Proposition d'exercices pour le CC1 (24 octobre 2022)

Durée 2 h

Calculatrice et documents NON autorisés

Les réponses doivent être justifiées. La clarté de la rédaction sera prise en compte.
*Les **exercices sont indépendant***

Exercice 1 - Analyse dimensionnelle

1. On cherche à déterminer la distance depuis la surface de la terre à laquelle doit se trouver un satellite géostationnaire, telle que ce satellite se trouve sur une orbite circulaire.

(a) La norme de la force exercée par la terre sur le satellite a la forme $F = GmM/(R+h)^2$ où m est la masse du satellite, M est la masse de la terre, R est son rayon, h est l'altitude par rapport au niveau de la mer, et G est la constante gravitationnelle.
Déterminer la dimension associée à G (la dimension n'est pas l'unité).

(b) Plusieurs étudiants obtiennent les relations suivantes pour déterminer L'altitude h en fonction des autres paramètres : $h = \left(\frac{GM^2T^2}{4\pi^2 m}\right)^{-1/3} - R$; $h = \left(\frac{4\pi^2 M}{G(mT)^2}\right)^{-1/3} - R$; $h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{-1/3} - R$.
Par analyse dimensionnelle, déterminer si certaines relations sont nécessairement fausses.

2. Lors d'une chute libre, un objet est soumis à une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse $\vec{f} = -k\vec{v}$, où k est une constante.

(a) Déterminer la dimension associée à k et déduisez-en son unité dans le système international.

(b) Du fait du frottement $\vec{f}$, l'objet atteint une vitesse limite de norme v_{lim}. On fait l'hypothèse que cette vitesse dépend de k, de la masse de l'objet m, et de g l'accélération dans le champs de pesanteur terrestre.
En déduire, par analyse dimensionnelle la relation donnant v_{lim}.

Exercice 2 - Cinématique en coordonnées cartésiennes

1. Un objet ponctuel se déplace selon l'équation horaire suivante

$$\vec{r}(t) = (t^3 - 3t^2 + 10)\vec{u}_x$$

(a) Déterminer l'expression de la vitesse.

(b) Déterminer le vecteur accélération.

(c) Déterminer le temps t_0 pour lequel l'accélération devient nulle.
De même, déterminer les temps t_- et t_+ pour lesquels la vitesse devient nulle.

(d) Construire le tableau de signe des composantes de la vitesse et de l'accélération pour les temps $t \in]-\infty : \infty[$.
En déduire quand le mouvement est accéléré et retardé.

2. Un objet ponctuel se déplace dans le plan (O, x, y) avec pour équation de mouvement en coordonnées cartésiennes

$$x(t) = 3\cos(2\pi t),$$
$$y(t) = 3\sin(2\pi t).$$

(a) Déterminer l'expression de la vitesse.

(b) Déterminer le vecteur accélération.

(c) Calculer la norme de la vitesse.

(d) Ce mouvement est-il accéléré, retardé, ou uniforme. Justifier votre réponse.

3. Un objet ponctuel se déplace selon la droite verticale (O, z) avec pour coordonnée

$$z(t) = -6\tau\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - 5t + 6\tau,$$

où $\tau = \ln(6/5)$ et les différents coefficients sont propres à rendre z homogène à des mètres, et t homogène à des secondes.

(a) Déterminer la composante $v_z(t)$ de la vitesse selon l'axe (O, z).

(b) Calculer la vitesse lorsque $t = 0$ s et dans la limte des temps long (lorsque $t \to \infty$).

(c) Montrer que la vitesse s'annule en $t_0 = 1$ s.

(d) Déterminer la composante de l'accélération $a_z(t)$ et donner le signe de cette fonction pour $t \in \mathbb{R}$. En déduire les variations puis le signe de $v_z(t)$.

(e) Des questions précédentes, déterminer les intervals de temps pour lesquels le mouvement est accéléré et retardé.

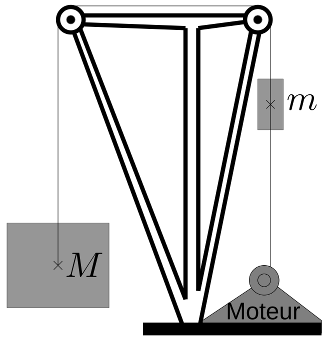
4. Un objet ponctuel se déplace dans le plan (O, x, y) selon l'équation horaire suivante

$$\overrightarrow{r}(t) = (4t^2 - t)\overrightarrow{u}_x + (10 - 24t^2 + 6t)\overrightarrow{u}_y$$

Montrer que le mouvement est rectiligne, et donner un vecteur indiquant la direction du mouvement.

Exercice 3 - Dynamique

On s'interesse à une grue permettant de soulever de larges masses à l'aide d'un contrepoids relié à un moteur. L'objet à soulever a une masse $M = 700$ kg tandis que le contrepoids a une masse $m = 300$ kg.
Le moteur peut appliquer sur le contrepoids une force de tension $\overrightarrow{F}$ afin de l'abaisser, avec pour résultat d'élever la masse M.
On considèrera que le cable reste tendu et de longueur constante avec une masse négligeable. Nous considèrerons de plus que les poulies sont idéales.
Le cable permet de resister à une tension $T_{max} = 4 \cdot 10^4$ N.



1. Un ouvrier désire appliquer une force de tension de $F \equiv ||\overrightarrow{F}|| = 50$ N sur le contrepoids afin de lever la masse M.

   Le cable résisterait-t-il à la tension appliquée ? Justifier votre résultat en explicitant clairement votre démarche.
2. La tension appliquée est telle que le cable reliant la masse M à la masse m résiste. Cependant, c'est le cable reliant le moteur au contrepoids qui casse.

   À quelle accélération la masse M tombe-t-elle ?

   Estimer le temps de chute si la masse M est à une hauteur $h = 8$ m lorsque le cable lache. On négligera la resistance de l'air.