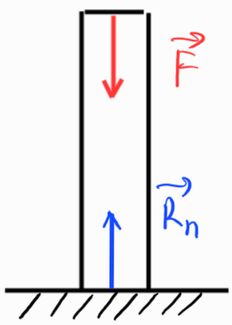
TD5 : Elasticité

1. Déformation d'une barre de fer (Cours)

2. Problème élastique

2.1. Exo 1 : le planté de bâton

2.1.1

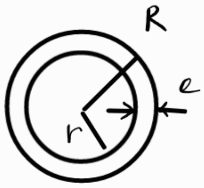


Si on néglige le poid du bâton, les forces extérieures sont la force $\vec{F}$ et la réaction $\vec{R_n}$ et

$$\vec{F} + \vec{R_n} = \vec{0}$$

2.1.2 La contrainte de compression :

$$\sigma = -\frac{F}{S} \quad \text{(négative car on est en compression)}$$



$$S = \pi R^2 - \pi r^2 \quad \text{avec } r = R - e$$

$$= \pi R^2 - \pi (R-e)^2$$

$D = 20\,mm \rightarrow R = 10\,mm = 0{,}01\,m$

$$= \pi\, 0{,}01^2 - \pi\,(0{,}01 - 0{,}002)^2 \simeq 1{,}13 \cdot 10^{-4} (m^2)$$

$e = 2\,mm = 0{,}002\,m$

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{F}{S} = -\frac{100}{1{,}13 \cdot 10^{-4}} = -88 \cdot 10^{4}\ (Pa)$$

2.1.3. La déformation est calculé en appliquant la loi de Hooke pour le cas 1D :

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{88 \cdot 10^4}{69000 \cdot 10^6} \simeq -1{,}3 \cdot 10^{-5}$$

2.1.4 La longueur du bâton :

$$L = L_0 + \Delta L = L_0 + L_0\varepsilon = L_0(1+\varepsilon) = 1{,}1\,(1 - 1{,}3 \cdot 10^{-5}) = 1{,}09998 (m) \simeq 1{,}1 (m)$$

(Le bâton est en compression donc l'allongement est négatif)

2.2. Exo 2 le téléskis

$$L = 2\,m, \quad S = 1200\,mm^2 = 1200 \cdot 10^{-6} (m^2), \quad R_e = 240\,MPa = 240 \cdot 10^6 (Pa)$$

2.2.1. Si on veut que les perches sont toujours en état élastique : $\sigma < R_e$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{F}{S} < R_e \Leftrightarrow \quad F < R_e \cdot S = 240 \cdot 10^6 \times 1200 \cdot 10^{-6} = 288\,000\ (N)$$

2.3. Les résultats utiles d'un problème d'élasticité : $\boxed{\sigma < R_e}$

2.4. La déformation est une grandeur locale pendant que le déplacement est une grandeur globale.

3. Energie élastique

3.1. $\boxed{E_p^e = \frac{1}{2}\sigma.\varepsilon.V_0}$ avec V : le volume du solide

$\boxed{e_p^e = \frac{1}{2}\sigma.\varepsilon}$: énergie élastique par une unité de volume

3.2. Exo 3 La balle rebondissante

$m = 60g = 0,06\ kg$

$V_0 = 150\ cm^3 = 150.10^{-6}\ m^3$

$v = 10\ km/h = \frac{10}{3,6}\ m/s$

$E = 10\ MPa = 10.10^6\ Pa$

3.2.1. Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{1}{2}.0,06.\left(\frac{10}{3,6}\right)^2 \simeq 0,23\ (J)$$

3.2.2

Energie potentielle élastique : $E_p^e = \frac{1}{2}\sigma.\varepsilon.V_0 = \frac{1}{2}E.\varepsilon^2.V_0 = E_c$

$(\sigma = E\varepsilon)$

$$\rightarrow \varepsilon^2 = \frac{2E_c}{E.V_0} = \frac{2.0,23}{10.10^6.150.10^{-6}} = 3,1.10^{-4}$$

$$\rightarrow \boxed{\varepsilon = -0,0176} \quad (\text{compression})$$

$$\rightarrow \sigma = E.\varepsilon = -0,0176.10.10^6 = -1,76.10^5\ (Pa)$$

$+ \ \varepsilon = \frac{\Delta D}{D_0}$; $D = D_0 + \Delta D = D_0(1+\varepsilon)$

Avec $V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rightarrow R_0^3 = \frac{3V_0}{4\pi} = \frac{3.150.10^{-6}}{4\pi} \rightarrow R_0 = 0,033\ (m)$

$\rightarrow D_0 = 2R_0 = 0,066\ (m)$

3.2.2 (Suite)

$$D = D_0 (1+\varepsilon) = 0{,}066 (1 - 0{,}0176) = 0{,}0648 \text{ (m)}$$

3.2.3. Dans le cas d'une balle en acier : $E' = 210.10^9 \text{ (Pa)}$

$$\rightarrow \varepsilon'^2 = \frac{2E_c}{E' V_0} = \frac{2.0{,}23}{210.10^9 \times 150.10^{-6}} \simeq 1{,}46.10^{-8} \rightarrow \varepsilon' = -1{,}21.10^{-4}$$

$$\sigma' = E'.\varepsilon' = -1{,}21.10^{-4} \times 210.10^9 \simeq 25{,}4.10^6 \text{ (Pa)}$$

$$\rightarrow D' = D_0 (1+\varepsilon') = 0{,}066 (1 - 1{,}21.10^{-4}) \simeq 0{,}06599 \text{ (m)} \simeq 0{,}066 \text{ (m)}$$

3.2.4 _ Certaines balles dissipent plus d'énergie durant le choc.