Ex I : Saut snowboardeur. 16,5

1) a) BdF : - Poids : $\vec{P}$, $\vec{R_N}$ (pas de frottement). en A et O.
- Poids : $\vec{P}$ entre O et D

1 avec $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$ et $\vec{R_N} \perp$ support

b) Entre A et O : $W_{A-O}(\vec{P}) = \int_A^O \vec{P}.\vec{dl}$

où $\vec{dl}$ est le déplacement élémentaire s'exprimant dans la base cartésienne comme : $\vec{dl} = dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y}$.

le travail devient $W_{A\to O}(\vec{P}) = mg(y_A - \overset{0}{y_0})$ moteur $y_A > 0$

Pour $\vec{R_N}$: $W_{A\to O}(\vec{R_N}) = \int_A^O \vec{R_N}.\vec{dl}$ avec $\vec{R_N} \perp$ support et $\vec{dl} \parallel$ support

1 on a $W_{A\to O}(\vec{R_N}) = 0$

Entre O et D : $W_{O\to D}(\vec{P}) = -mg\,y_D$ résistant

$W_{A\to O}(\vec{P}) = mgL\sin\alpha$ et $W_{O\to D}(\vec{P}) = -mgh$.

c) T.E.C. $\Delta E_c = \sum W(\vec{f_{ext}})$.

$$E_c(O) - E_c(A) = W_{A\to O}(\vec{P}) + W_{A\to O}(\vec{R_N}) =$$

1 $$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m\underbrace{v_A^2}_{0} = mgL\sin\alpha \iff v_0 = \sqrt{2gL\sin\alpha}$$

1'

2) a) en O le vecteur $\vec{v}_0$ est tangent à la trajectoire (arc de cercle) donc ⊥ au rayon qui fait un angle β avec la verticale, cet angle se retrouve donc entre $\vec{v}_0$ et l'horizontale (qui sont les ⊥ aux rayons et à la verticale)

0,5

$$\vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_0 \cos\beta \\ v_0 \sin\beta \end{array} \right.$$

b) Entre O et D, le ~~s~~ est en chute libre $\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

1

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\beta \\ v_y = -gt + v_0 \sin\beta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = v_0 \cos\beta\, t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\beta\, t \end{array} \right.$$

c) en D, altitude max : $v_y(t_D) = 0$ et $v_x = v_0 \cos\beta$ (cste)

0,75

d) $\Delta_{O \to D} E_c = W_{O \to D}(\vec{P})$

0,5

$$\frac{1}{2} m v_D^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh \Leftrightarrow h = \frac{v_0^2 (1 - \cos^2\beta)}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\beta}{2g}$$

e) avec $v_0^2 = 2gL\sin\alpha$, on obtient

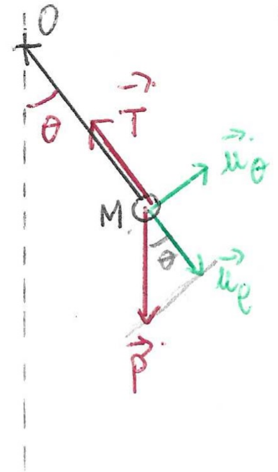
$$h = L \sin\alpha \sin^2\beta$$

0,75 A.N. : $h = 80 \cdot \sin 30 \cdot \sin^2 30 = 80 \times \frac{1}{2^3} = 10\ m > 9,5\ m.$

il saute + haut que les autres.

Ex. 2 : le pendule à clou.

1) a)



1

b) ⊛ $\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho = L \vec{u}_\rho$.

⊛ $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ avec $\dot{\rho} = 0$ car L est cste.

$\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

2

⊛ $\vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$.

c) PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ avec $\vec{P}\begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{vmatrix}$ et $\vec{T}\begin{vmatrix} -T \\ 0 \end{vmatrix}$

$m\begin{vmatrix} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -T \\ 0 \end{vmatrix}$

soit $\begin{cases} T = mg\cos\theta + L\dot{\theta}^2 & (1) \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. & (2) \end{cases}$

2

si $\theta \ll 1$ alors (2) : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$. (2)'

dans ce cas, si $\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ alors $\dot{\theta}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$

et $\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$

soit $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$

cette solution est acceptable pour (2)' si $\omega^2 = \frac{g}{L}$

d) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. et $t_1 = \frac{T}{4}$ (1/4 de l'aller-retour aura été parcouru).

0,5

$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$

e) Pour θ_0 par rapport à θ_1 : $h = L(1 - \cos\theta_0)$

T.E.C. entre θ_0 et θ_1 : $E_c(\theta_1) - E_c(\theta_0) = W_{\theta_0 \to \theta_1}(\vec{P}) + W_{\theta_0 \to \theta_1}(\vec{T})$

or $W_{\theta_0 \to \theta_1}(\vec{T}) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \vec{T} \cdot \vec{dl}$ avec $\vec{T} \perp \vec{dl}$ ⇒ (⊥ tg à la trajectoire)

(selon un rayon de la trajectoire)

$= 0$

2 et $W_{\theta_0 \to \theta_1}(P) = mg(z_{\theta_0} - z_{\theta_1}) = mgh \quad (>0)$

de plus $E_c(\theta_0) = 0$ (car $v_{\theta_0} = 0$), finalement :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mgh$$

$$\underline{v_1 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}}$$

2) a) $E_{pp} = mgz + cte$ avec z pour θ_2 tel que : $z = \frac{2}{3}L(1-\cos\theta_2)$

1 donc $\underline{E_{pp}(\theta_2) = mg\frac{2}{3}L(1-\cos\theta_2)} + cte$

et $\underline{cte = E_{pp}(\theta_1) = 0}$.

b) Avec TEC entre θ_1 et θ_2 on a :

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v_2^2}_{=0 \text{ en } \theta_2} - \frac{1}{2} m v_1^2 = -E_{pp}(\theta_2) \quad \left(\text{car } W_{\theta_1 \to \theta_2}(\vec{P}) = -\Delta E_{pp\,\theta_1 \to \theta_2} = -E_{pp}(\theta_2) + E_{pp}(\theta_1)\right)$$

1 soit $-\cancel{mg}L(1-\cos\theta_0) = -\cancel{mg}\frac{2}{3}L(1-\cos\theta_2)$

$$-3 + 3\cos\theta_0 = 2\cos\theta_2 - 2$$

$$\hookrightarrow \underline{\cos\theta_2 = \frac{3\cos\theta_0 - 1}{2}}$$

c) Pour $\theta < 0$, le pendule de $\frac{2}{3}L$ parcourt un demi-A/R soit $\frac{T_2}{2}$

avec $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\frac{2}{3}L}}$

1

finalement : $t_2 = \frac{T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

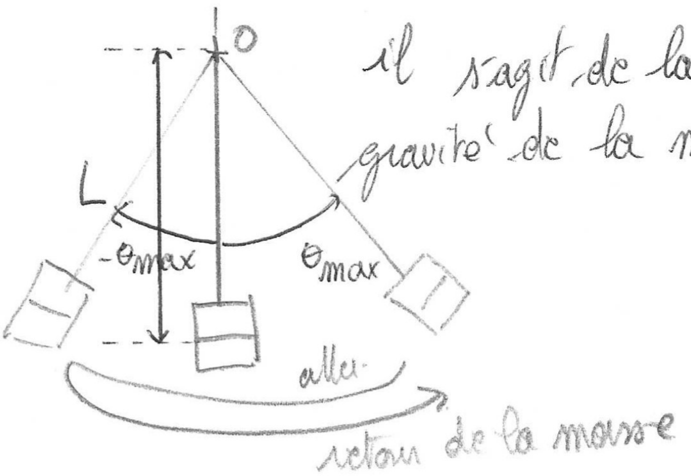
3) Pour un A.R de θ_0 à θ_0, le pendule aura une période :

0,5 $T_t = t_2 + 2t_1 = \pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} + \pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

Ex. 3. Pendule aspects expérimentaux. 14,5

1) Dans le TP sont mesuré L la longueur modifiable du pendule, ainsi que la période du pendule pour chaque longueur choisie.
0,5 avec la relation : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, on peut remonter à g (du modèle).

2) il s'agit de la distance du centre de gravité de la masse à l'axe de rotation. 0,5



3) 0,5

4) a) Celui utilisé est le mode 1, il commande le déclanchement à la 1ère rupture du faisceau puis il l'arrête à la seconde.
0,5 A cet instant, la pendule n'a fait qu'une demi-oscillat° environ.

b) Pour enregistrer la période T, il faut faire deux mesures de durées successives, l'une pour le
0,5 trajet A (voir figure), il faut donc "armer" le compteur en B, puis l'autre pour le trajet B, sans remise à zéro et après un réarmement du compteur en A.

5) a) $g = \dfrac{4\pi^2 L}{T^2}$ $\quad dim(g) = \dfrac{dim(L)}{(dim(T))^2} = L.T^{-2}$.

0,5

g s'exprime en $m.s^{-2}$ dans le S.I.

0,5 b) pour $L = 45{,}8$ cm ; $g = 9{,}63\ m.s^{-2}$.

0,5 c) $g_m = \dfrac{48{,}85}{5} = 9{,}77\ m.s^{-2}$.

0,5 d) $e = \dfrac{|9{,}77 - 10|}{9{,}77} \times 100 = 2{,}4\ \%$.

Cette approximation fait commettre une erreur systématique (un biais) de 2,4 % dans les calculs utilisant g.