Suites et séries de fonctions : CC2.

Durée : 1h30.

Les documents de cours et les appareils électroniques (calculatrices, téléphones, etc...) ne sont pas autorisés. Tous les résultats devront être soigneusement justifiés, la qualité de la rédaction sera prise en considération.

N'oubliez pas d'écrire votre nom et votre prénom et sur votre copie.

Exercice 1. L'objectif de cet exercice est d'étudier la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = n\sqrt{x}e^{-xn^2}.$$

1. Étudier la convergence simple et absolue de $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la convergence normale de $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + x^2}$.

1. Montrer qu'il y a convergence simple de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Que dire quant à la convergence absolue et normale de $\sum_{n\geq 0} f_n$?

   On note S la somme de cette série sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
3. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer la convergence simple de $\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.

   On note S la somme de cette série de fonctions.
2. En justifiant avec précision toutes vos opérations, montrer que :

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Tournez la page s.v.p.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$. Nous allons étudier la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ et les propriétés de sa somme.

1. Justifier que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.

2. Y a-t-il convergence normale sur $]1,+\infty[$?

On définit alors la fonction zêta de Riemann $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ comme la fonction donnée par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

3. Nous allons montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

(a) Justifier que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $R_n(x) \geq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x)$.

(b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(x)$.

(c) En déduire que $\|R_n\|_{\infty,]1,+\infty[} \geq \frac{1}{2}$, et conclure.

4. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée.

Nous allons maintenant considérer la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

5. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$, et que sa somme S vérifie :

$$\forall x > 1, \quad \zeta(x) - S(x) = \frac{1}{2^{x-1}}\zeta(x).$$