CHAPITRE 3

FONCTIONS RÉELLES

Définition:

On appelle fonction réelle toute application : $f: I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$.

→ $I = D(f)$: domaine de définition de f

→ $\mathbb{R} \neq$ image de f

Image de f, notée $Im(f) = \{f(x) \mid x \in I\}$, unicité de l'image

→ f est dite injective si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 = x_2$ ou encore tout $y \in \mathbb{R}$ a <u>au plus</u> un antécédent.

→ f est dite surjective si tout $y \in \mathbb{R}$ a <u>au moins</u> un antécédent ou encore $Im(I) = \mathbb{R}$

→ f est dite bijective si f est injective ET bijective

→ $f: I \to \mathbb{R}$ est paire si I est symétrique par rapport à 0 et si $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in I$

⇒ $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à (O_y)

→ f est impaire si I symétrique par rapport à 0 et $f(x) = -f(x) \quad \forall x \in I$

⇒ $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à 0

→ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ si $f(x) = f(x+T)$

→ f croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, constante.

→ f est majorée:

$f: I \to \mathbb{R}$ si $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in I \quad f(x) \leq M$

→ f est minorée:

$f: I \to \mathbb{R}$ si $\exists m \in \mathbb{R} \ \forall x \in I \quad m \leq f(x)$

→ f est bornée s'il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C \quad \forall x \in I$

→ $f, g : I \to \mathbb{R}$. On peut ajouter $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ si $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

On peut les composer ($f \circ g$ ou $g \circ f$) avec des conditions sur les domaines de définition ou les images.

<u>ex:</u> $f(x) = \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ et $g(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$

$$f \circ g = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$g \circ f = x \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Définition: $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, $I \neq \emptyset$

Soit $x_0 \in I$.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = +\infty \text{ signifie } \forall A > 0,\ \exists \delta = \delta(A) \text{ tel que } \begin{cases} 0 < |x - x_0| \leq \delta \\ x \in I \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x) \geq A$$

Remarque:

$$0 < |x - x_0| \leq \delta \iff x \in [x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta]$$

Exemple: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = \alpha \end{cases}$

Soit $A > 0$. On cherche $\delta = \delta(A) > 0$ tel que $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$

$$f(x) > A \iff \frac{1}{x^2} \geq A \iff 0 < x^2 \leq \frac{1}{A}$$

$$\iff 0 < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \qquad \text{Donc : } \delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \text{ convient.}$$

1/ Limite d'une fonction

Définition:

sous-ensemble de $\mathbb{R}$, domaine de définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$

$I \subset \mathcal{D}(f)$, I intervalle ouvert non vide — ex: $I =]a, b[$

x_0 est l'extrémité de I, soit un point de I — $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ ou $a < x_0 < b$

On dit f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ quand $x \to x_0$ ($\lim_{x \to x_0} f(x) = l$)

si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si $\begin{cases} |x - x_0| \leq \delta \\ x \in \mathcal{D}(f) \end{cases} \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$

Définition: LIMITE EN $+\infty$ ET $-\infty$

- $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ <u>signifie</u> $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A = A(\varepsilon) > 0$ tel que $|f(x) - l| \leq \varepsilon$, pour tout $x \geq A$.

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ <u>signifie</u> $\forall M > 0$, $\exists A = A(M)$ tel que si $x \geq A$ alors $f(x) \geq M$

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ <u>signifie</u> $\forall M < 0$, $\exists A = A(M)$ tel que si $x \geq A$ alors $f(x) \leq M$

- $f :]-\infty ; a[\to \mathbb{R}$

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ <u>signifie</u> $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A = A(\varepsilon) < 0$ tel que $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ pour tout $x \leq A$

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ <u>signifie</u> $\forall M > 0$ $\exists A = A(\varepsilon) < 0$ tel que $\forall x \leq A$ $f(x) \geq M$

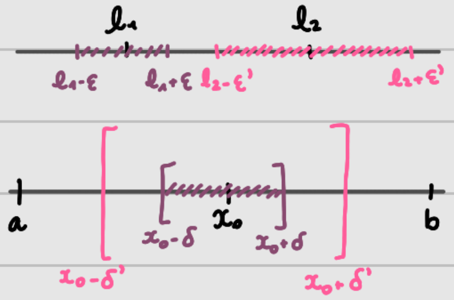
→ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ <u>signifie</u> $\forall M > 0$ $\exists A = A(\varepsilon) < 0$ tel que $\forall x \leq A$ $f(x) \leq M$

Proposition:

> $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$
> Une limite de f en x_0, si elle existe, elle est unique.

Preuve:

Par l'absurde, supposons $\exists\, l_1 < l_2$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ signifie $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\begin{cases} |x - x_0| \leq \delta \\ x \in]a, b[\end{cases} \Rightarrow |f(x) - l_1| \leq \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$ signifie $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists \delta' = \delta'(\varepsilon') > 0$ tel que $\begin{cases} |x - x_0| \leq \delta' \\ x \in]a, b[\end{cases} \Rightarrow |f(x) - l_2| \leq \varepsilon'$

En particulier si $\varepsilon' = \varepsilon = \dfrac{l_2 - l_1}{3}$, $\exists \delta > 0$ tel que si $\begin{cases} |x - x_0| \leq \delta \\ x \in]a,b[\end{cases} \Rightarrow |f(x) - l_1| \leq \varepsilon$ et $\exists \delta' > 0$ tel que si $\begin{cases} |x - x_0| \leq \delta' \\ x \in]a,b[\end{cases} \Rightarrow |f(x) - l_2| \leq \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$

Donc si $|x - x_0| \leq \delta'' = \min(\delta, \delta')$

alors $\begin{cases} |f(x) - l_1| \leq \frac{l_2 - l_1}{3} \\ |f(x) - l_2| \leq \frac{l_2 - l_1}{3} \end{cases}$

ABSURDE. En effet, $|f(x) - l_1| \leq \frac{l_2 - l_1}{3} \iff \frac{-(l_2 - l_1)}{3} \leq f(x) - l_1 \leq \frac{l_2 - l_1}{3}$

$$\iff \frac{l_1 - l_2}{3} + l_1 \leq f(x) \leq \frac{l_2 - l_1}{3} + l_1 \iff \frac{4l_1 - l_2}{3} \leq f(x) \leq \frac{2l_1 + l_2}{3}$$

De plus, $|f(x) - l_2| \leq \frac{l_2 - l_1}{3} \iff \frac{l_1 - l_2}{3} \leq f(x) - l_2 \leq \frac{l_2 - l_1}{3}$

$$\iff \frac{2l_2 + l_1}{3} \leq f(x) \leq \frac{4l_2 - l_1}{3}$$

On a donc : $\frac{4l_1 - l_2}{3} \leq f(x) \leq \frac{2l_1 + l_2}{3}$

$\frac{2l_2 + l_1}{3} \leq f(x) \leq \frac{4l_1 - l_2}{3}$ ABSURDE car, $\frac{2l_1 + l_2}{3} < \frac{2l_2 + l_1}{3}$

$l_1 + \frac{l_2 - l_1}{3} = \frac{2l_1 + l_2}{3}$

$\Rightarrow$ On a donc unicité de la limite si elle existe

Proposition :

> $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$
>
> $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ est équivalent à pour tout suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers l.

En pratique, on utilise cette proposition sous la forme suivante :

s'il existe $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ qui converge vers x_0 et telles que $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l_1$ et $\lim_{n \to +\infty} f(v_n) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$ alors f n'a pas de limite en x_0.

ex: $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0,1[$ $\quad \lim_{x \to 0} f(x) = ?$

$u_n = \frac{1}{2\pi n}$ $\quad f(u_n) = \cos(2\pi n) = 1$ $\quad v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ $\quad f(v_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0 \ \forall n$

CCL: $\lim_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas car, il existe $(u_n)_n$ et $(v_n)_n \to 0$ et tel que $(f(u_n)_n)$ tend vers 1 et $(f(v_n)_n)$ tend vers 0

↳ **Preuve:**

Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ tel que $u_n \to x_0$.

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - x_0| \leq \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ signifie $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon') > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon'$

Soit $\varepsilon = \delta$. Alors $\exists N$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - x_0| \leq \delta$ et donc $|f(u_n) - l| \leq \varepsilon'$

Donc $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists N$ tel que $n \geq N \Rightarrow |f(u_n) - l| \leq \varepsilon'$

Réciproquement, supposons que $\forall (u_n)_n \to x_0$, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.

On veut montrer que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. Supposons que ce soit faux, alors

$\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, $\exists x$ vérifiant $|x - x_0| \leq \delta$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon_0$

En particulier, prenons $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall n \geq 1$ $\exists x_n$ tel que $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$

Alors $x_n \to x_0$ mais $f(x_n) \not\to l$ $\quad$ CONTRADICTION

2/ Opérations sur les limites

Proposition:

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $g:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$

Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

Alors: $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = l_1 l_2$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) + \lambda g(x) = l_1 + \lambda l_2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

↳ **Preuve:**

Évident car, si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite qui converge vers x_0 alors $(f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers l_1 et $(g(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers l_2 et on utilise les résultats sur les suites.

Proposition:

Si $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$

Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ et $f(x) < g(x)$

Alors $l_1 \leq l_2$.

"Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges"

Exemple: $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ $u_n < v_n$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$

Définition:

$f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$

On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et de plus cette limite est égale à $f(x_0)$

Théorème:

Si $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a,b[$

Si f et g sont continues en x_0 alors $f+g$, fg, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ sont continues en x_0.

De plus, si $f(x) \neq 0$ $\forall x$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.

↳ **Preuve:**

f, g continue en $x_0 \iff \forall (u_n)_{n\geq 0}$, $u_n \to x_0$, $f(u_n) \to f(x_0)$ et $g(u_n) \to g(x_0)$

D'après le chapitre 2, $(f(u_n) + g(u_n))_{n\geq 0} \to f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$

et $(f(u_n)g(u_n))_{n\geq 0} \to f(x_0)\,g(x_0) = (fg)(x_0)$

$(\lambda f(u_n))_{n\geq 0} \to \lambda f(x_0)$

Définition:

$f :]a, b[\to \mathbb{R}$

f est continue si elle est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$

Exemple: ① $f(x) = (x-1)^2$, montrons que f est continue en 1 et 0.

→ rappel: f est continue en $x_0 \in D_f$. si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D(f)}} f(x) = f(x_0)$

autrement dit si :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ tel que $\begin{cases} |x - x_0| \leq \gamma \\ x \in D_f \end{cases}$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

· $f(1) = 0$ $\quad f$ est continue en 1 si $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma = \gamma(\varepsilon)$ tel que $|x-1| \leq \gamma$ alors $|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$.

$|f(x) - f(1)| = |f(x)| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$

donc $(x-1)^2 \leq \varepsilon \iff |x-1| \leq \varepsilon$ $\quad \sqrt{\gamma}$ convient

· $f(0) = 1$ $\quad f$ est continue en 0 si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma = \gamma(\varepsilon)$ tel que $|x - 0| \leq \gamma$ alors $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$.

$|f(x) - f(0)| = |(x-1)^2 - 1| = |x^2 - 2x| = |x||x-2|$

Supposons $|x| \leq 1$ alors $-1 \leq x \leq 1$

$\iff -3 \leq x - 2 \leq -1$

$\iff |x-2| \leq 3$

Donc si $|x| \leq 1$ alors $|x-2| \leq 3$ et donc $|f(x) - f(0)| \leq 3|x|$

$3|x| \leq \varepsilon \iff |x| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Donc si $|x| \leq 1$ et $|x| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ alors $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$

$\gamma = \min(1, \frac{\varepsilon}{3})$

② $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ $\qquad |x-1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

donc $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Montrons avec la définition que f n'est pas continue sur 1.

$\rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, $\exists x_0$ tq $|x_0 - 1| \leq \delta$ et $|f(x_0) - \underset{1}{\underbrace{f(1)}}| > \varepsilon_0$

Prenons $\varepsilon_0 = 1$.

Pour tout $\delta > 0$, si $x_0 = 1 - \frac{\delta}{2}$ alors $|x_0 - 1| = \frac{\delta}{2} = \delta$ et $f(x_0) = -1$

$\Rightarrow |f(x_0) - f(1)| = 2 > 1 = \varepsilon_0$

Rappel :

f est continue en x_0 si $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$

$\rightarrow u_n \in D_f$

Conséquence :

f n'est pas continue en x_0 s'il existe une suite particulière $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = x_0$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) \neq f(x_0)$

Corollaire :

Toutes les fonctions de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ (fonction polynomiale) sont continues en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

Théorème :

Si $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ continues avec $\mathrm{Im}(g) \subset D_f$ alors $f \circ g : D_g \to \mathbb{R}$ est <u>continue</u>

↳ **Preuve :**

Soit $x_0 \in D_g$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_g$ tel que $u_n \to x_0$

Alors $g(u_n) \to g(x_0)$ car, g continue

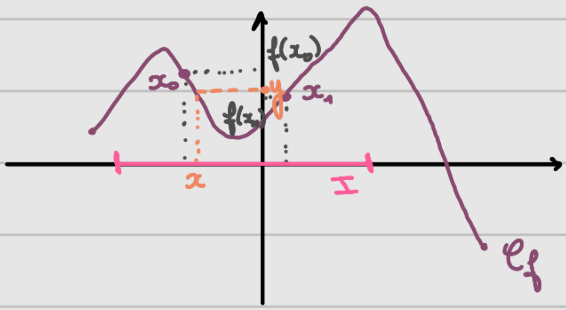
$f(g(u_n)) \to f(g(x_0))$ car, f continue

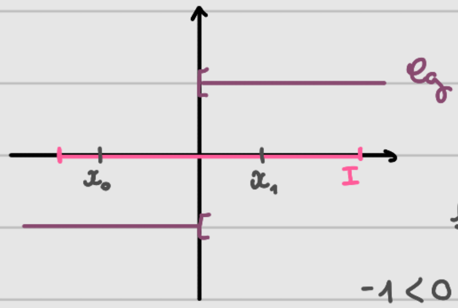
3 / Théorèmes fondamentaux sur la continuité

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ continue et soit I un intervalle $\subset D_f$ alors $f(I) = J$ où J est un intervalle.

Cela signifie que si $x_0, x_1 \in I$ alors tout y entre $f(x_0)$ et $f(x_1)$ est de la forme $y = f(x)$ avec $x \in I$.





$f(x_0) = -1$, $f(x_1) = 1$

$-1 < 0 < 1$ mais $0 \neq f(x)$

Théorème :

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, $I \subset D_f$, I intervalle fermé et borné (I est aussi appelé segment), $I = [a,b]$, $a \leqslant b$

Alors $f([a,b])$ est aussi un intervalle (évident d'après TVI) qui est aussi un segment de la forme $[m, M]$

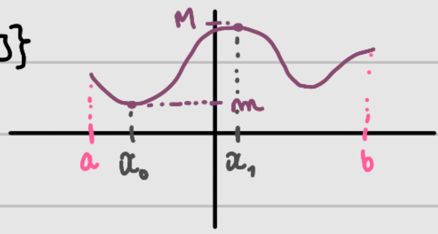
Conséquence :

Si f continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$:

$\exists M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in [a,b]$

et $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$

et $\exists x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$



/!\ il n'y a pas d'unicité pour x_0 et x_1

ex : $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, 4\pi]$: plsrs max, min...

/!\ Si $f : I \to \mathbb{R}$ où I intervalle qui n'est pas un segment, alors $f(I) = J$ où J est un intervalle (TVI) mais on ne peut rien dire sur J !

ex: $f(x)=\frac{1}{x}$ sur $]0,1]$ $\quad f(]0,1])=[1,+\infty[$

Théorème :

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue alors $\{f(x) : x\in[a,b]\}$ bornée non vide.

Notons $m=\inf\{f(x) : x\in[a,b]\}$

$M=\sup\{f(x) : x\in[a,b]\}$ existent (chap 1)

et $\exists c\in[a,b]$ tel que $f(c)=m$ et $\exists d\in[a,b]$ tel que $f(d)=M$

↳ Preuve :

• étape 1 : Montrons que $\{f(x) : x\in[a,b]\}$ est bornée.

Par l'absurde, supposons que cet ensemble est non borné :

$\forall A>0$, $\exists x_A\in[a,b]$ tel que $|f(x_A)|\geq A$.

En particulier, pour $A=n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, $\exists x_n\in[a,b]$ tel que $|f(x_n)|\geq n$.

Ceci est absurde car, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\exists (x_{n_k})_k$ qui converge vers $\alpha\in[a,b]$ car, $a\leq x_k\leq b$.

De plus, f est continue, $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k})_k = f(\alpha)\in\mathbb{R}$.

et de plus, $|f(x_{n_k})|>n_k$. D'où $\lim\limits_{k\to+\infty}|f(x_{n_k})|=+\infty$

ABSURDE !

CCL : $\{f(x) : x\in[a,b]\}$ est bornée, m et M existent.

• étape 2 : Montrons qu'il existe $d\in[a,b]$ tel que $f(d)=M$, $M=\sup\{f(x) : x\in[a,b]\}$

Par définition de la borne sup, $\forall\varepsilon>0$, $\exists y\in\{f(x) : x\in[a,b]\}$ tel que $M-\varepsilon<y\leq M$

En particulier si $\varepsilon=\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$, $\exists x_n\in[a,b]$ tel que $M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leq M$

Par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=M$

D'après Bolzano-Weierstrass, $\exists (x_{n_k})_k$ tel que $x_{n_k}\to d\in[a,b]$.

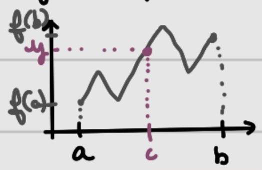
Comme f est continue $\Rightarrow f(x_{n_k})\to f(d)$

De plus, $f(x_n)\to M \Rightarrow f(x_{n_k})\to M$

Par unicité de la limite $M=f(d)$

Théorème TVI (1ère version) :

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$



↳ Preuve :

• étape 1 : Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $g(0) \leq 0$ et $g(1) \geq 0$.

Montrons qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 0$.

Si $g(0) = 0$, $t_0 = 0$ convient. Si $g(1) = 0$, $t_0 = 1$ convient.

Sinon supposons $g(0) < 0$ et $g(1) > 0$. On considère un principe de dichotomie (déjà vu). On calcule $g(\frac{1}{2})$.

Si $g(\frac{1}{2}) < 0$ alors on remplace 0 par $\frac{1}{2}$ et 1 reste 1

Si $g(\frac{1}{2}) > 0$ alors on remplace 1 par $\frac{1}{2}$ et 0 reste 0.

$$\begin{cases} a_0 = 0 & b_0 = 1 \\ a_1 = \frac{1}{2} \text{ si } g(\frac{1}{2}) < 0 & b_1 = 1 \\ a_1 = 0 \text{ si } g(\frac{1}{2}) > 0 & b_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Supposons a_n et b_n construits $g(a_n) \leq 0$ et $g(b_n) \geq 0$

$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$

On calcule $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$. Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Si $g\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

Par construction, $(a_n)_n \nearrow$ et $(b_n) \searrow$ et $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}$

Donc : $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. D'après le chap 2, $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers la même limite ℓ.

$g(a_n) \leq 0$ et $g(b_n) \geq 0$ par construction. Par continuité de g,

$g(a_n) \to g(\ell)$ et $g(b_n) \to g(\ell)$ avec $g(a_n) \leq 0 \Rightarrow g(\ell) \leq 0$

$g(b_n) \geq 0 \Rightarrow g(\ell) \geq 0$ $\Rightarrow g(\ell) = 0$

• étape 2 : f donné dans le théorème $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, y entre $f(a)$ et $f(b)$

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f(a + t(b-a)) - y$$

$g(0) = f(a) - y$

$g(1) = f(b) - y$ $\qquad$ y entre $f(a)$ et $f(b)$ implique que $g(0)$ et $g(1)$ sont de signes opposés

si $f(a) < f(b)$ $\quad g(0) \leq 0$ et $g(1) \geq 0$

si $f(a) > f(b)$ $\quad g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$

D'après la 1ère étape appliquée à g, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 0$ et donc $f(\underbrace{a + t_0(b-a)}_{=c}) = y$

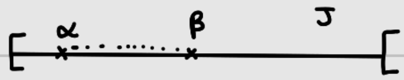
Corollaire :

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle, f continue

Alors $f(I) = J$ où J est un intervalle

↳ **Preuve :**

Rappel : J intervalle signifie que $\forall \alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in J$, tout $y \in [\alpha, \beta]$ est encore dans J.



Soient α et β dans $f(I)$, $\alpha = f(x_1)$ et $\beta = f(x_2)$ où $x_1, x_2 \in I$: $x_1 < x_2$

$f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ continue

Tout point y entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ est de la forme $y = f(c)$ où $c \in [x_1, x_2]$

Corollaire :

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

Alors $f([a,b]) = [m, M]$ où $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$

$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

↳ **Preuve:**

D'après le corollaire, $f([a,b]) = J$ où J intervalle.

D'après un théorème, $m = f(c)$ et $M = f(d)$

Donc: $J = [m, M]$

Théorème:

I intervalle de $\mathbb{R}$, f continue sur I, strictement croissante (décroissante)

Alors f est une bijection de I dans $J = f(I)$ et $f^{-1} : J \to I$ est continue

↳ **Preuve:**

On définit J comme $f(I)$, $J := f(I)$ est un intervalle car, I est un intervalle et f continue (TVI)

$f : I \to J = f(I)$ est surjective par construction f est injective car, si $x_1, x_2 \in I$ tq $f(x_1) = f(x_2)$ car, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$

$\Downarrow$

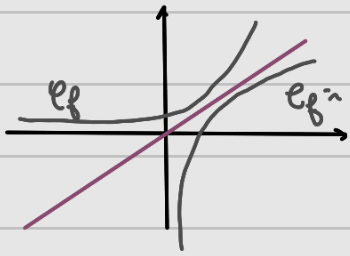
$x_1 = x_2$ (f strictement croissante)

f est donc une bijection $f : I \to J$ et elle est strictement croissante

$f^{-1} : J \to I$ est elle aussi strictement croissante.

$y_1 < y_2$, $y_1 < y_2 \in J$, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ avec $x_1 < x_2$

$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$



Montrons que f^{-1} est continue $f^{-1} : J \to I$. Soit $y \in J$.

On veut montrer que $\forall (y_n)_n \subset J$ tel que $y_n \to y$, on veut montrer que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$

$y_n = f(x_n)$ et $y = f(x)$. D'où $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$ est équivalent à montrer que $x_n \to x$.

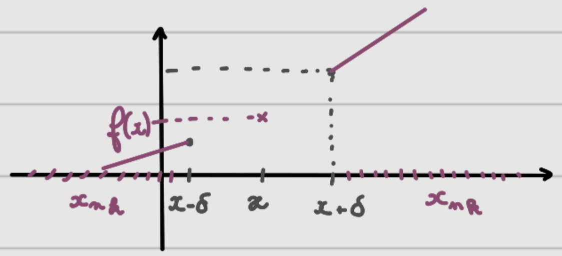
Si $(x_n)_n$ ne converge pas vers x. Alors $\exists (x_{n_k})$ qui sera telle que $|x_{n_k} - x| \leq \delta$ pour un $\delta > 0$.

$(x_n)_n$ tend vers x signifie $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $n \geq N \Rightarrow |x_n - x| \leq \varepsilon$

$(x_n)_n$ ne tend pas vers x signifie $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall N$, $\exists n \geq N$ avec

$|x_n - x| > \varepsilon_0 = \delta \iff x_n > x + \delta$ ou $x_n < x + \delta$

Posons $\delta = \varepsilon_0$ et n_k associée à $N = k$. On s'arrange pour $n_{k+1} > n_k$.



Alors $f(x_k) = y_{n_k} \in]-\infty, f(x-\delta)] \cup [f(x+\delta) ; +\infty[$

et $y_{n_k} \to y = f(x)$ ABSURDE

4/ Fonctions lipschitziennes

Définition:

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle est dite lipschitzienne s'il existe $C > 0$ tel que

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I$

Théorème: Les fonctions lipschitziennes sont continues.

↳ **Preuve**:

On veut montrer que si $x_0 \in I$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tel que $|x - x_0| \leq \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

$\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ convient car, $|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{C}$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0| \leq C \times \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$

Remarque: δ ne dépend pas du choix de x_0.

Définition:

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle

On dit que f est uniformément continue sur I si $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x_0 \in I$

$\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ (ici δ ne dépend plus de x_0) tel que $\begin{cases} |x - x_0| \leq \delta \\ x \in I \end{cases} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

Définition :

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $C > 0$ tel que $\forall x, x' \in I$
$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|$

Proposition :

Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues

↳ **Preuve :**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ tel que $|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|$ pour un $C > 0$ et $\forall x, x' \in I$.
Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que $\forall x_0 \in I$ $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
Comme $|f(x) - f(x_0)| \leq C(x - x_0)$, $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ convient.

Théorème de Heine : (Admis)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est automatiquement uniformément continue.

$$\begin{tikzcd}
f \text{ continue sur } [a,b] \arrow[dr, Rightarrow, shift right] & & f \text{ lipschitzienne} \arrow[dl, Rightarrow, shift right] \\
& f \text{ uniformément continue} \arrow[ul, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[ur, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & \\
& f \text{ continue} \arrow[u, Rightarrow, shift right, "/" marking] &
\end{tikzcd}$$

Théorème :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe une fonction escalier g tel que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$