CHAPITRE 1

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES RÉELS

1/ SOUS-ENSEMBLES REMARQUABLES DE $\mathbb{R}$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: entiers naturels
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) = \{\ldots -1, 0, 1, \ldots\}$: entiers relatifs
- $\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$: nombres décimaux ("nombre avec une virgule mais la partie décimale est finie)

→ **démo :** $N = 3,158\,17\,17\,17\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} 10^3 N = 3158,17\,17\,17\ldots \\ 10^5 N = 3\,158\,17,17\,17\ldots \end{array}\right\} \quad 10^5 N - 10^3 N = 3158\,17 - 3158 \iff N = \frac{312\,659}{10^5 - 10^3}$$

→ Montrons que $0,9999\ldots = 1$:

Posons $A = 0,9999\ldots$

$$10A = 9,9999\ldots \iff 10A - A = 9$$
$$\iff 9A = 9$$
$$\iff A = 1$$

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$: nombres rationnels (quotient de deux nombres avec une partie décimale périodique)

→ **démo :** division euclidienne avec le reste périodique

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$

irrationnels (ex : $\sqrt{2}$)

↳ **Preuve :** Par l'absurde : supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q sont premiers entre eux.

Donc : $\sqrt{2}\, q = p \iff 2q^2 = p^2$

Donc p^2 est un nombre pair

Si p est impair, $p = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Donc $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$, p^2 est impair $\Rightarrow$ ABSURDE

Donc p^2 est pair, on en déduit que p est pair et donc $p = 2p_1$ où $p_1 \in \mathbb{N}$

On en déduit que $2q^2 = (2p_1)^2 \iff 2q^2 = 4p_1^2 \iff q^2 = 2p_1^2$

Donc : q^2 est pair et aussi q est pair

Or, p et q sont premiers entre eux $\Rightarrow$ ABSURDE

CCL : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2/ RELATIONS D'ORDRE

$\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E un ensemble.

Définition :

→ $\mathcal{R}$ est réflexive si : $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$

→ $\mathcal{R}$ est antisymétrique si : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$

→ $\mathcal{R}$ est transitive si : $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Si une relation vérifie les trois : c'est une relation d'ordre

Exemples :

- $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R} =$ "divise" est une relation d'ordre
- $E = \{\text{mots}\}$ et $\mathcal{R} =$ ordre lexicographique

Définition :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E. On dit qu'elle est totale si $\forall x, y \in E$

$x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Exemple : $(\mathbb{R}, \leqslant)$ ou $(\mathbb{R}, \geqslant)$ sont des relations d'ordres totales.

Si E est muni d'une relation d'ordre totale, on dit que E est totalement ordonné. (ex : $\mathbb{R}$ est totalement ordonné)

Propriété :

$\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est "compatible avec l'addition et la multiplication" c'est-à-dire si $x \leq y$ alors $\forall z \in \mathbb{R}$ $x+z \leq y+z$ et $xz \leq yz$, $\forall z \in \mathbb{R}^*$

3/ MAJORANT, PLUS GRAND ÉLÉMENT ET BORNE SUPÉRIEUR

Soit $(E, \leq)$, E un ensemble et $\leq$ une relation d'ordre

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$

Définition:

* A est majoré si $\exists m \in E$ tel que $\forall x \in A$, $x \leq m$. Dans ce cas, m est appelé le majorant.
* A a un plus grand élément noté α, si $\alpha \in A$ et si $\forall x \in A$ $x \leq \alpha$.

Propriété: $A \subset E$, $A \neq \emptyset$

Si A a un plus grand élément, il est unique.

↳ **Preuve:** Soient α_1 et α_2, deux plus grands éléments de A

Alors $\alpha_1 \in A$, $\alpha_2 \leq \alpha_1$ car, $\alpha_2 \in A$

$\alpha_2 \in A$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$ car, $\alpha_1 \in A$

Donc: $\alpha_1 = \alpha_2$ car, $\leq$ est antisymétrique.

Définition: A est borné si A est majoré et minoré.

Exemple:

- $A \subset \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 2]$ → A est majoré par 112, A a un pge qui est 2 mais pas minoré donc NON BORNÉ
- $A \subset \mathbb{R}$, $A =]-4; 5[$ → A est majoré par 10 et minoré par -13 mais n'a ni ppe, ni pge

Définition: Soit $(E, \leq)$. $A \subset E$, $A \neq \emptyset$

* On dit que A a une borne supérieure, notée Sup(A), s'il exite $\alpha \in E$ tel que

$x \leq \alpha$ pour tout $x \in A$ et α est le plus petit élément des majorants.

* On dit que A a une borne inférieure, notée Inf(A), s'il existe $\beta \in E$ tel que $\beta \leq x$ pour tout $x \in A$ et β est le plus grand élément des minorants.

Exemple:

- $A \subset \mathbb{R}$, $A =]-2, 3[$: $Sup(A) = 3$ et $Inf(A) = -2$
- $A \subset \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$

→ A n'a pas de borne supérieure, ni de borne inférieure, A est borné (les candidats idéals seraient $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ car, $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ mais $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Théorème:

Si $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ et $\begin{cases} A \text{ majoré alors } A \text{ a une borne supérieure} \\ A \text{ minorée alors } A \text{ a une borne inférieure} \end{cases}$

Proposition: $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$

Si A est majorée, alors il a un plus grand élément. En effet, dans ce cas A est un élément fini.

Propriété: $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$

A a un plus grand élément α (unique)

$\Downarrow$ ~~$\Uparrow$~~

A a une borne supérieure α (unique)

$\Downarrow$ ~~$\Uparrow$~~ sauf si $E = \mathbb{R}$

A a un majorant (infinité)

Exemples:

- A a un majorant $\not\Rightarrow$ A a une borne si $E \neq \mathbb{R}$

→ $E = \mathbb{Q}$ $\quad A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\} =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$

A est majorée par 2, minorée par -2

Sup(A) et Inf(A) n'existent pas dans $\mathbb{Q}$.

· A a une borne supérieure $\not\Rightarrow$ A a un pge

→ $E = \mathbb{R}$ $\quad A =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

$\mathrm{Sup}(A) = \sqrt{2}$ et $\mathrm{Inf}(A) = -\sqrt{2}$ mais pas de pge.

↳ **Preuve:**

Soit x, pge de A, c'est-à-dire $\forall a \in A$, $x \geq a$ et $x \in A$.

Montrons que x est alors le plus petit des majorants.

x est un majorant par définition du pge de A.

Supposons qu'il existe x_0 majorant de A et $\boxed{x_0 < x}$. Or, $x \in A$.

Donc : $\boxed{x \leq x_0}$. ABSURDE

Donc, x est bien le plus petit des majorants.

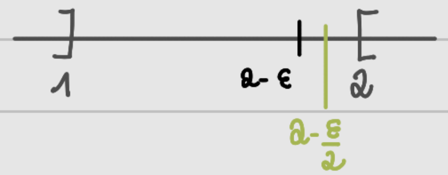
Proposition :

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ tel que A est majoré.

Sont équivalents : 1) $x = \mathrm{Sup}(A)$

2) $\forall a \in A \quad x \geq a$ et $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A$ et tel que $x - \varepsilon < a_\varepsilon \leq x$

↳ x le plus petit des majorants

ex:


$A =]1;2[$

Sont équivalents : 1) $y = \mathrm{Inf}(A)$

2) $\forall a \in A$, $y \leq a$ et $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A$ et tel que $y \leq a_\varepsilon < y + \varepsilon$

↳ x le plus grand des minorants

ex:


$A = [0,1] \cup \{2\}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tel que $2 - \varepsilon < a_\varepsilon \leq 2$. En effet,

$a_\varepsilon = 2$ convient.

↳ **Preuve :** Montrons que $Sup(A) \Rightarrow \forall a \in A, x \geq a$ et $(\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon \in A$ tel que $x - \varepsilon < a_\varepsilon \leq x)$

Or sait que $x = Sup(A) \Rightarrow x$ majorant de A et donc $x \geq a$, pour tout $a \in A$.

Supposons que (...) ne soit pas vraie : $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall a \in A \ x - \varepsilon_0 < a \leq x$ est faux. Dans ce cas, $x - \varepsilon_0$ est un majorant de A. ABSURDE car, x est le plus petit des majorants.

Supposons que x est majorant et que $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A$ tel que $x - \varepsilon < a_\varepsilon \leq x$. Montrons que $x = Sup(A)$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $y < x$ et y majore A. Ceci est absurde car si l'on choisit $\varepsilon = x - y > 0$ alors $\exists a_\varepsilon \in A$ tel que $\underbrace{x - \varepsilon}_{= y} < a_\varepsilon \leq x$. Ceci contredit le fait que y est majorant de A.

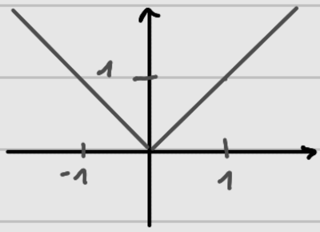
Proposition :

$\mathbb{R}$ est archimédien : c'est-à-dire $\forall x > 0$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx \geq y$

A) Fonction valeur absolue :

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$



→ continue sur $\mathbb{R}$

→ dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Propriétés :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $|x - y| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - y \leq r$

Soit $r > 0$, $|x - y| < r \Leftrightarrow -r < x - y < r$

ex: $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow x \in]-1, 5[$

4) $|x + y| \leq |x| + |y|$

↳ **Preuve :** • si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $|x + y| = x + y = |x| + |y|$

- si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, $|x+y| = -x-y = |x|+|y|$
- si $x \leq 0$ et $y<0$, ? → si $x+y \geq 0$, $|x+y| = x+y$

$$= |x| + y$$
$$< |x| + |y|$$

→ si $x+y<0$, $|x+y| = -x-y$

$$\leq |x|+|y|$$

- si $x<0$ et $y \geq 0$, même preuve en échangeant le rôle de x et y.

5) $|x+y| \geq |x|-|y|$ et $|x+y| \geq |y|-|x|$.

Autrement dit: $|x+y| \geq \big||x|-|y|\big|$

↳ **Preuve:** $|x+y| \geq |x|-|y| \iff |x| \leq |x+y|+|y|$

Or, $x = (x+y)+(-y)$

D'après 4), $|x| \leq |x+y| + |-y| = |x+y|+|y|$

B) Fonction partie entière :

Proposition:

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique entier relatif noté $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$

↳ ou noté $\lfloor x \rfloor$

Définition:

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'unique entier relatif $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$ est appelé la partie entière de x. $E(\pi)=3$; $E(-\pi)=-4$

↳ **Preuve:**

- **Unicité:** Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tel que

$n_1 \leq x < n_1+1$ (1)

$n_2 \leq x < n_2+1$ Donc: $-n_2-1 < -x < -n_2$ (2)

(1)+(2) $n_1-n_2-1 < 0 < n_1-n_2+1$

Donc $n_1-n_2<1$. Comme $n_1-n_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1-n_2 \leq 0$.

$$n_1 - n_2 + 1 > 0 \Rightarrow n_1 - n_2 + 1 \geq 1 \quad \text{car, } n_1 - n_2 + 1 \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n_1 - n_2 \geq 0$$

D'où $n_1 = n_2$.

• **Existence:**

* Si $x \in \mathbb{Z}$, $E(x) = x$ convient
* Si $x \notin \mathbb{Z}$, $x > 0$: On a admis que $\mathbb{R}$ est archimédien.

Donc en particulier, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \times 1 > x$

Soit $A = \{ k \in \mathbb{N} \mid k > x \}$, $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{N}$.

Comme $A \subset \mathbb{N}$, A admet un ppe noté n_0. Alors $n_0 > x$ car,

$n_0 - 1 \leq x < n_0$ et donc $\boxed{n_0 - 1 = E(x)}$

En effet, $n_0 - 1 \notin A$ signifie $\boxed{n_0 - 1 \leq x}$

C) Intervalles dans $\mathbb{R}$:

Définition:

① $\emptyset$; $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$; $[a, +\infty[$; $]a, +\infty[$; $]-\infty, b]$; $]-\infty, b[$; $[a, b]$; $]a, b[$;
$[a, b[$; $]a, b]$ — intervalle

② $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle tel que $\forall a_1 < a_2$, $a_1 < a_2 \in A$, alors $[a_1, a_2] \subset A$

→ intervalle ouvert : $\emptyset$; $]-\infty, +\infty[$; $]a, +\infty[$; $]-\infty, b[$; $]a, b[$

→ intervalle fermé : $\emptyset$; $]-\infty, +\infty[$; $[a, b]$; $]-\infty, b]$; $[a, +\infty[$

D) Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

Proposition:

Soit $I =]a, b[$, $a < b$. Alors $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ et $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$

↳ **Preuve:**

$\frac{b-a}{2} > 0$ car $a \neq b$. D'après la propriété d'Archimède :

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \times \frac{b-a}{2} \geq 1$. On a donc $\frac{b-a}{2} \geq \frac{1}{n}$.

Soit k le plus grand entier tel que $\frac{k}{n} \leq a$.

Par définition : $a < \frac{k+1}{n}$. On a donc : $\begin{cases} 1/n = b-a/2 \\ k/n \leq a \end{cases}$ ceci implique que

$$\frac{k+1}{n} \leq a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < b.$$ Donc : $\frac{k+1}{n} \in]a,b[\cap \mathbb{Q}$.

On pose $J = \left]\frac{a}{\sqrt{2}} ; \frac{b}{\sqrt{2}}\right[$. D'après le début de preuve, il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\frac{a}{\sqrt{2}} < \alpha < \frac{b}{\sqrt{2}}$. D'où $a < \sqrt{2}\alpha < b$, avec $\sqrt{2}\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car, $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.