L1 | **Université Gustave Eiffel**
Calculus | **Année 2022–2023**

TD n° 2 : Polynômes

Objectifs À la fin du TD, je peux :

- ☐ Déduire la forme factorisée d'un polynôme lorsque l'on a ses racines (et inversement)
- ☐ Effectuer une division euclidienne entre polynômes
- ☐ Déduire la forme factorisée (complète) d'un polynôme dans $\mathbb{R}$ à partir de sa forme factorisée (complète) dans $\mathbb{C}$

Exercice 1. Déterminer les réels a et b pour que le polynôme

$$P(x) = -x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + ax + b$$

admette comme racine 2 et -3.

Exercice 2. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = i$ et $P(i) = 0$.

Exercice 3. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ dans les cas suivants :

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4 \text{ et } Q(x) = (x-3)(x+1) \ ;$$
$$P(x) = x^4 - x^2 - 2x - 8 \text{ et } Q(x) = x^2 - 4 \ ;$$
$$P(x) = x^5 + x + 1 \text{ et } Q(x) = (x-1)^3.$$

Exercice 4.

1. Soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x - 2$. Trouver une racine évidente de P, puis toutes les racines complexes. Donner la forme factorisée de P.
2. Soit $P(x) = x^4 + x^3 - x - 1$. Trouver deux racines évidentes de P, puis toutes les racines complexes. Donner la forme factorisée de P.

Exercice 5.

1. Factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}$.
2. Factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $n \geq 2$, et soit $P(X) = X^n - 1$.

1. Montrer que P se factorise par $X - 1$, et trouver Q tel que $P(X) = (X-1)Q(X)$.

2. Donner la factorisation complète de P dans $\mathbb{C}$.
3. Déduire des questions prècédente la valeur du produit suivant :

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}).$$

Exercice 7.

1. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x-1$ puis déduire $\lim_{x\to 1^+}\frac{P(x)}{x-1}$ dans les cas suivants :

$$P(x)=8x^5-3x^4+6x^2-4x-7\ , \qquad P(x)=7x^3-5x^2+3x-4.$$

Et pour s'entraîner !

Exercice 8.

1. Pour quelle valeur de a le polynôme $P(x)=ax^4+x+1$ est-il factorisable par $x+2$?
2. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P(x)=ax^4+bx^3+2x+1$ est il factorisable par x^2-1.

Exercice 9.

1. Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}$

$$P_1(x)=2x^2-i\,, \qquad P_2(x)=ix^2+(1-i)x+1\,, \qquad P_3(x)=16x^4-1.$$

Exercice 10. Soit $P(x)=x^4-2x^3+x^2-1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P(x)=(x^2-x+1)Q(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(x)=0$.

Exercice 11. Soit $P(x)=2x^3-x+1$

1. Trouver une racine évidente de P.
2. Déterminer un réel a et un polynôme Q tel que $P(x)=(x-a)Q(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(x)=0$.

Exercice 12. On considère l'équation $z^5-1=0$.

1. Déterminer la fonction polynomiale $Q(z)$ telle que $z^5-1=(z-1)Q(z)$.
2. Déterminer des réels a, b et c telle que

$$\frac{Q(z)}{z^2}=a\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+b\left(z+\frac{1}{z}\right)+c.$$

3. Résoudre l'équation $aZ^2+bZ+c=0$ d'inconnue $Z\in\mathbb{C}$.
4. Résoudre $Q(z)=0$.
5. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/5), \cos(2\pi/5), \cos(4\pi/5)$ ainsi que $\sin(\pi/5), \sin(2\pi/5)$ et $\sin(4\pi/5)$.