

---

## TD n° 3 : Calcul de limites

---

**Objectifs** À la fin du TD, je peux :

- ☐ Tracer le graphe des fonctions usuelles
- ☐ Déterminer les limites (partout) des fonctions usuelles
- ☐ Déterminer la limite d'une composée de fonctions
- ☐ Manipuler les nouvelles fonctions : tangente et puissance
- ☐ Déterminer si une limite est indéterminée ou non
- ☐ Faire la différence entre une limite finie et une limite infinie
- ☐ Reconnaître le type d'indéterminée lorsqu'il y en a une
- ☐ Lever une indétermination de plusieurs façons (plus de 5 méthodes)

### Limites basiques

**Exercice 1 — Pas d'indétermination.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x}$$

**Exercice 2 — Fonction puissance.**

1. Rappeler la définition de  $a^b$  pour  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .
2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^a$  en discutant suivant  $a$ .
3. Soit  $a > 0$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x$  en discutant suivant  $a$ .
4. Que vaut  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2} - 1)^x$  ?

**Exercice 3 — Croissances comparées, énoncé et démonstration.**

1. En étudiant  $x \mapsto x - \ln(x)$  montrer que pour tout  $x$  dans  $[1, +\infty[$  on a  $\ln(x) \leq x$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$ .
2. Grâce aux changements de variables indiqué déduire successivement les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad (x = y^2), \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \quad (x = 1/y)$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (y = e^x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad (y = -x).$$

3. Montrer plus généralement que pour tout  $a, b > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^a}{x^b} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a |\ln(x)|^b = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^{ax} = 0$$

**Exercice 4 — Croissances comparées, utilisations.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(|x|)e^x \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

## Lever des indéterminations

**Exercice 5 — Méthodes algébriques.**

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - x - 1}{(x - 1)^3}$$

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ . Calculer également

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x}.$$

**Exercice 6 — Facteur dominant.** Déterminer le facteur dominant des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles suivantes et calculer les limites si possible :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 + e^{3x}}{x + 2x^2 + e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 + (\ln x)^4}{1 + x + x^2 + x^3 + (\ln x)^5}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1)^2(x - 3)(x^2 + 2)}{(3x + 1)^3 \sqrt{x^2 + 1}(2x - 1)}$$

**Exercice 7 — Taux d'accroissement.** En utilisant le calcul des dérivées que l'on admettra, calculer si possible les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan(x) - 1}{x - \pi/4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\sin x}.$$

**Exercice 8 — Changements de variables.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \sin(e^{-x}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\ln(1 + 2x)}$$

## Divers

**Exercice 9 — Encadrement.** Calculer les limites suivantes grâce à un encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}(\cos(1 + 1/x) - 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(e^x) \sin(e^{-x})$$

**Exercice 10 — Valeurs absolues.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x^2 + x - 3| - |3x^2 + 4x + 1|}{|2x + 1| - |x + 5|} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |x^3 + e^x - e^{-x}| - |x^3 - e^x - 3x|$$

**Exercice 11 — Puissances généralisées.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

**Exercice 12 — Un calcul trigonométrique.**

1. Exprimer  $\cos(2t)$  en fonction de  $\sin(t)$ .
2. Utiliser le calcul ci dessus pour calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ .

**Exercice 13 — Limites non existantes.** Justifier que les limites suivantes n'existent pas

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{x+2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x).$$

### Et pour s'entraîner !

**Exercice 14.** Dans cet exercice, on calculera si possible les limites suivantes en expliquant la ou les méthodes employées :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + (\ln x)^3}{x^4 e^{-x} + x^2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (\ln x)^3}{x^4 e^{-x} + x^2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + (\ln(x+1))^4}{(x^3 - \sqrt{x} \ln x)}$
4.  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(1/x)$
7.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-2}}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} (\cos(1 + 1/x) - 1)$
9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{2}{x} \right)$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1+2x)}$

**Exercice 15 — Limites à l'infini.** Calculer les limites suivantes :

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - \ln(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1 + (\ln x)^4} - \frac{x^3 - 1}{x^2}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln(x)}{x^2 + 1 + e^{3x}}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} \sin(1/x)$
- e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{1 + x^2 + x^3 + (\ln x)^5}$
- f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 2x^2 + e^x}$