 car, $\forall x \geq 0$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ln'(1 + x)(0) = 1$



$\forall x \leq 0$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = - \frac{\ln(1 - x) - \ln(1)}{-x}$

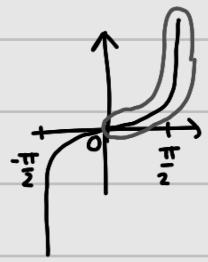
$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\ln'(1 + x)(0) = -1$

• $\tan x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

→ continue, $f(0) = \tan(0) = 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = 1$ ✗

→ dérivable sur $]0, \frac{\pi}{4}[$



Exercice n° 11 :

- $f(x) = x^2 - 8x + 12$, $x \in [0,1]$

  → continue car, polynômes

  → dérivable sur $]0,1[$ car, polynômes

$\Rightarrow$ satisfait le thm des accroissements finis. Donc $\exists c \in]0,1[$ tq

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{5-12}{1} = -7$$

$$f'(x) = 2x - 8 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = -7$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

- $f(x) = 2x + \sin(x)$, $[0,\pi]$

  → continue car, polynôme + sinus

  → dérivable car, polynôme + sinus

$\Rightarrow$ satisfait le thm des accroissements finis. Donc $\exists c \in]0,\pi[$ tq

$$f'(x) = \cos(x) + 2$$

$$f'(c) = \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi - 0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(c) + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c = \frac{\pi}{2}}$$

- $f(x) = \sqrt{x^2+4x+4} - 1$, $x \in [0,2]$

  → continue car, composée de deux fonctions continues sur $[0,2]$

  → dérivable car, //

$\Rightarrow$ satisfait le thm des accroissements finis. Donc $\exists c \in]0,2[$ tq

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\sqrt{2^2+4\times 2+4} - 1 - \sqrt{4} + 1}{2} = \frac{\sqrt{16} - 2}{2} = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$f'(x) = 2x+4 \, \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+4}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+4}} = \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2}} = 1$$

Donc, $c \in]0,2[$ $\Leftrightarrow f'(c) = 1$

→ pour $[-2,0]$: $\forall x \in (-2,0)$ $x^2+4x+4 \geqslant 0$

$\forall x \in]-2,0[$ $x^2+4x+4 > 0$ ⇒ peu pas dériver $\sqrt{x}$ qd $x=0$ donc OK ici!

⇒ f continue sur $[2,0]$ et dérivable sur $]-2,0[$

Exercice n° 12 :

Soit $x \in]0,1]$.

f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. Donc d'après le théorème des accroissements $\exists c \in]0,x[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

On sait que $|f'(c)| \leqslant 1$

donc : $-1 \leqslant f'(c) \leqslant 1$

$\Leftrightarrow -1 \leqslant \dfrac{f(x)-1}{x} \leqslant 1$

$\Leftrightarrow -x \leqslant f(x) \leqslant x$

$\Leftrightarrow 1-x \leqslant f(x) \leqslant 1+x$

Exercice n° 15 :

f de classe C^2 sur $]0,2[$, continue sur $[0,2]$ telle que $f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(2)=1$

Montrons qu'il existe $x_1 \in]0,1[$, $x_2 \in]1,2[$ tels que $f(x_1)=f(x_2)=\frac{3}{2}$

→ f continue sur $[0,1]$ avec $f(0)=0$ et $f(1)=2$ donc d'après le TVI,

$\exists x_1 \in]0,1[$ tq $f(x_1)=\frac{3}{2}$ car, $\frac{3}{2} \in]0,2[$

→ f continue sur $[1,2]$ avec $f(1)=2$ et $f(2)=1$ donc d'après le TVI,

$\exists x_2 \in]1,2[$ tq $f(x_2)=\frac{3}{2}$ car $\frac{3}{2} \in]1,2[$

Comme f est continue sur $[x_1,x_2)$ et dérivable sur $]x_1,x_2[$, d'après le thm d'accroissement fini $\exists x_3 \in]x_1,x_2[\subset]0,2[$ tel que $f'(x_3) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$= 0$

car, $f(x_2)=f(x_1)=\frac{3}{2}$

Exercice n°16 :

Montrons par récurrence que $\forall k \leqslant n$

H_k : " $f^{(k)}$ a $(n-k+1)$ racines distinctes sur $[a,b]$.

En supposant que f a $n+1$ racines distinctes dans $[a,b]$, $k=0$: OK

Supposons H_k et montrons que H_{k+1}.

$f^{(k)}$ a $n+k-1$ racines distinctes $x_1, \dots, x_{n-k+1}$. Donc : $f^{(k)}(x_1) = f^{(k)}(x_{n-k+1}) = 0$

$f^{(k)}$ est continue sur $[x_1, x_2]$ dérivable sur $]x_1, x_2[$ et $f^{(k)}(x_1) = f^{(k)}(x_2) = 0$

D'après le théorème de Rolle, $\exists y_1 \in]x_1, x_2[$ tel que $f^{(k+1)}(y_1) = 0$

De même, on trouve $y_1 \in]x_1, x_1+1[$ tel que $f^{(k+1)}(y_1) = 0$ $\quad n \leqslant n-k$

Exercice n°19 :

$u_0 = 1 \qquad u_{n+1} = \cos(u_n)$

1) Par récurrence, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, H_n : " $u_n \in [0,1]$ "

→ initialisation : $n=0$

$u_0 = 1 \in [0,1]$

→ hérédité : Supposons H_n. On sait que $\forall x \in [0,1]$, $\cos(x) \in [0,1]$

Donc, comme $u_n \in [0,1]$, $u_{n+1} = \cos(u_n) \in [0,1]$

On a bien H_{n+1}.

2) On pose $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \cos(x) - x$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x) - 1 = -(\sin(x) + 1)$ $\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -1$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$-$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$

f est continue sur $[0,1]$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) < 0$

D'après le TVI, $\exists \lambda \in [0,1]$ tel que $f(\lambda) = 0$

De plus f est strictement décroissante, λ est donc l'unique solution de $f(x) = 0$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$|u_{n+1} - \lambda| = |\cos(u_n) - \cos(\lambda)|$

$x \mapsto \cos(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On applique le TAF sur $[u_n, \lambda]$

$\exists c \in]u_n, \lambda[$ tel $\cos'(c) = \dfrac{\cos(u_n) - \cos(\lambda)}{u_n - \lambda}$

$$\Leftrightarrow |-\sin(c)| = \frac{|\cos(u_n) - \cos(\lambda)|}{|u_n - \lambda|}$$

On sait que $u_n \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,1]$

Donc, $c \in [0,1] \rightarrow$ donc : $0 \leqslant \sin(c) \leqslant \sin(1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \lambda| \leqslant \sin(1)\, |u_n - \lambda|$

On a : $0 \leqslant \sin(1) \leqslant 1$

$$\begin{aligned} |u_n - \lambda| &\leqslant \sin(1)\, |u_{n-1} - \lambda| \\ &\leqslant \sin(1)^2\, |u_{n-2} - \lambda| \\ &\leqslant \sin(1)^n\, |u_0 - \lambda| \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \lambda| = 0$ car, $0 < \sin(1) < 1$

Donc $(u_n)_n$ converge vers λ.

Exercice n° 8 :

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x < 0 \\ 0 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de deux fonctions continues

Il faut montrer que $\lim\limits_{0^+} f(x) = f(0) = \lim\limits_{0^-} f(x)$

$\lim\limits_{0^+} f(x) = 0 = f(0)$

$\lim\limits_{0^-} f(x) = \lim\limits_{0^-} e^{1/x} = 0$ Donc : f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

→ f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (composée de fonctions dérivables)

Montrons que f est dérivable en 0.

$\forall x > 0 \quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \quad \Rightarrow \lim\limits_{0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

$\forall x < 0 \quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^{1/x}}{x} \quad \Rightarrow \lim\limits_{0^-} \dfrac{e^{1/x}}{x} = 0$ (par croissances comparées)

Donc : f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} e^{1/x} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

2) • $\lim\limits_{0^-} \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim \dfrac{-e^{1/x}}{x^3} = 0$

• $\lim\limits_{0^+} \dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 0$ Donc : f a une dérivée seconde en 0, $f''(0) = 0$.