TD1 : Suites de fonctions

1. CVU par études de fonctions (tableau de variations)

Exercice 1 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes.

a) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{x}{n(1+x^n)}$.

b) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

c) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$.

d) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto nx^2\mathrm{e}^{-nx}$.

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto n^\alpha x\mathrm{e}^{-nx},\ \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

2. Utilisation de suites dans le domaine et majorations

Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme sur les domaines proposés des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

e) $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$ sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $[a,+\infty[$ où $a>0$.

f) $f_n(x) = n|\ln x|^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur tout segment $[a,b]$ où $1/e < a < b < e$.

g) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ nx & \text{si } x\in[0,1/n] \\ 1 & \text{si } x>1/n. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a,+\infty[$ où $a>0$.

h) $f_n(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[0,a]$ où $a>0$.

Exercice 4 : Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1+x+\cdots+x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x\in]-1,1[$, $\varphi_n(x) = f(x)-f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.
3. Soit $a\in]0,1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Exercice 5 : On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par l'expression :

$$f_n(x) = \sin\sqrt{x+4\pi^2n^2} - \frac{x}{4n\pi}.$$

1. Pour $x\in\mathbb{R}_+$ fixé, montrer que $\sqrt{x+4\pi^2n^2} = 2\pi n + \dfrac{x}{4\pi n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement, et donner la fonction limite.
3. La convergence, est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 6 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

1. Étudier la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et montrer que $\forall n \geq 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$,
$$f_n(x) \geq \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$
2. En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t,$$
justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, a]$ $(a > 0)$.
3. **Question ++.** Établir qu'en fait, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3. Utilisation des théorèmes d'interversions

Exercice 7 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire, en utilisant un théorème du cours, qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 8 : *(CC1 - 2022)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n^2 \mathrm{e}^{-x}}{n^2 + 1 - x}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f à préciser.
2. Montrer qu'il y a convergence uniforme sur $[0, 1]$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 9 : Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x(1+nx)} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \pi]$.
2. En déduire qu'il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0, \pi]$.
3. Démontrer qu'il y a en revanche convergence uniforme sur $[a, \pi]$ où $a > 0$.

Exercice 10 : Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0, 1]$ par la relation $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.
3. Donner une démonstration directe du fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 11 : *(CC1 - 2022)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, \pi/2]$, on pose

$$f_n(x) = (n+1)\big(\sin(x)\big)^n \cos(x).$$

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, \pi/2]$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions sur $[0, \pi/2]$.

4. Autour des hypothèses du théorème de dérivation

Exercice 12 : On définit une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.
Montrer que :

- (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction dérivable f ;
- (f_n') converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction g telle que $f' \neq g$.

Exercice 13 : *(partiel 2020)* On considère la suite de fonctions $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = x^n \ln x$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers une fonction f à préciser.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1]$?
3. Calculer f_n'. La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $]0,1]$? Uniformément sur $]0,1]$?

Exercice 14 : On considère sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. La limite uniforme est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

5. Exercices théoriques

Exercice 15 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I. Montrer que si chaque f_n est uniformément continue sur I, la limite uniforme est uniformément continue sur I.

Exercice 16 : Soit E une partie quelconque de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que chaque fonction f_n est définie et bornée sur E et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur E. Montrer alors que f est bornée sur E et que

$$m_n := \inf_{x\in E} f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m := \inf_{x\in E} f(x) \quad et \quad M_n := \sup_{x\in E} f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M := \sup_{x\in E} f(x).$$

Exercice 17 : Soit un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément sur X. Montrer que si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \quad f_n(x) \in \{0,1\},$$

alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice 18 : *(CC1 - 2022)* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites de fonctions sur $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$, telles que il existe $c > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{X}, \qquad f_n(x) \geq c.$$

Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathcal{X}$ alors la suite $(1/f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $1/f$ sur $\mathcal{X}$.

Exercice 19 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = \frac{\big(f(x)\big)^2}{\sqrt{\big(f(x)\big)^2 + \frac{1}{n}}}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $|f|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 :

1. Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers des fonctions bornées f et g. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On considère une suite (x_n) d'éléments de $[a,b]$ convergeant vers un un réel $x \in [a,b]$. Montrer que $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Exercice 21 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivée seconde bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right),$$

converge uniformément vers f'.

Exercice 22 : *(CC1 - 2023)* Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par

$$h_n(t) = n\,g\left(\frac{t^2}{n}\right) - ng(0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h à déterminer.
2. Soit $A > 0$. Montrer que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers h sur $[-A, A]$.

6. Approximation polynomiale

Exercice 23 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. En utilisant une formule de Taylor, montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 24 : Sur $[0,1]$, on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définis sur $[0,1]$ par

$$P_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\Big(x - (P_n(x))^2\Big).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant f(x)$.
2. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 25 : On se propose de montrer que la fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'est pas limite uniforme sur $]0,1]$ d'une suite d'applications polynomiales.

1. Supposons qu'il existe une telle suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$
$$\left|P_N\left(\frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}}\right) + 1\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \left|P_N\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right) - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$
2. En déduire que
$$P_N\left(\frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}}\right) \leqslant -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} \leqslant P_N\left(\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}\right).$$
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe α_k vérifiant
$$\alpha_k \in \left]\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2k\pi - \frac{\pi}{2}}\right[$$
et tel que $P_N(\alpha_k) = 0$.
4. Conclure.