Exercices de statique des fluides

1. Un tube en “U” de section constante $s = 1\,cm^2$ est ouvert à ses deux extrémités et contient de l'eau. Par une extrémité, on verse un volume $V = 10\,cm^3$ d'huile plus légère que l'eau. La différence de niveau entre les deux surfaces libres est $x = 15\,mm$.
   (a) Calculer la masse volumique de l'huile.
   (b) On relie la branche qui contient l'huile à une conduite de gaz. La surface de séparation entre l'huile et l'eau se déplace de $y = 15\,cm$ vers le haut. Déterminer la pression relative dans la conduite.

2. On souhaite mesurer la pression relative à l'aide d'un manomètre différentiel contenant deux fluides non-miscibles ρ_1 et ρ_2 (Fig. 1). On note s et S la petite et grande section de ce manomètre. Sur la figure de gauche, les deux récipients supportent la même pression P_0. Sur celle de droite, le récipient droit est soumis à une pression plus faible $P_0 - \Delta P$ ($\Delta P > 0$).
   (a) Exprimer ΔP en fonction des masses volumiques, du rapport des sections et de la descente h de l'interface entre les deux fluides.
   (b) Dans quel cas la sensibilité de ce manomètre sera-t-elle la plus importante
      i. si la densité des fluides est connue,
      ii. si les sections et la densité des fluides changent.

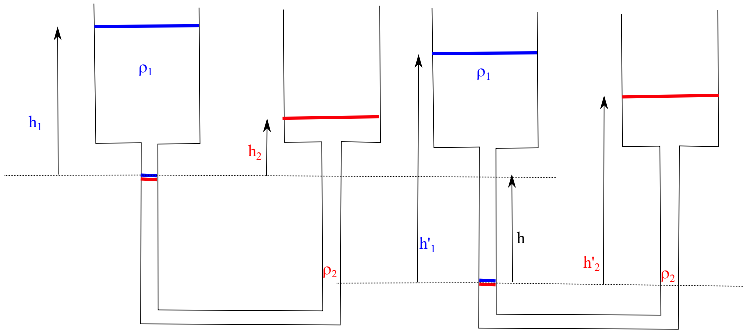

FIGURE 1 – Manomètre différentiel à deux fluides.

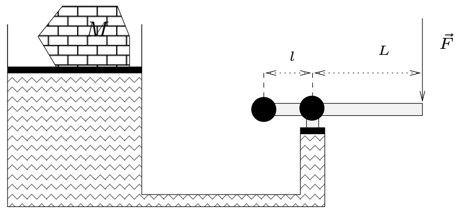

FIGURE 2 – Piston.

3. Une presse hydraulique (Fig. 2) contient un fluide de poids spécifique $\rho g = 8\,800\,N/m^3$. Les diamètres des petit et grand pistons (respectivement à droite et à gauche) sont $d = 2{,}54\,cm$ et $D = 7{,}62\,cm$. Une tige de longueur $L + l$ ($L = 38{,}1\,cm$ et $l = 2{,}54\,cm$) pivote autour de son extrémité gauche. Cette tige est reliée au petit piston par une barre verticale qui se situe à l de l'axe de rotation. Quelle est l'intensité de la force $\vec{F}$ qui doit être exercée sur la tige de longueur $L + l$ pour équilibrer la masse $M = 890\,kg$.

4. Un container cylindrique de rayon R, partiellement rempli par un liquide, tourne autour de son axe de symétrie à la vitesse angulaire constante ω. Dans le repère tournant du cylindre (r, z), le liquide est immobile. L'origine du repère mobile est situé au fond du container.
   (a) Montrer que l'équation de la surface libre s'écrit
   $$z = h_1 + \frac{(\omega r)^2}{2g}$$
   avec h_1 la hauteur de la surface libre en $r = 0$.
   (b) Donner l'expression de l'équation de la surface libre en fonction de h_0, la hauteur du fluide en l'absence de rotation.

5. L'air est modélisé par un gaz parfait satisfaisant la relation $P = \rho r T$ ($r = 287\,J/(kg.K)$). Les conditions au niveau du sol $z = 0$ sont $P_0 = 1{,}013.10^5\,Pa$, $\rho = 1{,}293\,kg/m^3$. Le modèle standard de l'atmosphère obéit à une loi polytropique : $\frac{P}{\rho^k} = cste$.
   (a) Donner l'expression de ρ en fonction de $\frac{P}{P_0}$, ρ_0 et k.
   (b) Exprimer la pression en fonction de l'altitude.
   (c) En déduire $\rho(z)$ et $T(z)$.

(d) Déterminer la valeur numérique de k si la température décroît linéairement de $6{,}5°C$ tous les $1000\,m$ (Modèle standard de l'atmosphère).

6. **Influence de l'altitude sur la pression : différents modèles et approximations** <u>A FAIRE À LA MAISON</u>
La pression et température au sol est donnée par $P_0 = 1013\,hPa$ et $T_0 = 20\,°C$. L'atmosphère est modélisée par une loi des gaz parfaits. Construire un tableau donnant la variation de la pression de l'atmosphère avec l'altitude pour
(a) l'atmosphère standard (modèle polytropique) avec la constante k déterminée par l'exercice 6d ;
(b) un modèle isotherme ;
(c) un modèle isochore ;
(d) un modèle isobare.
En déduire en fonction de l'altitude les erreurs relatives commises par l'utilisation des modèles (b) à (d) par rapport au modèle standard. Si on autorise une erreur de 1%, jusqu'à quelle altitude pourra-t-on utiliser ces différents modèles ? Même question si on n'accepte plus qu'une erreur relative de 0,1%.

7. Un réservoir possède une porte de vidange circulaire de diamètre $D = 4\,cm$ (Fig. 3). Cette porte s'ouvre automatiquement dès que la force hydrostatique

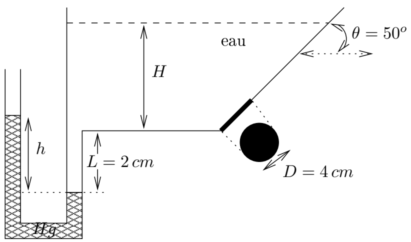

FIGURE 3 – Réservoir avec vidange.

excède $F = 25\,N$. On relève alors $L = 2\,cm$. Quelle sera alors la hauteur h lue sur le manomètre au mercure ($d_{Hg} = 13{,}6$) ?

8. Du béton de densité $d = 2{,}4$ est versé dans un moule (Fig. 4) pour former un petit escalier. Les dimensions d'une marche sont : hauteur $h = 20{,}3\,cm$, profondeur $l = 25{,}4\,cm$ et longueur $L = 91\,cm$. On note $m = 38\,kg$ la masse du moule sans fond et M la masse de sable contenu dans un sac posé sur le moule

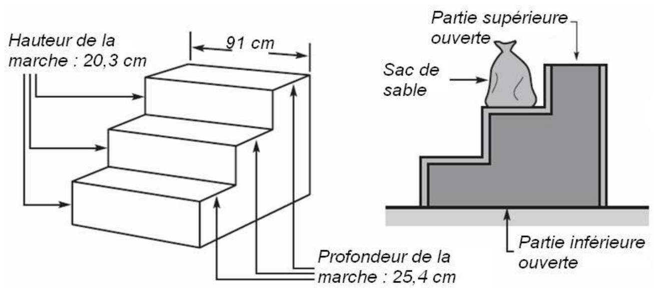

FIGURE 4 – Moule sans fond pour fabriquer un petit escalier.

(a) Montrer que la résultante horizontale des forces de pression qui s'exerce sur le moule est nulle.
(b) Calculer la résultante des forces de pression que le béton exerce sur le moule dans la direction verticale.
(c) En prenant le système $\{moule\}$, en déduire la masse minimale de sable M qu'il faut utiliser pour fabriquer cet escalier.

9. Soit un barrage hydraulique de section triangulaire et d'envergure b (Fig. 5). On

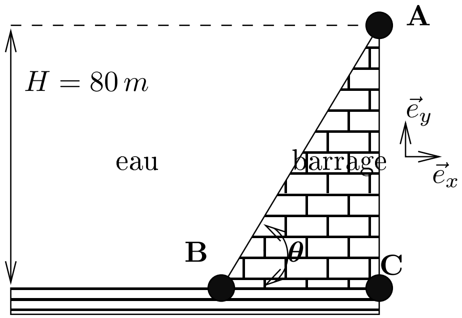

FIGURE 5 – Barrage hydraulique.

note d_b la densité du matériau de construction du barrage et $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y$ la force de réaction qu'exerce le sol sur le barrage. Le coefficient de frottement du barrage sur le sol, $C_f = \frac{|R_x|}{|R_y|} = 0{,}48$.

(a) Déterminer la relation analytique entre la densité d_b et l'angle limite θ_c pour que le barrage soit à l'équilibre de translation.

(b) Déterminer la valeur de l'angle pour $d_b = 2{,}4$.

10. La barrière illustrée sur la figure 6 a une envergure de $b = 1{,}5\,m$ avec $a = 1\,m^{-2}$.

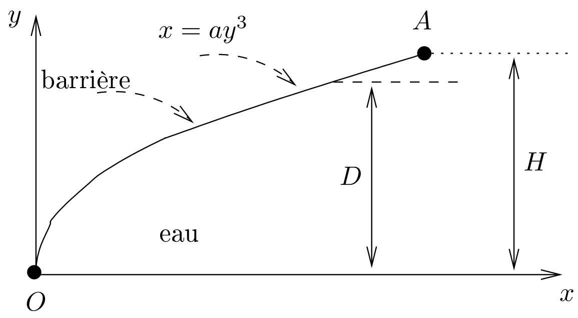

FIGURE 6 – Surface courbe.

L'eau est maintenue du coté droit de la barrière sur une profondeur $D = 1{,}2\,m$. Le point A est situé sur la barrière à une hauteur $H = 1{,}4\,m$. On néglige le poids et l'épaisseur de la barrière.

(a) Déterminer les intensités des composantes verticale (F_v) et horizontale (F_h) des forces de pression.

(b) Déterminer x_{F_v} et y_{F_h} les coordonnées du centre de poussée que l'eau exerce sur le barrage.

(c) Déterminer les moments algébriques de rotation autour du point O des deux composantes des forces de pression, $\mathcal{M}_{F_v/O}$ et $\mathcal{M}_{F_h/O}$.

(d) On note $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y$ la force résultante appliquée par le sol en O et on applique une force horizontale en A, $\vec{F}_A = F_A\,\vec{e}_x$. Déterminer R_x, R_y et F_A pour que la barrage soit à l'équilibre et qu'aucun moment ne soit appliqué au point O.

11. Une structure en béton ($d_b = 2{,}5$) est fabriquée dans un moule dont la forme est un quart de cercle de rayon $R = 0{,}3\,m$ avec une envergure de $b = 1{,}25\,m$ (Fig. 7). Le moule est rempli jusqu'à une hauteur $H = 0{,}24\,m$. Calculer l'in-

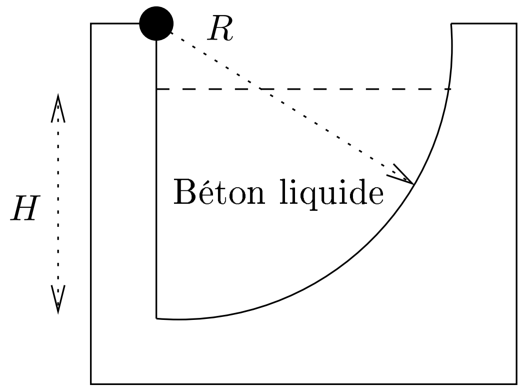

FIGURE 7 – Moule pour béton.

tensité de la force hydrostatique exercée par le béton liquide sur le moule. Exprimer l'abscisse de la ligne d'action (l'intégrale ne sera pas calculée).

12. Un ballon sphérique de rayon $R = 5\,m$ est gonflé à l'hélium. Au niveau du sol la pression et la température sont égales à $P_0 = 10^5\,Pa$ et $T_0 = 20\,°C$. L'air suit une évolution isentropique (P/ρ^γ = cste avec $\gamma = 1{,}4$).

(a) Calculer la poussée que l'air exerce sur ce ballon en assimilant l'air à un gaz parfait.

(b) Le ballon et son chargement ont une masse totale $M = 400\,kg$. Quelle est la masse de lest qu'il faut prévoir pour que la force ascensionnelle (résultante des forces) soit égale à $200\,N$.

(c) Le ballon s'élève. Une soupape d'échappement maintient la pression de l'hélium égale à la pression atmosphérique. Le ballon cesse de monter lorsque la température extérieure atteint $6\,°C$. Quelle masse de lest a-t-on jeté ?

13. On considère un cylindre homogène, de section circulaire. On note R le rayon, L la longueur et d la densité du cylindre. Montrer que, dans l'eau, le cylindre a une position vertical stable si :

$$\frac{R}{L} > \sqrt{2d(1-d)}$$