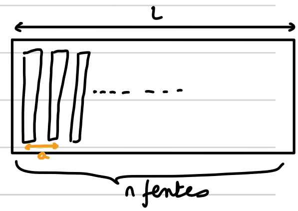
CHAPITRE 4 : INTERFERENCES À n FENTES, RÉSEAUX PARFAITS

Réseaux à 1D (dimension), 2 D, 3 D → réseau d'un cristal (loi de Bragg)
↳ série de fentes fines

1. Le réseau à 1 dimension

Nombre total de fentes / traits : $\boxed{N = \frac{L}{a}}$

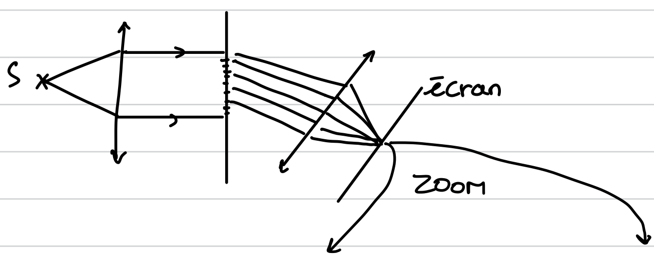
Nombre de fentes / traits par mètre : $\boxed{n = \frac{N}{L} = \frac{1}{a}}$



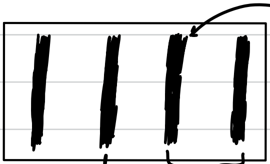
On considèrera des réseaux parfaits
↳ où les fentes individuelles ne diffractent pas

2. Expérience de diffraction par un réseau

⚠ faire la diff :
* diffraction par les fentes individuelles
* diffraction par les interférences à N fentes



lumière monochromatique



grosse frange intense bcp espacées les unes des autres.

0 = image

franges secondaire

lumière polychromatique

toutes les λ diffractent = lumière blanche

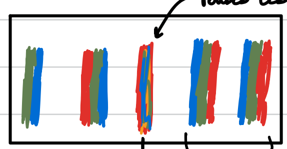
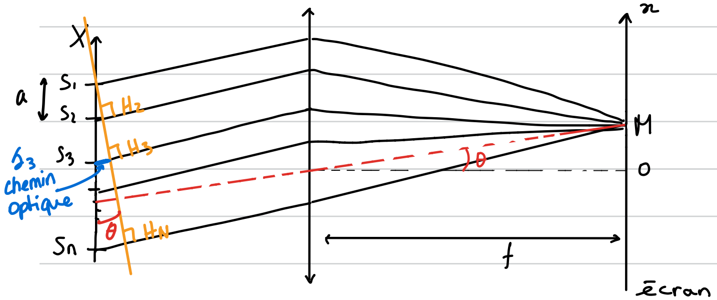


image = raie lumière blanche

spectres secondaires décomposition de la lumière

3. Modélisation

a) En lumière monochromatique :



* signal en M issu de S_1 : $s_1(t) = Ae^{i\omega t} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(L)_{S_1 M}}$

* signal en M issu de S_2 : $s_2(t) = Ae^{i\omega t} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(L)_{S_2 M}}$

$(L)_{S_2 M} = (L)_{S_1 M} + \delta_2$

$(L)_{S_1 M} = (L)_{H_2 M}$ car S_1 et H_2 sont sur le même plan d'onde

- $(L)_{S_2 M} = (L)_{S_2 H_2} + (L)_{H_2 M}$
  $= \delta_2 + (L)_{S_1 M}$ avec $\delta_2 = na \sin\theta$

Donc $s_2(t) = Ae^{i\omega t} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(L)_{S_1 M}} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} na \sin\theta}$

* signal issu de S_k où $k \in \{1, 2, 3 \dots N\}$
  $(L)_{S_k M} = (L)_{S_1 M} + \delta_k$ avec $\delta_k = n(k-1) a \sin\theta$

$$s_k(t) = Ae^{i\omega t} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(L)_{S_k M}}$$
$$= \underbrace{Ae^{i\omega t} e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(L)_{S_1 M}}}_{= A'} \underbrace{e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} n(k-1) a \sin\theta}}_{X^{k-1} \text{ où } X = e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} na \sin\theta}}$$
$$= A' X^{k-1}$$

$*$ signal total : $s(t) = \sum_{k=1}^{k=N} s_k(t)$

$$= \sum_{k=1}^{k=N} A' X^{k-1}$$

$$= A' (\underbrace{\overset{= X^0}{1} + X + X^2 + \dots + X^{N-1}}_{\sigma_N})$$

pour savoir

$X\sigma_N = X + X^2 + \dots X^N$

$= 1 + X + X^2 + \dots + X^{N-1}$) pour que ça soit pareil on fait $-1 + x^N$

$X\sigma_N = \sigma_N - 1 + X^N$

$\iff 1 - X^N = (1 - X)\sigma_N$

$\iff \sigma_N = \dfrac{1 - X^N}{1 - X}$

↳ donc $s(t) = A' \dfrac{1 - X^N}{1 - X}$

$$s(t) = A' \times \frac{1 - e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} N m a \sin\theta}}{1 - e^{-\frac{2i\pi}{\lambda} m a \sin\theta}}$$

$$= A' \times \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}} \quad \text{où } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} m a \sin\theta$$

$$= A' \frac{e^{-i\frac{N}{2}\varphi}\left(e^{i\frac{N}{2}\varphi} - e^{-i\frac{N}{2}\varphi}\right)}{e^{-i\frac{\varphi}{2}} \underbrace{\left(e^{i\frac{\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)}_{= 2i\sin(\varphi/2)}}$$

$$= A' e^{-i\frac{N-1}{2}\varphi} \times \frac{\sin(N \times \frac{\varphi}{2})}{\sin(\varphi/2)}$$

$$= \underbrace{A \exp\left[i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(L)_{SM}}_{= A'} - \frac{N-1}{2}\varphi)\right] \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

* intensité :

$$I = K' \langle s \bar{s} \rangle$$

$$= K' \langle A e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(L)_{SIM} - \frac{N-1}{2}\varphi)} \times \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \times A e^{-i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}...)} \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \rangle$$

$$= K' \langle A^2 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} \rangle$$

$$= K' A^2 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

$$\lim_{\varphi/2 \to k\pi} I = 2K'A^2 \times \lim_{\varphi \to 2k\pi} \frac{\overset{\to 0}{\sin(N\varphi/2)}}{\underset{\to 0}{\sin(\varphi/2)}} \left(\frac{N/2 \cos(N\varphi/2)\sin(\varphi/2) - \frac{1}{2}\cos(\varphi/2)\sin(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} \right)$$

possible de développer mais pas besoin de connaître

$$\lim I = K' A^2 N^2$$

$$\lim \frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} = N$$

en $\varphi = 0 \Rightarrow I(0) = I_0$

$$\Rightarrow I(\varphi) = \frac{I_0}{N^2} \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

On cherche les extrema : $\frac{dI}{d\varphi} = 0$

$$\frac{dI}{d\varphi} = \frac{I_0}{N^2} \times 2 \underbrace{\frac{\sin N(\varphi/2)}{\sin \varphi/2)}}_{= I} \underbrace{\left(\frac{\frac{N}{2}\cos(N\varphi/2)\sin\varphi/2}{\sin^2(\varphi/2)} - \frac{\frac{1}{2}\cos(\varphi/2)\sin(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} \right)}_{= II}$$

$II = 0 \Rightarrow$ max

$$\Leftrightarrow N \tan\frac{\varphi}{2} = \tan\frac{N\varphi}{2}$$

Solution triviale : $\tan\frac{\varphi}{2} = \tan\frac{N\varphi}{2} = 0$

$$\Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Or } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n a \sin(\theta)$$

loi des réseaux

$\Rightarrow \frac{\pi}{\lambda} na \sin \theta_k = k\pi \Rightarrow \boxed{\sin \theta_k = k \frac{\lambda}{na}}$

16/03/23

$I_0 = \lim K' A^2 \frac{\sin^2 N\varphi/2}{\sin^2 \varphi/2}$

$= K' A^2 \lim \frac{\frac{d}{d\varphi} \sin^2 N\varphi/2}{\frac{d}{d\varphi} \sin^2 \varphi/2}$

extrema $\frac{dI}{d\varphi} = 0$

* $N \tan \varphi/2 = \tan \frac{N\varphi}{2} \Rightarrow$ max, solut° triviale $\sin \frac{\varphi}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \varphi = 2k\pi$

$\Leftrightarrow \sin \theta_k = k \frac{\lambda}{na}$

$\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} = 0 \Rightarrow$ min $\Leftrightarrow \sin N\varphi/2 = 0$ avec $\sin \varphi/2 \neq 0$

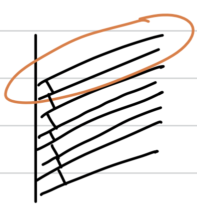
$\Leftrightarrow \varphi = \frac{2p\pi}{N}$ $p \in \mathbb{N}$, $\varphi \neq 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \varphi = 2 \frac{p}{N} \pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $\frac{p}{N} \notin \mathbb{Z}$. Donc $\boxed{\sin \theta_p = \frac{p}{N} \frac{\lambda}{na}}$

• Résumé : $\sin \theta_p = \frac{p}{N} \frac{\lambda}{na}$ $\begin{cases} \frac{p}{N} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{max} \\ \frac{p}{N} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \text{min} \end{cases}$

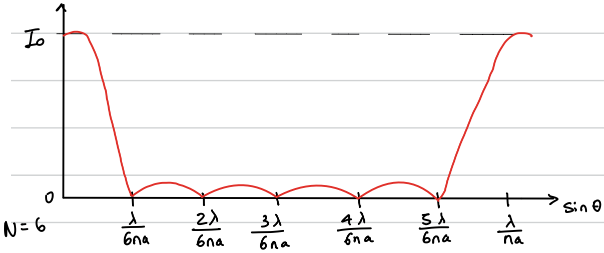
dépend pas de N

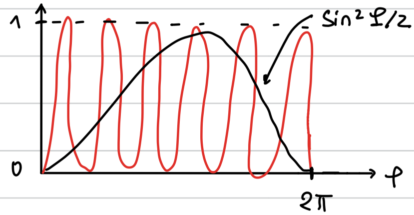
~> Remarque : loi des réseaux (max : $\sin \theta_k = k \frac{\lambda}{na}$),
équivalente au max des interférences à 2 fentes.



interférences constructive deux à deux.

Allure de $I(\sin\theta) = \dfrac{I_0}{N^2} \dfrac{\sin^2 N\varphi/2}{\sin^2 \varphi/2}$

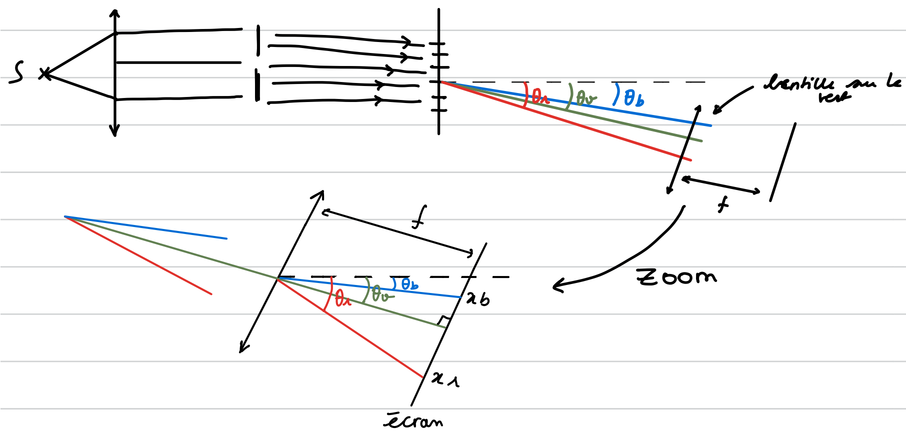




* intensité aux max très élevé $\propto N^2$ (voir calcul lim I_0)
* raies très fines (max)
→ application possible : spectromètre à réseau

En lumière polychromatique les spectres à différents λ se superposent.

4. Spectromètre à réseau :
↳ séparer et observer le spectre d'une lumière.



On définit la séparation spectrale :
$x_{max} - x_{min}$ $(= x_r - x_b)$

$$= f\tan(\theta_r - \theta_v) - f\tan(\theta_b - \theta_v)$$
$$= f\left(\tan(\theta_r - \theta_v) + \tan(\theta_v - \theta_b)\right)$$

Si on applique l'approximation des petits angles :

$$x_r - x_b \simeq f\underbrace{(\theta_r - \theta_b)}_{=\text{ séparation angulaire}}$$

5. Pouvoir de résolution

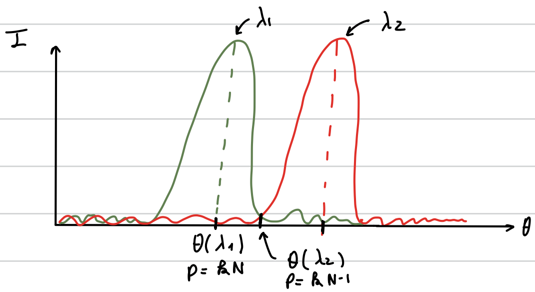
$R_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ ↙ plus petite différence de λ que l'on peut distinguer.

Par exemple λ_2 et λ_1 peuvent être distinguées si $|\lambda_2 - \lambda_1| > \Delta\lambda$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda_2 - \lambda_1|} < \frac{1}{\Delta\lambda} \Leftrightarrow \frac{\lambda_2}{|\lambda_2 - \lambda_1|} < \frac{\lambda_2}{\Delta\lambda} = R_{\lambda_2}$$

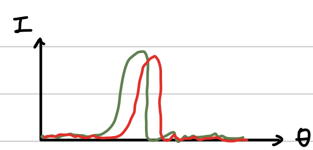
Plus R_{λ_2} est élevé mieux on pourra distinguer λ_2 et λ_1.

* Critère de Rayleigh



λ_1 et λ_2 se distinguent si
$\theta_{p=kN}(\lambda_1) < \theta_{p=kN-1}(\lambda_2)$

↳ si on peut pas les distinguer :



$$\theta_{kN}(\lambda_1) < \theta_{kN-1}(\lambda_2) \Leftrightarrow \sin\theta_{kN}(\lambda_1) < \sin\theta_{kN-1}(\lambda_2)$$

$$\underset{\text{(loi des réseaux)}}{\Leftrightarrow} \frac{kN}{\cancel{N}}\frac{\lambda_1}{\cancel{Na}} < \frac{kN-1}{\cancel{N}}\frac{\lambda_2}{\cancel{Na}}$$

$$\Leftrightarrow kN\lambda_1 < kN\lambda_2 - \lambda_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} < kN$$

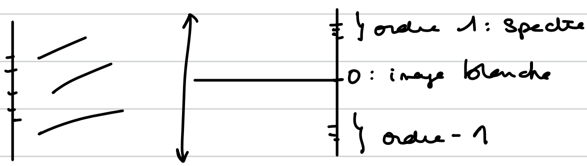
On en déduit que $\boxed{R_\lambda = kN}$ pour un réseau.

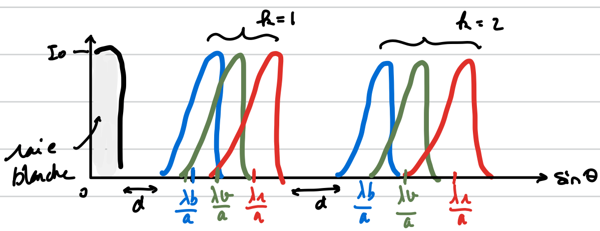
↳ le pouvoir de résolution ↗ avec le nb de fentes.

exercice 1 p.28

1) $N = \frac{L}{a} \Leftrightarrow a = \frac{L}{N} = \frac{4.10^{-2}}{20\,000} = 2\ \mu m$

2)





3) $k = 1$

$\lambda_{min} = 390$ nm

$\lambda_{max} = 770$ nm

séparation angulaire : $\theta_1(\lambda_{max}) - \theta_1(\lambda_{min})$

loi des réseaux : $\arcsin\left(\frac{\lambda_{max}}{a}\right) - \arcsin\left(\frac{\lambda_{min}}{a}\right)$

$= 11,4°$

4) $\lambda_1 = 589$ nm , $\lambda_2 = 589,6$ nm

On peut résoudre λ_1 et λ_2 si $\lambda_2 - \lambda_1 > \Delta\lambda$ ← + petite différence observée

Pour un spectre centré en λ_2 :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} < \frac{\lambda_2}{\Delta\lambda} = R_{\lambda_2} = |k| N$$

$$|k| > \frac{\lambda_2}{N(\lambda_2 - \lambda_1)} = 4{,}91 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow |k| \in \{\pm 1, \pm 2 \dots\}$$

possible de distinguer λ_1 et λ_2 dès $k = \pm 1$