L1 **Université Gustave Eiffel**
Calculus **Année 2022–2023**

TD n° 1 : Nombres complexes

Objectifs À la fin du TD, je peux :

- ☐ Comprendre ce qu'est un nombre complexe
- ☐ Effectuer des opérations élémentaires avec les nombres complexes (addition, mutliplication, inverse, division)
- ☐ Connaître les différentes écritures d'un nombre complexe (forme algébrique, forme trigonométrique, forme exponentielle)
- ☐ Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe
- ☐ Linéariser ou développer des expressions trigonométriques
- ☐ Résoudre des équations du second degré à coefficients quelconques
- ☐ Calculer des racines carrées ou n-èmes

Forme algébrique

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique (*i.e.* $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$) les nombres suivants :

$$1.\ \frac{3+6i}{3-4i} \qquad 2.\ \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \qquad 3.\ \frac{2+5i}{(1-i)} + \frac{2-5i}{(1+i)}$$

Exercice 2. Soient x, y deux nombres réels et $z = x + iy$. Donner en fonction de x et y la forme algébrique de : $Z_1 = z^2, \qquad Z_2 = z^3, \qquad Z_3 = \dfrac{1-i}{z}$.

Exercice 3.

1. Calculer i^2, i^3, i^4 puis donner la forme algébrique de $i^{10}, i^{2019}, (-i)^{23}$
2. Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2, j^3 puis $j^{10}, (-j)^{23}$ et j^{2021}.
3. Calculer la somme $S = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2020} + j^{2021}$.

Exercice 4. Donner le module des nombres complexes suivants : $Z_1 = 1 - i\sqrt{2}, \quad Z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}, \quad Z_3 = \frac{1}{2}(2 + i\sqrt{2})$.

Exercice 5. Soient deux nombres réels a et b tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. Déterminer en fonction de a et b (en simplifiant au maximum) le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad z_2 = \frac{2a}{1+a^2} + i\frac{1-a^2}{1+a^2}, \qquad z_3 = \frac{a(1+i)+b(i-1)}{a+ib}.$$

Racines Carrées et équations quadratiques

Exercice 6.

1. Calculer, sous la forme $x+iy$, les racines carrées de $8-6i$, $1+\sqrt{3}i$ ainsi que $-5+12i$ et $-5-12i$.
2. En posant $Z=z^2$, résoudre l'équation $z^4+10z^2+169=0$.

Exercice 7. Déterminer les solutions sous la forme $a+ib$ des équations suivantes en cherchant le discriminant Δ et sa racine carrée δ :

$$(1+i)z^2+(7-3i)z-10i=0, \qquad z^2-(3+4i)z-1+5i=0,$$

Exercice 8.

1. Résoudre l'équation $z^4+(3-6i)z^2-8-6i=0$.
2. Résoudre l'équation $9z^4-3iz^2-1-i=0$.

Exercice 9 — Changements de variable.

1. Résoudre l'équation $z^2-iz-1-i=0$.
2. Résoudre l'équation $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2-i\frac{z-1}{z+1}-1-i=0$

Exercice 10. On considére l'équation $z^2+i(\sqrt{3}-1)z+\sqrt{3}=0$. Vérifier que i est solution de l'équation, puis en déduire toutes les solutions de l'équation (sans passer par le calcul du discriminant).

Exercice 11. On considére l'équation $z^2+\left(-1+i(1+\sqrt{2})\right)z-\sqrt{2}(1+i)=0$.

1. Trouver une solution de l'équation qui est de la forme $z=iy$ où y est réel (on pourra regarder la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation).
2. En déduire toutes les solutions de l'équation.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Exercice 12 — Cercle trigonométrique I. Donner le module et et l'argument des nombres complexes suivants et les placer sur un schéma comprenant un cercle unité : 1, i, -1, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, $2-2i$, $\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$, $1+i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+i$, $-1+i\sqrt{3}$.

Exercice 13 — Cercle trigonométrique II. Donner la forme algébrique et trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$z_1=2e^{2i\pi/3}, \quad z_2=(2e^{i\pi/4})(e^{-3i\pi/4}), \quad z_3=3e^{i\pi/3}/(2e^{-5i\pi/6}), \quad z_4=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9.$$

$$z_5=(3+3i)^3, \qquad z_6=\left(\overline{\frac{1}{2i}+\frac{3}{2}-i}\right)^5 \qquad \text{et} \qquad z_7=\left(\frac{1-i}{4}\right)^{98}.$$

Exercice 14.

1. Donner le module et l'argument de $z=\frac{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})(8+8i)}{1+i\sqrt{3}}$

2. Donner la forme algébrique de z.
3. En déduire une expression algébrique de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 15. Résoudre l'équation $z^2 = \sqrt{3} + i$ et donner la forme trigonométrique des solutions. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$. Comparer le résultat avec l'exercice précédent.

Formule d'Euler et Duplication de l'angle

Exercice 16 — Addition et formule d'Euler.

1. Montrer en utilisant la formule d'Euler que pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\frac{(a-b)}{2} e^{i(a+b)/2}.$$

2. Déduire de cette formule le module et l'argument de

$$z_1 = 1 + e^{i\pi/4} \qquad z_2 = e^{i\pi/3} + e^{i\pi/4} \qquad z_3 = -1 + e^{i\pi/3}$$

Exercice 17. Montrer les formules trigonométriques suivantes en utilisant la formule d'Euler :

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$
$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Formule du binôme - linéarisation - calcul de sommes

Exercice 18 — Linéarisations et Développements-Formule de Moivre.

1. Ecrire les fonctions suivantes comme combinaison linéaire des fonctions $x \to \cos(kx)$ et $x \to \sin(kx)$:

$$\cos(x)^3, \qquad \sin(x)^5, \qquad \cos(2x)\sin(3x)^2 \qquad \text{et } \sin(2x)^2\cos(2x)^2 .$$

2. Trouver des fonctions polynomiales P et Q telles que, pour tout réel x, on ait

$$\sin(3x)\cos(2x) = \sin(x)P(\cos(x)) \qquad \text{et} \qquad \cos(4x) = Q(\cos(x)).$$

Ecrire sous forme de somme de puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ les expressions suivants :

Exercice 19 — Sommes géométriques.

1. Montrer par la formule d'Euler que $e^{ix} - 1 = 2i\sin(x/2)e^{ix/2}$.
2. Simplifier la somme $S = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = 1 + e^{ikx} + \cdots + e^{inx}$ en remarquant que S est la somme de termes d'une suite géométrique.

3. Montrer que $S = e^{inx}\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = 1 + \cos(x) + \cos(2x) \cdots + \cos(nx)$

Exercice 20 — Formule du binôme . En utilisant la formule du binôme, déterminer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx).$$

Racine n-ième

Exercice 21. Écrire sous forme trigonométrique les solutions complexes de

$$z^9 = -512i \qquad z^6 = -4/(1+i\sqrt{3}) \qquad z^5 = (1+i\sqrt{3})^4/(1+i)^2$$

Et pour s'entraîner !

Exercice 22. Soient u et v deux complexes. Donner le module et l'argument de u/v en fonction de ceux de u et v. En déduire le module et l'argument de

$$z_1 = \frac{3-\sqrt{3}i}{-2+2i}, \qquad z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\, e^{\frac{4\pi}{3}i},$$
$$z_3 = 1 - e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad z_4 = \frac{1}{1-(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)}, \quad \theta \in]0,\pi[.$$

Exercice 23.
1. Résoudre l'équation $z^4 + (3-6i)z^2 - 8 - 6i = 0$.
2. Résoudre l'équation $9z^4 - 3iz^2 - 1 - i = 0$.

Exercice 24.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + iz + 1 + i = 0$. Exprimer les solutions sous forme algébrique.
2. Mettre les solutions de la question précédente sous forme trigonométrique/exponentielle.
3. Résoudre l'équation $iz^8 + iz^4 + 1 + i = 0$.

Exercice 25.
1. En utilisant la même méthode que celle vue dans l'**Exercice 15**, calculer $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ sous forme algébrique.

2. En remarquant que $3/8 = 1/2 - 1/8$ calculer ensuite $\cos(3\pi/8)$ et $\sin(3\pi/8)$ sous forme algébrique.

Exercice 26.

1. Exprimer la formule du développement de $(a+b)^5$.
2. Exprimer $\sin^5(2x)$ sous la forme d'une somme de fonctions de type $x \to \cos(kx)$ et $x \to \sin(kx)$.
3. Déterminer la fonction polynomiale $P(y)$ telle que $\cos(3x) = P(\cos(x))$.

Exercice 27.

1. Démontrer la formule suivante : $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) + \sin(x))$.
2. Résoudre dans $]0, 2\pi]$ l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 0$.
3. En utilisant la première question pour un réel x bien choisi, calculer la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 28. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -27i$. On exprimera les solutions sous forme trigonométrique/exponentielle, puis sous forme algébrique.

Exercice 29.

1. Soit a, b deux nombres réels. Mettre $e^{ia} + e^{ib}$ sous la forme Xe^{iY} , où X, Y sont deux nombres réels à déterminer en fonction de a et de b.
2. On suppose que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Déterminer en fonction de θ le module et l'argument de $1+e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.
3. On suppose de nouveau que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Déterminer en fonction de θ le module et l'argument de $Z = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.
4. A quoi sert l'hypothèse $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$? Que valent l'argument et le module de Z lorsque $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$?

Et pour aller plus loin !

Exercice 30. Soient u et v deux nombres complexes. Démontrer les égalités

$$|u+v|^2 - |u-v|^2 \ = \ 4\,\Re(u\overline{v})\ , \quad |u+v|^2 + |u-v|^2 \ = \ 2\left(|u|^2 + |v|^2\right) .$$

Exercice 31. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(z - \overline{z})^2 + 1 = 0, \qquad z^6 = \overline{z^2}, \qquad z^2 + 2(-1+i)z = 2\overline{z} - 3.$$

Exercice 32 — Équation trigonométrique.

1. On considère le nombre complexe $z_1 = a + ib = \sqrt{a^2+b^2}e^{i\theta_0}$ où a, b et θ_0 sont des nombres réels et $z_2 = e^{ix}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du produit $\bar{z}_1 z_2$.
2. Montrer que $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x - \theta_0)$
3. Appliquer cette formule pour résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$