Polycopié de Calcul différentiel et Intégral
Licence 1-Semestre 1
Université de Marne-la-Vallée

2019-2020

Chapitre 1

Nombres Complexes

1.1 Définition et forme algébrique

Définition 1.1.1. *Les nombres complexes sont des couples* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, que l'on notera* $x + \mathbb{i}y$*, qui vérifient les opérations usuelles d'addition et de multiplication des nombres réels avec la convention* $\boxed{\mathbb{i}^2 = -1}$.

Cela revient à identifier 1 avec le vecteur $(1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{i}$ avec le vecteur $(0, 1)$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Si $y = 0$, alors $z = x$ est situé sur l'axe des abscisses, que l'on identifie à $\mathbb{R}$. Dans ce cas on dira que z est *réel*, et $\mathbb{R}$ apparaît comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, appelé *axe réel*.

Définition 1.1.2. Opérations *Si* $z = x+\mathbb{i}y$ *et* $z' = x'+\mathbb{i}y'$ *sont deux nombres complexes, alors on définit les opérations suivantes :*

(1) addition : $z + z' = z' + z = (x + \mathbb{i}y) + (x' + \mathbb{i}y') = (x + x') + \mathbb{i}(y + y')$

(2) multiplication : $zz' = z'z = (x + \mathbb{i}y) \times (x' + \mathbb{i}y') = (xx' - yy') + \mathbb{i}(xy' + yx')$*. C'est la multiplication usuelle avec la convention* $\mathbb{i}^2 = -1$

Propriétés d'addition et de multiplication. On utilise l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ comme on a l'habitude dans $\mathbb{R}$ avec la convention $\mathbb{i}^2 = -1$. En particulier la multiplication se distribue par rapport à l'addition :

$$\boxed{z''(z + z') = z''z + z''z'}$$

et on peut regrouper les termes

$$\boxed{(z + z') + z'' = z + (z' + z'')}$$

(1) L' *opposé* de $z = x + \mathbb{i}y$ est $-z = (-x) + \mathbb{i}(-y) = -x - \mathbb{i}y$.

(2) La *multiplication par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot z = (\lambda x) + \mathbb{i}(\lambda y)$.

(3) L' *inverse* : Tout nombre complexe non nul $z = x + \mathbb{i}y$ (i.e. tel que $(x, y) \neq (0, 0)$ possède un inverse $z' \in \mathbb{C}$ que l'on note $\dfrac{1}{z}$ tel que que $zz' = 1$ (où $1 = 1 + \mathbb{i} \times 0$) avec

$$\boxed{z' = \frac{1}{z} = \frac{x - \mathbb{i}y}{x^2 + y^2}}$$

Pour la preuve on écrit :

$$zz' = \frac{1}{x^2+y^2}(x+\mathbb{i}y)(x-\mathbb{i}y) = \frac{1}{x^2+y^2}((x^2+y^2)+\mathbb{i}(yx-xy)) = 1.$$

Si z'' est un autre inverse tel que $zz''=1$, alors $z' = z'(zz'') = (z'z)z'' = z''$ et $z' = z''$.

(4) La *division* : $\dfrac{z}{z'}$ est le nombre complexe $z \times \dfrac{1}{z'}$.

(5) *Puissances* : $z^2 = z \times z$, $z^n = z \times \cdots \times z$ (n fois, $n \in \mathbb{N}$). Par convention $z^0 = 1$ et $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$.

Proposition 1.1.3. *Soient deux nombres complexes z et z'. Alors*

$$\boxed{zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0}$$

Démonstration. L'implication $\Leftarrow$ vient de la définition de la multiplication.

La réciproque $\Rightarrow$ se montre par contraposée. On suppose que $zz' = 0$ avec $z \neq 0$ **et** $z' \neq 0$. Alors z et z' sont tous les deux inversibles car non nuls. On obtient une contradiction en appliquant le sens direct dans la première égalité ($(zz') = 0$ implique $w(zz') = 0$ pour tout $w \in \mathbb{C}$) :

$$0 = \frac{1}{z}(zz') = \left(\frac{1}{z}z\right)z' = z'$$

□

Remarque 1.1.4. *L'ensemble de ces propriétés définissent la structure des nombres complexes. On dit que $\mathbb{C}$ muni des lois d'addition et de multiplication a une structure de* corps.

1.2 Partie réelle et imaginaire, Conjugaison

Soit $z = x + \mathbb{i}y$ un nombre complexe, sa *partie réelle* est le réel x et on la note $\Re e(z)$; sa *partie imaginaire* est le réel y et on la note $\Im m(z)$. Par identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, l'écriture $z = \Re e(z) + \mathbb{i}\Im m(z)$ est unique :

$$z = z' \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \Re e(z) = \Re e(z') \\ \text{et} \\ \Im m(z) = \Im m(z') \end{cases}$$

En particulier un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Un nombre complexe est nul si et et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls.

Définition 1.2.1. *Le conjugué de $z = x + \mathbb{i}y$ est $\bar{z} = x - \mathbb{i}y$, autrement dit $\Re e(\bar{z}) = \Re e(z)$ et $\Im m(\bar{z}) = -\Im m(z)$. Le point $\bar{z}$ est le symétrique du point z par rapport à l'axe réel.*

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a les formules suivantes :

(1) $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$ et $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$,

(2) $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$
(3) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ si $z' \neq 0$.
(4) $\overline{\overline{z}} = z$
(5) $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

La partie réelle et la partie imaginaire de $z = x + \mathbb{i}y$ sont reliées à la conjugaison par

$$\boxed{\Re e(z) = x = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \Im m(z) = y = \frac{z - \overline{z}}{2\mathbb{i}}}$$

Définition 1.2.2. *On dit qu'un nombre complexe $z = x + \mathbb{i}y$ est réel s'il vérifie*

$$\boxed{z = \overline{z} \Leftrightarrow z = x} \text{ i.e. } y = 0 \text{ i.e. } \Im m(z) = 0$$

On dit qu'un nombre complexe $z = x + \mathbb{i}y$ est imaginaire pur s'il vérifie

$$\boxed{z = -\overline{z} \Leftrightarrow z = \mathbb{i}y} \text{ i.e. } x = 0 \text{ i.e. } \Re e(z) = 0$$

1.3 Module d'un nombre complexe.

Définition 1.3.1. *Le module de $z = x + \mathbb{i}y$ est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Comme $z\bar{z} = (x + \mathbb{i}y)(x - \mathbb{i}y) = x^2 + y^2$ alors le module vaut aussi $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.*

Remarque 1.3.2. *Les nombres $z = x + \mathbb{i}y, -z = -x - \mathbb{i}y, \overline{z} = x - \mathbb{i}y, \mathbb{i}z = -y + \mathbb{i}x$ ont tous le même module $\sqrt{x^2 + y^2}$.*

Proposition 1.3.3. (propriétés du module)

(1) Relation avec la conjugaison : $|\bar{z}| = |z|$, $|z|^2 = z\bar{z}$ et donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ lorsque $z \neq 0$.
(2) Relation avec la valeur absolue : lorsque z est réel, son module est égal à sa valeur absolue.
(3) Module du produit : $|zz'| = |z||z'|$, $|z^{-1}| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
(4) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
(5) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on a $|\lambda z| = \lambda|z|$.
(6) $|\Re e(z)| \leq |z|$ et $|\Im m(z)| \leq |z|$ et
  — Si $|\Re e(z)| = |z|$ alors $z \in \mathbb{R}$
  — Si $|\Im m(z)| = |z|$ alors $z \in \mathbb{i}\mathbb{R}$.
(7) On a l''inégalité triangulaire : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ et si $|z + z'| = |z| + |z'|$ avec $z, z' \neq 0$, il existe une constante $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \Lambda z'$.

Démonstration. (1) se démontre avec la définition du module.
(2) Si $z = x$, alors $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ où $|x|$ est la valeur absolue du nombre réel x ($|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$).

(3) $|zz'|^2 = zz'\bar{z}\bar{z}' = (z\bar{z})(z'\bar{z}') = |z|^2|z'|^2$. Comme le module est un nombre positif alors $|zz'| = |z||z'|$.
(4) Si $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 0$ alors $x^2+y^2 = 0$ implique $x = y = 0$.
(5) $|\lambda z|^2 = \lambda z \bar{\lambda}\bar{z} = \lambda^2 |z|^2$ et comme λ est positif $|\lambda z| = \lambda |z|$.
(6) Comme $|\Re e z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|$. L'égalité implique $y = 0$.
(7) On écrit d'abord

$$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}(|z+z'|)^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = z\bar{z} + z\bar{z}' + \bar{z}z' + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + 2\Re e(z\bar{z}') + |z'|^2\end{aligned}$$

Il reste à démontrer que $2\Re e(z\bar{z}') \leq 2|zz'|$. Comme $|z'| = |\bar{z}'|$, on obtient l'inégalité par (6). Donc $(|z+z'|)^2 \leq (|z|+|z'|)^2$. Comme les nombres sont positifs, on obtient l'inégalité.
Si $z' = 0$, il y a égalité mais pas de constante Λ. Dans le cas de l'égalité $|z+z'| = |z| + |z'|$ avec $z, z' \neq 0$, on a nécessairement $2\Re e(z\bar{z}') = 2|z\bar{z}'|$ et $z\bar{z}'$ est un réel positif (car égal à un module positif). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$z\bar{z}' = \lambda, \text{ et si } z' \neq 0, \text{ on a } z = \frac{\lambda}{|z'|} z'.$$

□

Remarque. *Il n'y pas d'ordre naturel sur $\mathbb{C}$, il ne faut donc jamais écrire $z \geqslant 0$ ou $z \leqslant z'$.*

1.4 Racines carrées d'un nombre complexe

Pour $w = a + \mathbb{i}b \in \mathbb{C}$, une *racine carrée* est un nombre complexe z tel que $z^2 = a + \mathbb{i}b$. Par exemple si $w = a \in \mathbb{R}_+$, on connaît deux racines carrées : $\sqrt{a}, -\sqrt{a}$. Autre exemple : les racines carrées de -1 sont $\mathbb{i}$ et $-\mathbb{i}$.

Proposition 1.4.1. *Soit w un nombre complexe, alors w admet deux racines carrées, z et $-z$.*

Attention ! Contrairement au cas réel, il n'y a pas de façon privilégiée de choisir une racine plutôt que l'autre, donc pas de fonction racine. On ne dira donc jamais "soit z **la** *racine de w" mais* **les** *racines carrées de w. En particulier on ne peut pas utiliser le signe $\sqrt{}$.*

Si $w \neq 0$, les deux racines carrées sont distinctes. Si $w = 0$ alors $z = 0$ est une racine double. Pour $w = a + \mathbb{i}b$ nous allons calculer z et $-z$ en fonction de a et b.

Démonstration. Nous écrivons $z = x + \mathbb{i}y$ et nous cherchons x, y tels que $z^2 = w = a + \mathbb{i}b$.

$$\begin{aligned} z^2 = w &\iff (x+\mathbb{i}y)^2 = a+\mathbb{i}b \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{array}\right. \quad \text{en identifiant parties réelles et parties imaginaires.} \end{aligned}$$

Petite astuce ici : nous rajoutons l'équation $|z|^2 = |w|$ (qui se déduit bien sûr de $z^2 = w$) qui s'écrit aussi $x^2+y^2 = |w| = \sqrt{a^2+b^2}$. Nous obtenons des systèmes équivalents aux précédents :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \\ x^2+y^2=|w|=\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x^2=|w|+a \\ 2y^2=|w|-a \\ 2xy=b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|w|+a} \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|w|-a} \\ 2xy=b \end{array}\right.$$

Discutons suivant le signe du réel b. Si $b \geqslant 0$, x et y sont de même signe ou nuls (car $2xy = b \geq 0$) donc

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} + \mathbb{i}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right),$$

et si $b \leqslant 0$

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} - \mathbb{i}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right).$$

En particulier si $b = 0$ le résultat dépend du signe de a, si $a \geqslant 0$, $\sqrt{a^2} = a$ et par conséquent $z = \pm\sqrt{a}$, tandis que si $a < 0$, $\sqrt{a^2} = -a$ et donc $z = \pm\mathbb{i}\sqrt{-a} = \pm\mathbb{i}\sqrt{|a|}$. $\square$

Il n'est pas nécessaire d'apprendre ces formules mais il est indispensable de savoir refaire les calculs.

Exemple. *Les racines carrées de* $\mathbb{i}$ *sont* $+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathbb{i})$ *et* $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathbb{i})$.
En effet :

$$\begin{aligned} z^2 = \mathbb{i} &\iff (x+\mathbb{i}y)^2 = \mathbb{i} \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Rajoutons la conditions $|z|^2 = |\mathbb{i}|$ *pour obtenir le système équivalent au précédent :*

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x^2=1 \\ 2y^2=1 \\ 2xy=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2xy=1 \end{array}\right.$$

Les réels x *et* y *sont donc de même signe, nous trouvons bien deux solutions :*

$$x+\mathbb{i}y = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbb{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \textit{ou} \quad x+\mathbb{i}y = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbb{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.5 Équation du second degré

Proposition 1.5.1. *L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, possède deux solutions $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ éventuellement confondues.*

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ. Alors les solutions sont

$$\boxed{z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.}$$

Et si $\Delta = 0$ alors la solution $z = z_1 = z_2 = -b/2a$ est unique (elle est dite double). Si on s'autorisait à écrire "$\delta = \sqrt{\Delta}$" pour le nombre complexe Δ, on obtiendrait la même formule que celle que vous connaissez lorsque a, b, c sont réels.

Exemple.

(1) $z^2 + z + 1 = 0$, $\Delta = -3$, $\delta = \mathbb{i}\sqrt{3}$, *les solutions sont* $z = \dfrac{-1 \pm \mathbb{i}\sqrt{3}}{2}$.

(2) $z^2 + z + \frac{1-\mathbb{i}}{4} = 0$, $\Delta = \mathbb{i}$, $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathbb{i})$, *les solutions sont* $z = \dfrac{-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathbb{i})}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\mathbb{i})$.

On retrouve aussi le résultat bien connu pour le cas des équations à coefficients réels :

Corollaire 1.5.2. *Si les coefficients a, b, c sont réels alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et les solutions sont de trois types :*

(1) si $\Delta = 0$, la racine double est réelle et vaut $-\dfrac{b}{2a}$,

(2) si $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,

(3) si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes, mais non réelles, $\dfrac{-b \pm \mathbb{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration. On écrit la factorisation

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\delta}{2a}\right)\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\delta}{2a}\right) \\
&= a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right) = a\,(z - z_1)\,(z - z_2)
\end{aligned}$$

Donc le binôme s'annule si et seulement si $z = z_1$ ou $z = z_2$. □

1.6 Interprétation géométrique des nombres complexes.

Définition 1.6.1. *On munit le plan d'un repère orthonormé direct, d'origine O. Alors tout point du plan M est déterminé par ses coordonnées (x, y). On appelle affixe du point M le nombre complexe $z = x + \mathbb{i}y$.*

Proposition 1.6.2. *Soit z, z' des nombres complexes. Alors*

(1) *Les points d'affixe z et $-z$ sont symétriques par rapport au point O. Les points z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (Ox). Les points z et $-\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (Oy). En particulier les points z, $\overline{z}$, $-z$ et $-\overline{z}$ forment un rectangle.*

(2) *Les points d'affixe $\Re e(z)$ et $i\Im m(z)$ sont les projetés orthogonaux de z respectivement sur l'axe (Ox) et (Oy)*

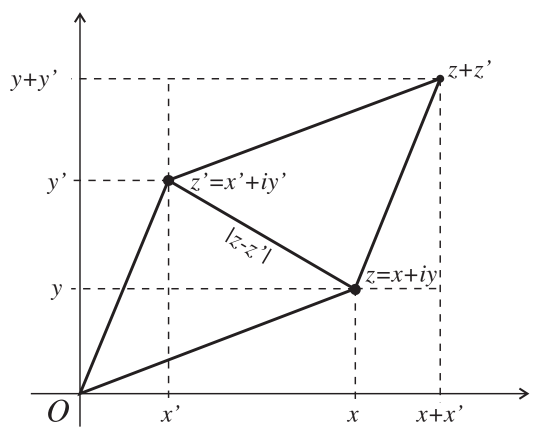
(3) *Le nombre $|z|$ est la longueur du segment OM. Le nombre $|z - z'|$ est la distance entre les points d'affixe z et z'. Ainsi si A est le point d'affixe $a \in \mathbb{C}$ et un nombre réel $r > 0$, l'ensemble suivant*

$$\boxed{\{z \in \mathbb{C}; |z - a| = r\}}$$

est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre A et de rayon r.

(4) *Le nombre $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

(5) *Les points d'affixe $0, z, z'$ et $z + z'$ forment un parallélogramme.*



L'addition des nombres complexes représente la relation de Chasles pour les vecteurs du plan. Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, alors

$$(z_B - z_A) + (z_C - z_B) = z_C - z_A$$

La multiplication des nombres complexes correspond au produit scalaire. Si $z_1 = x_1 + \mathbb{i}y_1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u_1}$ et $z_2 = x_2 + \mathbb{i}y_2$, l'affixe de $\overrightarrow{u_2}$, on a

$$\boxed{z_1\bar{z}_2 = (x_1 + \mathbb{i}y_1)(x_2 - \mathbb{i}y_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + \mathbb{i}(y_1x_2 - x_1y_2)}$$

Proposition 1.6.3. *Le produit scalaire de deux vecteur $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ d'affixe z_1 et z_2 est donné par $u_1.u_2 = \Re e(z_1\bar{z}_2)$. En particulier on dit que*

$$\boxed{\begin{array}{lll} \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} & \text{si et seulement si} & z_1\bar{z}_2 = \mathbb{i}\lambda \text{ est un imaginaire pure} \\ \overrightarrow{u_1} = \lambda\overrightarrow{u_2} & \text{si et seulement si} & z_1\bar{z}_2 = \lambda \text{ est un réel} \end{array}}$$

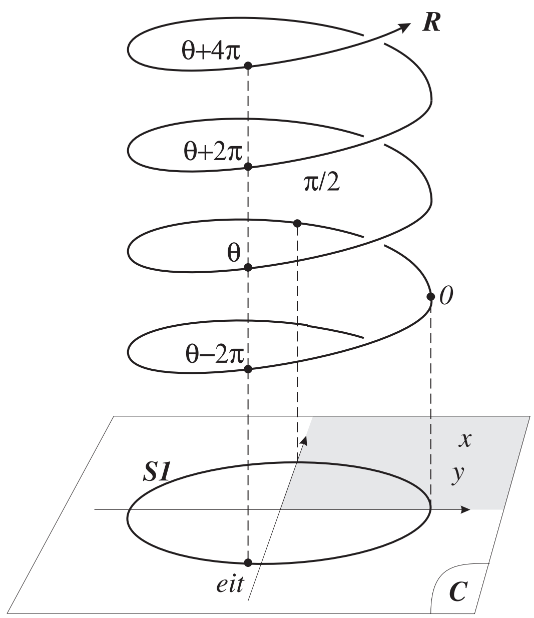
1.7 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Le cercle trigonométrique $\mathbb{S}^1$ est l'ensemble des nombres complexes de module unité :

$$\boxed{\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}}.$$

Il est stable par produit et inverse i.e.

$$\boxed{z, z' \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow zz' \in \mathbb{S}^1 \text{ et } z \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{S}^1}$$



Theorem 1.7.1. (Existence de l'exponentielle complexe-Admis) *Il existe une unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{S}^1$, appelée exponentielle complexe et notée*

$$\theta \in \mathbb{R} \to e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1,$$

qui a les propriétés suivantes, pour tout $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

(1) $\boxed{e^{\mathbb{i}\theta}e^{\mathbb{i}\varphi} = e^{\mathbb{i}(\theta+\varphi)}}$

(2) Dérivable (chapitre calcul derivabilité)

(3) Tout élément z de $\mathbb{S}^1$ peut s'écrire $z = e^{i\theta}$.

(4) L'écriture précedente est unique à un multiple entier de 2π près :

$$\boxed{e^{\mathbb{i}\theta} = e^{\mathbb{i}\varphi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \varphi + 2k\pi}$$

En particulier, si on se restreint à un intervalle I semi ouvert de longueur 2π (par exemple $I = [0, 2\pi[$, $]0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi[$),tout point de $\mathbb{S}^1$ se représente de manière unique $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in I$ (c'est une bijection de $\mathbb{S}^1$ sur I).

(5) Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, le nombre $z = e^{i\theta}$ vérifie $x, y > 0$ (ceci pour avoir l'unicité puisque $\theta \to e^{-i\theta}$ vérifie aussi les autres propriétés).

Commentaires : La construction de l'exponentielle complexe est délicate. Cependant on peut faire le lien avec les notions de géométrie introduites au lycée :

Soit A le point de coordonnée $(1, 0)$ (donc d'affixe $z = 1$) et M est un point du cercle unité qui forment un angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$. Les coordonnées du point M sont données par $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ (et donc d'affixe $z = \cos\alpha + \mathbb{i}\sin\alpha$) où α est une mesure de l'angle orienté que fait le vecteur unité $\overrightarrow{OA} = (1, 0)$ avec le vecteur $\overrightarrow{OM} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Il y a ici une vraie difficulté pour rendre rigoureux le passage d'un angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ entre deux vecteurs à un nombre réel α qui en exprime la mesure (on a besoin d'un rapporteur). On admet ainsi qu'a tout nombre réel $\alpha \in [0, 2\pi[$ correspond un arc du cercle unité joignant A à M dont la longueur est α. On pose alors $\cos\alpha = d$ où $d = \overline{OH}$ avec H la projection orthogonal de M sur la droite (OA) i.e. la longueur du côté adjacent du triangle rectangle OHA.

Les fonctions $\alpha \mapsto \cos\alpha$ et $\alpha \mapsto \sin\alpha$ sont ainsi les longueurs des côtés OH et HM du triangle rectangle AOM dont l'hypothénuse est de longeur égale à 1. Ces fonctions vérifient $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$ et $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$ (on fait le tour complet du cercle dont la longueur est 2π) et sont des fonctions dérivables (on le démontrera dans le chapitre sur la dérivabilité avec de la géométrie).

On étudie la fonction à valeur complexe

$$F(\alpha) = \cos\alpha + \mathbb{i}\sin\alpha$$

Une démonstration géométrique simple permet d'établir les formules trigonométriques d'addition des angles quand $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$.

$$F(\alpha)F(\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + \mathbb{i}(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha) = F(\alpha + \beta)$$

Cette relation n'étant autre que la propriété 1] de l'exponentielle complexe, la fonction F vérifie ainsi les propriétés du théorème. La propriété d'unicité nous permet ainsi d'identifier

$$e^{\mathbb{i}\theta} = F(\theta) = \cos\theta + \mathbb{i}\sin\theta.$$

Remarque : C'est l'application $\theta \to e^{i\theta}$ qui permet de relier l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ avec un nombre réel α. Il faut donc construire par des méthodes d'analyse l'exponentielle complexe ou bien les fonctions circulaires $\theta \to \cos\theta$ et $\theta \to \sin\theta$, afin de justifier les méthodes du secondaire en toute rigueur.

Définition 1.7.2. *Soit θ un nombre réel. On appelle sinus et cosinus de θ, les nombres réels suivants :*

$$\boxed{\sin\theta := \Im m(e^{\mathbb{i}\theta}) \ \text{ et } \ \cos\theta := \Re e(e^{\mathbb{i}\theta})}$$

Dans un triangle rectangle le rapport des longueurs entre le côté opposé et le côté adjacent s'exprime en fonction de l'angle au sommet. Ce rapport en fonction de l'angle est donné par la fonction tangente de θ :

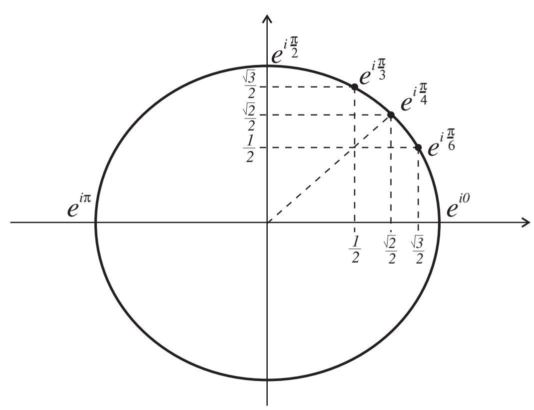
$$\boxed{\tan\theta := \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

Corollaire 1.7.3. *Pour tout nombre réel θ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on a :*

$$\boxed{e^{i0} = 1 \qquad \overline{e^{\mathbb{i}\theta}} = (e^{\mathbb{i}\theta})^{-1} = e^{-\mathbb{i}\theta} \qquad (e^{\mathbb{i}\theta})^n = e^{\mathbb{i}n\theta}}$$

De plus l'exponentielle prend les valeurs suivantes, à retenir :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$e^{i\theta}$	1	$\frac{\sqrt{3}+\mathbb{i}}{2}$	$\frac{1+\mathbb{i}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1+\mathbb{i}\sqrt{3}}{2}$	$\mathbb{i}$	-1



Démonstration. (1) Pour $e^{i0} = 1$, on écrit que $z = e^{i0}$ est solution de l'équation $z^2 = z$ en utilisant (1), dont l'unique solution de module $|z| = 1$ est $z = 1$.

(2) On sait que si $z = e^{\mathbb{i}\theta} \in \mathbb{S}^1$, alors $\frac{1}{z} = \bar{z} \in \mathbb{S}^1$ et $(e^{\mathbb{i}\theta})^{-1} = \overline{e^{\mathbb{i}\theta}}$. Si on note $\overline{e^{\mathbb{i}\theta}} = e^{\mathbb{i}\theta'}$, alors $z\bar{z} = 1$ s'écrit comme

$$e^{\mathbb{i}\theta}e^{\mathbb{i}\theta'} = e^{\mathbb{i}(\theta+\theta')} = 1 = e^{i0}.$$

On en déduit que $(e^{\mathbb{i}\theta})^{-1} = e^{-\mathbb{i}\theta}$. La dernière égalité se démontre par récurrence avec la propriété (1).

(3) Pour établir les relations entre les valeurs de θ est l'expression algébrique des nombres, il suffit de remarquer que la propriété (1) de l'exponentielle montre que $z = e^{\mathbb{i}\pi}$ est solution de $z^2 = 1$, $z = e^{\mathbb{i}\pi/2}$ est solution de $z^2 = -1$.

(4) Si on note $z = e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}$, on remarque que $z \neq 1$, car $\frac{\pi}{3} \neq 0 + 2k\pi$, et $z^3 = 1$. On utilise la formule de la somme des termes d'une suite géométrique

$$z^2 + z + 1 = \frac{z^3 - 1}{z - 1} = 0 \text{ pour } z \neq 1,$$

pour montrer que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$. Ainsi $e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}$ est une racine de l'équation du second degré :

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Le calcul des racines donne : $z = \frac{-1+\mathbb{i}\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{-1-\mathbb{i}\sqrt{3}}{2}$. Grâce au (5) du théorème 8.1, on sait que la partie imaginaire de $e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}$ est la même que celle de $e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{3}}$. On en déduit la valeur de $e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, puis celle de $e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1+\mathbb{i}\sqrt{3}}{2}$.

(5) Calcul de $e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{6}}$. On a :

$$e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{6}} = e^{\mathbb{i}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = \mathbb{i}e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{3}} = \mathbb{i}\overline{\frac{1 + \mathbb{i}\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + \mathbb{i}}{2}$$

□

L'existence de l'exponentielle permet de donner une écriture trigonométrique à un nombre complexe

Définition 1.7.4. *Soit z un nombre complexe de module $r = |z|$. Il existe un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\boxed{z = re^{\mathbb{i}\theta}}$$

Lorsque z est non nul, θ est unique à un multiple entier de 2π près i.e. :

$$\boxed{re^{\mathbb{i}\theta} = r'e^{\mathbb{i}\varphi} \Rightarrow r = r' \text{ et } \theta = \varphi + 2k\pi}$$

Cette écriture est la forme trigonométrique d'un nombre complexe. Le nombre θ est appelé l'argument de z, noté $\boxed{\theta = \arg(z)}$.

Proposition 1.7.5. *L'argument satisfait les propriétés suivantes :*

(1) $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
(2) $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}$
(3) $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
(4) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$

Les propriétés de l'application exponentielle vont nous permettre de mémoriser un important formulaire de trigonométrie. Le formulaire minimale suivant développe les formules les plus utilisées. Les autres formules pouvant se déduire de celles-ci.

Opération dans $\mathbb{C}$		Forme Algébrique	Forme trigonométrique
	z $\|z\| = 1$	$x + \mathbb{i}y$ $x^2 + y^2 = 1$	$re^{\mathbb{i}\theta} = r\cos\theta + \mathbb{i}r\sin\theta$ $\|e^{\mathbb{i}\theta}\| = 1 \Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
Formule d'Euler	$\Re e(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ $\Im m(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$	$\Re e(x + \mathbb{i}y) = x$ $\Im m(x + \mathbb{i}y) = y$	$\cos\theta = \frac{e^{\mathbb{i}\theta} + e^{-\mathbb{i}\theta}}{2}$ $\sin\theta = \frac{e^{\mathbb{i}\theta} - e^{-\mathbb{i}\theta}}{2\mathbb{i}}$
	z'	$x' + \mathbb{i}y'$	$re^{\mathbb{i}\varphi} = r\cos\varphi + \mathbb{i}r\sin\varphi$
Formule d'addition	zz'	$(xx' - yy')$ $+\mathbb{i}(xy' + yx')$	$e^{\mathbb{i}\theta}e^{\mathbb{i}\varphi} = e^{\mathbb{i}(\theta+\varphi)}$ $\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$ $\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$
Duplication de l'angle	z^2	$x^2 - y^2 + 2\mathbb{i}xy$	$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$
Formule de Moivre	z^n	$(x + \mathbb{i}y)^n$	$(e^{\mathbb{i}\theta})^n = e^{\mathbb{i}n\theta}$ $(\cos\theta + \mathbb{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathbb{i}\sin(n\theta)$
Période			$e^{\mathbb{i}(\theta+2\pi)} = e^{\mathbb{i}\theta}$ $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$
Parité	$\overline{z}$	$x - \mathbb{i}y = e^{-\mathbb{i}\theta}$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
Symétrie centrale	$-z$	$-x - \mathbb{i}y = e^{-\mathbb{i}(\theta+\pi)}$	$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$
Symétrie axiale	$-\overline{z}$	$-x + \mathbb{i}y = e^{\mathbb{i}(\pi-\theta)}$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
Rotation 1/4 tour	$\mathbb{i}z$	$-y + \mathbb{i}x = e^{\mathbb{i}(\frac{\pi}{2}+\theta)}$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$ $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$
	$\mathbb{i}\overline{z}$	$y + \mathbb{i}x = e^{\mathbb{i}(\frac{\pi}{2}-\theta)}$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$

1.8 Linérarisation et développement en trigonométrie

On dit qu'une expression trigonométrique $f(\cos\theta, \sin\theta)$ est linéarisable si on peut l'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire du type suivant :

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + ... + a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta$$

Linérariser $f(\cos\theta, \sin\theta)$, c'est trouver une formule de ce type en utilisant principalement la formule de Moivre du tableau :

$$\boxed{(e^{\mathbb{i}\theta})^n = e^{\mathbb{i}n\theta} = (\cos\theta + \mathbb{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathbb{i}\sin(n\theta)}$$

ainsi que les formules d'Euler :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{\mathbb{i}\theta}+e^{-\mathbb{i}\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{\mathbb{i}\theta}-e^{-\mathbb{i}\theta}}{2\mathbb{i}}}$$

Proposition 1.8.1. *(Admis pour l'unicité) Tout polynôme trigonométrique en* $\sin\theta$ *et* $\cos\theta$ *se linéarise en une seule manière. Réciproquement on pourra développer* $\cos n\theta$ *uniquement en fonction de* $\sin\theta$ *et* $\cos\theta$ *et de leur puissances successives.*

Formule du binôme de Newton et autres égalités utiles. La linéarisation ou le développement utilise la formule du binôme de Newton qui concerne le développement de $(x+y)^n$.

Notation du signe somme : On note la somme des nombres $(a_1, ..., a_n)$ par

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

Dans cette expression la variable k ou i est muette et n'a pas de sens. Par exemple, l'expression $k + (\sum_{k=1}^{n} a_k)$ n'a pas de sens du fait que k est une variable. On note que :

- $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$
- $\sum_{k=1}^{n}(k+n) = (\sum_{k=1}^{n} k) + n^2$

On pourra changer d'indice dans une somme en posant $j = k+1$:

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} = a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

Proposition 1.8.2. *Pour tout nombre* $x, y \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, on a*

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

avec la notation $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ *si* $n \in \mathbb{N}^*$ *et la convention* $0! = 1$ *et* $1! = 1$.

Démonstration. On démontre cette formule par récurrence avec

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y) \sum_{k=0}^{k=n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-k} y^k$$

Puis en utilisant des changements de variable sous le signe somme, il suffit de montrer que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Cette dernière formule permet de calculer effectivement les coefficients $\binom{n}{k}$ en utilisant le triangle de Pascal :

	0	1	2	3	4	5	k
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
n	$\cdots$						

$\square$

Proposition 1.8.3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ différent de 1, on a l'expression d'une suite géométrique et arithmétique :*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

La preuve est simple : notons $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$, alors en développant $S \cdot (1 - z)$ presque tous les termes se télescopent et l'on trouve $S \cdot (1 - z) = 1 - z^{n+1}$. En effet

$$S \cdot (1 - z) = \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} z^k - z^{k+1} = z^0 - z^{n+1} = 1 - z^{n+1}$$

On dit que c'est une somme télescopique pour laquelle on a le calcul :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (b_i - b_{i+1}) = b_0 - b_{n+1}}$$

En effet

$$S = \sum_{k=0}^{n} (b_i - b_{i+1}) = \sum_{k=0}^{n} b_i - \sum_{k=0}^{n} b_{i+1} = \sum_{k=0}^{n} b_i - \sum_{j=1}^{n+1} b_j = b_0 - b_{n+1}$$

Développement. On exprime $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Méthode : on utilise la formule de Moivre pour écrire $\cos(n\theta) + \mathbb{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathbb{i}\sin\theta)^n$ que l'on développe avec la formule du binôme de Newton.

Exemple.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + \mathbb{i}\sin 3\theta &= (\cos\theta + \mathbb{i}\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta + 3\mathbb{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathbb{i}\sin^3\theta\\ &= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + \mathbb{i}\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \quad \textit{et} \quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

Linéarisation. On exprime $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en fonction des $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ pour k allant de 0 à n.

Méthode : avec la formule d'Euler on écrit $\cos^n\theta = \left(\frac{e^{\mathbb{i}\theta}+e^{-\mathbb{i}\theta}}{2}\right)^n$ et $\sin^n\theta = \left(\frac{e^{\mathbb{i}\theta}-e^{-\mathbb{i}\theta}}{2\mathbb{i}}\right)^n$. On développe à l'aide du binôme de Newton puis on regroupe les termes par paires conjuguées.

Exemple.

$$\begin{aligned}\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{\mathbb{i}\theta}-e^{-\mathbb{i}\theta}}{2\mathbb{i}}\right)^3\\ &= \frac{1}{-8\mathbb{i}}\left((e^{\mathbb{i}\theta})^3 - 3(e^{\mathbb{i}\theta})^2e^{-\mathbb{i}\theta} + 3e^{\mathbb{i}\theta}(e^{-\mathbb{i}\theta})^2 - (e^{-\mathbb{i}\theta})^3\right)\\ &= \frac{1}{-8\mathbb{i}}\left(e^{3\mathbb{i}\theta} - 3e^{\mathbb{i}\theta} + 3e^{-\mathbb{i}\theta} - e^{-3\mathbb{i}\theta}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3\mathbb{i}\theta}-e^{-3\mathbb{i}\theta}}{2\mathbb{i}} - 3\frac{e^{\mathbb{i}\theta}-e^{-\mathbb{i}\theta}}{2\mathbb{i}}\right)\\ &= -\frac{\sin 3\theta}{4} + \frac{3\sin\theta}{4}\end{aligned}$$

1.9 Résolution d'équation du type $z^n = a$

Le résultat sur la fonction carrée utilisé se généralise aux puissances supérieures. Ainsi, étant donné un nombre réel a et un nombre entier $n \geq 2$, l'équation $x^n = a$, d'inconnue réelle x admet une seule solution positive ou nulle.

Définition 1.9.1. *On appelle racine n-ième d'un nombre réel* $\boxed{a \geq 0,}$ *l'unique nombre réel* positif ou nul, *noté* $\sqrt[n]{a}$, *tel que :* $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.}$ *Ainsi on a :*

$$\boxed{x \geq 0 \text{ et } x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a} \quad \text{lorsque } a \geq 0.}$$

Proposition 1.9.2 (Résolution de $z^n = a$). *Soient $n \geq 2$ un entier naturel, et a un nombre complexe* non nul. *Alors l'équation $z^n = a$, d'inconnue complexe z, admet exactement n solutions distinctes données par :*

$$\boxed{z^n = a \iff \exists k \in \{0, 1, \ldots, n-1\},\ z = \sqrt[n]{|a|}\exp\left(i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad \text{avec } \theta = \arg a.}$$

Démonstration. 1. *Détermination du module des solutions :*
Si $z^n = a$ on en déduit que $|z|^n = |a|$, donc, comme on a affaire à des nombres réels positifs, on a nécessairement $|z| = \sqrt[n]{|a|}$.

2. *Détermination de l'argument des solutions*
En écrivant l'inconnue z sous forme trigonométrique $z = |z|e^{\mathbb{i}\phi}$, on a

$$\begin{aligned} z^n = a \quad &\Leftrightarrow \quad \left(|z|e^{\mathbb{i}\phi}\right)^n = |a|e^{\mathbb{i}\theta} \\ &\Leftrightarrow \quad |z|^n e^{\mathbb{i}n\phi} = |a|e^{\mathbb{i}\theta} \text{ d' après la formule de Moivre} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{\mathbb{i}n\phi} = e^{\mathbb{i}\theta} \text{ puisque } |z| = \sqrt[n]{|a|} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ n\phi = \theta + 2k\pi \text{ d' après le (4) du Théorème de l'exponentielle complexe} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

3. *Détermination des solutions*
Ce qui précède montre que :

$$z^n = a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = z_k, \text{ avec } z_k = \sqrt[n]{|a|} \exp\left(i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right).$$

Cependant il faut remarquer que les solutions z_k ne sont pas toutes différentes puisque :

$$\begin{aligned} z_k = z_\ell \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{|a|} \exp\left(i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{|a|} \exp\left(i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\ell\pi}{n}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \exp\left(i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) = \exp\left(i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\ell\pi}{n}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists p \in \mathbb{Z},\ \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2\ell\pi}{n} + 2p\pi \text{ (Théorème de l'exponentielle complexe)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists p \in \mathbb{Z},\ k = \ell + 2pn \end{aligned}$$

Ceci signifie que deux solutions z_k et z_ℓ sont égales si et seulement si les entiers k et ℓ diffèrent d'un multiple entier de n. Ainsi, en particulier, on a $z_{k+n} = z_k$; et deux solutions z_k et z_ℓ avec $k \neq \ell$ et $k, \ell \in \{0, \ldots, n-1\}$ sont distinctes. Donc il y a bien exactement n solutions distinctes comme annoncé.

□

Remarque 1.9.3. *Lorsque $a = 0$, l'équation $z^n = a$ a une seule solution $z = 0$ en vertu de la proposition 2.3.*

Une lecture attentive de la fin de cette démonstration montre que l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$ qui apparaît dans la solution peut être remplacé par n'importe quel autre ensemble de n entiers consécutifs, comme par exemple $\{1, \ldots, n\}$ ou $\{-n+1, \ldots, 0\}$.

1.10 Les racine n-ièmes de l'unité

Définition 1.10.1. *L'ensemble $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\}$ des racines de l'unité constitue l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$.*

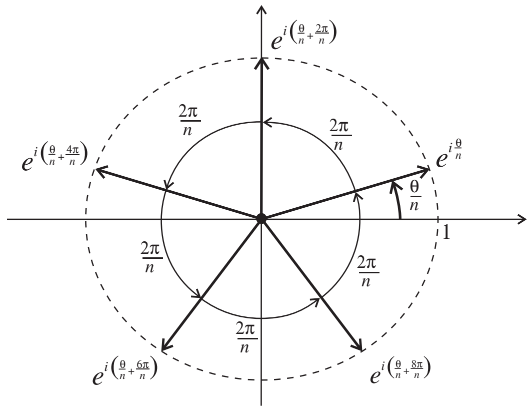


FIGURE 1.1 – Figure du cas où $n = 5$

Proposition 1.10.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{S}^1$ vérifie*
(1) $1 \in \mathbb{U}_n$
(2) Si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$
(3) Si z et $z' \in \mathbb{U}_n$ alors $zz' \in \mathbb{U}_n$
On dit que $\mathbb{U}_n$ (et $\mathbb{S}^1$) muni de la multiplication est un groupe.

Démonstration. L'assertion (1) est évidente.

(2) Soit $z \in \mathbb{U}_n$ alors $z \in \mathbb{S}^1$ et $|z| = 1$, donc $z \neq 0$ et $\frac{1}{z}$ existe. De plus

$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1 \text{ d'où } \frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n.$$

(3) Soit $z, z' \in \mathbb{U}_n$ et $(zz')^n = (z)^n(z')^n = 1$ donc $zz' \in \mathbb{U}_n$.

□

Proposition 1.10.3. *L'ensemble $\mathbb{U}_n$ a n éléments et $\mathbb{U}_n = \{e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}}; k = 0, 1, ..., n-1\}$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{U}_n$, alors $z \in \mathbb{S}^1$ et il existe un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{\mathbb{i}\theta}$ et $z^n = 1$. Donc

$$e^{\mathbb{i}n\theta} = 1 = e^{2\mathbb{i}p\pi} \text{ pour } p \in \mathbb{Z}$$

et $\theta = \frac{2p\pi}{n}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$. On effectue la division Euclidienne de p par n et il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tels que $p = qn + k$ et

$$\theta = \frac{2(qn+k)\pi}{n} = \frac{2\pi qn}{n} + \frac{2k\pi}{n} = 2\pi q + \frac{2k\pi}{n}$$

et $e^{\mathbb{i}\theta} = e^{2\pi q}e^{\frac{2k\pi}{n}} = e^{\frac{2k\pi}{n}}$ avec $0 \leq k \leq n-1$. Cela montre que $\mathbb{U}_n \subset \{e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}}; k = 0, 1, ..., n-1\}$.

Réciproquement soit $z \in \{e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}}; k = 0, 1, ..., n-1\}$ alors $z^n = e^{\mathbb{i}2k\pi} = 1$ et $z \in \mathbb{U}_n$ d'où $\mathbb{U}_n = \{e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}}; k = 0, 1, ..., n-1\}$. □

Remarque 1.10.4.

$$\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\} \text{ et } \mathbb{U}_3 = \{1, e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}, e^{\mathbb{i}\frac{4\pi}{3}}\} = \{1, e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}, e^{-\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}\} = \{1, j, j^2\}$$

$$\mathbb{U}_4 = \{1, e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{2}}, e^{\mathbb{i}\pi}, e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{2}}\}$$

Les racines n-ième de l'unité forment des polygones réguliers dans le cercle unité. La formule

$$(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}) = 1-z^n$$

montre que $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$ *pour* $z \in \mathbb{U}_n$ *avec* $z \neq 1$.

1.11 Polynômes

Un polynôme $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré n est une fonction qui s'écrit comme la somme finie de termes x^k avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

où $(a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$ sont les coefficients du polynôme, collection finie de nombres de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé le degré du polynôme $P(x)$ et on note $\deg(P) = n$. Par exemple, un polynôme de type $(a_0, 0, 0, 0, 0)$ est constant, et son degré est 0. Le polynôme $(0, 0, 0, ...)$ est dit "nul" et n'a pas de degré, on le note $P = 0$

Proposition 1.11.1. *Soient P et Q deux polynômes alors*

(1) $\deg(P+Q) \leq \sup(\deg(P), \deg(Q))$

(2) Si $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

(3) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ *si P et Q sont non nuls.*

Démonstration. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ et $Q = b_0 + ... + b_m x^m$ avec $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Alors $PQ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)X + ... + a_n b_m X^{n+m}$ et $a_n b_m \neq 0$. Ceci montre à la fois que $PQ \neq 0$ et que $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

□

Définition 1.11.2. *On dit que x_0 est une racine du polynôme P si $P(x_0) = 0$, ou on dit que x_0 est une solution de l'équation $P(X) = 0$.*

Proposition 1.11.3. *Si x_0 est une racine d'un polynôme de degré n, alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que*

$$P(x) = (x - x_0)Q(x).$$

Démonstration. On utilise la formule

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

Cette formule se démontre simplement dans le cas où $a = 0$. Si $a \neq 0$, on la met sous la forme d'une somme géométrique, proposition 1.8.3 :

$$a^n - b^n = a^n \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right).$$

Si $P(x_0) = 0$, on observe que

$$P(x) = P(x) - P(x_0) = a_1(x - x_0) + a_2(x^2 - x_0^2) + \cdots + a_n(x^n - x_0^n).$$

On peut factoriser $(x - x_0)$ dans chaque terme du type $x^k - x_0^k$ et en collectant les facteurs, on obtient le polynôme Q et la factorisation désirée.

□

Corollaire 1.11.4. *Si un polynôme P de degré n possède $n+1$ racines disctincts alors P est le polynôme nul.*

Démonstration. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des racines distincts, on peut factoriser P par un polynôme Q_1 de degré $n-1$ tel que

$$P(x) = (x - x_1)Q_1(x).$$

Comme $P(x_2) = 0$ et $(x_2 - x_1) \neq 0$ on a $Q_1(x_2) = 0$. Il existe donc un polynôme $Q_2(x)$ de degré $n-2$ tel que

$$Q_1(x) = (x - x_2)Q_2(x) \text{ et } P(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_2(x).$$

Par récurrence, on peut donc mettre le polynôme $P(x)$ sous la forme :

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Comme $P(x_{n+1}) = 0$ et les racines sont toutes différentes, on a

$$(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\ldots(x_{n+1} - x_n) \neq 0$$

et par conséquent $a_n = 0$. Le polynôme P est donc nul. □

Proposition 1.11.5. (Division des polynômes) *Soient A et B des polynômes dont les coefficients sont dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $B \neq 0$. Il existe des polynômes Q et R uniques tel que*

$$A = BQ + R \textit{ avec } \deg(R) < \deg(B).$$

Q est le quotient, R est le reste de la division de A par B.

Démonstration. Unicité : Supposons que $A = BQ + R = BQ_1 + R_1$ avec $\deg R < \deg B$ et $\deg R_1 < \deg B$. On a $R - R_1 = B(Q_1 - Q)$. Suppons que $Q_1 - Q$ soit non nul. Alors $\deg B(Q_1 - Q) \geq \deg B$, ce qui est absurde. Donc $Q_1 = Q$ et $R_1 = R$.

Existence : On suppose que $A = a_n x^n + ... + a_0$ et $B = b_n x^n + ... + b_0$. Si $\deg A < \deg B$, alors on peut prendre $Q = 0$ nul et $R = A$. Supposons $\deg A \geq \deg B$, de sorte que $a_n \neq 0$ et si $q_1 = \frac{a_n}{b_n} x^{n-m}$, on obtient

$$A - Bq_1 = A_1 \text{ avec } \deg A_1 < \deg A$$

Si $\deg A_1 < \deg B$, on s'arrête, sinon il existe un monôme q_2, tel que

$$A_1 - Bq_2 = A_2 \text{ avec } \deg A_2 < \deg A_1 ...$$

On finira par arriver au bout d'un certain nombre d'opérations à $\deg A_\ell < \deg B$. En ajoutant les différentes égalités on obtient

$$A - B(q_1 + q_2 + ...q_\ell) = A_\ell$$

et on posera $A_\ell = R$ et $Q = q_1 + q_2 + ...q_\ell$.

$\square$

Le théorème précédent permet de procéder à une division Euclidienne pour trouver la division de $A = x^3 + x^2 - 1$ par $B = x - 1$

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & +x^2 & & -1 & x & -1 & \\ \cline{5-7}
x^3 & -x^2 & & & x^2 & +2x & +2 \\ \cline{1-2}
& 2x^2 & & & & & \\
& 2x^2 & -2x & & & & \\ \cline{2-3}
& & 2x & & & & \\
& & 2x & -2 & & & \\ \cline{3-4}
& & & +1 & & &
\end{array}
$$

et on obtient donc $Q = x^2 + 2x + 2$ et $R = 1$. On dit que B divise A quand $R = 0$.

Proposition 1.11.6. *(1) Si A est un polynôme et x_0 un nombre complexe. Alors pour que x_0 soit une racine il faut et il suffit que $(x - x_0)$ divise le polynôme A.*

(2) Si A est divisible par $(x - x_0)^\ell$ mais pas par $(x - x_0)^{\ell+1}$, le polynôme $A = (x - x_0)^\ell Q(x)$ avec $Q(x_0) \neq 0$. On dit que x_0 est une racine d'ordre ℓ.

(3) Si A est divisible par des racines $x_1, x_2, ..., x_k$ d'ordre $\ell_1, \ell_2, ..., \ell_k$ alors

$$A = (x - x_1)^{\ell_1} (x - x_2)^{\ell_2} ... (x - x_k)^{\ell_k} Q(x)$$

où Q est un polynôme n'admettant plus les racines $x_1, x_2, ..., x_k$ et de degré $\deg Q < n - \ell_1 - \ell_2 - ... - \ell_k$.

Démonstration. Si $A(x) = (x - x_0)B(x)$, alors $A(x_0) = 0$. Réciproquement supposons que $A(x_0) = 0$, alors

$$A(x) = (x - x_0)Q(x) + R(x) \text{ avec } \deg R < \deg(x - x_0) = 1$$

Donc $R(x) = r_0 = R(x_0) = 0$ et A est divisible par $(x - x_0)$. En généralisant ce raisonnement on démontre facilement les assertions (2) et (3). □

Theorem 1.11.7. de d'Alembert (Admis). *Un polynôme A dont les coefficients sont dans $\mathbb{C}$ et de degré ≥ 1, admet au moins une racine. Ainsi tout polynôme $A(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ peut s'écrire sous la forme réduite :*

$$A(z) = a_n(z - z_1)^{\ell_1}(z - z_2)^{\ell_2}...(z - z_k)^{\ell_k}.$$

Si le polynôme $A(z)$ a des coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$ réels et une racine complexe z_0 :

$$0 = A(z_0) = \overline{A(z_0)} = \overline{a_0 + \cdots + a_n z^n} = a_0 + a_1 \bar{z}_0 + \cdots + a_n \bar{z}_0{}^n = A(\bar{z}_0).$$

Ainsi si z_0 est une racine, il en va de même de sa conjuguée $\bar{z}_0$. On dit que les racines vont par paires conjuguées et

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - 2\Re e(z_0)z + |z_0|^2.$$

On remarque que les polynômes de degré impair ont forcément **au moins** une racine réelle.

Theorem 1.11.8. *Un polynôme A dont les coefficients sont dans $\mathbb{R}$ et de degré ≥ 1, peut donc s'écrire sous la forme réduite :*

$$A(z) = a_n(z - x_1)^{\ell_1} \dots (z - x_k)^{\ell_k}(z^2 - 2r_1 \cos(\theta_1)z + r_1^2)^{\ell_{k+1}} \dots (z^2 - 2r_p \cos(\theta_p)z + r_p^2)^{\ell_{k+p}}$$

où $x_1, \dots, x_k$ sont des racines réelles et $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \dots z_p = r_p e^{i\theta_p}, \bar{z_1} = r_1 e^{-i\theta_1}, \dots z_p = r_p e^{-i\theta_p}$ sont les racines complexes.