6. Cinématique pour les mouvements courbes

Repère polaire

Comment décrire le mouvement d’un point se déplaçant de manière curviligne?

Découverte du repère polaire

4. Repère de Frenet et mouvement circulaire

Vue normalement en TS

Dans un référentiel donné, un système, a un mouvement circulaire non uniforme si :

- Sa trajectoire est **un arc de cercle de rayon R.**
- La valeur de son accélération **n'est pas constante.**

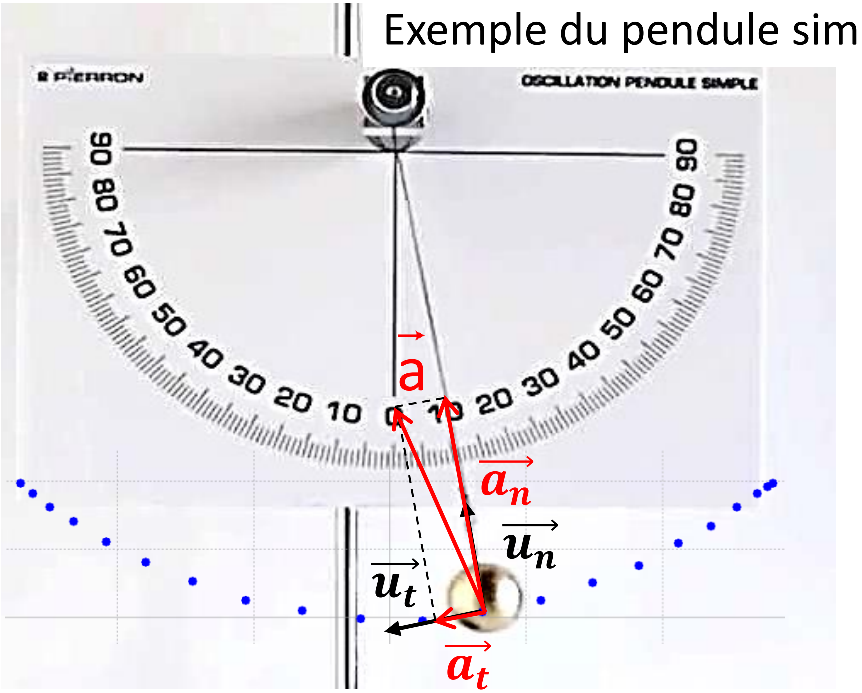
A chaque instant, son accélération peut se décomposer en deux vecteurs <u>**dans la base (locale) de Frenet**</u> (M, $\overrightarrow{u_t}$, $\overrightarrow{u_n}$):

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_T} + \overrightarrow{a_N}$$

Accélération normale (centripète)

Accélération tangentielle (tangente à la trajectoire)

Exemple du pendule simple



Dont les valeurs sont données par :

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad \text{et} \quad a_N = \frac{v^2}{R}$$

I. Repérage géométrique d'un point du plan à l'aide du repère polaire

1. Définition des coordonnées polaires ou

Comment repérer autrement un point du plan?

Utilisons une nouvelle base de vecteurs **unitaires** : **base polaire** $\left(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}\right)$

En cartésien:

M (x, y) soit $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y}$

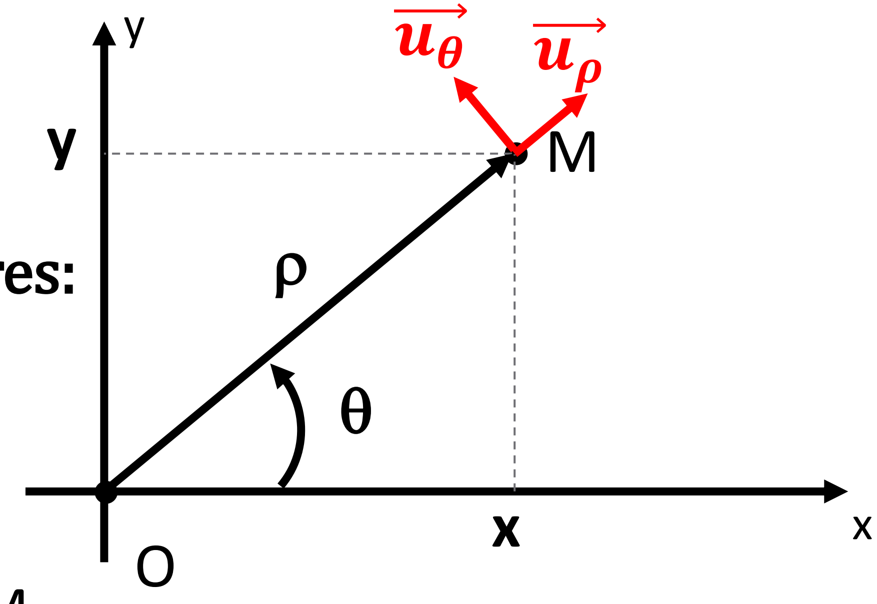
Mais on peut aussi voir M selon les coordonnées polaires:

M (ρ, θ) et $\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho}}$

(OM) est l'axe polaire,

ρ = OM = $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ (réel > 0), est appelé **rayon polaire** de M,

$\theta = (\widehat{Ox, OM})$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) est appelé **angle polaire**.



2. Quelle est l'équivalence entre les deux couples de coordonnées ?

A partir de (x, y):

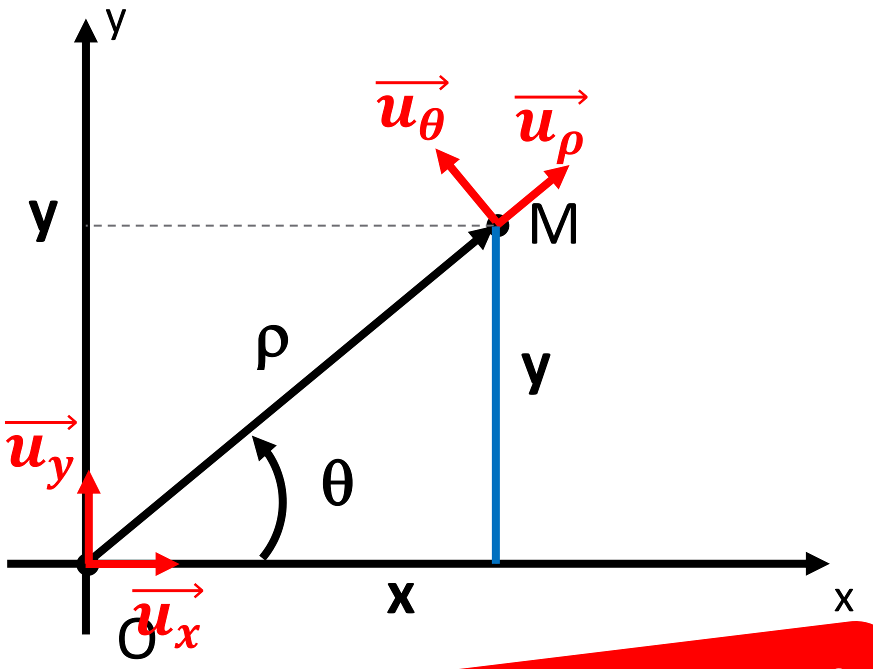
(Triangle rectangle et Pythagore)

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tan\theta = \dfrac{y}{x} \; (*) \end{cases}$$

A partir de (ρ, θ):

(Trigonométrie dans le triangle rectangle)

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$



Contrairement à la base cartésienne qui est fixe, la **base polaire est mobile**, puisque que θ dépend du temps.

Passage de $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ à $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$:

$$\boxed{\overrightarrow{u_\rho} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|} = cos\theta\, \overrightarrow{u_x} + sin\theta \overrightarrow{u_y}}$$

$\overrightarrow{u_\theta}$ est construit à partir de $\overrightarrow{u_\rho}$ par rotation de $+\frac{\pi}{2}$

Après calcul : $\boxed{\overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta \overrightarrow{u_x} + cos\theta \overrightarrow{u_y}}$

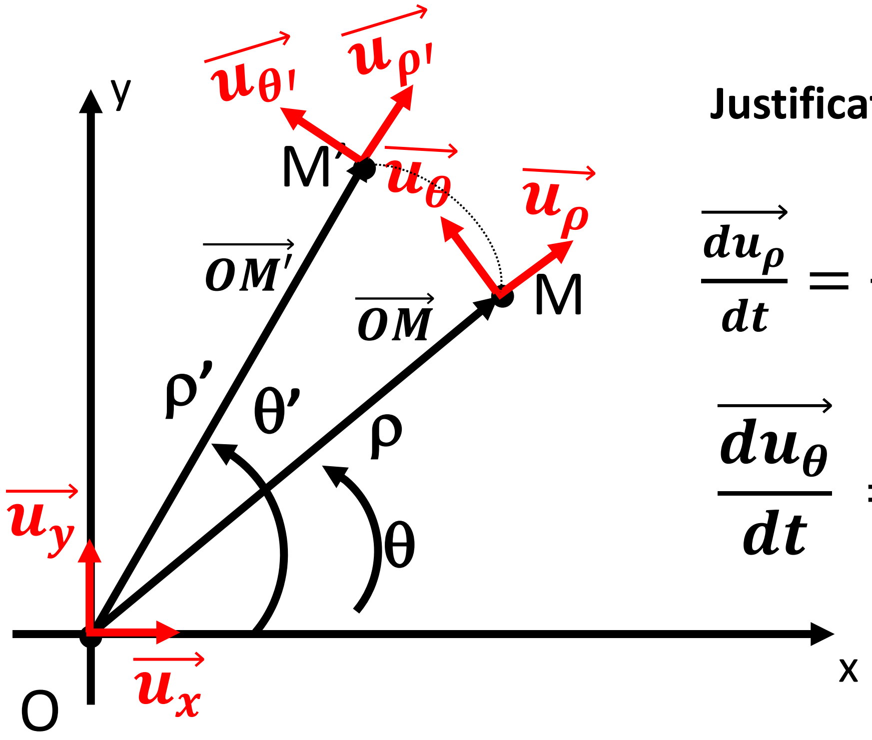
(*) la détermination de θ est soumise aux signes de x et y

Que se passe-t-il lorsque M se déplace?

- **Les vecteurs unitaires varient-ils dans le temps?**

La base polaire varie au cours du mouvement, contrairement à la base cartésienne.

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ \dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_\rho} \end{cases}$$



Justification analytique

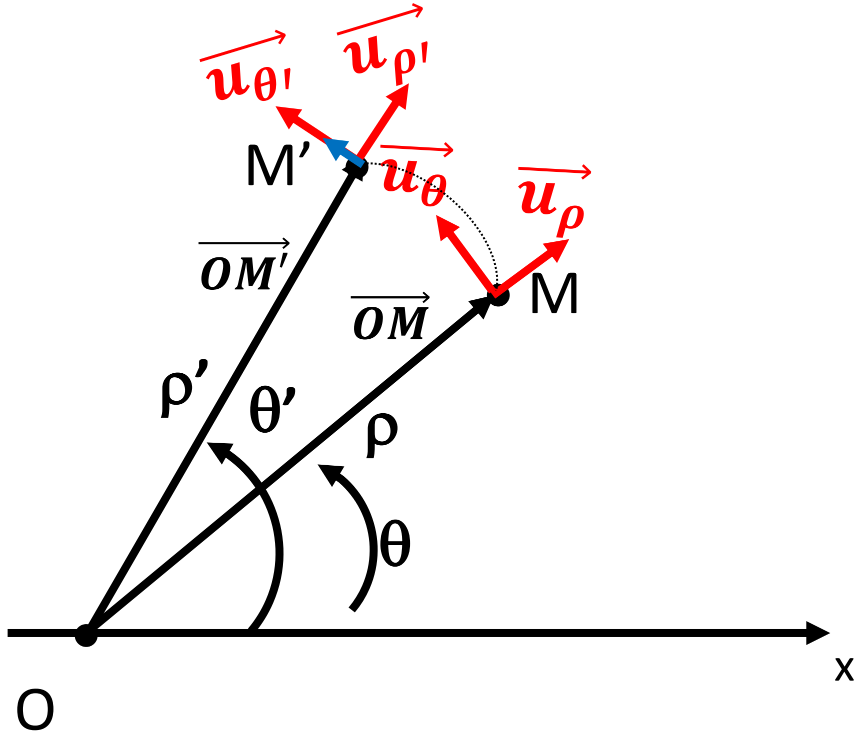
$$\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \frac{d(\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_y})}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \dot{\theta}\cos\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{d(-\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_y})}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\overrightarrow{u_x} - \dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

Lors du calcul de la dérivée temporelle, se rappeler que les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont fixes et ont des dérivées temporelles nulles.

Justification géométrique

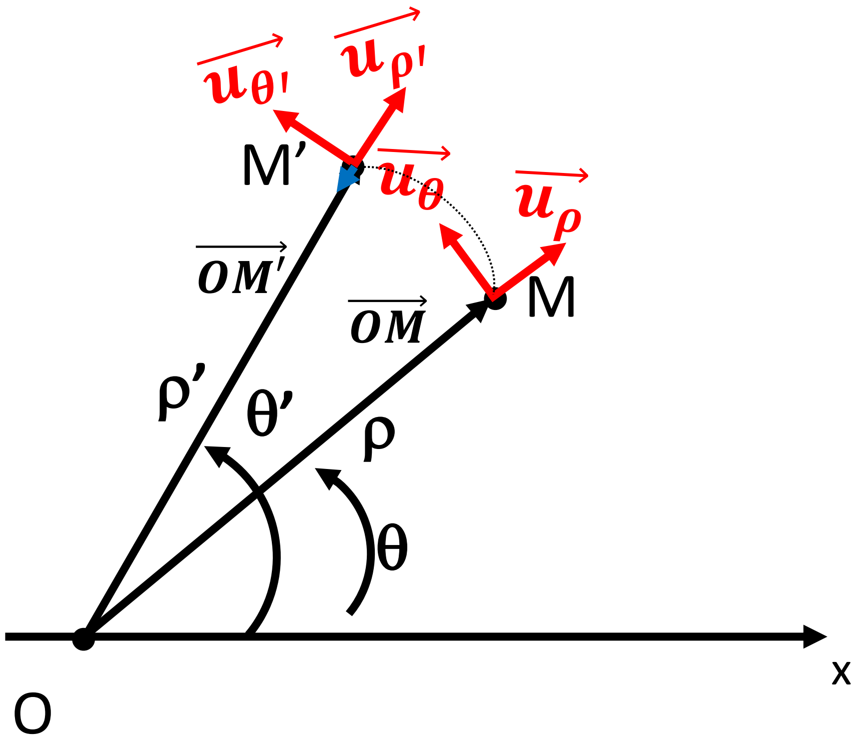
La variation temporelle de $\overrightarrow{u_\rho}$ est proportionnelle à $\overrightarrow{u_\theta}$



$$\frac{\Delta\overrightarrow{u_\rho}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{u_\rho}}{\Delta\theta}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{u_{\rho'}} - \overrightarrow{u_\rho}}{\Delta\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

Lorsque le point se déplace de M à M,' on raisonne sur des variations $\Delta\theta = \theta' - \theta$ et $\Delta t = t' - t$ qui tendent vers 0.

De même, la variation temporelle de $\overrightarrow{u_\theta}$ est proportionnelle à $-\overrightarrow{u_\rho}$



$$\frac{\Delta\overrightarrow{u_\theta}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{u_\theta}}{\Delta\theta}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{u_{\theta'}} - \overrightarrow{u_\theta}}{\Delta\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_\rho}$$

II. Ecriture des grandeurs cinématiques en polaire

- **Position :** $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho}$

- **Vitesse :** $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d\left(\rho\overrightarrow{u_\rho}\right)}{dt} = \cdots = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ ou encore $\vec{v}\begin{pmatrix}\dot{\rho}\\ \rho\dot{\theta}\end{pmatrix}$

- **Accélération :** $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \cdots = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$

  ou encore $\vec{a}\begin{pmatrix}\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\\ 2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta}\end{pmatrix}$

III. Quelques mouvements particuliers

1. Cas du mouvement circulaire quelconque

- $\boldsymbol{\rho = Cste}$ ➔ **Trajectoire = arc de cercle**

  $\boldsymbol{\dot{\rho} = 0}$ **mais** $\boldsymbol{\dot{\theta} \neq \text{cste}}$

- **Vitesse :** $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ \rho\dot{\theta} \end{pmatrix}$ **ou** $\vec{v} = \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \neq \overrightarrow{cst}$

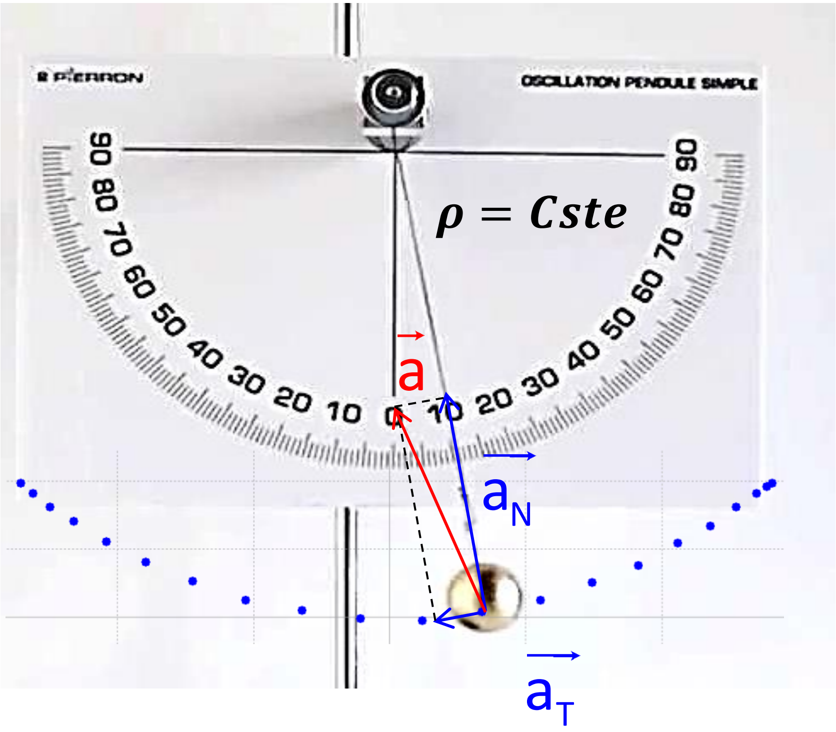
  vitesse orthoradiale (tangentielle)

- **Accélération :** $\vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_\rho} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

  ou encore $\vec{a}\begin{pmatrix} -\rho\dot{\theta}^2 \\ \rho\ddot{\theta} \end{pmatrix}$

  accélération non centripète

Exemple du pendule simple



III. Quelques mouvements particuliers

2. Cas du mouvement circulaire uniforme

- $\rho = cste$ ➔ **Trajectoire = arc de cercle**

  $\dot{\theta} = \omega = \ cste$ ➔ **vitesse angulaire constante**

- **Vitesse :** $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ \rho\dot{\theta} \end{pmatrix}$ **ou** $\vec{v} = \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

  on remarque que $||\vec{v}|| = v = \rho\omega = cste$

- **Accélération :** $\vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_\rho} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

  ou encore $\vec{a}\begin{pmatrix} -\rho\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}$

accélération <u>centripète</u>

Exemple de la nacelle d'une grande roue