Université Gustave Eiffel

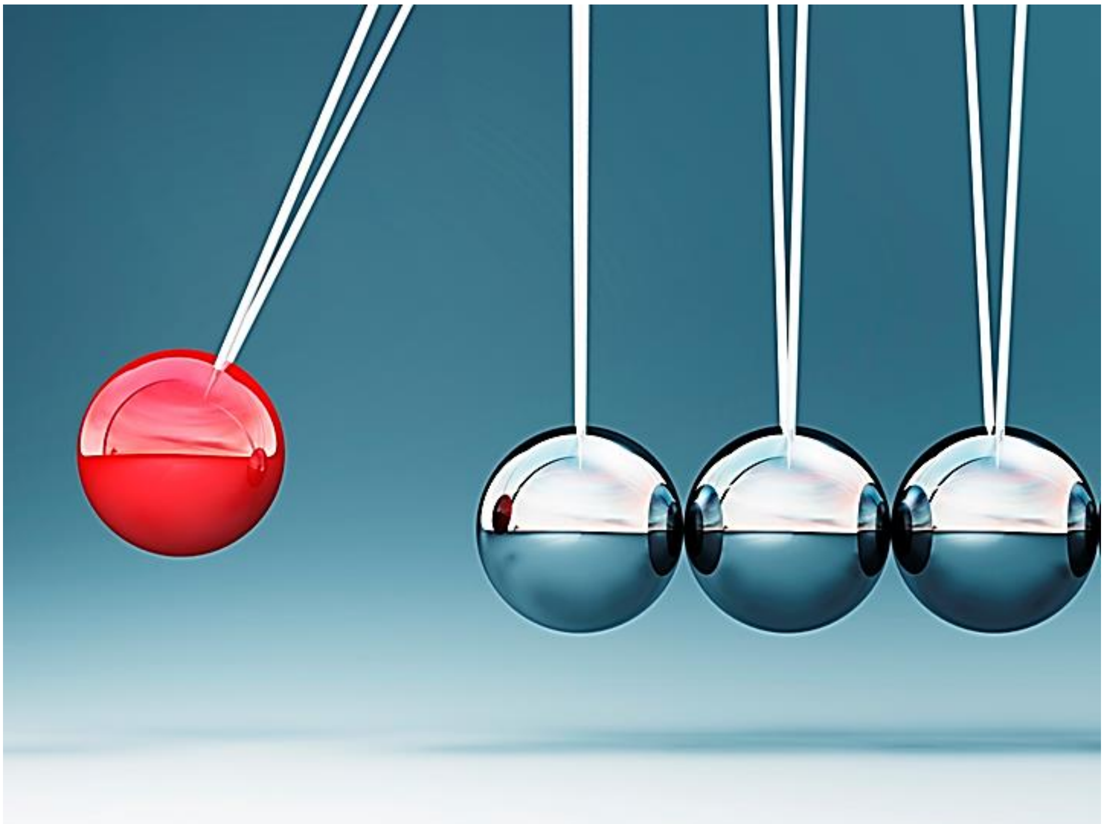
SEPTEMBRE 2022

LICENCES

- ☞ PHYSIQUE CHIMIE
- ☞ SCIENCES POUR L'INGENIEUR
- ☞ SCIENCES PHYSIQUES – ANGLAIS
- ☞ PHYSIQUE CHIMIE – MATH INFO

L1 - Semestre S1

CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DU POINT



EQUIPE ENSEIGNANTE : Sylvie COHEN-ADDAD, Régis HENRION, Loïc JOUBERT-DORIOL, Julien LOPOLDES, Kossi KETY.

TABLE DES MATIERES

Table des matières 2
Présentation de l’UE 3
Bibliographie 4
Chapitre 1 : Analyse dimensionnelle 5
Chapitre 2 : Cinématique en coordonnées cartésiennes 7
Chapitre 3 : Principe fondamental de la dynamique 10
Chapitre 4 : Les forces de frottements 13
1. Forces de frottements entre solides 13
2. Forces de frottements fluides (Facultatif) 14
3. TP - Frottements solides 15
Chapitre 5 : La tension d’un ressort : force de rappel élastique 21
Chapitre 6 : Cinématique en repère polaire, mouvements curvilignes 24
1. Repérage géométrique en coordonnées polaires 24
2. Grandeurs cinématiques en repère polaire 24
Chapitre 7 : Travail d’une force et énergies 26
1. Travail et puissance d’une force 26
2. Théorème de l’énergie cinétique 26
3. Forces conservatives et énergie potentielle 28
4. Energie mécanique 28
Chapitre 8 : Equilibres et domaines accessibles dans un champ d'énergie potentielle unidimensionnel 31
1. Notions de barrière et puits de potentiel et Domaines accessibles 31
2. Conditions d’équilibre ; stabilité de l’équilibre 31
3. TP n°2 : expériences avec un pendule simple 33
Annexe 1 – Sujets de Bac - Chute libre et lancer de projectiles 34
Sujet 1 : Galilée, Chute et exploitation de documents et modélisation 34
Sujet 2 : Un peu de balistique 38
Annexe 2 – Entrainements Mathematiques 40
1. Propriétés et définitions à connaître sur les vecteurs 40
2. Applications : Formules de base pour le produit scalaire 41
3. Autotest sur les vecteurs 41
4. Calcul des dérivées : propriétés et dérivées usuelles à connaître 42
5. Fonctions trigonométriques 44
6. Alphabet grec symboles et noms 45
7. Complément : équations différentielles 46
Annexes 3 – Annales 2021-2022 47
Novembre 2021 – CC1 47
Décembre 2021 – CC2 49
Janvier 2022 – CC3 51

PRESENTATION DE L'UE

Au cours de cet enseignement, vous travaillerez des concepts et des principes de la physique dont l'assimilation est importante pour aborder différents domaines rencontrés en licence :
- la mécanique des solides et des fluides,
- la thermodynamique et la thermique,
- l'électromagnétisme,
- l'étude des phénomènes vibratoires et ondulatoires,
- la physique relativiste, la mécanique quantique…

Les méthodes, outils et raisonnements rencontrés vous seront utiles pour toute formation scientifique.

Contenu :

- cinématique en repère cartésien
- principe fondamental de la dynamique
- forces : forces gravitationnelles et électrostatiques ; poids ; tension d'un fil ; réaction d'un support ; forces de frottements solides ; forces de frottements fluides ; tension d'un ressort.
- cinématique en repère polaire
- travail d'une force ; énergie cinétique ; théorème de l'énergie cinétique
- énergie potentielle pour une force conservative
- énergie mécanique ; conservation de l'énergie mécanique pour les systèmes conservatifs ; variation d'énergie mécanique dans le cas général
- application au pendule simple
- équilibres et domaines accessibles pour un point dans un champ d'énergie potentielle à une dimension : barrière et puits de potentiel ; positions d'équilibre ; stabilité de l'équilibre.

Pré-requis en physique : parties du cours de physique de 2^{nde}, $1^{ère}$ et Terminale spécialité physique-chimie

- référentiel ; référentiels galiléens
- vecteur vitesse ; vecteur accélération
- les 3 lois de Newton
- mouvements de chute
- systèmes oscillants ; pendule simple
- travail d'une force ; énergie cinétique ; énergie potentielle de pesanteur ; énergie mécanique.

Pré-requis en mathématiques : parties du cours de mathématiques de 2^{nde}, $1^{ère}$ et Tle en maths complémentaire.

- vecteurs : composantes dans un repère cartésien, norme, somme vectorielle, produit scalaire.
- dérivées : définition de la dérivée, dérivées usuelles (fonctions polynomiales, fonction logarithme népérien, fonction exponentielle, fonctions sinus et cosinus), dérivée d'un produit de fonctions, dérivée d'une fonction composée.
- étude et tracé de la courbe représentative d'une fonction.
- primitives : définition et primitives usuelles.
- résolution des équations du premier et du second degré.

BIBLIOGRAPHIE

Quelques références disponibles à la bibliothèque de l'UPEM
Connaissances de cours : pour compléter ses notes de cours (la présentation n'étant toutefois pas faite dans le même ordre, ni de la même façon)

- Florence Viot, Mécanique du point, éd. Dunod *(cote 531)*
- Michel Bertin, Jean-Pierre Faroux et Jacques Renault, Mécanique 1, éd. Dunod *(cote 531)*
- Super Manuel de Physique Tout-en-un SUP, Jérôme Majou, Stéphane Komilikis, Bréal
- Halliday et Resnick, Fundamentals of Physics, Ed Wiley

Savoir-faire : pour approfondir le travail d'entraînement aux exercices

- Faroux, Renault, Matray et Rosso, Mécanique 1, éd. Dunod *(cote 531)*
- Queyrel et Mesplède, Précis de physique 1 – mécanique, éd. Bréal *(cote 531)*

Sitographie : site comportant à la fois cours et exercices
http://uel.unisciel.fr/physique/meca/meca/co/meca.html

Conseils méthodologiques :

- Cet enseignement comporte une partie importante de cours : pendant les séances, il faut prendre des notes sur un cahier ou un classeur.
Pendant les séances, il ne faut pas hésiter à poser des questions à l'enseignant si des points ne sont pas compris.
- Avant la séance suivante, il est recommandé de faire un résumé du cours, en utilisant le cadre prévu dans le document qui figure dans ce polycopié pour le chapitre étudié, et de l'apprendre.

- Avant chaque séance, il est aussi fortement conseillé de préparer les exercices indiqués par l'enseignant.

- Pour réviser, il faut d'abord contrôler ses connaissances de cours (selon une méthode adaptée à son type de mémorisation – visuelle ou auditive), puis refaire les exercices sans ses notes de correction.

- Les Travaux Pratiques font partie de l'apprentissage.
Pour être efficace pendant les séances de TP, il faut faire le travail de préparation à l'avance.
Après chaque séance de TP, il est conseillé de rédiger une fiche récapitulative, qui sera utile pour la révision du devoir.

- Pour préparer le devoir, après le travail de révision des cours, des exercices et des TP, on peut essayer de faire (si possible en temps limité) le devoir de l'an passé (sujet dans ce polycopié). Si certaines questions posent problème, prendre son cours et ses notes d'exercices et de TP pour les résoudre.

- La résolution des exercices nécessite l'utilisation d'outils mathématiques (vecteurs, dérivées…) : il est important d'acquérir une certaine rapidité dans le maniement de ces outils.
Pour ce faire, il faut s'entraîner avec les documents et exercices du polycopié. Ensuite, il est conseillé d'aller sur la plate-forme d'enseignement à distance (sur l'espace numérique de travail) pour faire les tests proposés.

- Divers documents seront en plus déposés sur la plate-forme d'enseignement à distance (sur l'espace numérique de travail).

CHAPITRE 1 : ANALYSE DIMENSIONNELLE

La plupart des grandeurs utilisées en physique ont une qualité essentielle qui la distingue des autres, cette qualité essentielle est appelée **<u>sa dimension physique</u>** et définie sa nature physique.

La masse des objets de l'univers physique n'est pas de la même nature que les distances ou les durées ou que la charge ou la température ... La dimension d'une grandeur G se note [G].
Toute grandeur peut s'exprimer en fonction des 7 grandeurs de base :

GRANDEUR	DIMENSION	UNITE SI
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	kilogramme (kg)
Durée	T	seconde (s)
Intensité du courant électrique	I	ampère (A)
Température	Θ	kelvin (K)
Quantité de matière	N	mole (mol)
Intensité lumineuse	J	candela (cd)

<u>Exemple</u> : si G est une masse, alors [G] = M, elle a la dimension d'une masse; on dit aussi qu'elle est homogène à une masse.

La relation $[G] = L^n M^m T^p$ correspond à <u>l'équation aux dimensions</u> de la grandeur G.

Une équation est dite homogène si ses deux membres ont la même dimension.
Lorsque dans l'écriture de l'équation aux dimensions d'une grandeur G, on obtient [G] =1, la grandeur est dite sans dimension physique.

Par ailleurs à chaque dimension physique ont été **<u>choisis de manière conventionnelle une unité internationale et un étalon</u>**. (voir le BIPM). Dans le cas d'un angle, on obtient 1 mais il y a quand même une unité, le radian. Une grandeur physique peut donc avoir une unité sans dimension physique.

Exercice 1 : Planète Terre

La terre a la forme approximative d'une sphère de rayon 6,37 10^6 m. Calculer :

a) Sa circonférence en kilomètres
b) Sa surface en kilomètre carrés
c) Son volume en kilomètres cubes

Exercice 2 : Dimensions de grandeurs mécaniques

Pour chacune des grandeurs physiques suivantes, dire si elle est scalaire ou vectorielle, donner sa dimension (en L pour la longueur, M pour la masse et T pour le temps), dire en quelle unité elle est mesurée dans le système SI :

a - une vitesse ; **b** - une accélération ; **c** - une force ; **d** - une énergie cinétique ;
e - une énergie potentielle ; **f** - le travail d'une force ; **g** - une puissance mécanique.

Exercice 3 : Homogénéité de formules

Sur des copies, on a relevé les résultats littéraux ci-dessous.
Dire, pour chacun d'eux, si l'analyse dimensionnelle permet d'affirmer que :
A - le résultat est juste, B - le résultat est susceptible d'être juste, C - le résultat est faux.

1) Hauteur h maximale atteinte par un projectile de masse m lancé verticalement à vitesse v, g étant le champ de pesanteur : $h = \frac{m\ v^2}{g}$ $h = \frac{v^2}{2\ g}$ $h = \frac{v^2}{g}$

2) Angle θ par rapport à la verticale, dont s'écarte un pendule conique de longueur L, de masse m, tournant à la vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical, g étant le champ de pesanteur :

$$\cos\theta = \frac{m\ g}{\omega^2\ L} \quad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2\ L} \quad \sin\theta = \frac{g}{\omega^2\ L}$$

4) portée horizontale x du tir d'un projectile de masse m dont la vitesse initiale v fait un angle α avec l'horizontale :

$$x = \frac{m\ v^2\ \sin(2\alpha)}{2\ g} \qquad x = \frac{v^2\ \sin(2\alpha)}{2\ g} \qquad x = \frac{v^2\ \tan(2\alpha)}{2\ g}.$$

CHAPITRE 2 : CINEMATIQUE EN COORDONNEES CARTESIENNES

Le cadre ci-dessous vous aidera à faire le résumé de cours (voir *conseils méthodologiques*).

Repère cartésien :

Vecteur position :

Vecteur vitesse :

- vitesse moyenne :

- vitesse instantanée :

Vecteur accélération :

- accélération moyenne :

- accélération instantanée :

Rappel : définition de la dérivée d'une fonction (pour davantage de rappels et d'entrainements mathématiques, voir ANNEXE 2 – ENTRAINEMENTS MATHEMATIQUES).

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

Exercice 1 : Position, vitesse, accélération, à partir du vecteur position

La position d'un point matériel est donnée par : $\vec{r} = 3t\vec{\imath} - 4t^2\vec{\jmath}$, où t est exprimé en secondes et les coefficients ont les unités propres à rendre r en mètre.

1) Quel est le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$?
2) Quelles sont les composantes de la vitesse à l'instant t = 2s ?
3) Quelle est la norme de la vitesse à cet instant ainsi que la direction du vecteur vitesse ?
4) Montrer que l'accélération est constante. Préciser s'il s'agit du vecteur ou de sa norme uniquement.

Mouvement uniforme :

Mouvement accéléré :

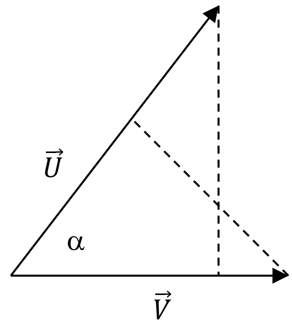
Mouvement retardé :

Mouvement uniformément accéléré (resp. retardé) :

Rappel : produit scalaire (pour davantage de rappels et d'entrainements mathématiques, voir ANNEXE 2 – ENTRAINEMENTS MATHEMATIQUES).

Soit $\vec{U} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$

Alors $\vec{U} \cdot \vec{V} = x_1x_2 + y_1y_2 = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\cos(\alpha)$



Exercice 2 : Mouvement rectiligne accéléré, retardé

Un véhicule se déplace sur une route rectiligne assimilée à l'axe x'Ox d'un repère cartésien. Son équation horaire est la suivante : $x(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t$, avec $t \geq 0$.

1) Déterminer la composante de la vitesse sur l'axe x'Ox. En déduire son vecteur vitesse $\vec{v}(t)$

2) Déterminer la composante de l'accélération sur l'axe x'Ox. Donner son vecteur accélération $\vec{a}(t)$.

3) Déterminer les instants t tels que v(t) = 0, a(t) = 0. Construire le tableau des variations de la fonction v(t). Tracer la fonction $v_x(t)$. Tracer sur le même graphique le module de la vitesse du véhicule.

4) Déduire de l'étude précédente les périodes où le véhicule est accéléré, retardé.

Exercice 3 : Trains en ligne droite

Deux trains circulent l'un vers l'autre sur une même ligne de rails. L'un des trains (A) avancent à 72 km/h, l'autre (B) à 144 km/h. Quand ils ne sont plus qu'à une distance de 950 m l'un de l'autre, chaque conducteur aperçoit l'autre train et freine. Le freinage produit une décélération de 1,0 $m.s^{-2}$ pour chaque train.

1) Faire un schéma. On prendra comme origine des distances la position du train A lorsque le conducteur commence à freiner.

2) Déterminer, pour chaque train, sa vitesse au cours du temps.

3) Déterminer l'instant t_1 auquel le train A s'arrête et l'instant t_2 auquel le train B s'arrête. Applications numériques.

4) Déterminer la position x_1 du train A quand il s'arrête, puis celle x_2 du train B quand il s'arrête. Applications numériques.

5) Est ce qu'une collision se produit entre les deux trains ?

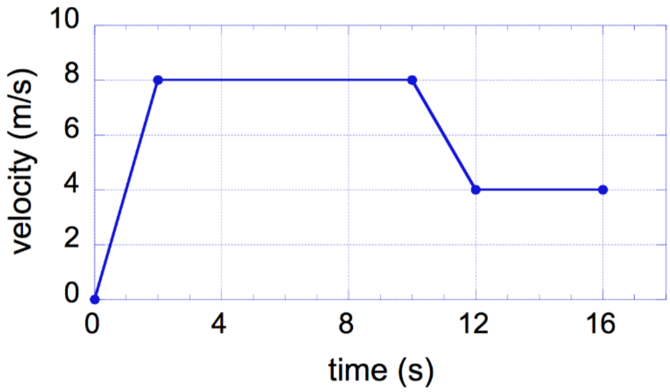
6) Représenter graphiquement la position x(t) pour chaque train.

Exercice 4 : Running

1) How far does the runner whose velocity-time graph is given below travel in 16 s?

Advice: Calculate the travelled distance for each phase of the motion.

2) Determine the acceleration for each phase of the motion and graph it.

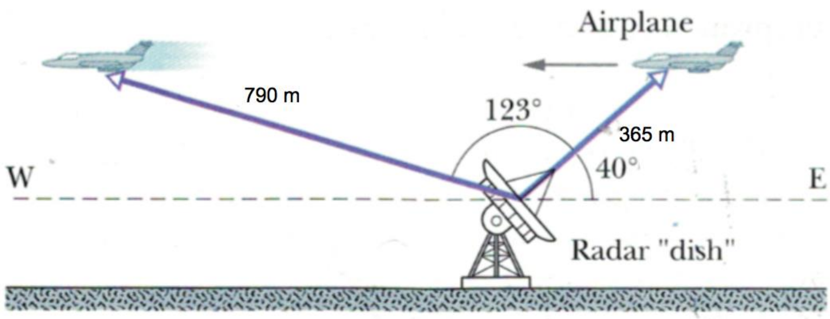


Exercice 5 : Radar detection (Facultatif)

A radar station detects an airplane approaching directly from the east. At first observation, the distance to the plane is 365 m at 40° above the horizon. The plane is tracked for another 123° in the vertical east-west plane, the distance is then 790 m, as illustrated in the figure below.

1) Draw a sketch of the plane trajectory.

2) Find the displacement of the plane during the period of observation.



CHAPITRE 3 : PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Quelques exemples de forces agissant sur un système :

- **forces à distance**
  - **forces gravitationnelles**
  - **forces électromagnétiques**

- **forces de contact**
  - **tension d'un fil inextensible**
  - **tension d'un ressort déformé**
  - **réaction d'un support, avec ou sans frottement solide**

LOIS de NEWTON

1. Théorème de la quantité de mouvement pour un point matériel

Dans un <u>référentiel galiléen</u>, la résultante des forces appliquées à un point matériel est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement :

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t}$$

Si la masse est constante en fonction du temps, on a donc, par rapport à un référentiel galiléen:

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\,\vec{v}}{d\,t}}$$

Principe Fondamental de la Dynamique (ou **2ème loi de Newton**)

2. Principe d'inertie (ou 1ère loi de Newton)

Il peut être vu comme une conséquence du PFD.
Il existe des référentiels, dits inertiels, dans lesquels un point matériel, libre de toute interaction, est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

☞ Conséquence 2 : loi de conservation de la quantité de mouvement.

La quantité de mouvement d'un système isolé ou pseudo-isolé est constante dans un référentiel galiléen.
(Voir Exercice 2)

3. Principe des actions réciproques (ou 3ème loi de Newton)

Soit un système (A + B) isolé dans un référentiel galiléen.
La force exercée par A sur B est opposée à la force exercée par B sur A.

Méthode d'utilisation du principe fondamental de la dynamique pour trouver une trajectoire

- définition du système ponctuel étudié
- définition du référentiel, qu'on considérera comme galiléen
- bilan des forces exercées sur le système (et pour chacune : point d'application, direction, sens, norme)
- schéma
- écriture du principe
- choix d'un repère cartésien (Ox) ou (Ox, Oy) ou (Ox, Oy, Oz) et vecteur(s) de base
- projections sur les axes orientés de chaque force et de l'accélération
- intégration sur chaque axe pour trouver chacune des composantes de la vitesse
- examen des conditions initiales sur la vitesse pour trouver les constantes d'intégration
- intégration sur chaque axe pour trouver chacune des composantes du vecteur position
- examen des conditions initiales sur la position pour trouver les constantes d'intégration
- éventuellement, élimination du temps pour trouver une équation cartésienne de la trajectoire…

Exercice 1 : Trajectoire d'un cascadeur balistique, à partir de l'accélération

Un cascadeur doit courir sur un toit horizontal, puis en sauter pour se rétablir sur le toit d'un autre bâtiment plus bas de 4,5 m et distant de 6,2 m.
Avant sa première tentative, il vous demande avec sagesse si cela est faisable.

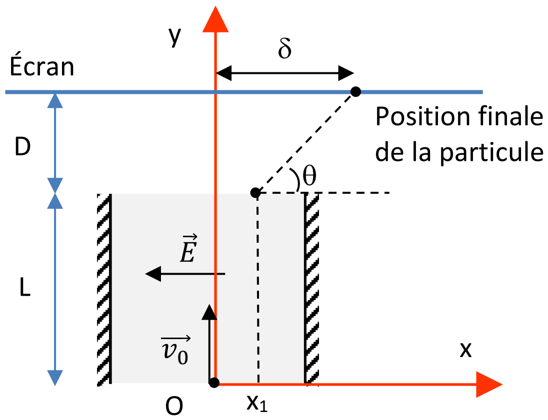
☞ **Peut-il tenter l'aventure si sa vitesse est 16,2 km/h juste avant le saut ?**

Remarque : on négligera la résistance de l'air ; on considérera que la vitesse du cascadeur est horizontale.

Exercice 2 : Mouvement d'une particule chargée dans un champ uniforme

Un électron de masse m est produit par un dispositif lui donnant une vitesse initiale v_0=4,38 × 10^5 m.s^{-1} selon l'axe Oy (voir Figure ci-contre). Aussitôt produit, l'électron se trouve, à t = 0, entre deux armatures entre lesquelles est créé un champ électrique constant et uniforme $\vec{E}$ sur une distance L.
Dans ce champ, l'électron est soumis à la force : $\vec{F} = q\vec{E}$, où $\vec{E}$ est le vecteur champ électrique et q la charge de l'électron.

Au-delà des armatures, l'électron n'est plus soumis au champ électrique et atteint un écran placé à une distance D des armatures.



Données : m = 9,1 × 10^{-31} kg ; q = – 1,6 × 10^{-19} C, $\|\vec{E}\|$ = 3000 V.m^{-1}, L =2 cm, D = 10 cm.
On rappelle la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide : c_0 = 299 792 458 m.s^{-1}.

1) Effectuer le bilan des forces exercées sur la particule. Calculer les ordres de grandeur de l'intensité des forces. Qu'en déduisez-vous ?
2) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule lorsqu'elle se trouve entre les armatures.
3) Déterminer l'expression du vecteur position dans la base xOy.
Quel type de trajectoire adopte l'électron ?
4) Quel est le temps t_1 au bout duquel l'électron sort des armatures ? Exprimer la position (x_1,y_1) de la particule à ce temps, en fonction de L, m, q, v_0 et E. Qualifier le mouvement pour t > t_1.
5) En utilisant une approche géométrique, déterminer l'angle θ que fait la trajectoire pour t > t1 avec l'axe des abscisses et en déduire la déviation δ par rapport à O lorsque la particule touche l'écran (voir figure).
Faire l'application numérique.

Questions facultatives :
6) Le cadre de la mécanique classique peut-il être utilisé pour décrire le mouvement de cette particule ?

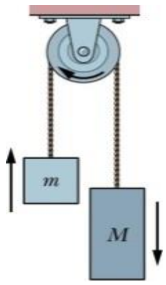
7) On peut écrire le champ E=U/a, où a est la distance entre les deux armatures et U la tension entre les armatures. A quoi peut servir le dispositif utilisé dans cet exercice ?

Exercice 3 : Tension d'une corde et accélération d'une palette

Une palette de masse M = 25 kg est attachée à l'extrémité libre d'une corde verticale, non extensible et de masse négligeable devant M (dont l'autre bout est fixé sur un enrouleur). On prend g = 10 $m.s^{-2}$. On néglige les frottements avec l'air.

1) Quelles sont les caractéristiques de la force de tension exercée par un fil tendu inextensible et de masse négligeable ?
Que se passe-t-il en termes de vitesse et d'accélération des points du fil ?
2) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la palette.
3) Faire un schéma avec les forces agissant sur la palette.
4) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (ou seconde loi de Newton), puis la projection suivant un axe vertical Oz orienté positivement vers le haut.
5) Déduire la valeur algébrique de l'accélération de cette palette si la tension de la corde T, imposée par l'enrouleur, vaut :
a) 0 N   b) 225 N   c) 250 N   d) 350 N
6) Préciser, dans chaque cas, le sens du mouvement si on admet que la vitesse initiale est nulle.

Exercice 4 : Descente sur une corde



Un homme de masse M = 80 kg descend d'une hauteur H = 10 m en s'agrippant à une corde qui coulisse sur une poulie et à l'extrémité de laquelle est pendu un sac de ciment de masse m = 60 kg. La corde est inextensible et sans masse ; la poulie est sans masse et sans friction. Dans ces conditions, l'intensité de la tension de la corde est la même en tout point de la corde. Soient a la norme de l'accélération acquise par l'homme et le sac, et T l'intensité de la tension de la corde.

1) Faire une figure représentant les forces exercées sur l'homme.
2) Faire une figure représentant les forces exercées sur le sac.
3) Déterminer l'expression de l'accélération, en fonction des masses M et m et l'accélération de la pesanteur g. Calculer la valeur numérique de a.

CHAPITRE 4 : LES FORCES DE FROTTEMENTS

1. FORCES DE FROTTEMENTS ENTRE SOLIDES

(Etude expérimentale : voir les TP.)

Décomposition de la force de « réaction »

La force de contact entre un objet et un solide en contact avec lui, souvent appelée réaction et notée $\vec{R}$, se décompose en

- une réaction normale au support $\overrightarrow{R_N}$ et
- une réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$

telle que $$\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$$.

La force de frottement est la réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$.

Loi de Coulomb en statique

Les forces de frottements statiques interviennent lorsque les surfaces sont immobiles l'une par rapport à l'autre. Alors, la loi des frottements s'exprime par :

$\|\overrightarrow{R_T}\| \leq \mu_S \|\overrightarrow{R_N}\|$, où μ_S est le coefficient de frottement statique entre les surfaces en présence.

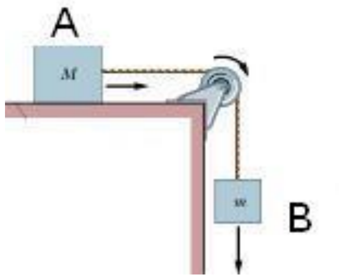
Loi de Coulomb en dynamique

Les forces de frottements dynamiques interviennent lorsqu'il y a glissement d'une surface par rapport à l'autre.

Alors, la loi des frottements devient : $\|\overrightarrow{R_T}\| = \mu_D \|\overrightarrow{R_N}\|$,

où μ_D est le coefficient de frottement dynamique entre les surfaces en présence.

Exercice 1 : Frottements entre une caisse A et la table



Une caisse A est posée sur une table.
Une masse B est reliée à la caisse par l'intermédiaire d'une corde qui passe dans une poulie.
On suppose que la corde est non extensible, de masse négligeable et qu'elle coulisse sans frottement sur la poulie. La liaison entre la table et la caisse est une liaison avec frottements, de coefficient de frottement statique μ_s et de coefficient de frottement dynamique μ_d.

1) On pose une masse C sur la caisse A.
Déterminer la masse minimale m_C de C qui permet l'équilibre statique.

2) On enlève la masse C. On néglige la résistance de l'air.
Déterminer les expressions de l'accélération de *A* et de la tension de la corde.
Applications numériques : m_A = 10 kg, m_B = 5 kg, μ_s = 0,3, μ_d = 0,1.

Exercice 2 : Frottements solides sur un plan incliné

On étudie le mouvement d'un objet de masse m = 10 kg, considéré comme ponctuel, sur un plan incliné.
Les coefficients de frottement statique et dynamique entre l'objet et le plan incliné valent respectivement :
μ_s = 0,30 et μ_d = 0,25.

1) Le plan est incliné progressivement d'un angle α par rapport à l'horizontale.
Déterminer l'expression du plus petit angle α pour lequel l'objet commence à glisser. Calculer sa valeur numérique.

2) L'angle α vaut 37°. Déterminer l'expression de la plus petite force parallèle à la ligne de plus grande pente (c'est-à-dire inclinée d'un angle de 37° avec l'horizontale) qui empêche l'objet de glisser. Calculer sa valeur numérique.

3) L'angle α vaut toujours 37°. A l'instant initial, l'objet se déplace sur le plan incliné, vers le haut, à la vitesse v_O.
Déterminer l'expression de la force parallèle à la ligne de plus grande pente qui permet à l'objet de continuer à gravir la pente à vitesse constante. Calculer sa valeur numérique.

4) L'angle α vaut toujours 37°. Une force de poussée, parallèle à la ligne de plus grande pente, vers le haut, d'intensité 94 N, est exercée sur l'objet.
Déterminer l'expression de l'accélération de l'objet. Calculer sa valeur numérique.
S'il est initialement au repos, quelle distance aura-t-il parcourue au bout de 2s ?

2. FORCES DE FROTTEMENTS FLUIDES (FACULTATIF)

- Forces toujours opposées au vecteur-vitesse : $\vec{F} = - f(v)\,\vec{v}$

f(v) toujours positive mais d'expression compliquée.

- « basses » vitesses (moins de 5 m/s dans l'air) : loi de Stokes $\vec{F} = -k\,\eta\,\vec{v}$ où k dépend de la géométrie de l'objet et η est la viscosité du fluide
- « hautes » vitesses (5 à 20 m/s) : $\vec{F} = -\lambda\, v\,\vec{v}$ où λ dépend des caractéristiques géométriques et de la forme de l'objet. La viscosité n'intervient que pour fixer la limite de validité.

Exercice 3 : Principe d'un viscosimètre à bille (Facultatif)

Une bille sphérique de masse volumique ρ, de rayon r et de masse m, descend par gravité, le long d'une verticale, au sein d'un liquide de masse volumique ρ_l (telle que $\rho_l < \rho$). On veut montrer dans la suite que des mesures de masse, longueurs et durées, peuvent conduire à une détermination de la viscosité du liquide.
En plus de son poids, la bille subit la force d'Archimède $\vec{f}\,' = -\alpha\,\vec{g}$.

1) Etablir la relation entre ρ_l, r et α.

Le liquide exerce également sur la bille une force de frottement $\vec{f}$ donnée, à faible vitesse, avec une bonne approximation, par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$, où α est une constante positive, η est la viscosité du liquide, $\vec{g}$ est le champ de pesanteur, de norme g et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la bille par rapport au référentiel terrestre (considéré galiléen) dans lequel le récipient est au repos.

On définit un axe Ox vertical, **orienté vers le bas**, avec l'origine O prise au niveau de la surface libre du liquide. On considère la bille comme un point matériel.

2) Ecrire la <u>relation fondamentale de la dynamique</u> à un instant t quelconque de la descente, où chaque vecteur est exprimé en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}_x$; les facteurs dépendant du temps sont à exprimer en fonction de la vitesse v seulement.
En déduire une <u>équation liant v et dv / dt</u>. Elle est appelée <u>équation différentielle</u> (de variables v et t).

3) On pose $\tau = m / (6\,\pi\,r\,\eta)$ et $K = (m - \alpha)\,g / m$.
On cherche une solution de l'équation sous la forme : $v = A\,e^{-\frac{t}{\tau}} + B$.
Montrer que cette forme convient.
Déterminer A et B, sachant que la vitesse initiale est nulle.

4) Proposer une méthode expérimentale simple qui permet de retrouver la viscosité d'un liquide.

5) A $t_1 = 0$ s, la bille est lâchée sans vitesse initiale à la surface du liquide.
Déterminer la distance parcourue entre les instants $t_1 = 0$ s et $t_2 = T$, en fonction de K, τ, et T.
On exprimera ensuite le résultat en fonction de η , T , m , r , α et g.

3. TP - FROTTEMENTS SOLIDES

Les objectifs de ces TP sont :

- la mise en évidence des facteurs influençant les frottements entre solides
- la comparaison entre les frottements en statique et en dynamique
- la mesure de coefficients de frottement en statique et en dynamique.

Travail de préparation des TP

Avant la séance, il est indispensable de faire le travail de préparation suivant :
- lecture des 6 pages qui suivent, de façon à comprendre les dispositifs expérimentaux plus rapidement pendant la séance, mais aussi à revoir les savoir-faire expérimentaux et mathématiques utiles ;
- préparation, en s'aidant du cours (page 20), des cadres « modélisation du problème ».

Organisation de la séance

Ces TP font partie du cours de dynamique du point : vous devez prendre des notes afin de pouvoir les relire en même temps que vos cours-TD ; une question lors des devoirs surveillés portera sur les travaux pratiques.

La séance dure deux heures, réparties environ ainsi :

- 30 minutes : partie I.

Le groupe est ensuite divisé en deux et vous changerez de poste avec vos voisins au bout de 30 minutes.

- 30 minutes : partie II ou parties III et IV
- 30 minutes : échange ; parties III et IV ou partie II

30 minutes sont consacrées à la rédaction de vos notes.

Vous devez manipuler le matériel avec soin : en cas de doute, ne pas hésiter à demander l'aide de l'enseignant ou du technicien de laboratoire.
Précautions : essuyer soigneusement les surfaces de glissement avant les expériences.

I - Etude de frottements sur une plaque horizontale

Dans cette partie, on étudie le frottement entre une plaque plane horizontale en PVC et un pavé en bois (ou face en bois d'un pavé multimatériaux) muni d'un crochet.
Des dynamomètres de traction de portées différentes (1 N, 2 N, 3 N, 5 N) sont à votre disposition.

I.1 – Etude de la limite de glissement

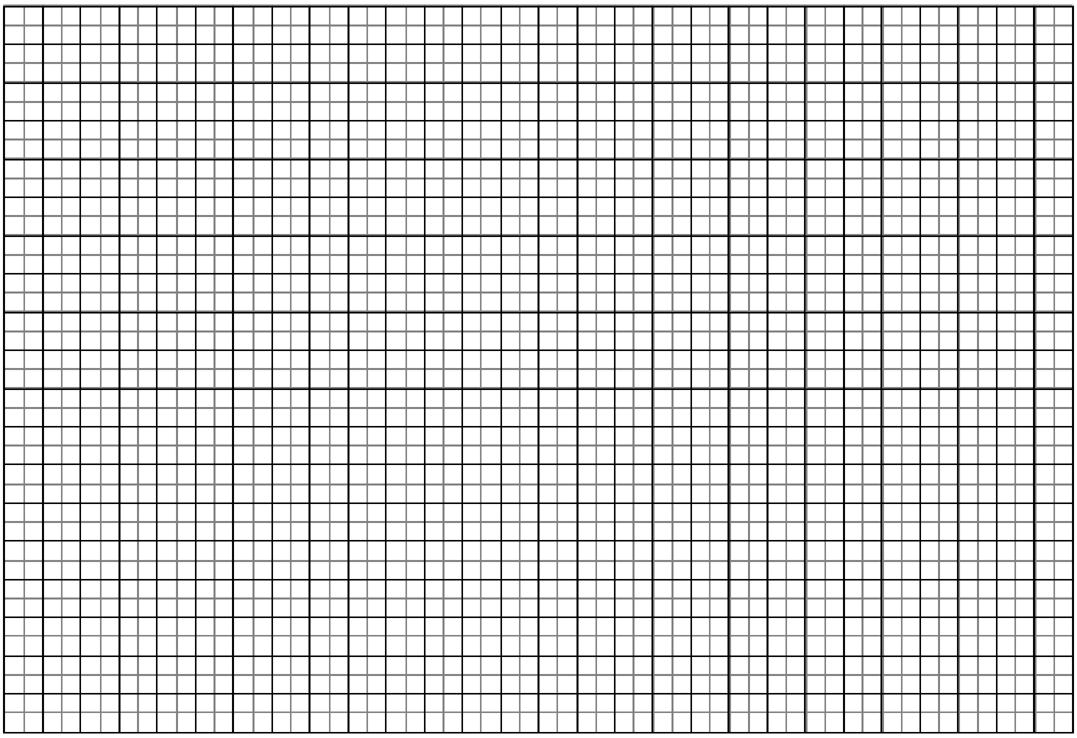
On mesure, avec un dynamomètre, la plus petite force à exercer pour provoquer le glissement du pavé en bois sur la plaque en PVC horizontale.

- **Mesurer la force F** qu'il faut exercer sur le petit pavé de bois pour provoquer son glissement, lorsque le pavé est à vide (masse m_o à mesurer au g près avec la balance sur la paillasse de l'enseignant), puis surchargé à l'aide de masses marquées de m = 100g à 400g (par pas de 100g).
- Choisir, pour chaque mesure, le dynamomètre le plus approprié pour obtenir une mesure précise, sans risque d'endommager le dynamomètre.
- Augmenter peu à peu la force exercée (avec de très faibles variations).
- Bien relever la valeur F de la force juste au moment où le solide se met en mouvement.

Regrouper les résultats dans le tableau ci-dessous : m_0 = ……………..

Surcharge m (en g)	0	100	200	300	400
m_0 + m (en g)					
Dynamomètre utilisé					
Force F (en N)					

Tracer ci-dessous des axes orientés pour reporter ($m + m_0$) en abscisse et F en ordonnée.
Choisir une échelle pour F et pour ($m + m_0$).
Reporter les points et tracer F en fonction de ($m + m_o$).

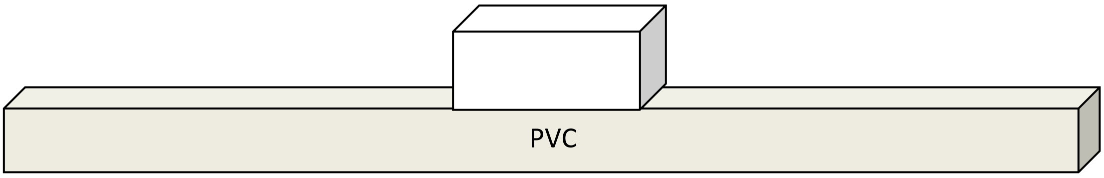


En tenant compte des imprécisions de mesure, peut-on considérer que les variations sont sensiblement linéaires ?

Déterminer **<u>graphiquement</u>** le coefficient directeur ‘a’ de la droite passant le plus près du maximum de points. Utiliser les unités du S.I..

Modélisation du problème :

Représenter les forces qui s’exercent sur le pavé à l’équilibre :



La force de contact entre un objet et un solide en contact avec lui, appelée réaction et notée $\vec{R}$, se décompose en une réaction normale au support $\overrightarrow{R_N}$ et une réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$. telles que $\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$. La force de frottement est la réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$.
En statique, c’est-à-dire lorsque les surfaces sont immobiles l’une par rapport à l’autre, la loi des frottements s’exprime par : $\left\|\overrightarrow{R_T}\right\| \leq \mu_S \left\|\overrightarrow{R_N}\right\|$, où μ_s est le coefficient de frottement statique entre les surfaces en présence.

<u>En écrivant que le pavé est en équilibre</u>, montrer que, tant qu’**il n’y a pas glissement**, on a : $\mathbf{F \leq \mu_s\ (m + m_o)\ g}$.
Déduire la valeur du coefficient μ_s pour le contact bois-PVC **<u>à partir du coefficient directeur a trouvé précédemment</u>**, en faisant attention aux unités pour le calcul (unités SI pour F, m, m_0 et g).

μ_s = ...

I.2 – Comparaison entre les frottements statiques et les frottements dynamiques

On veut comparer la force F obtenue à la limite du glissement (condition des expériences précédentes) à la force qu'il faut exercer pour permettre au même pavé (surchargé de la même façon) de glisser sur le support à vitesse constante.
Faire l'expérience pour un pavé surchargé avec une masse de 100 g.

	Forces (en N) exercées sur le pavé
A la limite du glissement	
Permettant de glisser à vitesse constante	

Comparer les forces :

Modélisation du problème :
Le bilan des forces reste le même que précédemment.
Comme la vitesse est constante, l'accélération est nulle : la somme des forces est toujours nulle.
Pour les forces de frottements dynamiques, présentes lorsqu'il y a glissement d'une surface par rapport à l'autre, la loi des frottements devient : $\left\| \vec{R}_T \right\| = \mu_d \left\| \vec{R}_N \right\|$, où μ_d est le coefficient de frottement dynamique entre les surfaces en présence.
Conclure en comparant les valeurs des coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ_d, pour le contact bois-PVC.

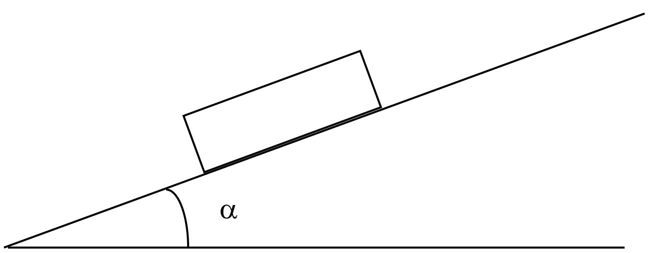
II - Etude de frottements statiques sur un plan incliné

II.1 – Mesure d'angles d'adhérence

On dispose du matériel suivant :
- un plan incliné fixé à une potence par une noix, et dont la surface de glissement est en acier,
- un chariot dont la surface est en plastique,
- des masses marquées de 100g et 200g,
- 1 fil à plomb et un rapporteur pour mesurer l'angle d'inclinaison du plan.

- Tenir le plan incliné à la main et l'amener à l'horizontale en levant l'extrémité libre. Placer le chariot sur la surface de glissement en acier.
- Augmenter progressivement l'inclinaison du plan à partir d'un angle de 0° ; constater que le chariot commence à glisser à partir d'un angle limite : on l'appelle **l'angle d'adhérence**.
- Comparer les angles d'adhérence obtenus pour le chariot vide et le chariot lesté avec une masse de 300g.
  - Angle d'adhérence pour le chariot vide :
  - Angle d'adhérence pour le chariot lesté :

Modélisation du problème :
Représenter les forces qui s'exercent sur le chariot :



En écrivant que le chariot est en équilibre, **montrer que**, tant qu'**il n'y a pas de glissement**, on a :

$$\sin\alpha \leq \mu_s \cos\alpha \quad \text{soit} \quad \tan\alpha \leq \mu_s \cdot$$

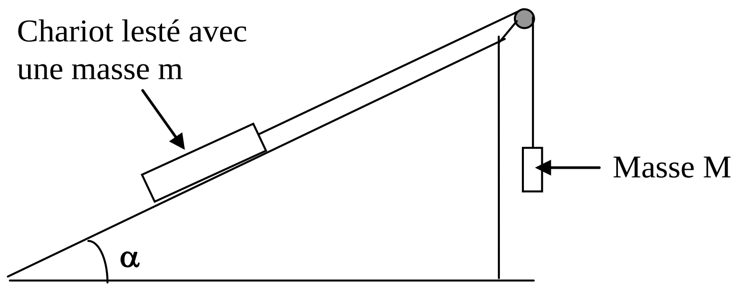
Conclure quant à l'influence de la masse sur le coefficient de frottement statique.
Calculer le coefficient de frottement statique pour le contact acier-plastique.

μ_s = ………

II.2 - Mesure des forces, à l'aide de masses marquées

Dans cette partie, on utilise le plan précédent toujours muni de la surface de glissement en acier, incliné d'un angle supérieur à l'angle d'adhérence α_0.
Le dispositif est préalablement réglé par nos techniciens, ne pas y toucher.

- Relever la valeur de l'angle α : **α =**……………
- Le chariot, lesté avec une masse m, est équilibré à l'aide d'une masse M (voir schéma ci-dessous).



- On mesure, pour une valeur choisie de la masse M, la plus petite force à exercer, en jouant sur la valeur du lest m, pour provoquer le glissement vers le bas du chariot lesté sur le plan incliné.
- Pour une masse M variant entre 50 g et 250 g, relever la valeur de la masse m qu'il faut mettre dans le chariot pour obtenir le début du glissement vers le bas. On augmente peu à peu la masse m par pas de 50g jusqu'à ce que le chariot glisse vers le bas du plan incliné.
- Mesurer la masse m_0 du chariot vide, au g près : m_0 = ……….

M (en g)	50	100	150	200	250
m (en g)					
m + m_0 (en g)					

Tracer, page suivante, le graphe représentant M en fonction de (m + m_0). On pourra, par exemple, prendre les échelles suivantes : 2 cm pour 50g pour M et 1 cm pour 100g pour m+m_0.
Déterminer <u>graphiquement</u> le coefficient directeur de la portion de droite passant le plus près du plus grand nombre de points sur le graphe en page 26.

Modélisation du problème :
Faire le bilan des forces agissant
- d'une part, sur le chariot, - d'autre part, sur la masse M.

En considérant le fil et la poulie comme parfaits, en déduire que la condition d'équilibre peut s'écrire :

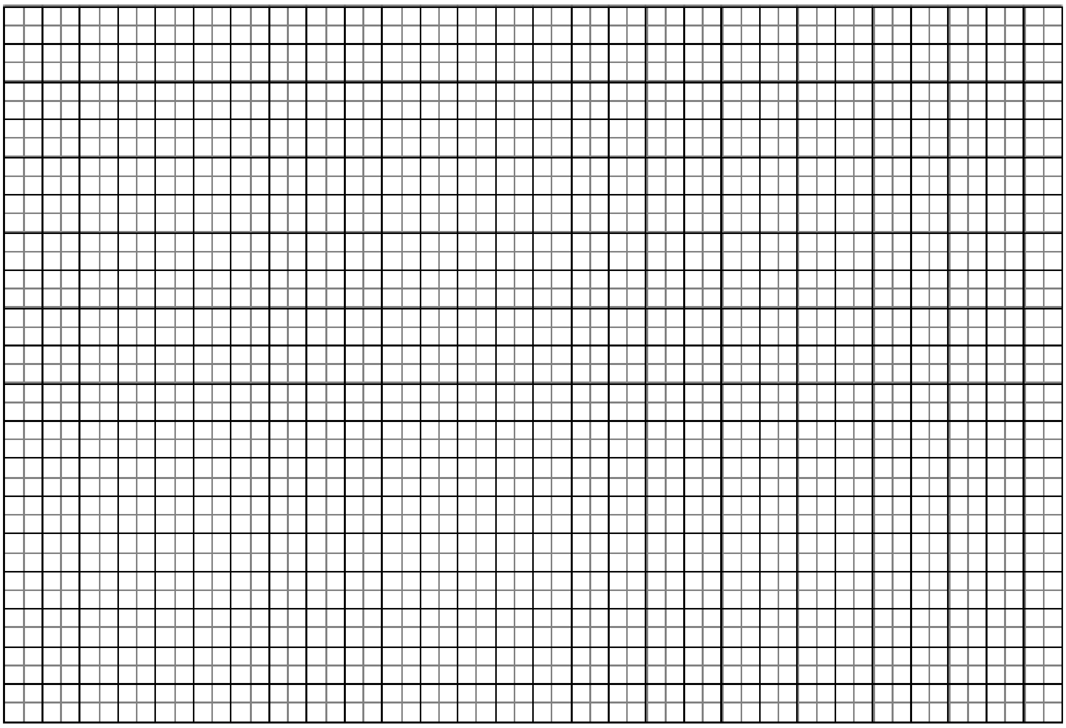
$$R_N = (m + m_0)\, g \cos\alpha \quad \text{et} \quad R_T = (m + m_0)\, g \sin\alpha - M\, g\,.$$

Montrer qu'il n'y a pas de glissement tant que $(m + m_0)(\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha) \leq M$.

A partir du coefficient directeur trouvé précédemment, calculer le coefficient de frottement statique μ_s, pour le contact acier-plastique.

μ_s = …………

Comparer au résultat du II.1.



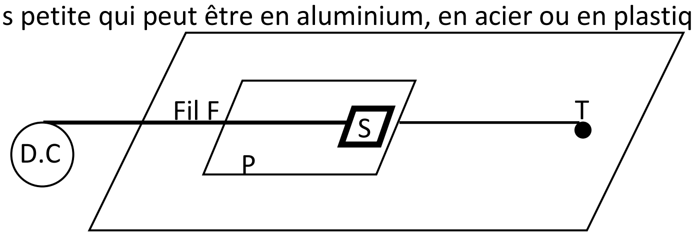
III - Etude de frottements en dynamique

Sur une surface plane horizontale, sont fixés, d'un côté, un dynamomètre à cadran (D.C.) et, de l'autre, un **treuil** électrique (**T**).

Le treuil, tournant à vitesse constante très lente (environ 5 tr/min), entraîne une plaque P sur laquelle est posé un solide S, accroché au fil F du dynamomètre.

La **plaque P** est en feutre.

Le **solide S** est une plaque plus petite qui peut être en aluminium, en acier ou en plastique.



Pour obtenir des résultats assez précis avec le **dynamomètre à cadran D.C**. on leste chaque solide S selon le matériau (en posant sur le solide une ou des masses):

- aluminium : lest de 300g,
- acier : lest de 200 g,
- plastique : lest de 400 g. (Recopier les valeurs de lests donnés lors de la séance si ceux-ci sont différents).

- Bien essuyer les surfaces de glissement de S, et la plaque de feutre (au chiffon sec).
- Placer la plaque P le plus loin possible du treuil et accrocher le fil du treuil.
- Placer le solide S sur la plaque de feutre P, du côté le plus proche du treuil. Lester S.
- S'assurer que le fil F passe bien sur la poulie du dynamomètre **APRES l'avoir accroché au solide S** et qu'il est bien parallèle au rail.
- Mettre en marche le moteur.

Le solide S est d'abord entraîné avec la plaque (équilibre statique de S par rapport à la plaque P), la force exercée par le fil du dynamomètre augmentant peu à peu. Puis, il commence à glisser. Ensuite, il glisse à vitesse constante sur P.

Pour chaque solide, noter la valeur de la force F correspondant au glissement uniforme.

- Entre 2 essais, retirer le lest et détacher S.
- Approcher P du treuil et détacher le fil du treuil, bien dérouler le fil, et repositionner P loin du treuil.
- Peser chaque plaque (au g près), et remplir le tableau ci-dessous.

	Matériaux constituant le solide S		
	Aluminium lesté avec …. g	Plastique lesté avec … g	Acier lesté avec … g
Force F (en N) (glissement uniforme)			
Masse totale (solide + lest) M (en g)			

Modélisation du problème :
Recenser les forces qui s'appliquent au solide S.
Comme le mouvement de S est rectiligne uniforme, montrer que la valeur de tension mesurée par le dynamomètre à cadran est égale à celle de la force de frottement entre la plaque P et le solide S.
Comme il s'agit d'une étude en dynamique, en déduire que le coefficient de frottement dynamique vaut :

$$\mu_d = F / (M g)$$

Pour chaque matériau, calculer le coefficient de frottement dynamique μ_d.
Aluminium : plastique : acier :

Comparer les résultats.
Commenter :
- quel est le matériau qui limite le plus les frottements ?
- quel est celui qui favorise l'adhérence ?

IV – Influence des matériaux sur le frottement statique

On utilise maintenant le gros pavé dont les faces sont habillées de matériaux divers : bois, plastique, cuir, caoutchouc. On place ici une surcharge de 200g sur le pavé.
- Essuyer les faces du pavé avant les mesures.

Comme dans le I, mesurer au dynamomètre les valeurs de la force F qu'il faut exercer pour provoquer le glissement du pavé, suivant la face du pavé en contact avec la surface de glissement en PVC.

	Matériaux			
	Bois	Plastique (face blanche)	Cuir (face noire)	Caoutchouc (face marron)
Force (en N)				

Quel semble être le matériau qui limite davantage les frottements ?
Celui qui favorise de bonnes adhérences ?

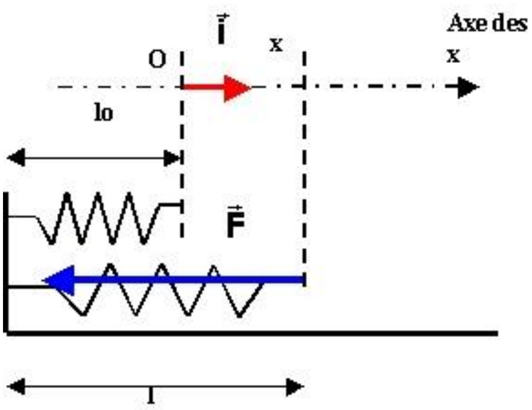
Soit un ressort de longueur à vide lo.
On modifie sa longueur en exerçant une force de tension à son extrémité libre, en le comprimant ou l'étirant.
La nouvelle longueur du ressort est notée l.
L'allongement a du ressort est alors: a = l - lo.
Quand on comprime ou étire un ressort, celui-ci exerce alors une force de rappel proportionnelle à son allongement.
Le coefficient de proportionnalité est appelé raideur k du ressort. En orientant l'axe dans le sens de l'élongation du ressort, l'expression de la force de rappel est donnée par la loi de Hooke :

$\vec{F} = -k(l - lo).\vec{i}$

F : force de rappel en Newton (N) ; l longueur et lo longueur au repos du ressort en mètre (m) $\vec{i}$: vecteur unitaire orienté dans le sens de l'élongation
k : raideur du ressort ($N.m^{-1}$)
Si on choisit comme origine des axes, l'extrémité libre du ressort au repos (longueur lo), alors : l - lo = x .
L'allongement a est égal à l'abscisse x de l'extrémité libre du ressort.

$$\vec{F} = -k(l - lo).\vec{i} = -k.x.\vec{i}$$

Ressort étiré



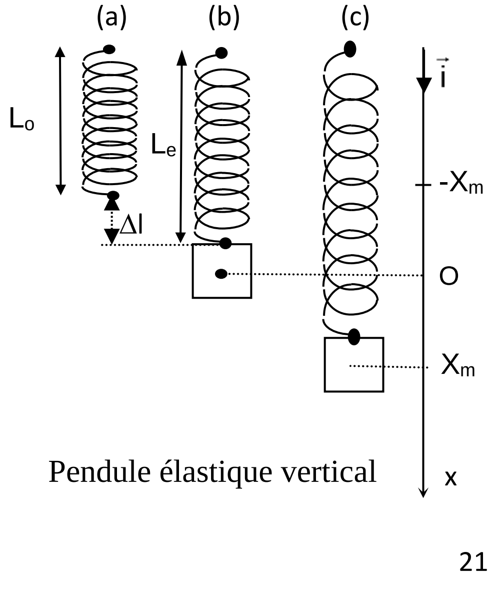
Exercice 1 : Constante de raideur d'un ressort vertical au repos

Au cours d'une séance de travaux pratiques, on souhaite étudier les caractéristiques d'un pendule élastique.
Pour cela, on dispose d'un pendule élastique vertical constitué d'un ressort, de masse négligeable et de constante de raideur k, auquel on accroche un solide de masse m.
Le ressort s'allonge alors d'une longueur ΔL, une position d'équilibre L_{eq} est atteinte.
Le schéma ci-dessous représente le dispositif :

(a) Ressort à vide (longueur L_0)
(b) Ressort à l'équilibre : phase statique (longueur L_{eq})
(c) Après extension au-delà de L_{eq} (non étudié ici)

La position du centre d'inertie du solide est repérée par son abscisse x dans le repère (O,). $\vec{i}$

Intensité de la pesanteur : g = 9,8 $N.kg^{-1}$.



Pendule élastique vertical

On mesure l'allongement du ressort Δl pour différentes valeurs de masse m. Les résultats expérimentaux sont rassemblés dans le tableau suivant :

Masse m (10^{-3} kg)	20	40	60	80	100
Allongement (10^{-2} m)	4,0	8,1	12,2	16,2	20,2

1) Exprimer l'allongement en fonction de L_0 et de L_{eq}.
2) Établir la relation entre m, g, k et Δl à l'équilibre.
3) Déterminer la valeur de la constante de raideur k du ressort.

Exercice 2 : Mouvement rectiligne sinusoïdal

L'extrémité M d'un ressort oscille sans frottement sur l'axe [Ox).
Son abscisse est donnée par : $x = A \cos(\omega t + \varphi)$.
A est appelée amplitude du mouvement, ω pulsation du mouvement et φ phase à l'origine.

1) Établir l'expression de la composante horizontale de la vitesse $v_x(t)$.
2) On appelle période le temps le plus petit au bout duquel le point repasse par la même position, avec la même vitesse.
3) Quelle est la relation entre T et ω ? Justifier.
4) Donner les expressions de x(t) et $v_x(t)$ dans le cas où, à $t = 0$, $v_0 = 0$ et $x_0 = A$.
   Représenter x(t) et $v_x(t)$ dans ce cas pour t variant entre $t = 0$ et $t = 5\,T / 4$.
5) Établir l'expression de la composante horizontale de l'accélération $a_x(t)$.

Quelle est la relation entre $a_x(t)$ et x(t) ?

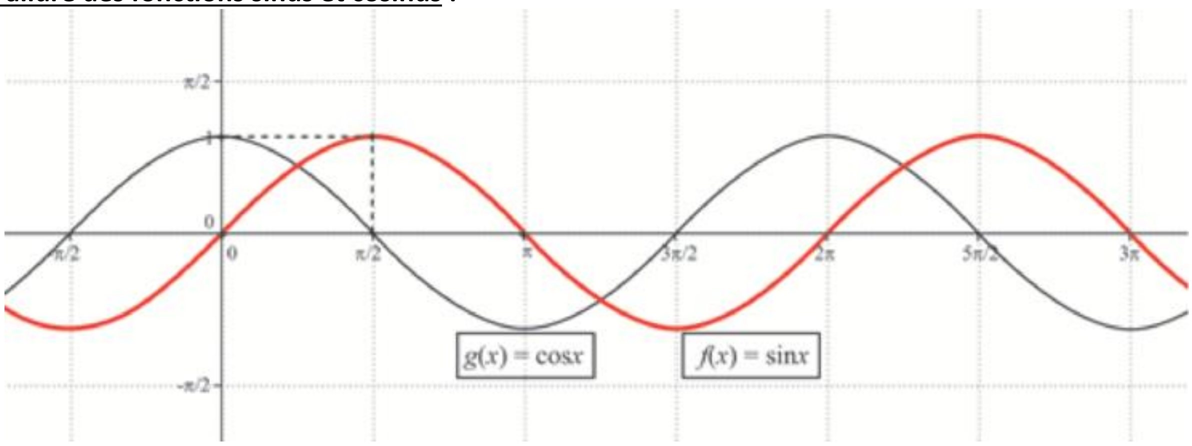
6) Représenter $a_x(t)$ pour t variant entre $t = 0$ et $t = 5\,T / 4$, dans le cas où, à $t = 0$, $v_0 = 0$ et $x_0 = A$.

<u>**Rappel** : calcul des dérivées</u>

Si g est une fonction de y = f(x) Alors $\{ g [f(x)] \}' = g' [f(x)] . f'(x)$

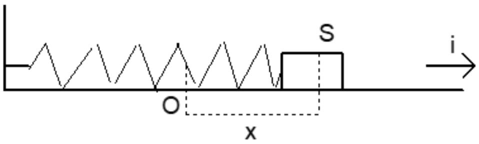
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

<u>**Rappel : allure des fonctions sinus et cosinus**</u> **:**



Exercice 3 : Ressort horizontal et oscillations

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort de raideur k = 40 $N.m^{-1}$ dont une extrémité est fixée à un solide S, de centre d'inertie G et de masse m = 100 g. On néglige tous les frottements.
Le solide S se déplace sur un rail horizontal. A l'équilibre, G est en O. La position de G est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{i}$.

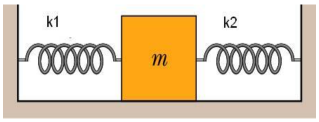


1) Donner l'expression des forces qui agissent sur le corps au moment initial.
   a) Exprimer la résultante de ces forces.
   b) Trouver l'équation différentielle du mouvement.

2) On cherche une solution pour l'expression de la position sous la forme : $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ où A, ω et ϕ sont des constantes.
   a) Montrer que cette expression est solution de l'équation trouvée, et donner les expressions de A, ω et ϕ en fonction des données du sujet.
   b) Quelle est la période du mouvement ?

3) On pousse le solide S de façon à comprimer le ressort de 3,0 cm. Puis, à l'instant t = 0, on le lâche sans vitesse initiale.
   a) Trouver la valeur des constantes A, ω et ϕ.
   b) Calculer la période propre To de l'oscillateur.
   c) Pour quels instants l'accélération sera-t-elle nulle ? maximale ? Mêmes questions pour la vitesse.

4) (**<u>Facultatif</u>**) Maintenant le corps est relié à deux ressorts de raideurs k_1 et k_2, et de longueurs non-déformées égales à l_0.



On déplace le corps de telle façon que la longueur du premier ressort soit $l_1 < l_0$.
   a) Donner l'expression de la résultante des forces élastiques à laquelle le solide est soumis.
   b) Que peut-on en déduire ?

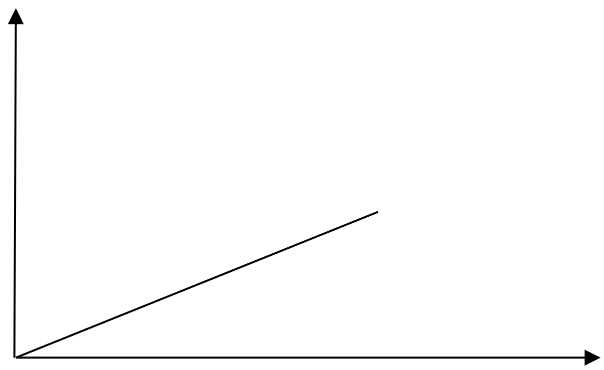
CHAPITRE 6 : CINEMATIQUE EN REPERE POLAIRE, MOUVEMENTS CURVILIGNES

1. REPERAGE GEOMETRIQUE EN COORDONNEES POLAIRES

Rayon polaire :

Angle polaire :

Base locale polaire :



Exercice1 : Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires

1) Exprimer les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point M et ses coordonnées polaires (ρ, θ).

2) Dessiner pour le point M_1 de coordonnées cartésiennes (- 2 cm, 1 cm) les deux vecteurs de la base locale $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, ainsi que les deux vecteurs de la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

3) Exprimer le vecteur position dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

Exercice 2 : Calcul des composantes des vecteurs de la base polaire en un point

Un point a pour coordonnées polaires (ρ = 3,5 cm ; θ = 2 rad).

1) Quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

2) Pour ce point, exprimer, littéralement puis numériquement, les vecteurs $\vec{u}_\rho$ *et* $\vec{u}_\theta$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

2. GRANDEURS CINEMATIQUES EN REPERE POLAIRE

Vecteur position :

Dérivées des vecteurs de la base locale polaire :

Vecteur vitesse :

Vecteur accélération :

Cas des mouvements circulaires :

Cas des mouvements circulaires uniformes :

Exercice 3 : Mouvement spiral en repères cartésien et polaire

Une particule M en mouvement est repérée par ses coordonnées cartésiennes (x, y).
Le mouvement de la particule dans le plan xOy est défini par les équations horaires suivantes :

$x(t) = 2\,e^{t}\cos t$ et $y(t) = 2\,e^{t}\sin t$

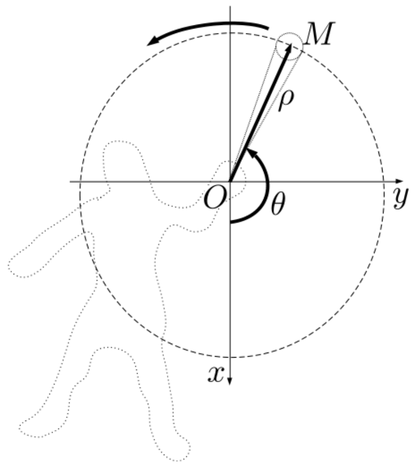
1) Exprimer, de manière générale, les coordonnées polaires ρ et θ d'un point M en fonction de ses coordonnées cartésiennes x et y.
2) Déterminer les expressions des coordonnées polaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$ du point M à tout instant t.
3) Dans la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ de M.
4) Déterminer l'angle entre le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}_M$
5) Dessiner l'allure de la trajectoire de M et la décrire brièvement.
6) Déterminer l'équation de la trajectoire de M en coordonnées polaires, soit $\rho = \rho(\theta)$.

Exercice 4 : Fronde

On s'intéresse au mouvement d'une fronde que nous approcherons par le modèle suivant en coordonnées polaires dans le plan de révolution (O, x, y) :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + a\cos(\theta) \\ \theta = 2\pi t + b\sin(2\pi t) \end{cases}$$

où ρ est le rayon polaire, θ est l'angle polaire tels que la masse de la fronde est décrite par le point M (voir schéma ci-contre), et a, b, et ρ_0 sont des paramètres à définir plus tard, et t est le temps.



Un tel modèle permet de décrire les phases d'accélération du mouvement de rotation lorsque le frondeur imprime le mouvement avec son poignet, et décrit aussi l'élongation de la corde lors des phases d'accélération.
Nous étudierons le mouvement proposé dans différentes cas limites.

1) Que représentent ρ_0 et a ? Donner leurs unités S.I. Même questions pour b.
2) Rappeler les expressions générales (sans les appliquer au modèle pour le moment) de la position, de la vitesse, et de l'accélération en coordonnées polaires. La base en coordonnées polaires sera notée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.
3) On s'intéresse pour le moment au cas où a = 0 S.I. et b = 0 S.I.
Quelle est l'interprétation physique d'un tel choix de paramètres ?
Quel est le type de mouvement qui résulte de ce choix ? (Par exemple : mouvement plan, elliptique, circulaire, uniforme...) Justifier votre réponse.
4) On se propose maintenant d'étudier le cas où $a \ll \rho_0$ et b = 0 S.I.
   a) Que permet de décrire un tel cas et comment est le mouvement ?
   b) Déterminer les dérivées premières et secondes du rayon et de l'angle.
   c) Déterminer le produit scalaire de l'accélération avec la vitesse.
   Que peut-on en déduire sur l'accélération du mouvement ?
5) On se place à présent dans le cas où a = 0 S.I. et $b \ll 1$.
   a) Comment est le mouvement à présent ? Que représente physiquement un tel mouvement ?
   b) Déterminer l'expression du vecteur vitesse et de sa norme $\|\vec{v}\|$. En déduire quand le mouvement est retardé ou accéléré.

CHAPITRE 7 : TRAVAIL D'UNE FORCE ET ENERGIES

1. TRAVAIL ET PUISSANCE D'UNE FORCE

Travail infinitésimal d'une force :

Travail d'une force constante sur un point en déplacement rectiligne :

Exemples de forces qui ne travaillent pas :

Travail du poids :

Travail de la force élastique d'un ressort :

Puissance d'une force :

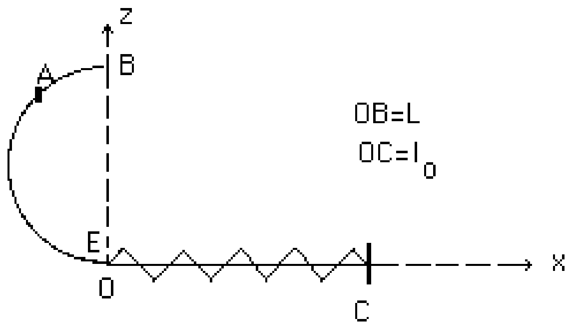
2. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

Energie cinétique d'un point :

Théorème de l'énergie cinétique :

Exercice 1 : Calculs de travaux et utilisation du théorème de l'énergie cinétique

Un anneau A assimilable à une masse ponctuelle m est enfilé sur un fil métallique rigide, ayant pour forme un demi-cercle vertical terminé par une tige rectiligne OC.
L'anneau se déplace sans frottement entre les points B et O, situés sur la même verticale et distants de la hauteur L. Un ressort, de longueur à vide l_O = OC, de raideur k, est enfilé sur la tige OC avec C extrémité fixe et E extrémité libre (voir fig.).



A – Calculs de travaux

1) Faire le bilan des forces appliquées à l'anneau lorsqu'il se déplace entre B et O.
Déterminer par calcul direct (sans utiliser de résultat relatif à l'énergie potentielle) le travail des forces appliquées à l'anneau entre B et O.

2) Lors de son arrivée en O, l'anneau entre en contact avec l'extrémité libre E du ressort qui entame alors un mouvement vers la droite. On note x l'abscisse de E par rapport à l'origine O (voir fig.).

a) Expliciter la force $\vec{T}$ que le ressort exerce sur l'anneau en fonction de x et des autres paramètres.

b) Calculer par intégration le travail de $\vec{T}$ lorsque E se déplace entre le point O et un point D d'abscisse d.

B- Utilisation du théorème de l'énergie cinétique

A l'instant initial, l'anneau quitte le point B avec une vitesse nulle.

1) Déduire de l'expression du travail trouvée en A-1°) la vitesse v_O de l'anneau lorsqu'il arrive en O.

2) a) Déduire de l'expression du travail trouvée en A-2°-b) l'abscisse x_0 de E lorsque la vitesse de l'anneau s'annule, en fonction de m, g, L et k.

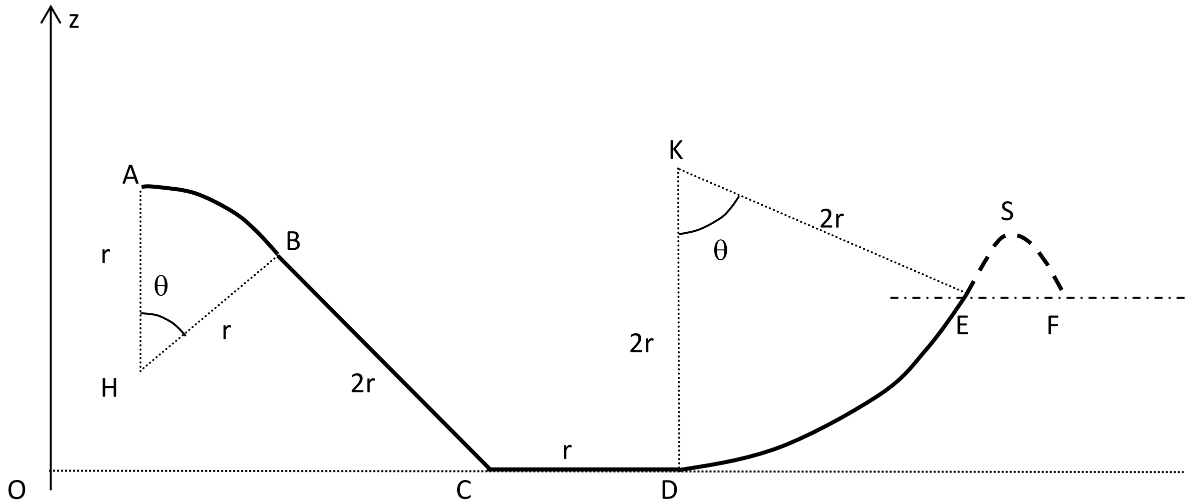
b) Décrire qualitativement le mouvement de E en supposant dorénavant l'existence de faibles frottements intervenant lors du contact de l'anneau avec le fil BO et la tige OC.

Méthode d'utilisation du théorème de l'énergie cinétique

1 - choix du référentiel galiléen
2 - définition du système et bilan des forces agissant sur le système
3 - choix de 2 instants du mouvement (2 positions / 2 vitesses correspondantes)
4 - calcul des travaux des forces entre les 2 instants choisis, avec choix d'un repère
5 - énoncé et application du théorème
6 - calcul d'une inconnue (vitesse , distance , force …)

Exercice 2 : Mouvements d'un chariot sur une piste

Un chariot M, de masse m, de dimension négligeable, est mobile sans frottement sur une piste située dans un plan vertical, représentée sur la figure ci-dessous.



La piste est formée de plusieurs parties :

AB partie circulaire de rayon r, de centre H et d'angle θ ;
BC partie rectiligne inclinée de longueur 2r se raccordant tangentiellement à AB ;
CD partie rectiligne horizontale de longueur r ;
DE arc de cercle de rayon 2r, de centre K et d'angle θ raccordé tangentiellement à CD.

La piste est interrompue entre E et F, points situés dans un même plan horizontal. Le chariot décrit alors la parabole ESF de sommet S puis retombe sur la piste en F.

1) a) Par des considérations géométriques, démontrer l'expression de zE zA et zB sont facultatives :
$z_A = r\,(1 + 2\sin\theta - \cos\theta)$; $z_B = 2\,r\sin\theta$; $z_E = 2\,r\,(1 - \cos\theta)$).

b) Faire le bilan des forces s'appliquant au chariot. Ecrire le théorème de l'énergie cinétique.

c) Le chariot est abandonné sans vitesse en A.
Déterminer, en fonction de r et θ, la vitesse du chariot en B, C, D et E.

2) a) Déterminer la réaction de la piste sur le chariot en B.

b) Pour quelle valeur de θ le chariot quitte-t-il la piste en B ?
Pour quelles valeurs de θ le chariot quitte-t-il la piste en un point situé entre A et B ?

3) a) Etablir, par des considérations énergétiques, la relation entre l'altitude h de S au-dessus du plan horizontal EF et l'angle θ.
b) Déterminer l'expression de la distance de raccordement d = EF en fonction de h et θ (Facultatif).

4) Calculer la force de freinage $\vec{f}$, constante, qu'il faut appliquer entre C et D pour que le chariot s'arrête exactement en D.

3. FORCES CONSERVATIVES ET ENERGIE POTENTIELLE

Force conservative :

Energie potentielle dont dérive une force conservative :

Energie potentielle de pesanteur :

Energie potentielle élastique :

4. ENERGIE MECANIQUE

Energie mécanique :

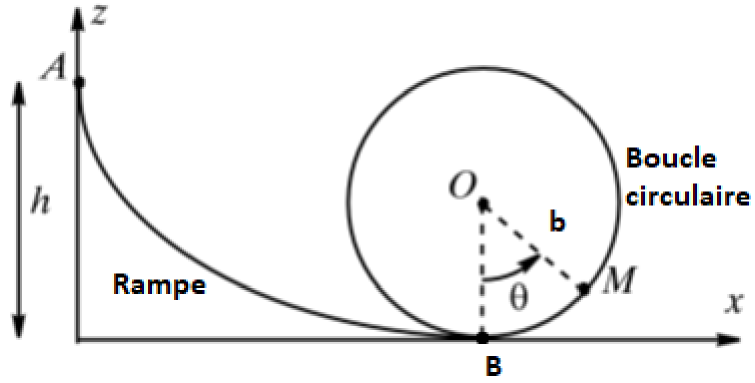
Principe de conservation de l'énergie mécanique :

Utilisations du principe de conservation de l'énergie mécanique :
* $E_{m\,1} = E_{m\,2}$

* $d\,E_m / dt = 0$

Cas d'un système soumis à la fois à des forces conservatives et à des forces non conservatives :

Exercice 3 : Skate-boarder en looping



Un skate-boarder "de l'extrême" souhaite réaliser une performance exceptionnelle : il envisage de s'élancer sans vitesse initiale depuis le haut d'une rampe à l'altitude h (point A), de se laisser glisser, puis de terminer sa course par une grande boucle circulaire (un looping) de rayon fixe b tel que h > 2b.
Plus l'altitude h est petite, plus la performance sera remarquable ! Cependant le skate-boarder n'est pas téméraire : il souhaite calculer au préalable l'altitude h minimale pour être certain de ne pas "décrocher" dans le looping.
Le référentiel d'étude, dans lequel la rampe et le looping sont fixes, est supposé galiléen.
On note g l'intensité du champ de pesanteur.

1) Dans un premier temps, on s'intéresse au mouvement du skate-boarder, assimilé à un point matériel de masse m, évoluant à l'intérieur d'un cercle de rayon b, le mouvement se faisant sans frottement.

a) Faire le bilan des forces appliquées au skate-boarder lorsqu'il est au point M du schéma.

b) Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique.

Soient v_M la vitesse au point M et θ l'angle entre la verticale et OM (voir le schéma).

c) Que devient cette équation en la projetant sur les vecteurs de la basse polaire base prenant O comme origine et theta comme angle polaire ?

d) Exprimer, dans la base polaire, la réaction normale en fonction de v_M, m, g, b et θ.

e) Quelle est la condition sur cette réaction pour que le skate-boarder ne « décroche » pas ?
En déduire une condition sur v_M.

2) Dans un second temps, on étudie le mouvement depuis le haut de la rampe de lancement, entre A et B, le mouvement se faisant toujours sans frottement.

a) Faire le bilan des forces appliquées au skate-boarder sur la rampe de lancement.

b) Les forces agissant entre A et M sont-elles toutes conservatives ? Justifier.

c) Donner les expressions des énergies potentielles pour chaque force conservative.

d) Exprimer en fonction de b, h, g et θ la norme v_M de la vitesse du point M.

e) En quel point du looping la vitesse est-elle la plus faible ?

f) Exprimer cette vitesse minimale en fonction de g, h et b.

3) Déduire des questions 1-d et 2-c l'expression de la réaction normale R_N de la sphère sur le skate-boarder en fonction m, g, h, b et θ.

4) Finalement... quelle est l'altitude minimale h à partir de laquelle le skate-boarder peut s'élancer sur la rampe sans vitesse initiale, pour que ce dernier adhère à la sphère tout au long de sa trajectoire ?

Exercice 4 : Satellite freiné

Un satellite de masse m, considéré comme ponctuel, est soumis à la force d'attraction $\vec{F}$ de la Terre :

$F = K m / r^2$ (où K est une constante positive et r= OM).

On admet l'existence d'un référentiel galiléen où le centre O de la Terre est fixe.

1) Quelle est la dimension physique de la constante K ?

2) En utilisant le <u>principe fondamental de la dynamique</u> dans un <u>repère de polaire</u>, montrer que le satellite peut avoir un mouvement uniforme sur un cercle de centre O et de rayon R quelconque.
Calculer la norme de la vitesse de ce mouvement en fonction de R.

Avant un instant t_1, le satellite soumis à $\vec{F}$ décrit une orbite circulaire, de centre O et de rayon R_1.

Entre les instants t_1 et t_2 le satellite subit une deuxième force $\vec{f}$ possédant une composante de sens opposé à sa vitesse (freinage).

On admet qu'à l'instant t_2 où on annule la force $\vec{f}$, le satellite décrit à nouveau une orbite circulaire, de centre O et de rayon R_2.

3) Les mouvements sont plans ; on repère le satellite par ses coordonnées polaires dans ce plan.

a) Calculer le travail de la force $\vec{F}$ entre t_1 et t_2, en fonction des rayons R_1 et R_2.

b) En utilisant les résultats des questions précédentes et le théorème de l'énergie cinétique, calculer le travail de la force $\vec{f}$ entre t_1 et t_2, en fonction des rayons R_1 et R_2.

c) Dans quel sens l'introduction de $\vec{f}$ a-t-elle fait varier le rayon de la trajectoire du satellite et la norme de la vitesse du satellite ?

Exercice 5 : Energies potentielles (<u>facultatif</u>)

Un enfant de masse m se trouve au-dessus d'un trampoline (voir fig.a).

On assimilera le trampoline à une plaque rigide P de masse négligeable posée sur un ressort R de raideur k et de masse négligeable.

L'enfant se laisse tomber (sans vitesse initiale) d'une hauteur h sur le trampoline.

Le ressort se comprime alors d'une longueur x (voir fig.b).

On négligera les frottements.

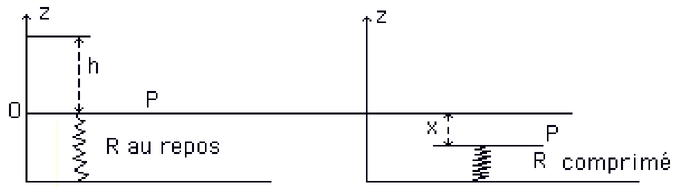


Fig.a Fig.b

1) Exprimer l'énergie potentielle E_p (z) de l'enfant soumis au champ de pesanteur et au champ de force du ressort.

On distinguera les deux cas : z > O (l'enfant n'a pas encore atteint le trampoline) et z < 0.

2) Tracer la courbe Ep = f(z).

3) Déterminer la vitesse v_1 avec laquelle l'enfant arrive sur le trampoline et la compression maximale x_{max} du ressort.

4) Sachant qu'après le rebond, il remonte à une hauteur H > h, déterminer le travail W réalisé lors du rebond.

Bonus sur les énergies dans un système élastique :

a) Etablir l'expression de l'énergie cinétique E_c de P en fonction du temps.

b) Que peut-on dire de la périodicité de cette fonction par rapport à celle de x(t) ?

c) Tracer l'allure de $E_c = E_c(t)$.

d) Sans calcul, ajouter, sur le graphe précédent, les allures des variations au cours du temps de l'énergie mécanique de P, $E_m = E_m$ (t), et celles de son énergie potentielle élastique $E_p = E_p$ (t).
Justifier.

CHAPITRE 8 : EQUILIBRES ET DOMAINES ACCESSIBLES DANS UN CHAMP D'ENERGIE POTENTIELLE UNIDIMENSIONNEL

1. NOTIONS DE BARRIERE ET PUITS DE POTENTIEL ET DOMAINES ACCESSIBLES

Force conservative dérivant de $E_p(x)$:

Conservation de l'énergie mécanique :

Cas d'un puits de potentiel :

Cas d'une barrière de potentiel :

2. CONDITIONS D'EQUILIBRE ; STABILITE DE L'EQUILIBRE

Positions d'équilibre :

Etude de la stabilité de l'équilibre :

Exercice 1 : Potentiel du pendule et domaines d'angles accessibles

On cherche à déterminer les domaines accessibles pour les angles d'un pendule dont on connaît la position initiale θ_0 et la vitesse angulaire initiale α_0.
Nous décrirons le pendule comme un système ponctuel de masse m relié à l'origine par une tige rigide de masse négligeable. Le pendule sera décrit par le point M à l'aide des coordonnées polaires (ρ, θ) en utilisant l'axe [Ox) orienté vers le bas et l'axe [Oy) orienté vers la droite.

1) Faire un schéma du pendule dans le repère. Quelle est la trajectoire du pendule ?
2) Quelles sont les forces s'appliquant sur le pendule ? Écrire le principe fondamental de la dynamique pour ce pendule.
3) Déterminer le travail du pendule entre le point A, tel que $\theta_A = 0$ et le point M. En déduire que le système est conservatif.
   Déterminer l'expression de l'énergie potentielle du pendule si on prend le point A comme origine et la représenter graphiquement.
4) Après avoir rappelé la définition des points d'équilibre stable et instable, déterminer les dans le cas du pendule.
5) Définir l'énergie cinétique du pendule en fonction de la vitesse angulaire que nous dénoterons $\alpha = \frac{d\theta}{dt}$. En déduire l'énergie mécanique. Que peut-on dire de cette énergie mécanique par rapport à l'énergie mécanique initiale ?
6) Quelle est le domaine accessible au pendule si $\theta_0 = 0$ et $\alpha_0 = \sqrt{2g/\rho}$?
   Même question si $\theta_0 = 0$ et $\alpha_0 = \sqrt{5g/\rho}$?
7) Pour un angle initial imposé, quelle est la condition sur α_0 telle que le pendule effectue des révolutions complètes ?

Exercice 2 : Energie potentielle interatomique dans une molécule diatomique

Le champ d'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes d'une molécule diatomique est approximé par :
$E_p(x) = [a / x^{12}] - [b / x^6]$ où a et b sont des constantes positives.
L'axe [Ox) a pour origine le centre de l'un des noyaux, l'autre centre de noyau est à la coordonnée x.

1) Déterminer la force interatomique en fonction de x, en cherchant son expression sous la forme : $\vec{F} = F(x)\overrightarrow{u_x}$.
2) Quelle est la position (ici unique) d'équilibre stable ?
3) Déterminer l'énergie nécessaire pour dissocier la molécule se trouvant à l'état d'équilibre.
4) Si les deux atomes sont à l'infini au repos, jusqu'à quelle distance vont-ils se rapprocher ?

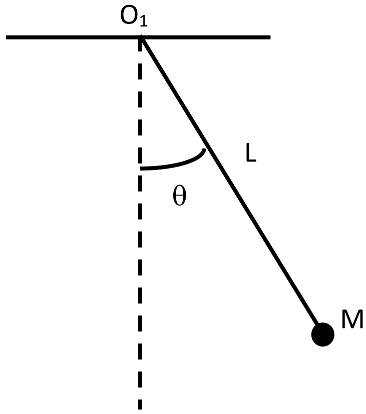
Exercice 3 : Particule dans un champ d'énergie potentielle donné

1) Une particule, de masse m, pouvant se déplacer sur un axe Ox en x > 0, est soumise au champ d'énergie potentielle $E_p(x) = A.a.(x - a)^2/x^3$ où A et a sont des constantes positives.
   Tracer la représentation graphique de la fonction Ep(x).
2) Quelles sont les positions d'équilibre stable ?
3) Quelles sont les positions d'équilibre instables ?
4) Identifier les régions du demi-axe x>0 où la force est attractive vers l'origine et celles où elle est répulsive.
5) La particule a l'énergie mécanique E.
   Identifier les intervalles d'énergie E pour lesquels le mouvement se fait sur le demi-axe x > 0, dans une région qui est de largeur... 5.1) * ... finie, 5.2) * ... infinie.
6) On considère le cas où la particule a l'énergie E = A / 9 et se trouve, à un certain instant, en x = 1,5 a.
   Quelle énergie faut-il apporter à la particule pour la libérer"?
   Quelle est alors la vitesse de la particule à l'infini ?

3. TP N°2 : EXPERIENCES AVEC UN PENDULE SIMPLE

Un pendule simple se compose d'un objet ponctuel M, de masse m, fixé à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L, dont la masse est négligeable, dont l'autre extrémité O_1 est fixée sur un support. A l'équilibre, le pendule est vertical. Lorsque le système est écarté de sa position d'équilibre, il se met à **osciller sous l'effet de son poids.**

Etude théorique des oscillations *(à faire avant le TP)*



Le schéma suivant représente le pendule à un instant quelconque des oscillations :

1) a) Le fil étant inextensible de longueur L, quelle est la trajectoire du point M ?
b) Faire le bilan des forces agissant sur M, et les représenter sur le schéma.
On néglige les frottements avec l'air.

2) Etude à l'aide du principe fondamental de la dynamique

a) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique.
On repère la position de M sur cette trajectoire par l'angle θ.

b) Sur le schéma, ajouter en M les vecteurs unitaires du repère polaire ($\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$).

c) Dans ce repère, exprimer le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération en fonction de $d\theta/dt$ et $d^2\theta/dt^2$.
Projeter les forces dans le repère polaire.

d) Déduire de 2-a et 2-b les deux équations du mouvement (sur $\vec{u}_\rho$ *et* $\vec{u}_\theta$).

L'une des équations permet de déterminer la tension (ce qu'on n'exploitera pas en TP). L'autre est une équation différentielle dont les variables sont θ et t.

e) On étudie les oscillations pour de petits angles : $\sin\theta \approx \theta$: réécrire cette seconde équation.

f) La solution de cette équation est de la forme : $\theta = A\cos(\omega t + b)$.
Montrer que cette solution convient et donner l'expression de ω.

g) A l'instant t = 0, le pendule est lâché sans vitesse initiale depuis un angle θ_0.
Trouver A et b.
Quelle est donc l'amplitude des oscillations ?

4) Etude à partir de l'énergie

a) Pourquoi le système est-il conservatif ?
b) Exprimer l'énergie potentielle du système, en précisant l'axe et l'origine choisis.
c) Montrer qu'elle peut s'écrire $E_p = m\,g\,L\,(1 - \cos\theta)$.
d) En utilisant l'expression de la vitesse trouvée en 2°-b), exprimer l'énergie cinétique.
e) Déduire de b) et c) une expression de l'énergie mécanique E_m.
f) Pourquoi peut-on écrire $dE_m / dt = 0$?
g) En déduire une équation différentielle dont les variables sont θ et t.
h) Comparer à l'équation trouvée en 2°-d.

5) Période des oscillations

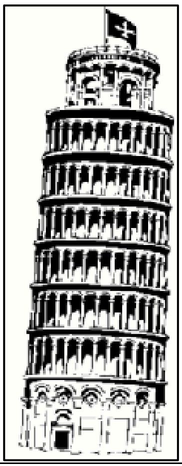
A partir de la solution trouvée en 2°-e), exprimer la période T des oscillations du pendule.
Cette période dépend-elle
- de la masse m,
- de l'angle initial θ_0,
- de la longueur L ?

Les activités expérimentales autours de ce thème vous seront données au cours de la séance de TP.

ANNEXE 1 – SUJETS DE BAC - CHUTE LIBRE ET LANCER DE PROJECTILES

SUJET 1 : GALILEE, CHUTE ET EXPLOITATION DE DOCUMENTS ET MODELISATION

I. LA CHUTE VERTICALE D'UN CORPS



Document 1 – Expérience de Galilée
On dit que Galilée (1564-1642) aurait étudié la chute des corps en lâchant divers objets du sommet de la tour de Pise. Il y fait référence dans deux ouvrages : *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* et *Discours concernant deux sciences nouvelles*.
A la fin de la dernière mission Apollo 15 (été 1971), le commandant David Scott a réalisé une démonstration en direct du sol lunaire pour les caméras de télévision. Il a lâché, en même temps et de la même hauteur (1,6m) un marteau géologique (de masse m_1 = 1,32 kg) et une plume de faucon (de masse m_2 = 0,03kg). Ces deux objets ont atteint le sol en même temps, conformément à la théorie de Galilée.

Document 2 – Caractéristiques du mouvement de chute d'une bille

A un instant pris comme origine des temps t = 0, on laisse tomber une petite bille du haut de la tour de Pise, de hauteur H ≈ 56m, sans lui donner de vitesse initiale.
Pour connaître les caractéristiques du mouvement, on filme la chute.
L'étude du film permet de trouver :
- la vitesse de la bille à mi-parcours : environ 20 $m.s^{-1}$
- la durée de la chute jusqu'au sol : environ 4 s

<u>**Questions**</u> :

Répondre à l'aide de ses <u>connaissances</u> et des documents.

1) Quelles sont les forces qui agissent sur la bille au cours de sa chute ?
2) Pour faire une étude simplifiée, on ne considérera que la force la plus grande et on assimilera la bille à un point.
Appliquer la deuxième loi de Newton et déterminer l'expression de la dérivée par rapport au temps de la vitesse $\frac{dv}{dt}$.
Expliquer pourquoi ce résultat permet de justifier les observations du document 1.

3) A partir de l'expression de $\frac{dv}{dt}$, déterminer successivement :
- l'expression de la vitesse v(t) à l'instant t,
- l'expression de la distance y(t) parcourue à l'instant t.
Calculer numériquement la durée de chute si la distance parcourue est de 56m.
Comparer au résultat du document 2 ; commenter.

4) A partir des expressions de y(t) et v(t), déterminer la relation entre y et v.
Calculer numériquement la vitesse à mi-parcours.
Comparer au résultat du document 2 ; commenter.

II. LE LANCER DU POIDS

Document 1 - Principe du lancer du poids

Le lancer du poids consiste à lancer aussi loin que possible une boule de métal de surface lisse, de masse 7,26 kg pour les hommes. Les concurrents prennent place à l'intérieur d'un cercle de 2,1 m de diamètre. Le poids est lancé avec une seule main et doit toucher le menton jusqu'à la poussée du bras.

Document 2 - Etude d'un lancer

Aux championnats du monde d'athlétisme de 2003, lors du lancer d' Andrei Mikhnevich le poids a atterri à une distance D = 21,69 m. Cet exploit a été filmé.
Un entraîneur souhaite étudier ce lancer.
Il assimile le poids à un point matériel en G. Il se place dans le repère cartésien (O ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) tel que :
- (Oy) est un axe vertical ascendant passant par G à l'instant où le poids quitte la main du lanceur,
- (Ox) est un axe horizontal au niveau du sol, dirigé vers la droite et dans le plan vertical de la trajectoire (voir figure 1 ci-contre).

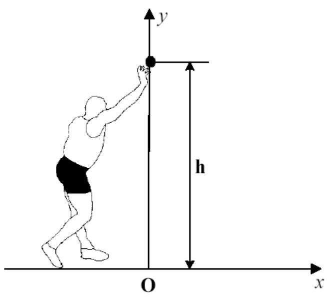


Figure 1

L'étude du film a fourni les conditions initiales suivantes :
- la vitesse initiale v_0 du poids (mesurée à l'aide d'un cinémomètre) a pour valeur $v_0 = 13{,}7$ m.s^{-1}
- l'altitude initiale du poids est h = 2,74 m
- l'angle que fait le vecteur vitesse initiale avec l'horizontale est : $\alpha = 43°$.

Les figures 2 et 3 ci-dessous représentent les évolutions temporelles des coordonnées v_x *et* v_y du vecteur vitesse de G.

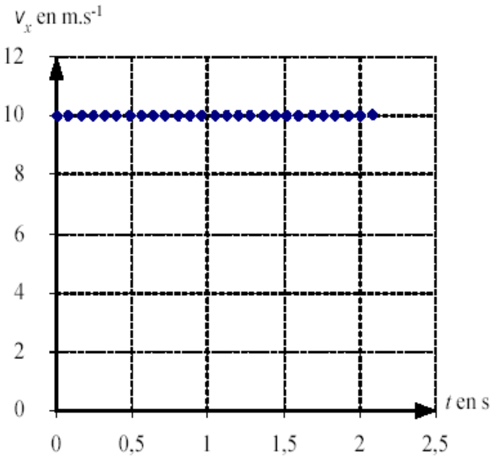


Figure 2

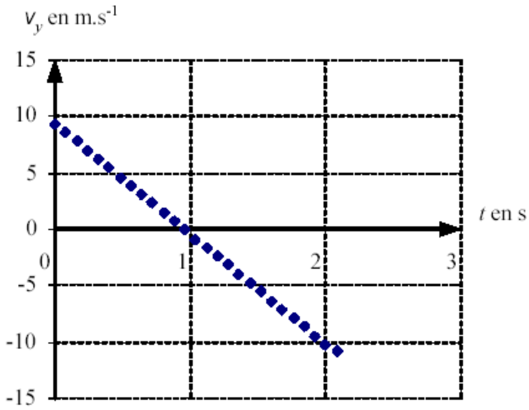


Figure 3

Document 3 - Simulations

L'entraîneur décide d'étudier l'influence de la valeur v_0 de la vitesse initiale du lanceur et de l'angle de tir α.
Il réalise les simulations rassemblées dans les réseaux de courbes correspondants aux figures 4 (α constant) et 5 (v_0 constant), à partir d'une *altitude* de lancement inférieur à 2,74 m car son lanceur est plus petit qu'A. Mikhnevich.

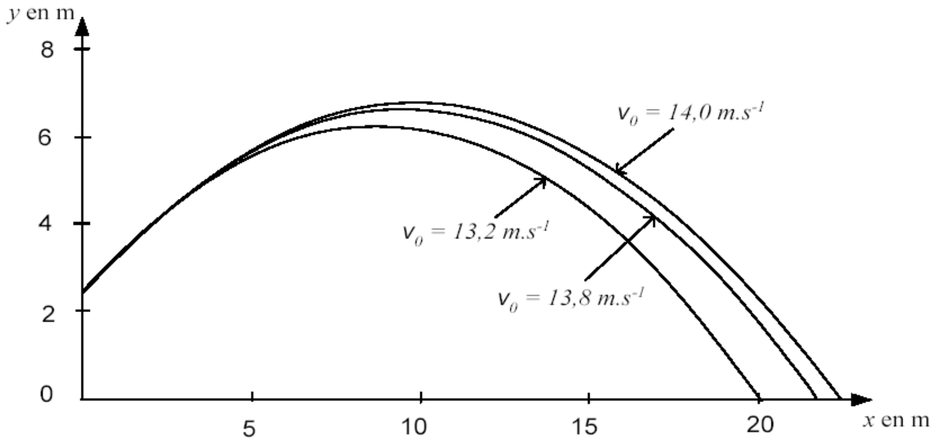


Figure 4 (α = 41°)

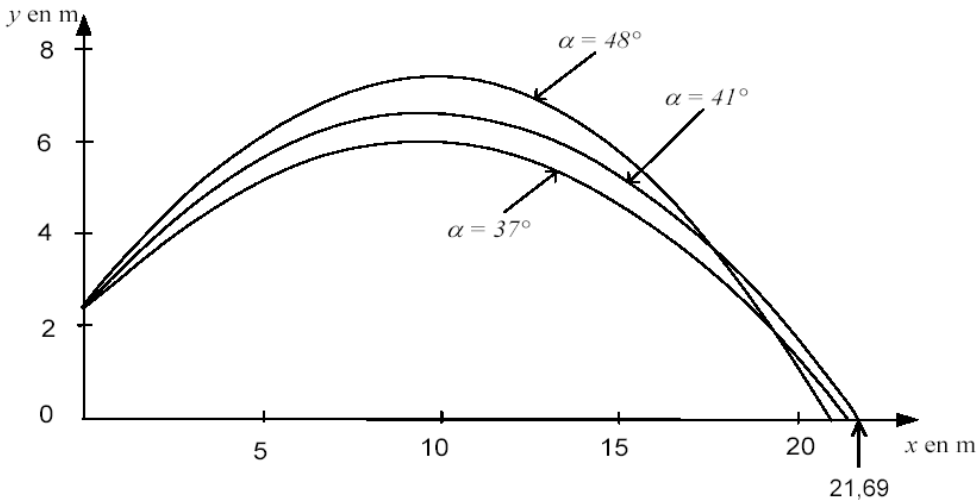


Figure 5 (v_0 = 13,8 m.s $^{-1}$)

Questions :

A) Répondre à l'aide de ses connaissances et des documents

1) a) Sur les courbes des figures 2 et 3, relever les valeurs des coordonnées v_{0x} et v_{0y} du vecteur vitesse de G à l'instant t = 0 s.
b) Représenter v_{0x}, v_{0y} puis le vecteur vitesse initiale.
En déduire les valeurs de α et v_0 et vérifier que les valeurs obtenues sont compatibles avec les valeurs données dans le texte.

2) a) Quelle est la nature de la projection du mouvement de G sur l'axe (Ox) ? Justifier.
b) Déterminer les valeurs des coordonnées v_{Sx} et v_{Sy} du vecteur vitesse de G au sommet S de sa trajectoire.
A quel instant t G est-il en S ?

3) Comment la distance horizontale du lancer évolue-t-elle :
a) quand v_0 augmente à α fixé ?
b) quand α augmente à v_0 fixé ?

4) Parmi les combinaisons proposées dans les simulations, en existe-t-il une satisfaisante pour dépasser la performance de A. Mikhnevich ? Si oui, laquelle ?

B) Étude théorique du mouvement

On veut retrouver les résultats des figures 2 et 3 et des simulations en faisant une étude théorique simplifiée du même type que celle qui a été faite dans la partie I sur la chute libre.
Il faut toutefois tenir compte du fait que le mouvement se fait dans le plan (xOy) et non selon l'axe Oy.

1) Quelles sont les forces qui agissent sur la boule une fois qu'elle a quitté la main du lanceur ?

2) Pour faire une étude simplifiée, on ne considérera que la force la plus grande et on assimilera la boule à un point.
Appliquer la deuxième loi de Newton et déterminer l'expression de la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\frac{d\vec{v}}{dt}$, dans le repère (Ox, Oy).

3) A partir de l'expression de $\frac{d\vec{v}}{dt}$, déterminer les expressions des composantes v_x (t) et v_y(t) du vecteur vitesse à l'instant t,
Pour cela, penser à prendre en compte les conditions initiales pour la vitesse (α et v_0).
Comparer aux résultats des figures 2 et 3 ; commenter.

4) A partir des expressions de v_x (t) et v_y(t) trouvées précédemment, déterminer les expressions des composantes x(t) et y(t) du vecteur position à l'instant t.
En déduire une relation entre y et x.
Les allures des courbes y = f(x) des simulations correspondent-elles à votre résultat ?

SUJET 2 : UN PEU DE BALISTIQUE

Lors de fouilles préventives sur un chantier de travaux publics, on a retrouvé ce qui ressemble à une arme à feu. Il s'agit d'un ancien pistolet lance-fusées en bronze datant probablement de la première Guerre Mondiale. Il est dans un état de conservation assez remarquable.
Ce type de pistolet était très utilisé lors de cette guerre car, en plus de lancer des fusées éclairantes, il pouvait servir de moyen de communication. En effet, à l'époque très peu de moyens étaient mis à disposition des troupes : les ondes hertziennes étaient très peu utilisées et c'étaient des kilomètres de câbles téléphoniques qui devaient être déroulés pour permettre la transmission de messages divers et variés.
Ainsi les pistolets signaleurs se sont avérés très utiles.

Pistolet lance-fusées (d'après www.histoire-collection.com)

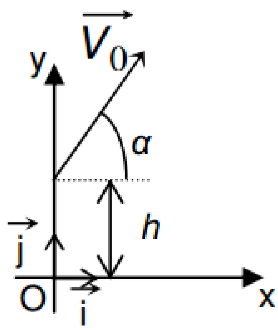
1. Durée de visibilité de la fusée

Sur la notice des fusées éclairantes que l'on peut utiliser dans ce type de pistolet, on trouve les informations suivantes :

> Cartouche qui lance une fusée éclairante s'allumant 1,0 seconde après son départ du pistolet et éclaire d'une façon intense pendant 6 secondes environ.
> Masse de la fusée éclairante : m_f = 58 g.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Le champ de pesanteur terrestre est considéré uniforme, de valeur g = 9,8 m.s^{-2}.
On négligera toutes les actions dues à l'air ainsi que la perte de masse de la fusée pendant qu'elle brille et on considèrera cette dernière comme un objet ponctuel.
On définit un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) avec O au niveau du sol et tel que la position initiale de la fusée éclairante à la sortie du pistolet soit à une hauteur h = 1,8 m. Le vecteur vitesse initiale $\vec{V_0}$ est dans le plan (O,x,y) ;
Ox est horizontal et Oy est vertical et orienté vers le haut.

À l'instant t = 0 s, le vecteur vitesse de la fusée éclairante fait un angle α égal à 55 ° avec l'axe Ox et sa valeur est v_0 = 50 m.s^{-1}. On pourra se référer au schéma ci-contre.



1.1. Représenter le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ sur le schéma donné en figure 1 de l'**ANNEXE** et tracer qualitativement l'allure de la trajectoire suivie par la fusée éclairante dans ce champ de pesanteur.

1.2. En utilisant une loi de Newton que l'on énoncera, déterminer les coordonnées du vecteur accélération de la fusée éclairante : a_x(t) suivant x et a_y(t) suivant y.

1.3. En déduire les expressions des coordonnées v_x(t)et v_y(t) du vecteur vitesse de la fusée éclairante et montrer que les équations horaires du mouvement de la fusée s'écrivent $x(t) = v_0.\cos(\alpha).t$ et $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0.\sin(\alpha).t + h$ avec t en seconde, v_0 en mètre par seconde et x(t), y(t) et h en mètre.

1.4. Déterminer la valeur de la durée du vol de la fusée éclairante.

On rappelle qu'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *si $\Delta = b^2 - 4a.c$ est positif.*

1.5. Calculer l'altitude à partir de laquelle la fusée commence à éclairer puis l'altitude à laquelle elle s'arrête. Ces valeurs paraissent-elles adaptées au but recherché ?

2. Pour aller un peu plus loin

Par souci de simplification, on ne considère que le système {fusée – pistolet} et on s'intéresse à sa quantité de mouvement. La masse du pistolet à vide est $m_p = 0{,}98$ kg.

2.1. Exprimer la quantité de mouvement totale $\overrightarrow{p_0}$ du système {fusée - pistolet} avant que la fusée ne quitte le pistolet puis montrer que celle-ci est équivalente au vecteur nul.

2.2. Éjection de la fusée

2.2.1. Que peut-on dire de la quantité de mouvement totale du système {fusée-pistolet} si l'on considère ce système comme un système isolé au cours de l'éjection de la fusée du pistolet ?

2.2.2. En déduire dans ce cas l'expression vectorielle de la vitesse $\overrightarrow{v_p}$ de recul du pistolet juste après l'éjection de la fusée en fonction de la masse du pistolet m_p, de la masse de la fusée m_f et du vecteur vitesse initiale de la fusée $\overrightarrow{v_0}$.

2.2.3. La valeur réelle de la vitesse $\overrightarrow{v_p}$ est beaucoup plus faible que la valeur que l'on obtient à la question précédente. Pourquoi observe-t-on une telle différence ? Justifier la réponse.

ANNEXE À RENDRE AGRAFÉE AVEC LA COPIE

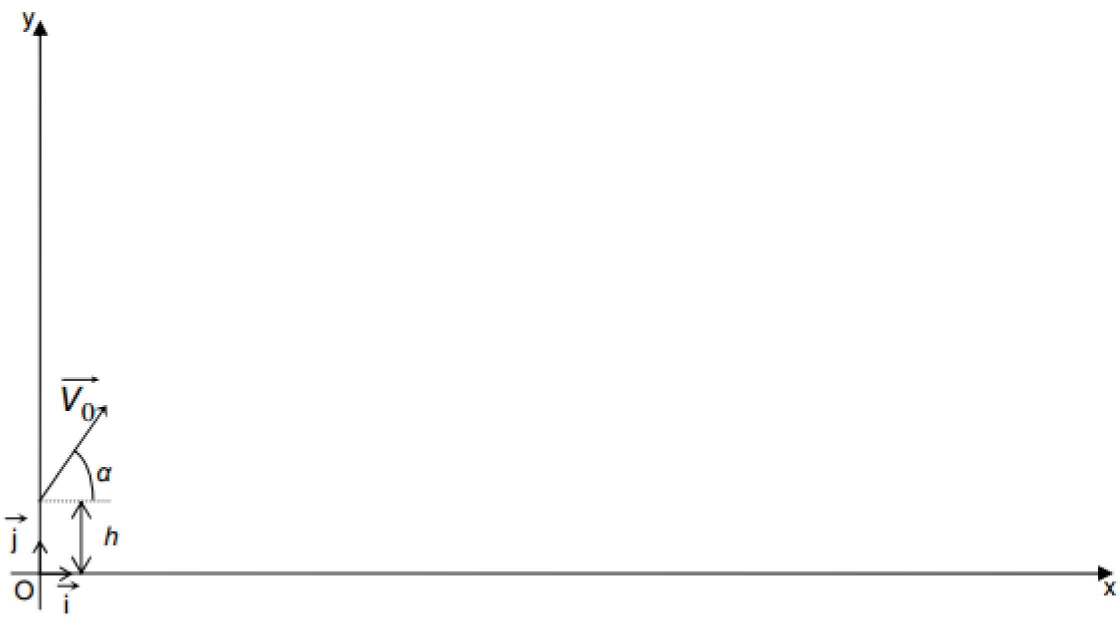


Figure 1 : Trajectoire de la fusée éclairante

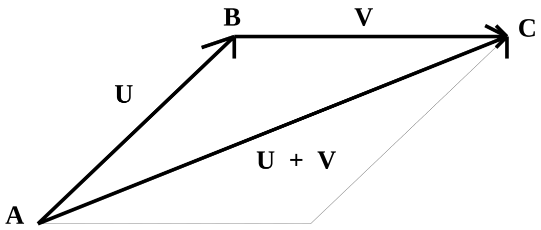
ANNEXE 2 – ENTRAINEMENTS MATHEMATIQUES

1. PROPRIETES ET DEFINITIONS A CONNAITRE SUR LES VECTEURS

Dans un repère cartésien $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère deux vecteurs : $\vec{U} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$.

Somme vectorielle

Leur somme vaut : $\vec{U} + \vec{V} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath}$.
Construction graphique :



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

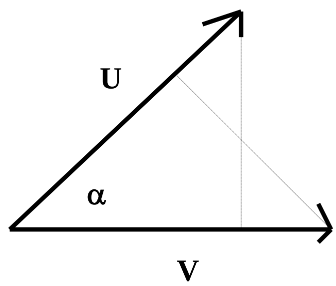
Produit scalaire de deux vecteurs , norme d'un vecteur

Le produit scalaire est : $\vec{U} \cdot \vec{V} = x_1x_2 + y_1y_2$

Propriétés : $\vec{U} \bullet \vec{V} = \vec{V} \bullet \vec{U}$ $\quad$ $\vec{U} \bullet (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} \bullet \vec{V}) + (\vec{U} \bullet \vec{W})$

Pour k réel : $(k\,\vec{U}) \bullet \vec{V} = k\,(\vec{U} \bullet \vec{V})$

La norme d'un vecteur vaut : U ou encore $\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$
Distance du point A au point B : d(AB) = AB = $\|\overrightarrow{AB}\|$
Interprétation géométrique du produit scalaire :



$\|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\cos(\alpha)$

2. Applications : Formules de base pour le produit scalaire

Exercice 1 : Marche

Une personne parcourt le chemin suivant : 3,1 km vers le Nord, puis 2,4 km vers l'Ouest, et finalement 5,2 km vers le Sud.

1) Représenter la trajectoire à l'aide d'un diagramme de vecteurs.

2) A quelle distance du point de départ et dans quelle direction à vol d'oiseau se trouve le point d'arrivée ?

Exercice 2

a) On considère deux vecteurs quelconques $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

b) Exprimer $\vec{A} \cdot \vec{B}$ en fonction, entre autres, du cosinus de leur angle.

c) Exprimer $\vec{A} \cdot \vec{B}$ en fonction de leurs composantes en base orthonormée (à 2D).

d) Soit $\vec{A} = 3\overrightarrow{u_x} + 4\overrightarrow{u_y}$; $\vec{B} = -18\overrightarrow{u_x} + 0{,}5\overrightarrow{u_y}$, calculer $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

e) Même question avec $\vec{A} = 19\vec{u}_y$; $\vec{B} = -3\vec{u}_x$.

f) Donner l'expression du vecteur unitaire de même direction et même sens que le vecteur $\vec{A}$ de la question d.

Exercice 3

a) Calculer les angles (en radians) entre les deux vecteurs suivants, définis par leur composantes cartésiennes : $\vec{V}_1$ = (- 5, 7) et $\vec{V}_2$ = (1, 2).

b) Trouver l'angle entre le vecteur $\vec{V}(2,5)$ et chacun des deux vecteurs de base.

3. Autotest sur les vecteurs

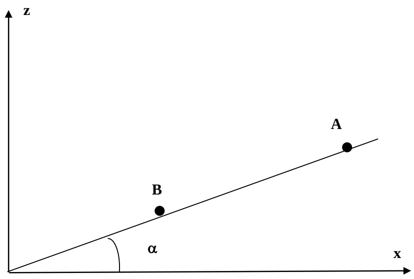
A) Dans un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points : A (2, 3) ; B (3, -2) et C (1, 3).

a) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$.

c) En déduire l'angle θ entre ces 2 vecteurs.

B) Une tuile, de masse m, glisse le long d'un toit incliné d'un angle α sur l'horizontale.



a) Exprimer le poids $\vec{P}$ dans la base ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_z$) du repère (Ox, Oz).

La tuile glisse du point A au point B sur une longueur L = AB.

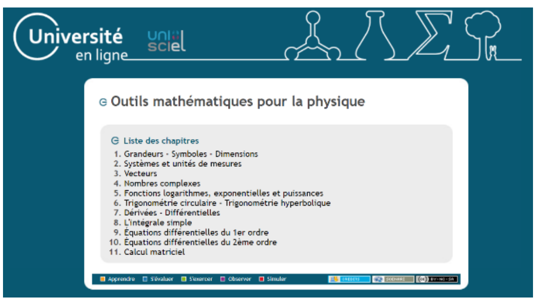
b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_z$).

On définit le travail W d'une force constante $\vec{P}$ au cours d'un déplacement d'un point A à un point B par : $W = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}$.

c) En déduire le travail du poids lors de ce déplacement.

d) Application numérique : m = 5 kg ; α = 30° ; L = 6 m ; g = 9,81 m.s^{-2}

Contrôlez vos réponses sur l'université en ligne :
http://uel.unisciel.fr/physique/outils_nancy/outils_nancy/co/outils_nancy.html
Thème « outils mathématiques pour la physique »
Chapitre ➔**3. Vecteurs**
en bas :« **s'évaluer** »
A : le produit scalaire
B : application du produit scalaire



Page d'accueil du site d'entrainement Unisciel

Si vous vous êtes trompé et/ou si vous avez eu des difficultés, révisez les notions utiles sur ce site en retournant sur la partie :
« Cours «
définitions, opérations, composantes, produit scalaire

4. CALCUL DES DERIVEES : PROPRIETES ET DERIVEES USUELLES A CONNAITRE

1) Si u et v désignent 2 fonctions de la variable x et a un réel, alors :
   - $[u+v]' = u' + v'$
   - $[a u]' = a u'$
   - si $v \neq 0$: $[1/v]' = -v'/v^2$
     $[u/v]' = (u'v - uv')/v^2$

2) Fonction composée :
   Soit g une fonction de y = f(x) Alors $\{ g[f(x)] \}' = g'[f(x)] \,.\, f'(x)$

Remarque de notation : u' se note souvent en physique $\frac{du}{dx}$ pour expliciter que la variable est x.

3) Tableau récapitulant les principales fonctions et leur dérivée :

   Soient a un réel et n un entier relatif.

fonction	fonction dérivée
a	**0**
$a\ x^n$	$a\ n\ x^{n-1}$
$e^{a.x}$	$a.e^{a.x}$
$\ln x$	$1/x$
$a > 0$: a^x	$\ln a \,.\, a^x$
$a > 0$: $\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\sin(a x)$	$a\ \cos(ax)$
$\cos(ax)$	$-a\ \sin(ax)$
$\tan x = \sin x / \cos x$	$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$

Exercice : dérivées d'un vecteur

Un vecteur $\vec{W}$ possède, dans la base cartésienne orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, des composantes dépendantes de la variable r :

$$x(r) = 2\ r^2 + 7$$
$$y(r) = 5\ \cos(3r) + 3\ \sin(2r)$$

On rappelle que le vecteur dérivée d'un vecteur $\vec{W}$ a pour composantes les dérivées des composantes du vecteur $\vec{W}$ (en coordonnées cartésiennes).

Calculer la dérivée d$\vec{W}$/dr, puis la dérivée seconde $d^2\vec{W}/dr^2$.

Autotest sur les dérivées

Calculer les fonctions dérivées par rapport à la variable x de chacune des 4 fonctions algébriques suivantes :

$$y_1(x) = \sin(3x) + x^2 + e^{-2x}$$
$$y_2(x) = x^3 \cos^2 x$$
$$y_3(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$y_4(x) = \ln(3x^2 + 5)$$

Contrôler les réponses sur l'université en ligne :

http://uel.unisciel.fr/physique/outils_nancy/outils_nancy/co/outils_nancy.html

Thème « outils mathématiques pour la physique »

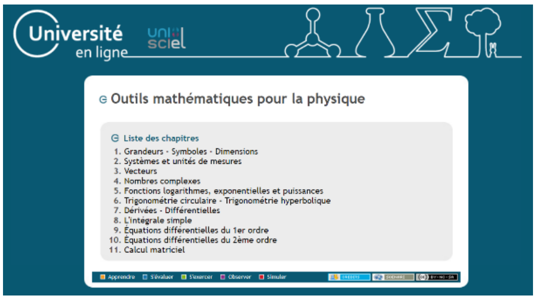
Chapitre : **7. Dérivées – Différentielles**

« **Cours** »

Fonction scalaire d'une variable

Propriétés algébriques des fonctions dérivables

Les solutions sont dans les exemples traités.



Page d'accueil du site d'entrainement Unisciel

Si vous vous êtes trompé et/ou si vous avez eu des difficultés, révisez les notions utiles :

7. Dérivées – Différentielles

« **Cours** »

Fonction scalaire d'une variable

Définitions

Dérivée d'une fonction scalaire en un point, fonction dérivée

Propriétés algébriques des fonctions dérivables

5. Fonctions trigonometriques

A connaître

x (en rad)	0	π / 6	π / 4	π / 3	π / 2
x (en °)	0	30	45	60	90
sin x	0	1 / 2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1 / 2	0

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Remarque :

- On peut constater que les **numérateurs** des valeurs remarquables de sinus progressent ainsi :
  $\sqrt{1}$ (qui vaut 1), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ (qui vaut 2).
- On constate aussi la progression des valeurs remarquables de cos(x) est inverse de celle de sin(x).

Exercices

a) Donner la représentation graphique des fonctions sin(x) et cos(x) de $-\pi$ à 2π. (Faire tan(x) à part en bonus).
b) Rappeler l'interprétation géométrique, sur un triangle rectangle, des fonctions sinus, cosinus, tangente.
c) Rappeler la correspondance entre le cercle trigonométrique et les fonctions sinus et cosinus.
d) Connaître par cœur ou savoir retrouver très rapidement sans calculatrice les valeurs du tableau ci-dessus.

6. ALPHABET GREC SYMBOLES ET NOMS

Alphabet grec pour l'écriture scientifique			
lettre grecque majuscule	lettre grecque minuscule		Lettre latine équivalente
Α	α	alpha	a
Β	β	beta	b
Γ	γ	gamma	g
Δ	δ	delta	d
Ε	ε	epsilon	e
Ζ	ζ	zêta	z
Η	η	êta	h
Θ	θ	thêta	q
Ι	ι	iota	i
Κ	κ	kappa	k
Λ	λ	lambda	l
Μ	μ	mu	m
Ν	ν	nu	n
Χ	χ	xi ou ksi	c
Ο	ο	omicron	o
Π	π	pi	p
Ρ	ρ	rhô	r
Σ	σ	sigma	s
Τ	τ	tau	t
Υ	υ	upsilon	u
Φ	φ	phi	f
Ξ	ξ	chi ou khi	x
Ψ	ψ	psi	y
Ω	ω	omega	w

7. COMPLEMENT : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Ce complément est à étudier lorsque vous aurez traité cette question en mathématiques.
Voici les équations différentielles que vous serez amenés à résoudre en dynamique du point.
La variable est évidemment le temps, noté t.

Equations différentielles du premier ordre : F(t, y, dy/dt) = 0

1 - équations à variables séparables

- On isole les termes en t d'un côté et les termes en y dans l'autre : g (t) dt = h (y) dy
- On intègre membre à membre : $\int g(t)\,dt = \int h(y)\,dy$ (constante trouvée par les conditions initiales).

* Exemple simple résolu : a (dy/dt) + b y = 0

Donc : dy / y = - b dt / a ➔ ln (y) = - (b t / a) + constante ➔ $y = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$

2 - équations linéaires à coefficients constants : a (dy/dt) + b y = h (t)

- Dans ce cas, la solution générale = solution générale de l'équation sans second membre + solution particulière $y_0(t)$

Dans l'exemple précédent : $y = K\,e^{-\frac{b}{a}t} + y_0(t)$ <u>*Constante K trouvée par les conditions initiales*</u>.

- Si h ne dépend pas du temps, y_0 = h / b correspond au cas où dy/dt = 0, c'est-à-dire physiquement à la solution en régime stationnaire (quand on attend assez longtemps).

Equations différentielles du second ordre : F(t, y, dy/dt, d²y/dt²) = 0

1 - équation du type d^2y / dt^2 = g(t) ou constante

- Il faut intégrer 2 fois par rapport à t :

Soit G une primitive de g.

$y = \int G(t)\,dt + C_1\,t + C_2$ <u>*les constantes C_1 et C_2 sont trouvées par les conditions initiales*</u>.

2 - équation du type $d^2y / dt^2 + a^2 y = 0$

- Alors les solutions sont de la formes : $y = A\sin(a\,t+\varphi) = B\cos(a\,t+\psi) = C\cos(a\,t) + D\sin(a\,t)$
- <u>*les deux constantes*</u> (A et φ, ou B et ψ, ou C et D) <u>*sont trouvées par les conditions initiales*</u>.

3 - <u>équations linéaires à coefficients constants</u> : a (d²y/dt²) + b (dy/dt) + c y = h (t)

- Dans ce cas, la solution générale = solution générale de l'équation sans second membre + solution particulière $y_0(t)$

* équation sans second membre : a (d^2y/dt^2) + b (dy/dt) + c y = 0

L'équation caractéristique associée est : a x^2 + b x + c = 0

Ses solutions sont : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

La solution générale de l'équation différentielle sans second membre est alors $y = A\,e^{x_1 t} + B\,e^{x_2 t}$

* équation avec second membre :

La solution s'écrit :

$y = A\,e^{x_1 t} + B\,e^{x_2 t} + y_0(t)$ <u>*les constantes A et B sont trouvées par les conditions initiales*</u>.

ANNEXES 3 – ANNALES 2021-2022

NOVEMBRE 2021 – CC1

(1h30 pas de calculatrice)

1er devoir de cinématique et dynamique du point matériel

Exercice 1 – Calcul vectoriel

Soit un repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Deux forces constantes agissent simultanément sur un point M ; elles ont pour expressions (en Newtons) : $\vec{F}_1 = 4\vec{u}_x + 2\vec{u}_y - 4\vec{u}_z$ et $\vec{F}_2 = \vec{u}_x + 2\vec{u}_y + 2\vec{u}_z$.

1) Calculer les normes $\|\vec{F}_1\|$ et $\|\vec{F}_2\|$.

2) Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$.

3) Déterminer l'angle θ que font entre elles les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

4) Déterminer la résultante $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Exercice 2 – Cinématique : mouvement rectiligne d'une particule

Une particule ponctuelle M se déplace dans l'espace en suivant les équations horaires suivantes, où (x, y, z) sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

$x(t) = t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}$; $y(t) = 3t - 2$; $z(t) = 3t^2 + 5$; où x, y et z sont en mètres.

1) Ecrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$.

2) Exprimer le vecteur vitesse en fonction du vecteur position.
Exprimer les composantes du vecteur vitesse.
Déterminer le vecteur vitesse de la particule $\vec{v}(t)$ à l'instant $t_1 = \frac{1}{6}$ s.

3) Exprimer le vecteur accélération en fonction du vecteur vitesse.
Exprimer les composantes du vecteur accélération.
Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ à l'instant $t_1 = \frac{1}{6}$ s.

4) Calculer le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{a}$ à l'instant $t_1 = \frac{1}{6}$ s.

5) A l'instant $t_1 = \frac{1}{6}$ s, le mouvement est-il accéléré ou retardé ? Justifier.

Exercice 3 - Tension d'une corde et accélération d'une palette

Une palette de masse M = 25 kg est attachée à l'extrémité libre d'une corde verticale, non extensible et de masse négligeable devant M (dont l'autre bout est fixé sur un enrouleur). On prend g = 10 m.s^{-2}. On néglige les frottements avec l'air.

7) Quelles sont les caractéristiques de la force de tension exercée par un fil tendu inextensible et de masse négligeable ?
Que se passe-t-il en termes de vitesse et d'accélération des points du fil ?

8) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la palette.

9) Faire un schéma avec les forces agissant sur la palette.

10) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (ou seconde loi de Newton), puis la projection suivant un axe vertical Oz orienté positivement vers le haut.

11) Déduire la valeur algébrique de l'accélération de cette palette si la tension de la corde T, imposée par l'enrouleur, vaut :

a) 0 N b) 225 N c) 250 N d) 350 N

12) Préciser, dans chaque cas, le sens du mouvement si on admet que la vitesse initiale est nulle.

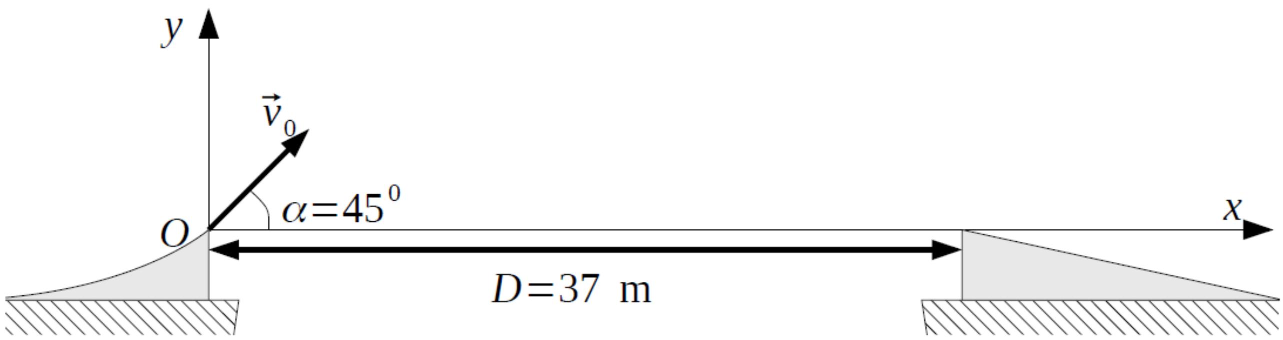
<u>Exercice 4 – Cascadeuse à moto</u>

Une amie cascadeuse souhaite réaliser un saut par-dessus un « canyon » à moto. Elle prépare une rampe de lancement et d'atterrissage avec **un angle $\alpha = 45^0$ au départ et un espacement D = 37 m** (voir schéma). Avant le premier essai, elle estime avoir besoin d'une **vitesse initiale de norme v_0 = 72 km/h**, mais vous demande de vérifier ses calculs.

Pour calculer facilement la distance qu'elle parcourra dans les airs, vous faites l'approximation que **les interactions avec l'air sont négligeables** (poussée d'Archimède et frottements négligés).

1) Faire le bilan des forces, **après avoir quitté le tremplin**, et appliquer le principe fondamental de la dynamique. Exprimer les composantes de l'accélération et montrer que l'accélération ne dépend pas de la masse.

2) On fait le choix qu'au temps initial t = 0 s, la cascadeuse et sa moto quittent la rampe de lancement en x = y = 0 m. Déterminer les équations horaires du mouvement en fonction de g, α, v_0.



3) Déterminer, en fonction de g, α, et v_0, le temps t_f > 0 s pour lequel la cascadeuse atterrit sur la rampe d'atterrissage.

4) Déterminer alors, toujours en fonction de g, α, et v_0, la distance parcourue durant le saut.

Faire l'application numérique pour savoir si l'estimation de la cascadeuse est juste. On prendra
$g = 10\ m.s^{-2}$.

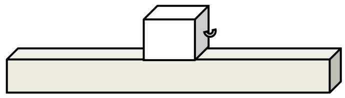
DECEMBRE 2021 – CC2

(1h30 pas de calculatrice)

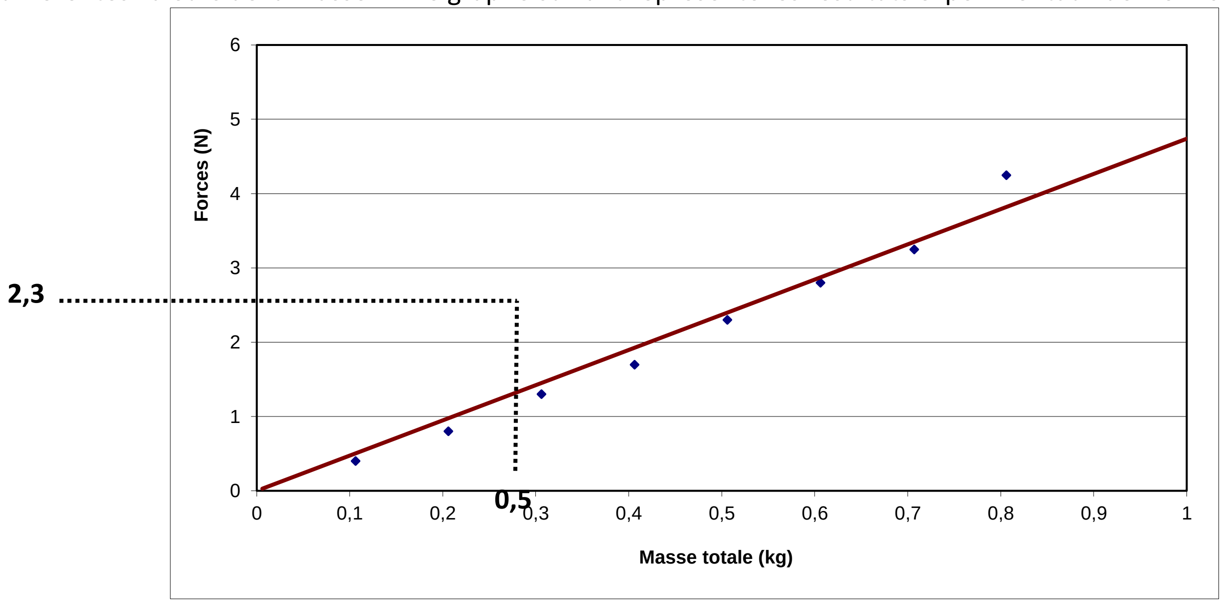
<u>Forces de frottements solides.</u> ***Les parties I et II sont indépendantes.***

I- <u>Question sur les TP : mesure expérimentale d'un coefficient de frottement</u>

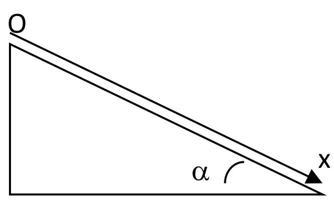
On veut déterminer le coefficient de frottement statique m_s entre le PVC et le bois.
On utilise une plaque plane horizontale en PVC et un pavé en bois muni d'un crochet sur lequel on exerce une force de traction horizontale $\vec{F}$ par l'intermédiaire d'un dynamomètre.



1) Représenter sur un schéma les forces qui s'exercent sur le pavé.
2) Indiquer la relation entre la force de frottement et la réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ lorsque le pavé est immobile (loi de Coulomb).
3) Soit *M* la masse totale du pavé (éventuellement lesté). On note F la norme de $\vec{F}$ et g l'accélération gravitationnelle. En écrivant que le pavé est en équilibre, montrer qu'il n'y a pas glissement tant que $F \leq \mu_s M g$.
4) On mesure la plus petite force *F* à exercer pour provoquer le glissement du pavé en bois sur la plaque pour différentes valeurs de la masse *M*. Le graphe suivant représente les résultats expérimentaux de *F* en fonction de *M*.



a) Ces résultats sont-ils compatibles avec l'expression trouvée en question 3 ?
b) En prenant g ≈ 10 N. kg^{-1}, calculer le coefficient de frottement statique μ_S.



<u>II – Exercice : mouvement d'une luge sur une descente en plan incliné</u>

On s'intéresse au mouvement d'une luge sur un terrain plan incliné.
On suppose que la luge peut être assimilée à un point matériel M de masse m. Le contact entre la luge et le plan incliné se fait avec des frottements solides, caractérisés par un coefficient de frottement statique μ_S et un coefficient de frottement dynamique μ_d.

On note g l'intensité de la pesanteur.
La luge est abandonnée sans vitesse initiale depuis le point O, en haut d'un terrain plan, incliné d'un angle a par rapport à l'horizontale : voir figure au recto.

1) La luge reste immobile tant que l'angle a ne dépasse pas une valeur maximale a_0.
Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la luge.
Représenter sur un schéma les forces qui s'exercent sur la luge.
Déterminer l'expression littérale de la valeur maximale a_0 de l'angle pour qu'elle reste immobile.

2) L'angle a est supérieur à a_0 : la luge se met à glisser sur le terrain.
a) Déterminer, dans ce cas, l'expression de son accélération dans la descente en fonction de la valeur de a.
b) Sachant qu'on choisit comme origine des temps l'instant où la luge commence à descendre sans vitesse initiale depuis le point O, déterminer :

- sa vitesse à un instant t,
- sa position x à un instant t.

III - Exercice : Envoi d'une fusée de détresse dans l'air avec frottements fluides

Un bateau se trouve au milieu d'un lac lorsque le moteur tombe en panne.
Le skipper appelle à l'aide en lançant une fusée de détresse, de masse m, à la verticale de son bateau, à la vitesse initiale $\vec{v_i}$.
On choisit un axe vertical (0z) orienté vers le haut et d'origine confondue avec la position de la fusée à t = 0.
L'air exerce une force de frottements visqueux sur la fusée, $\vec{F} = -\alpha\,\vec{v}$, où a est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ est la vitesse de la fusée.
On note g l'intensité de la pesanteur. On s'intéresse **au mouvement ascendant de la fusée.**

1) Faire le bilan des forces agissant sur la fusée à un instant quelconque de son mouvement ascendant. Les représenter sur un schéma.
2) A l'aide du principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle que doit vérifier la vitesse de la fusée.
3) On note v la norme de $\vec{v}$. On cherche une solution de l'équation sous la forme :

$v(t) = C\,e^{-kt} + D$

Montrer qu'elle convient pour k = a / m et pour une constante D à déterminer en fonction de a, m et g.
Exprimer C en fonction de v_i , a, m et g.

IV – Exercice : analyse dimensionnelle

Par analyse dimensionnelle, et en détaillant le raisonnement, indiquer, pour les deux expressions suivantes, si elle est possible ou non.

$$\Delta L = m\,a/k^2 \qquad\qquad F\,t^2 = 2\,m\,[L\,sin\alpha + v\,t/2]$$

où *t* est une durée, *m* une masse, *L* une longueur, Δ*L* une variation de longueur, *v* une vitesse, a une accélération, *F* une force, *k* la raideur d'un ressort, α un angle.

JANVIER 2022 – CC3

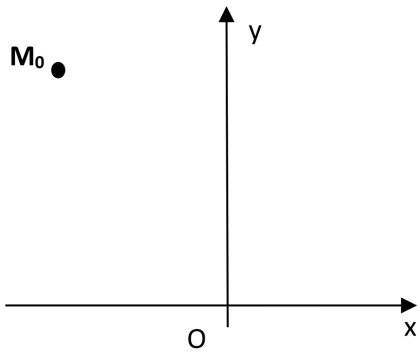
(2h pas de calculatrice)

Exercice 1 : Cinématique en repère polaire

On considère un mobile M, supposé ponctuel, qui se déplace dans le plan xOy.
On note (ρ, θ) les coordonnées polaires de M.

1. **1.1.** Définir les coordonnées ρ et θ.
   1.2. Reproduire sur votre copie le schéma ci-contre, et représenter sur le schéma les coordonnées polaires de M_o. Représenter aussi au point M_0 les deux vecteurs de la base ($\vec{u}_\rho$,$\vec{u}_\theta$), associée aux coordonnées polaires.

2. Le mobile décrit une trajectoire dont les équations horaires sont données en coordonnées polaires par : $\rho = R\sqrt{\theta}$ et $\theta = \theta_0 \left(\frac{t}{\tau}\right)^2$; où R, θ_0 et τ sont des constantes positives. Quelles sont les dimensions de R, θ_0 et τ? Justifier.
   2.2. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}\,(t)$ dans la base ($\vec{u}_\rho$,$\vec{u}_\theta$).
   2.3. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ de M dans la base ($\vec{u}_\rho$,$\vec{u}_\theta$).
   2.4. Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ de M dans la base ($\vec{u}_\rho$,$\vec{u}_\theta$).
   2.5. Déterminer les équations horaires x(t) et y(t) en coordonnées cartésiennes.
   2.6. Quelle est la forme de la trajectoire ?



Exercice 2 : Calcul du travail d'une force et énergie cinétique

Un mobile M se déplace dans le plan xOy, d'un point A, de coordonnées x_A et y_A, à un point B, de coordonnées x_B et y_B.

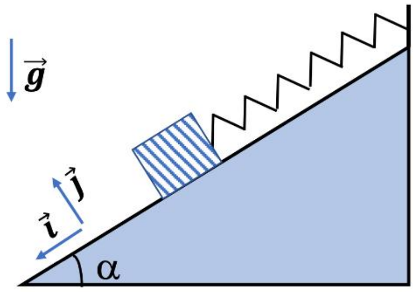
1. Donner la définition du travail élémentaire δW d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{r}$.

M est soumis à une force $\vec{F} = \frac{k}{x^2}\,\vec{u}_x$, k étant une constante et x est non nul.

2. Donner l'expression du déplacement élémentaire $d\vec{r}$ en coordonnées cartésiennes et calculer le travail élémentaire δW de la force $\vec{F}$.
3. Calculer le travail de $\vec{F}$ lors du déplacement de A à B.
4. A l'aide du théorème de l'énergie cinétique que vous énoncerez, déterminez la vitesse du mobile en B s'il est lâché sans vitesse initiale en A.

Exercice 3 : Ressort sur un plan incliné

Toutes les réponses devront être justifiées.



Une caisse, de masse m, peut glisser sans frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (cf. schéma ci-contre). La caisse est accrochée au sommet du plan incliné par un ressort (sans masse) de longueur à vide L_o et de raideur k.
On note L la longueur à l'équilibre du ressort quand la masse est accrochée.
On note g l'intensité de la pesanteur, et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs unitaires respectivement parallèle et perpendiculaire au plan incliné (cf. figure).

Partie 1 : le système est au repos

1. Établir l'inventaire des forces appliquées à la caisse.
Représenter les forces appliquées à la caisse sur le schéma.
Déterminer les composantes de chaque force dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, déterminer L en fonction des paramètres α, m, g, L_0 et k.

Partie 2 : le système est écarté de sa position d'équilibre

On mesure la position de la caisse le long d'un axe x parallèle au ressort, orienté positivement vers le bas, ayant pour origine O la position d'équilibre de la caisse. On note $\vec{v}$ sa vitesse, $\vec{a}$ son accélération.
A l'instant t = 0, la caisse est écartée vers le bas d'une distance x_0, et lâchée sans vitesse initiale.

3. Faire un second schéma du plan incliné avec le ressort, et indiquer sur le schéma l'axe x, l'origine O, les longueurs Lo et L, et la caisse dans une position x > 0.
Montrer que la force de rappel élastique du ressort s'écrit : $\vec{\boldsymbol{T}} = -k\,(x + L - L_o)\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$.

4. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliquée à la caisse, puis le projeter selon les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
En déduire l'équation différentielle du mouvement de la caisse.

(Indication, le résultat de la question 2. Permet de simplifier l'équation différentielle)

5. Montrer que la fonction $x(t) = A\cos(\omega t + b)$ où A, b et ω sont des constantes, est solution de cette équation.
Déterminer ω et la période T des oscillations.
Déterminer A et b en fonction des paramètres du problème.

Exercice 4 : Expérience délicate : faire osciller un smartphone

Un professeur de physique tente d'explorer une activité expérimentale avec son smartphone qui exploite les accéléromètres internes à l'appareil.
L'objectif est de savoir si le dispositif rend compte des prédictions théoriques sur le pendule considéré comme un pendule simple sans frottement.
Le pendule est lâché depuis l'angle θ_0 par rapport à la verticale et sans vitesse à l'instant initial.

1. Sans démonstration, donner l'expression de la période de T en fonction des paramètres physiques du problème.

On considérera que l'évolution de l'angle est de la forme : $\theta(t) = \theta_0 cos(\frac{2\pi t}{T})$ où T est la période du pendule et que dans cette situation, les composantes de l'accélération dans le repère polaire ont pour expression :

$$\begin{cases} a_\theta = \frac{dv}{dt} \\ a_\rho = -\frac{v^2}{L} \end{cases}$$ où v représente la norme de la vitesse du système.

2. Donner l'expression de v en fonction de L et de l'angle θ.

3. En analysant les résultats expérimentaux obtenus avec le smartphone (voir graphes ci-dessous) :

3.1. Estimer les périodes associées à chacune des composantes de l'accélération.

3.2. A l'aide de la question précédente, justifier que la composante orthoradiale a_θ a la même période que le pendule.

3.3. En déduire une valeur numérique approchée de la longueur du pendule simple associé (avec g le champ de pesanteur terrestre 10 m/s² et $\pi^2 \approx 10$.)

4. **(BONUS)**
Justifier par le calcul que la composante radiale a_ρ a une période deux fois plus petite que celle des oscillations du pendule.
La prédiction théorique sur a_ρ est-elle compatible avec les résultats expérimentaux ?
(Rappel : $sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$).

Accélérations radiale a_ρ et orthoradiale a_θ d'un pendule simple obtenues pour les oscillations d'un smartphone relié à son cable d'alimentation