Chapitre 2

Réduction des endomorphismes et matrices carrées

1. Éléments propres

Définition :

- Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que :
  - $\rightarrow$ $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si $\exists x \in E$, $(x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x)$.
    L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f et on le note $Sp_{\mathbb{K}}(f)$.
  - $\rightarrow$ $x \in E$ est un vecteur propre de f si $x \neq 0_E$ et $(\exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x)$

- Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :
  - $\rightarrow$ $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $(X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $AX = \lambda X)$
    L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de f et on le note $Sp_{\mathbb{K}}(A)$.
  - $\rightarrow$ $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de A si $x \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $(\exists \lambda \in \mathbb{K}, AX = \lambda X)$

Les valeurs et vecteurs propre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée sont globalement appelés éléments propres.
Par ailleurs, avec les notations ci-dessus, on dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ sont valeur et vecteur propres associés de f.
Si $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$ et on dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont valeur et vecteur propres associés de A si $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $AX = \lambda X$

Remarque : Soit E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$. On note $\mathcal{B}$ une base de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors, $Sp_{\mathbb{K}}(f) = Sp_{\mathbb{K}}(A)$ et $x \in E$ est un vecteur propre de f si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ est vecteur propre de A.
En dimension finie, on peut donc adopter l'un ou l'autre des points de vue.

La définition du spectre d'un endomorphisme f donne les équivalences suivantes :

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \Leftrightarrow Ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow f \text{ n'est pas injectif}$$

et celle du spectre d'une matrice carrée A donne :

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible}$$

En particulier, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

Définition:

* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour toute valeur propre λ de f, le sous-ensemble de E $\mathrm{Ker}(f-\lambda I_E)$ est formé du vecteur nul et des vecteurs propres de f associés à λ. C'est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ et on le note $E_\lambda(f)$.
* Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = \lambda X\}$ est formé du vecteur nul et des valeurs propres de A associés à λ. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On l'appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ et on le note $E_\lambda(A)$.

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminons les éléments propres de A.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = 3 \text{ et } x_1 = x_2 = x_3 \end{cases}$$

D'où $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 3\}$ et $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\quad E_3(A) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Proposition:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ N valeurs propres de λ toutes distinctes.
Les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_N}(f)$ sont somme directe.

/!\ Cette somme, bien que directe, n'est pas nécessairement égale à E.

Preuve:

On procède par récurrence sur l'entier $N \in \mathbb{N}^*$ sachant que pour $N = 1$, il n'y a rien à faire. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ valeurs propres de f toutes distinctes.
Supposons que $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_N}(f)$ sont en somme directe.
Soit $x_1 \in E_{\lambda_1}(f), \dots, x_{N+1} \in E_{\lambda_{N+1}}(f)$ tels que $\sum_{i=1}^{N+1} x_i = 0_E$.

En prenant l'image par f, on a: $f\left(\sum_{i=1}^{N+1} x_i\right) = f(0_E)$ et puisque f est un endomorphisme, on obtient: $\sum_{i=1}^{N+1} \underbrace{f(x_i)}_{= \lambda_i x_i \text{ car, } x_i \in E_{\lambda_i}(f)} = 0_E$

On a donc : $(S) : \begin{cases} x_1 + \dots + x_{N+1} = 0_E \\ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{N+1} x_{N+1} = 0_E \end{cases}$

Or, $(S) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_{N+1} L_1}{\iff} \begin{cases} x_1 + \dots + x_{N+1} = 0_E \\ (\lambda_1 - \lambda_{N+1}) x_1 + \dots + (\lambda_N - \lambda_{N+1}) x_N = 0_E \end{cases}$

Or, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ donc, puisque c'est un sous-espace vectoriel, $(\lambda_i - \lambda_{N+1}) x_i \in E_{\lambda_i}(f)$.

Par hypothèse de récurrence, on a donc :

$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \ (\lambda_i - \lambda_{N+1}) x_i = 0_E$

Or, $\lambda_i - \lambda_{N+1} \neq 0_{\mathbb{R}}$, donc $x_i = 0_E$. De plus, $x_{N+1} = -\sum_{i=1}^{N} x_i = 0_E$ □

2. Polynôme caractéristique

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le développement du déterminant suivant une ligne ou une colonne assure que l'application $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est polynomiale. Cela justifie la terminologie suivante.

Définition :

* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application : $\begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n) \end{array}$ est un polynôme, qu'on appelle polynôme caractéristique de A. On le note χ_A.

* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application : $\begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda \mapsto \det(f - \lambda Id_E) \end{array}$ est un polynôme, appelé polynôme caractéristique de f. On le note χ_f.

Remarque :

E est de dimension finie $n \geqslant 1$, notons $\mathcal{B}$ une base de E et, pour $f \in \mathcal{L}(E)$, notons $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(f - \lambda Id_E) = \det(A - \lambda I_n)$ ce qui justifie la terminologie polynôme dans le point 2 ci-dessus.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1)$

Proposition:

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} tr(A) \lambda^{n-1} + \dots + det(A).$$

En particulier, χ_A est de degré n. Si $n=2$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

↳ **Preuve:**

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Posons pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ $\quad \alpha_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} - \lambda & si\ i=j \\ a_{i,j} & si\ i \neq j \end{cases}$

Alors : $\chi_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(n),n} = (a_{1,1} - \lambda) \dots (a_{n,n} - \lambda) + \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(n),n}$

D'une part : $(a_{1,1} - \lambda)\dots(a_{n,n} - \lambda) = (-\lambda)^n + \underbrace{(a_{1,1} + \dots + a_{n,n})}_{tr(A)}(-\lambda)^{n-1} + \dots$

D'autre part, pour tout $\sigma \in S_n \setminus \{Id\}$, il existe (au moins) deux entiers i et j distincts tels que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$, ce qui prouve que $\alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(n),n}$ est un polynôme de degré au plus $(n-2)$.

On a donc bien que χ_A est de degré n et que les termes en λ^n et λ^{n-1} sont respectivement $(-1)^n \lambda^n$ et $(-1)^{n-1} tr(A) \lambda^{n-1}$.

Enfin $det(A) = \chi_A(0)$ ce qui prouve que le coefficient constant est $\chi_A(0)$ □

La proposition suivante assure que les racines du polynôme caractéristique d'un endomorphisme f (resp. d'une matrice A) sont les valeurs propres de f (resp. de A)

Proposition:

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $Sp_{\mathbb{K}}(f) = \chi_f^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\}) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \chi_f(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}\}$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $Sp_{\mathbb{K}}(A) = \chi_A^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\}) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \chi_A(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}\}$

↳ **Preuve:**

On ne prouve que la version endomorphisme.

On a : $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \iff Ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$

$\iff f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif

$\iff f - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif

$\iff det(f - \lambda Id_E) = 0_{\mathbb{K}}$

$\iff \chi_f(\lambda) = 0_{\mathbb{K}}$

Avec l'exemple vu plus haut, pour lequel on a trouvé pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$. On peut affirmer que $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 1, 2\}$. Le corollaire suivit est immédiat.

Corollaire :

Le spectre d'un endomorphisme en dimension finie $n \geqslant 1$ ou d'une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une partie finie ayant au plus n éléments.

Définition :

* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de f. On appelle multiplicité de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine de χ_f.
* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A. On appelle multiplicité de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine de χ_A.

Proposition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de f. Notons m la multiplicité de λ et d la dimension de $E_\lambda(f)$.

Alors $1 \leqslant d \leqslant m$.

En particulier, pour une valeur propre simple (c'est-à-dire de multiplicité 1), on a $d = 1$.

↳ **Preuve :**

→ Puisque $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$, alors $d \geqslant 1$.

→ Puisque $E_\lambda(f)$ est un SEV de E de dimension finie d, il admet une base, qu'on note $\{e_1, \dots, e_d\}$. On la complète en une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n\}$ de E.

On a alors :

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_d) & f(e_{d+1}) & \cdots & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \\ \\ e_d \\ e_{d-1} \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Alors pour tout $X \in \mathbb{K}$, en développant le début successivement suivant $C_1, \dots, C_d$,

$\chi_A(X) = (\lambda - X)^d Q(X)$ avec Q un polynôme

D'où $(\lambda - X)^d \mid \chi_A(X)$

donc on en déduit que $d < m$.

3. Diagonalisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définitions :

* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$

Remarques:

- En dimension finie, on peut adopter le point de vue matriciel ou le point de vue endomorphisme. En effet, si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors on note $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, on a que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

  En effet :
  - si f est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$, qu'on note D est diagonale. Alors, en notant $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la formule de changement de base assure que: $A = PDP^{-1}$
  - si A est diagonalisable, il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telles que $A = PDP^{-1}$ et D est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ dont P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

- Il existe des matrices diagonalisables et des matrices non diagonalisables.
- Les matrices diagonales sont diagonalisables ($D = I_n D I_n^{-1}$)
- Dans la pratique, quand on dira " diagonaliser une matrice A " cela signifiera déterminer D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$

Proposition:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre:

(i) f est diagonalisable

(ii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de f

(iii) la somme des sous-espaces propres de f sont égale à E

(iv) la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E

↳ **Preuve:**

(i)⇒(ii): Supposons que f est diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E et des éléments $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\underline{e_i \neq 0_E}$ et $\underline{f(e_i) = \lambda_i e_i}$

et e_i est un vecteur propre de f.

(ii) ⇒ (iii) : Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E formé de vecteurs propres de f. Il existe donc $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

Notons $X = \{\lambda_i,\ 1 \leq i \leq n\}$. Alors : $E = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K} e_i \subset \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = \sum_{\lambda \in X} \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$

$$\subset \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)} \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

D'où l'égalité, l'autre inclusion étant immédiate.

(iii) ⇒ (iv) : Supposons que la somme des sous-espaces propres de f est égale à E. Puisque cette somme est directe :

$$\sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)} E_\lambda(f) \right) = \dim(E)$$

(iv) ⇒ (i) : Supposons que la somme dimensions des sous-espaces propres de f est égale à la dimension de E.

Notons $k = \mathrm{Card}(Sp_{\mathbb{K}}(f))$ et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres (toutes distinctes donc) de f.

Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $E_{\lambda_i}(f)$ est un SEV de E qui est de dimension finie, notons $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(f)$.

Notons $\mathcal{B}$ la concaténation des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$.

Puisque chaque $\mathcal{B}_i$ est une famille libre et que les $E_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe, $\mathcal{B}$ est une famille libre.

De plus, $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{card}(\mathcal{B}_i) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(f)) \overset{\text{hypothèse}}{=} \dim(E)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de E et

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda_k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_k \\ \vdots \\ \mathcal{B}_k \end{array} \end{array}$$

□

D'après la preuve précédente, si f est diagonalisable, on a, sur toute matrice diagonale représentant f, les valeurs propres de f répétées autant de fois que leur ordre de multiplicité.

Théorème:

polynôme de degré 1

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et pour toute valeur propre λ de f, la dimension de $E_\lambda(f)$ est égale à la multiplicité de λ.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et pour toute valeur propre λ de A, la dimension de $E_\lambda(A)$ est égale à la multiplicité de λ.

Preuve:

On ne prouve que la version endomorphisme.

Dans cette preuve, on note, pour toute valeur propre de λ, $d(\lambda) = \dim(E_\lambda(f))$ et $m(\lambda)$ la multiplicité de λ.

* Supposons que f est diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E et des scalaires $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que: $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda Id_E) = \det(\mathcal{M}_\mathcal{B}(f) - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$ et χ_f est scindé et $n = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)} m(\lambda)$

Par ailleurs, f est diagonalisable, on a, d'après la proposition précédente, $n = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)} d(\lambda)$. D'où $\sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)} (d(\lambda) - m(\lambda)) = 0$

Or, on sait que pour tout $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$, $d(\lambda) \leq m(\lambda)$. On en déduit que pour tout $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$, $d(\lambda) = m(\lambda)$.

* Supposons que χ_f est scindé et que pour tout $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$, $d(\lambda) = m(\lambda)$. Puisque χ_f est scindé de degré n et que ses racines sont les valeurs propres de f, on a: $n = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)} m(\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)} d(\lambda)$ et on conclut d'après la proposition précédente. □

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire:

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f possède n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

4. Applications de la diagonalisation

a) Calcul des puissances k-ème d'une matrice :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est diagonalisable, alors il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible tels que $A = PDP^{-1}$.

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$ avec, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Calculons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k.

Voyons si A est diagonalisable.

Pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a : $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 1 & -X & 0 \\ -1 & -1 & 3-X \end{vmatrix} \underset{\text{développement suivant } C_3}{=} (3-X)\begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = (3-X)(X^2-1)$

$= -(X-3)(X-1)(X+1)$

On en déduit que χ_A est scindé, $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{3, -1, 1\}$ et A est diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_{\underline{3}}(\mathbb{R})$ possède $\underline{3}$ valeurs distinctes.

Diagonalisons A.

$AX = 3X$

$(A - 3I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

* Étude de $E_3(A)$:

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors : $X \in E_3(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

D'où $E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

* Étude de $E_1(A)$:

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors : $X \in E_1(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$

D'où $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

* Étude de $E_{-1}(A)$:

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors : $X \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ -x + y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$

D'où $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

On peut affirmer que :

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \dots$

b) Suites récurrentes linéaires simultanées du 1er ordre à coefficients constants :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires.

On considère les suites récurrentes linéaires simultanées du 1er ordre à coefficients constants $(u_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (u_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ données par :

$$(E) : \begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\} \ u_{i,0} = \alpha_i \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \mathbb{N} \ u_{i,k+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \, u_{j,k} \end{cases}$$

Le but est de déterminer, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{i,k}$.

En notant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ \vdots \\ u_{n,k} \end{pmatrix}$, alors (E) se ramène à :

$$(E) : \begin{cases} X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \ X_{k+1} = A X_k \end{cases}$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $X_k = A^k X_0$ et on est alors ramené au calcul des puissances $k^{\text{ème}}$ d'une matrice.

Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les 3 suites réelles récurrentes linéaires simultanées du 1er ordre à coefficients constants données par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \ v_0 = 22, \ w_0 = 22 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases} \end{cases}$$

Montrons que ces 3 suites convergent vers 14.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Avec ces écritures, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = A X_n$ et donc, $X_n = A^n X_0$

Calculons les puissances $n^{\text{ème}}$ de A et pour cela, voyons si A est diagonalisable.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{12})(\lambda - \frac{1}{4})$

après calculs

On peut donc affirmer que χ_A est scindé, $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\}$ et puisque χ_A est à racines simples, A est diagonalisable. Diagonalisons la.

Après calculs, on trouve :

$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\quad E_{\frac{1}{4}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ $\quad E_{\frac{1}{12}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

On peut alors affirmer que:

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Après calculs, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/12)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix}$

Après calculs, on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = 14 - 11\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ v_n = 14 + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ w_n = 14 + 11\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$$

Or, $\left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et $\left(\frac{1}{12}\right)^n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc, finalement on a que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 14.

c) Suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre p :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 \in \mathbb{K}, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$.

On considère la suite récurrente linéaire à coefficients constants d'ordre p $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : (E) : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K}, \dots, u_n \in \mathbb{K} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} \end{cases}$ Il s'agit de déterminer u_n.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$ et posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$

Avec ces écritures, (E) se ramène à (E) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ et on est ramené au calcul des puissances $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.

Exemple:

Calculons pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n, sachant que $\begin{cases} u_0 = 4,\ u_1 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$X_{n+1} = AX_n$ et donc $X_n = A^n X_0$.

Calculons les puissances $n^{\text{ème}}$ de A et pour cela, voyons si A est diagonalisable.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$.

χ_A est scindé et à racines simples, donc A est diagonalisable et $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$

Diagonalisons la.

Après calculs, on a : $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On peut donc affirmer que :

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve, après calculs, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = PDP^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \times 2^n + 1 \\ 3 \times 2^{n+1} + 1 \end{pmatrix}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + 1$.

Remarque : La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ s'appelle matrice compagnon.

On peut calculer son polynôme caractéristique de la manière suivante.

Soit $X \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{p-1} - X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + XC_2 + \dots + X^{p-1}C_p}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & -X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -X & 1 \\ \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k - X^p & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} - X \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^p \left(X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k \right)$$

5. Trigonalisation

Dans cette section, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Définitions :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$ est triangulaire.
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire s'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $A = PTP^{-1}$.

Remarque :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Posons $A = \mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$. Alors f est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.
2) Toute matrice triangulaire est trigonalisable.
3) Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure et réciproquement. En effet :

soit $T = (t_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure.

Posons $Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & ⋰ & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Alors Q est inversible, $Q^{-1} = Q$ et

$$QTQ^{-1} = \begin{pmatrix} t_{n,n} & \cdots & t_{n,1} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots \, 0 & t_{1,1} \end{pmatrix}$$

Dans la pratique, quand on dira "trigonaliser" une matrice A, cela signifiera déterminer $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.

Théorème:

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé.
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé.

↳ **Preuve:**

On ne prouve que la version matricielle.

• Supposons A trigonalisable. Il existe donc $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $T = (t_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\chi_A(\lambda) = \det(PTP^{-1} - \lambda I_n) = \det(P(T - \lambda I_n)P^{-1})$

$$\underset{\det(XY) = \det(YX)}{=} \det(T - \lambda I_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (t_{i,i} - \lambda)$$

Donc: χ_A est scindé.

• On démontre la réciproque (à omettre en 1ère lecture) par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ sachant que pour $n = 1$ il n'y a rien à faire. On suppose la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que χ_A est scindé. Il existe donc $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, une valeur propre de A, et on peut alors écrire :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \\ 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \end{pmatrix} P^{-1}$$

On a alors, puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\chi_{A_1}(\lambda)$ et que χ_A est scindé. Par hypothèse de récurrence, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $A_1 = QTQ^{-1}$. On a donc:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & QTQ^{-1} \end{pmatrix} = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \\ 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & Q \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} \lambda_1 & LQ \\ 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & T \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & Q^{-1} \end{pmatrix}}_{R^{-1}} P^{-1}$$

$$= (PR) \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & LQ \\ 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & Q \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire supérieure}} (PR)^{-1} \quad \square$$

Remarque :

La preuve montre que si A est trigonalisable, toute matrice triangulaire à laquelle A est semblable a sur sa diagonale les valeurs propres de A répétées avec multiplicité.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème d'Alembert.

Corollaire :

1) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est trigonalisable.
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors est trigonalisable.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit $B_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Notons f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{M}_{B_0}(f) = A$.

Montrons que A est trigonalisable et trigonalisons la.

On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\chi_A(\lambda) \underset{\text{après calculs}}{=} -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

À ce stade, puisque χ_A est scindé, on peut affirmer que A est trigonalisable et $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 1\}$. De plus, A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2(A)) = 2$.

* Étude de $E_2(A)$:

Après calculs, on trouve $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(V_1)$ et A n'est pas diagonalisable.

Trigonalisons la.

* Étude de $E_1(A)$:

Après calculs, on trouve $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(V_3)$

On cherche $\underset{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{V_2} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que : $\begin{cases} (V_1, V_2, V_3) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ f(V_2) - 2V_2 = aV_1 = V_1 \end{cases}$

$f(V_1) \ldots$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & * & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array}$$

Travail au brouillon :

- $\begin{vmatrix} 3 & x & 11 \\ 2 & y & 7 \\ 1 & z & 3 \end{vmatrix} = \ldots\ldots$ et on le veut $\neq 0$
- $\begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots$

Posons $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors ...

6. Polynômes d'endomorphismes, polynômes de matrice

Dans cette section, E désigne, sauf mention contraire un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition : Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_N X^N \in \mathbb{K}[X]$

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $P(f) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \ldots + a_N f^N \leftarrow f^N = f \circ f \circ \ldots \circ f$ N fois

On appelle polynôme d'endomorphisme.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_N A^N$

On appelle polynôme de matrice.

Exemple : $(3 - 8X^2 + 7X^4)(f) = 3\mathrm{Id}_E - 8f^2 + 7f^4$

Remarque :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Alors : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P(f)) = P(A)$

Proposition :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X] \quad (\alpha P + Q)(f) = \alpha P(f) + Q(f)$
- $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X] \quad (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X] \quad (\alpha P + Q)(A) = \alpha P(A) + Q(A)$
- $\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X] \quad (PQ)(A) = P(A) Q(A)$

↳ **Preuve :** On ne prouve que la version endomorphisme.

Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{N} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

a) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Quitte à ajouter des coefficients nuls, on peut supposer que $N = M$.

Alors $(\alpha P + Q)(f) = \left(\sum_{k=0}^{N} (\alpha a_k + b_k) X^k\right)(f) = \sum_{k=0}^{N} (\alpha a_k + b_k) f^k$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{N} a_k f^k + \sum_{k=0}^{N} b_k f^k = \alpha P(f) + Q(f).$$

b) Posons pour tout $k > N$, $a_k = b_k = 0$.

Alors : $(PQ)f = \left(\sum_{k=0}^{2N} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) X^k\right)(f) = \sum_{k=0}^{2N} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} f^k = \sum_{i=0}^{N} a_i f^i \circ \sum_{j=0}^{N} b_j f^j$

$$= P(f) \circ Q(f) \quad \square$$

Proposition :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $g \circ f = f \circ g$. Alors, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(g) \circ P(f) = P(f) \circ Q(g)$
(autrement dit, si deux endomorphismes comutent, alors tout polynôme en l'autre)
En particulier, $Q(f) \circ P(f) = P(f) \circ Q(f)$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.
Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a : $Q(A)P(B) = P(B)Q(A)$
(autrement dit si deux matrices commutent, alors tout polynôme en l'une comute avec tout polynôme en l'autre.
En particulier, $Q(A)P(A) = P(A)Q(A)$

↳ **Preuve :**

On ne prouve que la version endomorphisme.
Puisque $g \circ f = f \circ g$, une récurrence évidente donne pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$g^k \circ f = f \circ g^k$.
Soit $Q = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Alors, par linéarité,
$$Q(g) \circ f = \left(\sum_{k=0}^{N} a_k g^k\right) \circ f = \sum_{k=0}^{N} a_k (g^k \circ f) = \sum_{k=0}^{N} a_k (f \circ g^k) = f \circ \sum_{k=0}^{N} a_k g^k = f \circ Q(g)$$

En appliquant cela à $(Q(g), f)$ au lieu de (f, g), on obtient le résultat. □

On introduit maintenant une notion importante, celle du polynôme annulateur

Définition :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ qu'il est annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ qu'il est annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

Exemple : endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $X^2 - X$ est annulateur de f.

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f possède au moins un polynôme annulateur non nul.
Rappelons que, E étant de dimension finie n, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2.
La famille $\{Id_E, f, \dots, f^{n^2}\}$ de $\mathcal{L}(E)$ ayant n^2+1 éléments est liée.
Il existe donc n^2+1 scalaires, non tous nuls, tels que $a_0 Id_E + \dots + a_{n^2} f^{n^2} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Le polynôme non nul $\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est annulateur de f.
De même, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

Proposition :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$. Alors pour tout $x \in E_\lambda(f)$ et tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a : $P(f)(x) = P(\lambda)x$.
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$. Alors pour tout $X \in E_\lambda(f)$ et tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a : $P(A)X = P(\lambda)X$

↳ **Preuve :**

On ne prouve que la version endomorphisme.
Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$ et $x \in E_\lambda(f)$. Une récurrence immédiate assure que $\forall k \in \mathbb{N}$ $f^k(x) = \lambda^k x$.
Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On a alors : $P(f)(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k x = P(\lambda)x$ □

On obtient alors le résultat suivant.

Corollaire :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de f.
   Alors : $Sp_{\mathbb{K}}(f) \subset P^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$
   (autrement dit, toute valeur propre de f est zéro de tout polynôme annulateur de f)

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A.
   Alors : $Sp_{\mathbb{K}}(A) \subset P^{-1}(\{0_{\mathbb{K}}\})$
   (autrement dit, toute valeur propre de A est zéro de tout polynôme annulateur de A)

↳ **Preuve :**

Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$. Soit x un vecteur propre associé. Alors, d'après la propriété précédente, $\underbrace{P(f)}_{=0_{\mathcal{L}(E)}}(x) = P(\lambda)x$ d'où $P(\lambda)x = 0_E$ Or, $x \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$ □

⚠ Un zéro d'un polynôme annulateur P d'un endomorphisme f n'est pas nécessairement une valeur propre de f.

Exemple : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $2Id_E - 3f + f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$
Alors $2 - 3X + X^3$ est annulateur de f.
Or, $2 - 3X + X^3 = (X-1)^2(X+2)$. Donc, les valeurs propres POSSIBLES de f sont 1 et -2.

Dorénavant, E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Théorème :

* **Cas diagonalisable :**
  1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement s'il possède un polynôme annulateur qui est scindé et à racines simples.

  2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement s'il possède un polynôme annulateur qui est scindé et à racines simples.

* **Cas trigonalisable :**
  1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est trigonalisable si et seulement s'il possède un polynôme annulateur qui est scindé.

  2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors f est trigonalisable si et seulement s'il possède un polynôme annulateur qui est scindé.

↳ **Preuve :** admis

Exemple : Un projecteur f en dimension finie est diagonalisable car, $X(X-1)$ est annulateur de f et ce polynôme est scindé et à racines simples.

Théorème : (de Cayley-Hamilton)
1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$
(le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est annulateur de cet endomorphisme)
2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$
(le polynôme caractéristique d'une matrice est annulateur de cette matrice)

Lemme : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et F un sous espace-vectoriel de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Supposons F stable par f, càd $f(F) \subset F$. Alors $\chi_{f,F}$ divise χ_f.
f restreint à F

Preuve du lemme :

F étant de dimension finie, il possède une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E.

Alors, on a : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f,F) & A \\ 0_{\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})} & A' \end{pmatrix}$ $\quad A \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: $\chi_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f,F) - \lambda I_p & A \\ 0_{\mathcal{M}_{n-p,p}}(\mathbb{K}) & A' - \lambda I_{n-p} \end{pmatrix}$

$= \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_{|F}) - \lambda I_p) \det(A' - \lambda I_{n-p})$

$= \chi_{f_{|F}}(\lambda) \det(A' - \lambda I_{n-p})$

$\square$

Preuve de Cayley-Hamilton :

On va montrer que $\forall x \in E$, $\chi_f(f)(x) = 0_E$

- Si $x = 0_E$, puisque $\chi_f(f) \in \mathcal{L}(E)$, alors $\chi_f(f)(x) = 0_E$.
- On suppose que $x \neq 0_E$.

Notons $p \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier naturel non nul tel que la famille $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ est libre. Un tel entier existe car, la famille $\{x\}$ est libre (car, famille à un élément et cet élément est non nul) et que $\{x, f(x), \dots, f^n(x)\}$ est liée (car, $(n+1)$ éléments en dimension n.

Posons $F = \mathrm{Vect}(\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\})$ dont $\mathcal{B} = \{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ est une base.

Par définition de l'entier p, $f^p(x) \in F$ ce qui assure que F est stable par f.

il existe donc $a_0 \in \mathbb{K}, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tel que $f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x)$

D'après le lemme, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_f = Q \chi_{f_{|F}}$ soit $\chi_f(f) = Q(f) \circ \chi_{f_{|F}}(f)$ et il nous reste à montrer que $\chi_{f_{|F}}(x) = 0_E$.

Or, la matrice de $f_{|F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(x) & \cdots & f^p(x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{p-1}(x) \end{array} \end{array}$$

Or, le polynôme caractéristique de cette matrice compagnon est
$\chi_{f_{|F}} = (-1)^p (X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k)$

D'où : $\chi_{f_{|F}} = (f^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x)) = 0_E$ $\quad \square$