Chapitre 3

Espaces euclidiens

1. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

a) Définitions et premières propriétés :

Dans cette sous-section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Rappelons une notion vue au premier chapitre.

Définition :

On dit d'une application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ que c'est une forme bilinéaire si f est linéaire par rapport à la $1^{ère}$ variable et linéaire par rapport à la $2^{ème}$ variable.

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E \ \forall x' \in E \ \forall y \in E \ : \ f(\alpha x + x', y) = \alpha f(x, y) + f(x', y)$

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E \ \forall y \in E \ \forall y' \in E \ : \ f(x, \alpha y + y') = \alpha f(x, y) + f(x, y')$

L'ensemble des formes bi-linéaires sur $E \times E$ est bien évidemment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Expression : Soit n, p deux entiers naturels non nuls. Soit $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p$ des éléments de E et soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_p$ des scalaires. Soit $f : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.

Alors : $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i , \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_i \beta_j f(x_i, y_j)$$

Définition :

On dit d'une application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ qu'elle est symétrique si :

$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ f(x, y) = f(y, x)$

L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur $E \times E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel puisque c'est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E \times E$.

Proposition :

Pour qu'une application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ soit une forme bilinéaire symétrique, il faut et il suffit qu'on ait :

1) f est symétrique
2) f est linéaire par rapport à la $1^{ère}$ variable

Définition :

Soit $f : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique.

On appelle forme quadratique associée à f l'application $q : E \to \mathbb{K}$ donnée par : $\forall x \in E, \ q(x) = f(x, x)$

Dans la pratique, quand on dira que q est une forme quadratique, cela sous-entendra qu'il existe une forme bilinéaire symétrique dont q est la forme quadratique associée.

Exemple :

- L'application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$$((x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et la forme quadratique associée est l'application
$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

- L'application $f : C^0([0,1], \mathbb{R}) \times C^0([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$
est une forme bilinéaire symétrique sur $C^0([0,1], \mathbb{R}) \times C^0([0,1], \mathbb{R})$ et la forme quadratique associée est l'application :
$$C^0([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_0^1 f^2(t)\, dt$$

Proposition :

Soit $f : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique et soit q la forme quadratique associée.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_1, \dots, x_n$ des éléments de E et soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires. Alors
$$\boxed{q\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\, q(x_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j\, f(x_i, x_j)}$$

En particulier, si $n = 2$, $q(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 q(x) + \beta^2 q(y) + 2\alpha\beta f(x, y)$

2) Identité de polarisation :

Pour tout $x \in E$, tout $y \in E$, on a : $\boxed{f(x, y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)}$

3) Identité du parallélogramme :

Pour tout $x \in E$ et $y \in E$, on a : $\boxed{q(x+y) + q(x-y) = 2\left(q(x) + q(y)\right)}$

Définition :

On appelle *polynôme quadratique sur $\mathbb{K}^n$* toute application $q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe des scalaires $\alpha_{i,i}$, $1 \leq i \leq n$, et des scalaires $\alpha_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$ tels que :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{i,j} x_i x_j$$

Par exemple, un polynôme quadratique à deux variables s'écrit :

$$q(x_1, x_2) = \alpha_{1,1} x_1^2 + \alpha_{2,2} x_2^2 + 2\alpha_{1,2} x_1 x_2$$

Avec les notations ci-dessus, q est une forme quadratique et on retrouve la forme bilinéaire symétrique $f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ dont q est la forme quadratique associée par la règle dit du dédoublement :

connaissant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{i,j} x_i x_j$

On obtient : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \ \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_{i,j} (x_i y_j + x_j y_i)$$

(en dédoublant x_i^2 en $x_i y_i$, $1 \leq i \leq n$, et $2x_i x_j$ en $x_i y_j + x_j y_i$, $1 \leq i < j \leq n$

b) Interprétation matrice :

Dans cette sous-section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Définition :

Soit $f : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Notons $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. On appelle matrice dans $\mathcal{B}$ de f, notée $M_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice $n \times n$ symétrique suivante :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = (f(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Exemple :

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit a, b, c 3 réels et soit la forme bilinéaire symétrique

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto a x_1 y_1 + b(x_1 y_2 + x_2 y_1) + c x_2 y_2$$

Alors : $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Proposition :

Soit $f \in E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Posons $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Soit $x \in E$, $y \in E$. Notons $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y)$.

Alors : $\boxed{f(x,y) = {}^tXAY}$

↳ **Preuve :**

Notons $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

D'une part : $f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(e_i, e_j)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{i,j}$$

D'autre part : ${}^tXAY = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} y_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{i,j}$$

□

On établit une formule de changements de base pour les formes bilinéaires symétriques.

Proposition :

Soit $f : E \times E \to \mathbb{K}^n$ une forme bilinéaire symétrique. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.

Notons $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Alors : $\boxed{A' = {}^tPAP}$

↳ **Preuve :**

Soit $x \in E$ et $y \in E$.

Posons $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$, $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y)$ et $Y' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(y)$

On a donc : $X = PX'$ et $Y = PY'$

D'une part, on a : $f(x,y) = {}^tX'A'Y'$

D'autre part, on a : $f(x,y) = {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = ({}^tX'\,{}^tP)A(PY')$

$$= {}^tX'({}^tPAP)Y'$$

On en déduit le résultat puisque $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ $f(e_i, e_j) = {}^tE_i A E_j = a_{i,j}$ □

2. Espaces euclidiens

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

a) Produit scalaire :

Définitions :

* On appelle produit scalaire sur E toute application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :
  1) f est bilinéaire
  2) f est symétrique
  3) f est positif : $\forall x \in E \quad f(x,x) \geqslant 0$
  4) f est défini : $\forall x \in E \quad f(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

* On appelle espace euclidien tout couple (E,f) où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un produit scalaire sur E.

Remarque :

- Un couple (E,f) où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un produit scalaire s'appelle un espace préhilbertien.
- Si f est un produit scalaire, on a donc une forme quadratique associée. Toutes les formules vues en I)a) restent valable.

Dorénavant, un produit scalaire sera noté $\langle .,. \rangle$.

Exemple :

- Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$$((x_1,\dots,x_n)\times(y_1,\dots,y_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est :
$$\langle .,. \rangle : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(A,B) \longmapsto Tr({}^tAB)$$

- Le produit scalaire canonique sur $C^0([0,1] \to \mathbb{R})$ est :
$$\langle .,. \rangle : C^0([0,1],\mathbb{R}) \times C^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

L'intégrale d'une fonction $\geqslant 0$ et continue est nulle ssi $f=0$.

b) Inégalités, norme euclidienne :

Dans cette sous-section, $(E, \langle .., .. \rangle)$ est un espace euclidien.

Théorème : INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

Soit $x \in E$, $y \in E$. Alors : $|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$

De plus, on a égalité si et seulement si $\{x,y\}$ est liée.

Preuve :

Posons pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) = \langle x+\lambda y, x+\lambda y \rangle$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) \geq 0$, c'est-à-dire : $\langle x,x \rangle + 2\lambda \langle x,y \rangle + \lambda^2 \langle y,y \rangle \geq 0$

- Si $y = 0$, alors $\langle x,y \rangle = 0$ et $\langle y,y \rangle = 0$ donc l'inégalité recherchée est évidente.
- Si $y \neq 0$, f est une application polynomiale de degré 2 vérifiant pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) \geq 0$.

  Son discriminant Δ est donc négatif ou nul.

  Or, $\Delta = 4\langle x,y \rangle^2 - 4\langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$ d'où le résultat.

Étude du cas d'égalité :

- Supposons que $\{x,y\}$ est liée. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$ ou $x = \alpha y$.

  On peut supposer par exemple que $y = \alpha x$.

  D'une part, $\langle x,y \rangle^2 = \langle x, \alpha x \rangle^2 = \alpha^2 \langle x,x \rangle^2$

  D'autre part, $\langle x,x \rangle \langle y,y \rangle = \langle x,x \rangle \langle \alpha x, \alpha x \rangle = \alpha^2 \langle x,x \rangle^2$

- Supposons que $\langle x,y \rangle^2 = \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$.

  → si $y = 0$, alors $\{x,y\}$ est liée.

  → si $y \neq 0$, le discriminant de f Δ est égal à 0.

  Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) = 0$, c'est-à-dire tel que

  $\langle x+\lambda y, x+\lambda y \rangle = 0$

  D'où $x + \lambda y = 0_E$ $\square$

Théorème : INÉGALITÉ DE MINKOWSKI

Soit q la forme quadratique associée à $\langle .., .. \rangle$.

Soit $x \in E$, $y \in E$. Alors : $q(x+y)^{1/2} \leq q(x)^{1/2} + q(y)^{1/2}$

De plus, on a égalité si et seulement si : $(x = 0_E)$ ou $(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \alpha x)$

(On peut dire positivement liée)

↳ Preuve :

Écrivons : $q(x+y) = q(x) + 2\langle x,y\rangle + q(y)$
$\underset{(*)}{\leq} q(x) + 2q(x)^{1/2}q(y)^{1/2} + q(y) = (q(x)^{1/2} + q(y)^{1/2})^2$

Étude du cas d'égalité :

- Le cas $x = 0_E$ étant d'étude immédiate, on suppose $x \neq 0_E$.
- Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \alpha x$.

D'une part : $q(x+y)^{1/2} = q(x+\alpha x)^{1/2}$
$= q((1+\alpha)x)^{1/2}$
$= ((1+\alpha)^2 q(x))^{1/2}$
$= \underbrace{|1+\alpha|}_{\geq 0} q(x)^{1/2} = (1+\alpha)q(x)^{1/2}$

D'autre part : $q(x)^{1/2} + q(y)^{1/2} = q(x)^{1/2} + q(\alpha x)^{1/2}$
$= q(x)^{1/2} + \underbrace{|\alpha|}_{\geq 0} q(x)^{1/2}$

$= (1+\alpha)q(x)^{1/2}$

- Supposons qu'on a égalité dans Minkowski. On a alors avec $(*)$:

$$\begin{cases} \langle x,y\rangle \geq 0 \\ \langle x,y\rangle = q(x)^{1/2}q(y)^{1/2} \end{cases}$$

On a donc égalité dans Cauchy-Schwartz, d'où, puisque $x \neq 0_E$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$.

Or, $\langle x,y\rangle \geq 0$, c'est-à-dire : $\langle x, \alpha x\rangle \geq 0$, soit $\alpha\langle x,x\rangle \geq 0$
On en déduit que $\alpha \geq 0$. □

Définition :

Soit q la forme quadratique associée à $\langle .,.\rangle$.
L'application : $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$x \longmapsto q(x)^{1/2}$ est appelée norme euclidienne

et l'application : $d : E \to \mathbb{R}_+$
$(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est appelée distance (euclidienne) associée

Par exemple, l'inégalité du parallélogramme s'écrit : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

c) Orthogonalité :

Dans cette sous-section, $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace euclidien.

Définition :

1) Soit $x \in E$ et $y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$
2) Soit $A \subset E$ et soit $x \in E$. On dit que x est orthogonal à A si pour tout $a \in A$, $\langle x, a \rangle = 0$
3) Soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A, noté $A^\perp$, l'ensemble $A^\perp = \{x \in E : \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$

Remarque :

- On définit l'orthogonal d'une partie de E même si cette partie de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
- Bien évidement, $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Proposition :

1) Soit $A \subset E$. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2) Soit $A \subset E$, $B \subset E$ telles que $A \subset B$. Alors $B^\perp \subset A^\perp$
3) Soit $A \subset E$. Alors $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$

Preuve :

① • $0_E \in A^\perp$, car pour tout $a \in A$, $\langle 0_E, a \rangle = 0$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in A^\perp$ et $y \in A^\perp$

Soit $a \in A$. Alors $\langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \underbrace{\langle x, a \rangle}_{=0 \text{ car, } x \in A^\perp} + \overbrace{\langle y, a \rangle}^{=0 \text{ car, } y \in A^\perp} = 0$

D'où, $\lambda x + y \in A^\perp$.

② Soit $x \in B^\perp$. Soit $a \in A$. Puisque $A \subset B$, $a \in B$.

Alors $\langle x, a \rangle = 0$ car, $x \in B^\perp$. Donc $x \in A^\perp$

③ Puisque $A \subset \mathrm{Vect}(A)$. Alors d'après 2), $(\mathrm{Vect}(A))^\perp \subset A^\perp$.

Soit $x \in A^\perp$. Soit $y \in \mathrm{Vect}(A)$.

Il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels, $a_1, \dots, a_n$ des éléments de A tels que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$.

Alors : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\langle x, a_i \rangle}_{=0 \text{ car, } x \in A^\perp}$ donc $\langle x, y \rangle = 0$

Donc, $x \in (\mathrm{Vect}(A))^\perp$. □

Définition :

On dit d'une famille $\{x_i\}_{i\in I}$ d'éléments de E qu'elle est orthogonale si :

$$\forall i \in I,\ \forall j \in I,\ (i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0)$$

Elle est dite orthonormale (ou orthonormée) si de plus, on a :

$$\forall i \in I \quad \langle x_i, x_i \rangle = 1$$

Proposition :

Soit $\{x_i\}_{i\in I}$ une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls de E.
Alors $\{x_i\}_{i\in I}$ est libre.

↳ **Preuve :**

Soit $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ de famille réels tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0_E$.
Soit $j \in I$. Alors $\langle \lambda_i x_i, x_j \rangle = \langle 0_E, x_j \rangle$ c'est-à-dire : $\sum_{i\in I} \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = 0$

Par orthogonalité de la famille $\{x_i\}_{i\in I}$, on en déduit que $\lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = 0$
Or, $x_j \neq 0$ donc $\langle x_j, x_j \rangle \neq 0$ et on a $\lambda_j = 0$ $\square$

Théorème : PYTHAGORE

Soit $x \in E$, $y \in E$. Alors : $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
$\Leftrightarrow \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

d) Procédé d'orthogonalisation de Schmidt :

Dans cette sous-section, $(E, \langle .,. \rangle)$ désigne un espace euclidien.

Proposition : PROCÉDÉ D'ORTHOGONALISATION DE SCHMIDT

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{e_1, \dots, e_p\}$ une famille libre d'éléments de E.
Alors, il existe une famille $\{f_1, \dots, f_p\}$ de vecteurs non nuls telle que :

$$\begin{cases} (f_1, \dots, f_p) \text{ est orthogonale} \\ \forall k \in \{1, \dots, p\},\quad \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \end{cases}$$

Si, de plus, on suppose que : $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $\langle e_k, f_k \rangle = 1$, alors cette famille est unique.

↳ **Preuve :**

Pour f_1, il suffit de prendre $f_1 = e_1$.
Supposons construits $f_1, \dots, f_p$ non nuls tels que $\begin{cases} \{f_1, \dots, f_p\} \text{ est orthogonale} \\ \forall k \in \{1, \dots, p\}, \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \end{cases}$

Posons alors : $f_{p+1} = e_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle e_{p+1}, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$

Soit $j \in \{1, \dots, p\}$. Alors :

$$\langle f_{p+1}, f_j \rangle = \langle e_{p+1}, f_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle e_{p+1}, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} \langle f_i, f_j \rangle$$

$$= \langle e_{p+1}, f_j \rangle - \frac{\langle e_{p+1}, f_j \rangle}{\langle f_j, f_j \rangle} \langle f_j, f_j \rangle$$

$$= 0$$

De plus, $\text{Vect}(f_1, \dots, f_p, f_{p+1}) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p, e_{p+1})$

et puisque $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ on a : $\underbrace{\text{Vect}(f_1, \dots, f_{p+1})}_{\text{donc libre et } f_{p+1} \neq 0} = \overbrace{\text{Vect}(e_1, \dots, e_{p+1})}^{\text{libre}}$ $\square$

Corollaire :

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

1) Théorème de la base orthonormée incomplète :

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Toute famille orthonormale $\{e_1, \dots, e_p\}$ de vecteurs de E peut être complétée en une base $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ orthonormée de E.

2) Existence d'une base alternée :

Tout espace euclidien possède une base alternée.

Exemple :

Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et soit $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (1,1,0)$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille libre (même une base de $\mathbb{R}^3$). Orthogonalisons la par Schmidt :

Prenons : $\rightarrow f_1 = e_1 = (0,1,1)$

$$\rightarrow f_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 = (1,0,1) - \frac{\langle (1,0,1), (0,1,1) \rangle}{\langle (0,1,1), (0,1,1) \rangle} (0,1,1) = \left(1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow f_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \frac{\langle e_3, f_2 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2 = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{-2}{3}\right)$$

$\Rightarrow \{f_1, \dots, f_3\}$ est une famille orthogonale. Normalisons la :

Prenons : $\rightarrow g_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle}} f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (0,1,1)$

$$\rightarrow g_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$\rightarrow g_3 = \frac{1}{\|f_3\|} f_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

$\Rightarrow \{g_1, g_2, g_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Remarque: Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de E.
Alors, $\forall x \in E$, on a : $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, e_i \rangle e_i$

Proposition:

1) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors : $F \oplus F^{\perp} = E$.
En particulier, $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
2) Pour tout $A \subset E$, $(A^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)$
3) Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors:
   - $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$
   - $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

↳ **Preuve:**

① Notons $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base orthonormée de F.

- Soit $x \in E$. Supposons que $x = a + b$, avec $a \in F$ et $b \in F^{\perp}$.
On a donc : $a = \sum_{i=1}^{p} \langle a, e_i \rangle e_i$
Écrivons pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$: $\langle x, e_j \rangle = \langle a, e_j \rangle + \underbrace{\langle b, e_j \rangle}_{=0 \text{ car, } b \in F^{\perp}}$
$= \sum_{i=1}^{p} \langle a, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle$
$= \langle a, e_j \rangle$
D'où $x = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_j \rangle e_i + \left(x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_j \rangle e_i\right)$

- Posons $a = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$ et $b = x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$

Alors $a + b = x$, $a \in F$ et reste à montrer que $b \in F^{\perp}$.
Soit $g \in \{1, \dots, p\}$. Alors $\langle b, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle$
$= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle$
$= 0$

Donc : $b \in \{e_1, \dots, e_p\}^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)^{\perp} = F^{\perp}$

② On a bien évidement $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$ sev
Donc: $\mathrm{Vect}(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$. Vect (sev) = sev
Par égalité des dimensions $\mathrm{Vect}(A) = (A^{\perp})^{\perp}$.

③ Soit F, G deux sev de E.

Alors : $\begin{cases} F \subset F+G \\ G \subset F+G \end{cases}$ donc $\begin{cases} (F+G)^\perp \subset F^\perp \\ (F+G)^\perp \subset G^\perp \end{cases}$ D'où, $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $y \in F+G$. Il existe $f \in F$ et $g \in G$ tel que : $y = f+g$

Alors $\langle x,y\rangle = \underbrace{\langle x,f\rangle}_{=0 \text{ car, } x \in F^\perp} + \underbrace{\langle x,g\rangle}_{=0 \text{ car, } x \in G^\perp} = 0$ et $x \in (F+G)^\perp$

Écrivons : $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp + (G^\perp)^\perp = F \cap G$ et on conclut en passant à l'orthogonal.

3. Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Dans cette section, $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

a) Adjoint d'un endomorphisme :

Définition / Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme de E, noté f^*, tel que :

$\forall x \in E, \ \forall y \in E \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

On l'appelle adjoint de f.

Preuve :

· Unicité : Supposons que g et h sont deux adjoints de f. Soit $x \in E$, $y \in E$.

Écrivons : $\langle x, g(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, h(y)\rangle$

D'où $\langle x, g(y) - h(y)\rangle = 0$. Pour tout $y \in E$, on a donc :

$g(y) - h(y) \in E^\perp = \{0_E\}$

Donc, on en déduit que pour tout $y \in E$, $g(y) = h(y)$, c'est-à-dire $g = h$.

□

Proposition :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $(\lambda f + g)^* = \lambda f^* + g^*$
2) On a : $Id_E^* = Id_E$
3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \in \mathcal{L}(E)$. Alors $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
4) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $(f^*)^* = f$.

Preuve :

① Soit $x \in E$, $y \in E$.

Alors : $\langle x, (\lambda f^* + g^*)(y)\rangle = \langle x, \lambda f^*(y) + g^*(y)\rangle$

$= \lambda \langle x, f^*(y)\rangle + \langle x, g^*(y)\rangle$

$$= \lambda \langle f(x), y\rangle + \langle g(x), y\rangle$$
$$= \langle \lambda f(x) + g(x), y\rangle$$
$$= \langle (\lambda f + g)(x), y\rangle$$

② Soit $x \in E$, $y \in E$. Alors : $\langle x, Id_E(y)\rangle = \langle x, y\rangle = \langle Id_E(x), y\rangle$

③ Soit $x \in E$, $y \in E$. Alors : $\langle x, (g^* \circ f^*)(y)\rangle = \langle x, g^*(f^*(y))\rangle$
$$= \langle g(x), f^*(y)\rangle$$
$$= \langle f(g(x)), y\rangle$$
$$= \langle (f\circ g)(x), y\rangle$$

④ Soit $x \in E$, $y \in E$. Alors : $\langle x, f(y)\rangle = \langle f(y), x\rangle$ (symétrie de $\langle .,.\rangle$)
$$= \langle y, f^*(x)\rangle$$
$$= \langle f^*(x), y\rangle \qquad \square$$

b) Endomorphismes autoadjoints :

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit de f qu'il est autoadjoint (ou symétrique) si $f^* = f$,
c'est-à-dire si : $\forall x \in E$, $\forall y \in E$ $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$

Proposition :

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tA$.
En particulier, f est autoadjoint ssi A est une matrice symétrique.
/!\ l'hypothèse base orthonormée est essentielle !

↳ **Preuve :**

Notons $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ et $(b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$

Soit $(i,j) \in \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}$.
Alors :
$$b_{i,j} = \langle e_i, f^*(e_j)\rangle = \langle f(e_i), e_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle fe_i, e_k\rangle e_k, e_j\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \langle f(e_i), e_k\rangle \langle e_k, e_j\rangle$$
$$= a_{j,i} \qquad \square$$

Remarque : Le vocabulaire est cohérent : les endomorphismes symétriques correspondant, dans des bases orthonormées, aux matrices symétriques.

* Projecteurs orthogonaux :

- Rappels -

Définition :

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
L'application $p : E \to E$ qui à tout $x \in E$ associe l'unique $y \in F$ tel que $x = y + z$, avec $z \in G$, est appelée projection vectorielle sur F parallèlement à G. Une telle application est aussi appelée un projecteur.

Propriétés :

1) C'est une application linéaire.
2) Son noyau est G.
3) Son image est F et c'est aussi l'ensemble des vecteurs invariants de p :
$\{y \in F \mid p(y) = y\}$
4) Un endomorphisme de E est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Revenons à notre cadre $(E, \langle .,. \rangle)$ espace euclidien.

Définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle projecteur orthogonal sur F, noté p_F, le projecteur vectorielle sur F parallèlement à $F^\perp$.

On a donc :

- $\mathrm{Ker}(p_F) = F^\perp$
- $\mathrm{Im}(p_F) = F$
- $p_F \circ p_F = p_F$
- $p_{F^\perp} = Id_E - p_F \iff Id_E = p_F + p_{F^\perp}$

Théorème :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur (c'est-à-dire $p \circ p = p$).
Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est autoadjoint.

↳ **Preuve :**

- Supposons que p est un projecteur orthogonal.

Soit $x \in E$, $y \in E$. Écrivons : $\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), y - p(y) + p(y) \rangle$
$= \langle p(x), y - p(y) \rangle + \langle p(x), p(y) \rangle$

Or, $\begin{cases} p(x) \in \mathrm{Im}(p) \\ y - p(y) \in (\mathrm{Im}(p))^\perp \end{cases}$ $\quad (p(y - p(y)) = p(y) - p(p(y)) = p(y) - p(y) = 0)$

Donc : $\langle p(x), y - p(x) \rangle = 0$ soit $\langle p(x), y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$

Écrivons maintenant : $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(y), x \rangle = \langle p(y), p(x) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$

Finalement, $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$ et p est autoadjoint.

- Supposons que p est autoadjoint.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$. Alors :

$$\langle x, y \rangle \underset{y \in \mathrm{Im}(p)}{=} \langle x, p(y) \rangle \underset{p \text{ est autoadj}^t}{=} \langle \overset{= 0_E \text{ car, } x \in \mathrm{Ker}(p)}{p(x)}, y \rangle = 0 \qquad \square$$

Remarques :

① La matrice représentative dans une base orthonormée d'un projecteur orthogonal est symétrique

② Soit p un projecteur orthogonal. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée telle que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \Big] r = \mathrm{rg}(p)$$

En effet, prenons une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathcal{B}_2$ une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(p)$. Alors, puisque $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires et orthogonaux, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base orthonormée qui convient.

* Projection et distance à un sous-espace vectoriel

Théorème :

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Notons $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

↳ **Preuve :**

Complétons la base orthonormée $\{e_1, \dots, e_p\}$ de F en une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ de E. Alors, pour tout $x \in E$.

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

On a donc : $$p_F(x) = p_F\left(\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\right)$$

$$\underset{\text{linéarité de } p_F}{=} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle p_F(e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle p_F(e_k) + \sum_{k=p+1}^{n} \langle x, e_k \rangle p_F(e_k)$$

Or, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $p_F(e_k) = e_k$ (car, $e_k \in F$)
et pour tout $k \in \{p+1, \dots, n\}$, $p_F(e_k) = 0_E$ (car, $e_k \in F^\perp$)

Finalement, $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle e_k$ $\square$

Exemple :

① Projection sur une droite vectorielle :
Soit $D = \mathrm{Vect}(a)$, avec $a \neq 0_E$
Puisque $\left\{\frac{a}{\|a\|}\right\}$ est une base orthonormée de D, alors pour tout $x \in E$,

$$p_D(x) = \left\langle x, \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \frac{a}{\|a\|} = \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$$

② Projection sur un hyperplan vectoriel :
Soit $H = (\mathrm{Vect}(a))^\perp$, avec $a \neq 0_E$
Puisque $p_H = Id_E - p_{H^\perp} = Id_E - p_D$
Alors pour tout $x \in E$, $p_H(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$

Définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in E$.
On appelle distance de x à F, noté $d(x, F)$ le réel : $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$

Proposition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $x \in E$.
Alors : $\begin{cases} \forall y \in F, & \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\| \\ \forall y \in F, & \|x - y\| = \|x - p_F(x)\| \iff y = p_F(x) \end{cases}$

On a donc :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

$F \to \mathbb{R}$
$y \mapsto \|x - y\|$ admet une borne inférieure et celle-ci est atteinte uniquement en $p_F(x)$.

↳ **Preuve :**

Soit $x \in E$ et $y \in F$.

Pythagore

Alors : $\|x - y\|^2 = \|\underbrace{(x - p_F(x))}_{\in F^\perp} + \underbrace{(p_F(x) - y)}_{\in F}\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$
$\geq \|x - p_F(x)\|^2$

avec égalité ssi $p_F(x) = y$

$\square$

Exemple :

① Distance à une droite vectorielle :

Soit $D = \mathrm{Vect}(a)$ avec $a \neq 0_E$. Soit $x \in E$.

Alors $d(x, D) = \|x - p_D(x)\| = \|x - \frac{\langle a, x\rangle}{\|a\|^2} a\|$

② Distance à un hyperplan vectoriel :

Soit $H = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$ avec $a \neq 0_E$. Soit $x \in E$.

Alors : $d(x, H) = \|x - p_H(F)\| = \left\| \frac{\langle a, x\rangle}{\|a\|^2} a \right\| = \frac{|\langle a, x\rangle|}{\|a\|}$

* Symétries orthogonales

Définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F l'endomorphisme s_F de E donné par $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$.

Si F est un hyperplan de E, on dira plutôt réflexion.

Remarque :

1) Si $F = \{0_E\}$, $s_F = -\mathrm{Id}_E$

Si $F = E$, $s_F = \mathrm{Id}_E$

2) $\mathrm{Ker}(s_F - \mathrm{Id}_E) = F$

$\mathrm{Ker}(s_F + \mathrm{Id}_E) = F^{\perp}$

3) $s_F \circ s_F = \mathrm{Id}_E$

4) $s_{F^{\perp}} = -s_F$

5) Si $B = \{e_1, \dots, e_p\}$ une base orthonormée de F, alors pour tout $x \in E$

$$s_F(x) = 2\sum_{i=1}^{p} \langle x_i, e_i\rangle e_i - x$$

Exemple :

① Si $F = \mathrm{Vect}(a)$ avec $a \neq 0_E$ alors pour tout $x \in E$ $s_F(x) = 2\frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a - x$

② Si $F = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$ avec $a \neq 0_E$, alors pour tout $x \in E$ $s_F(x) = x - \frac{2\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a$

Théorème :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

1) s est une symétrie orthogonale

2) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et s est autoadjoint.

Remarque :

- La matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée est symétrique.

- Soit s une symétrie orthogonale, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de s est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$ (p fois 1, q fois -1)

  avec $p = \dim(\mathrm{Ker}(s - Id_E))$

  $q = \dim(\mathrm{Ker}(s + Id_E))$

c) Endomorphismes orthogonaux :

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'il est orthogonal s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

On note $O(E)$, l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Remarque :

Un projecteur orthogonal différent de l'identité n'est pas un endomorphisme orthogonal. En revanche, une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est orthogonal si et seulement s'il conserve la norme, c'est-à-dire si et seulement s'il vérifie : $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|$

↳ **Preuve :**

- Supposons f orthogonal.
  Soit $x \in E$. Alors $\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} \underset{f \in O(E)}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$

- Supposons f conserve la norme. Soit $x \in E$, $y \in E$.
  Alors $\langle f(x), f(y)\rangle \underset{\text{polarisa°}}{=} \frac{1}{4}\left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2\right)$

  $\underset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2\right)$

  $\underset{\text{conserve norme}}{=} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

  $\underset{\text{polarisa°}}{=} \langle x, y\rangle$ $\square$

Corollaire :

Soit $f \in O(E)$. Alors f est bijectif (c'est un automorphisme)

↳ Preuve:

Soit $x \in Ker(f)$. Alors $\|x\| \overset{f\in G(E)}{=} \|f(x)\| \overset{x\in Ker(f)}{=} \|0_E\| = 0$ donc f est injectif et puisque c'est un endomorphisme finie, il est bijectif.

Proposition:

Soit B une base orthonormée de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors f est orthogonal si et seulement si $f(B)$ est une base orthonormée de E.

↳ Preuve:

Notons $B = \{e_1, \dots, e_n\}$.

* Supposons f orthogonal.
  → $f(B)$ est une base car, f est un automorphisme.
  → $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle \overset{f\in G(E)}{=} \langle e_i, e_j \rangle \overset{B \text{ orthogonale}}{=} 0$
  → $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\|f(e_i)\| \underset{f\in G(E)}{=} \|e_i\| \underset{B \text{ orthonormée}}{=} 1$

  Donc: $f(B)$ est une base orthonormée.

* Supposons que $f(B)$ est une base orthonormée.
  Soit $x \in E$.
  Alors $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ et puisque B est orthonormée $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$

  Par ailleurs, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle f(e_i)$ et puisque $f(B)$ est une base orthonormée,

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, e_i \rangle^2 = \|x\|^2 \qquad \square$$

Proposition:

1) Soit $f \in O(E)$, $g \in O(E)$. Alors $g \circ f \in O(E)$.
2) Soit $f \in G(E)$. Alors $f^{-1} \in O(E)$.

$(G(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL_n(E), \circ)$

↳ Preuve:

① Soit $x \in E$. Alors : $\|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| = \|f(x)\| = \|x\|$

② Soit $x \in E$. Écrivons : $\|f^{-1}(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|(f \circ f^{-1})(x)\| = \|x\|$.

* Matrices orthogonales

Proposition / Définition :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

1) ${}^tMM = I_n$
2) $M\,{}^tM = I_n$
3) M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$
4) Les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire usuel)
5) Les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire usuel)

Si l'une des conditions est vérifiée, on dit que M est orthogonale. On note $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

↳ **Preuve :** Tout est évident !

• 2) $\Leftrightarrow$ 5) : Notons $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ le coefficient en i^e ligne, j^e colonne de $M\,{}^tM$

est $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\, m_{j,k} = \langle (m_{i,1}, \dots, m_{i,n}), (m_{j,1}, \dots, m_{j,n}) \rangle$ et le résultat est immédiat

Remarque :

1) Si $M \in O(n)$, alors $\det(M) = \pm 1$
2) $(O(n), \times)$ est un groupe (sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$)

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$ est orthogonale.

En particulier : $$M^{-1} = {}^tM = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Proposition :

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Une base $\mathcal{B}'$ de E est orthonormée si et seulement si $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est orthogonale.

↳ **Preuve :**

Notons $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. $e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i$.

Pour tout $(j,k) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$, $\langle e'_j, e'_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, a_{i,k}$ produit scalaire des colonnes j et k de $P_{B,B'}$.

$\square$

Proposition :

Soit B une base orthonormée de E. Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si $\mathcal{M}_B(f)$ est orthogonal.

↳ **Preuve :**

f est orthogonal si et seulement si $f(B)$ est base orthonormée, donc si et seulement si $\mathcal{M}_B(f) = \mathcal{M}_B(f(B))$ est orthogonale.

Proposition :

Soit $f \in O(E)$ (respectivement soit $M \in O(n)$)

Alors $Sp_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$ (respectivement $Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset \{-1, 1\}$)

↳ **Preuve :**

Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(f)$. Il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

D'une part, $\|f(x)\| = \|x\|$ car, $f \in O(E)$.

D'autre part, $\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. On a donc, puisque $\|x\| \neq 0_E$, $|\lambda| = 1$ $\square$

4. Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles

Dans toute cette section, $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Alors, ses sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux.

↳ **Preuve :**

Soit λ et μ 2 valeurs propres distinctes de f. Soit $x \in E_\lambda(f)$ et $y \in E_\mu(f)$.

Alors : $\lambda \langle x,y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$

Donc : $(\lambda - \mu)\langle x,y \rangle = 0$ Or, $(\lambda - \mu) \neq 0$, donc $\langle x,y \rangle = 0$ $\square$

Proposition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

↳ **Preuve:**

Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in F$.

Alors $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = 0$

$x \in F^\perp$ et $f(y) \in F$ car, $y \in F$ et F est stable par f.

Théorème:

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2) Soit $A \in \boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$. Il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O(n)$ telles que

"symétrique réelle"

$$A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP.$$

Remarque:

⚠ l'hypothèse "à coefficients réels" est essentielle.

Par exemple : $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ est symétrique à coef. complexes et non diagonalisable car, $\chi_M = X^2$.

(0 valeur propre donc M semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

IMPOSSIBLE.