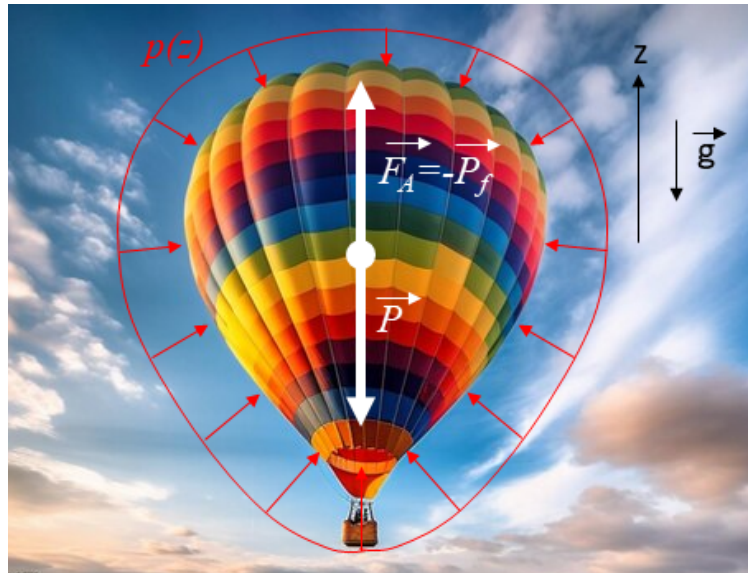


# Cours de statique des fluides<sup>1</sup>



Université Gustave Eiffel  
Licence 2 Physique-Chimie L2-S4

E. Chénier<sup>2</sup>, X. Nicolas<sup>3</sup>, F. Utheza<sup>4</sup>

version du 29 avril 2024

---

1.

**Références :**

- [1] D. V. Boger et K. Walters, “Rheological phenomena in focus”, Elsevier, 1993.
- [2] P. Chassaing, “Mécanique des fluides - Eléments d’un 1<sup>er</sup> parcours”, 3<sup>e</sup> éd., Cépadués ed., 2010.
- [3] R. Comolet, “Mécanique expérimentale des fluides, tome 1 : statique et dynamique des fluides non visqueux”, 5<sup>e</sup> édition, Masson, 1990.
- [4] J.-P. Faroux et J. Renault, “Mécanique des fluides et ondes mécaniques”, Dunod, 1999.
- [5] R.W. Fox, A.T. McDonald, “Introduction to fluid mechanics”, 4<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons, 1992.
- [6] R.V. Giles, J.B. Evett et C. Liu, “Mécanique des fluides et hydraulique”, Série Schaum, 2<sup>e</sup> édition, Mc Graw-Hill, 1995.
- [7] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, “Ce que disent les fluides”, 2<sup>e</sup> éd., Belin, Pour la science, 2005.
- [8] M. Hanauer, “Mécanique des fluides, cours et exercices résolus”, Bréal, 2000.
- [9] M. A. Morel, J.-P. Laborde, “Exercices de mécanique des fluides”, tome I, Eyrolles, 1992.
- [10] B.R. Munson, D.F. Young, T.H. Okiishi, W.W. Huebsch, “Fundamentals of Fluid Mechanics”, 6<sup>e</sup> édition, Wiley, 2010.
- [11] R. Ouziaux et J. Perrier, “Mécanique des fluides appliquée”, 3<sup>e</sup> édition, Dunod, 2004.
- [12] F. White, “Fluid mechanics”, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw-Hill, Inc, 1994.

**Travaux Pratiques (2x3h) :**

1<sup>er</sup> TP : Poussée d’Archimède exercée sur un corps partiellement ou totalement immergé

2<sup>e</sup> TP : Force de pression exercée par un liquide sur une surface plane

*Note finale* =  $0,7 \times \text{Examen final} + 0,3 \times TP$

2. eric.chenier@univ-eiffel.fr, bureau L35, dernier étage bât. Lavoisier

3. xavier.nicolas@univ-eiffel.fr, bureau M34, dernier étage bât. Lavoisier

4. francoise.utheza@univ-eiffel.fr, bureau 1B184, 1er étage bât. Copernic



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et généralités</b>	<b>1</b>
1.1	Les états fluides . . . . .	1
1.2	L'approche "milieux continus" . . . . .	2
1.3	Propriétés thermodynamiques . . . . .	5
1.3.1	Masse volumique . . . . .	5
1.3.2	Température . . . . .	6
1.3.3	Pression . . . . .	6
	Origine de la pression (point de vue microscopique) . . . . .	6
	Relation entre force et pression (point de vue macroscopique)	7
	Définitions relatives à la pression . . . . .	11
	Unités usuelles de la pression . . . . .	13
1.4	Loi d'état des gaz . . . . .	13
1.4.1	Loi des gaz parfaits et loi de Laplace . . . . .	13
1.4.2	Module de compressibilité . . . . .	14
1.5	Equilibre d'un système mécanique . . . . .	15
1.5.1	Les trois lois de Newton . . . . .	15
1.5.2	Moment des forces . . . . .	16
1.5.3	Principe général de l'équilibre . . . . .	20

<b>2</b>	<b>Statique des fluides</b>	<b>22</b>
2.1	Relations fondamentales de la statique des fluides dans un référentiel galiléen (immobile) . . . . .	22
2.1.1	Cas général dans un champ de force volumique $\vec{f}_{ext}$ quelconque	22
2.1.2	Relation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur $\vec{f}_{ext} = \rho \vec{g}$ . . . . .	24
2.1.3	Statique des liquides dans le champ de pesanteur : loi de l'hydrostatique . . . . .	25
2.1.4	Statique des gaz . . . . .	28
2.2	Relation fondamentale de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen (en mouvement) . . . . .	29
2.2.1	Lois de composition des vitesses et des accélérations . . . . .	29
2.2.2	Forces d'inertie sur une particule fluide . . . . .	30
2.3	Gradient de pression et surfaces isobares . . . . .	31
2.3.1	Différentielle et gradient d'une fonction scalaire . . . . .	31
2.3.2	Calcul des surfaces isobares . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Force de pression exercée sur une paroi par un fluide</b>	<b>37</b>
3.1	Force de gravité $\vec{F}_g$ , centre de gravité $G$ , poussée $\vec{F}_P$ , centre de poussée $C$ . . . . .	37
3.2	Cas des gaz à pression constante . . . . .	41
3.2.1	Pression d'un gaz sur une paroi plane . . . . .	41
3.2.2	Pression d'un gaz sur une paroi courbe . . . . .	42
3.2.3	Epaisseur de conduite critique due à la pression interne . . . . .	45
3.3	Cas des liquides à pression motrice constante . . . . .	49
3.3.1	Pression d'un liquide sur une paroi plane . . . . .	50
3.3.2	Pression d'un liquide sur une paroi courbe . . . . .	59

<b>4 Corps immergés ou partiellement immergés</b>	<b>67</b>
4.1 Corps totalement immergés . . . . .	67
4.1.1 Théorème d'Archimède . . . . .	67
4.1.2 Stabilité de corps immergés . . . . .	70
4.1.3 Influence de la compressibilité . . . . .	71
4.2 Stabilité de corps flottants . . . . .	71
4.2.1 Définitions . . . . .	73
4.2.2 Stabilité de l'équilibre . . . . .	73
 Liste des figures	 <b>i</b>



# Chapitre 1

## Introduction et généralités

### 1.1 Les états fluides

**Définition 1.1 (Etat solide)** *Un solide est un système composé de molécules liées les unes aux autres, ayant une certaine organisation spatiale (périodique pour un cristal). Ce système est difficilement déformable.*

**Définition 1.2 (Etat fluide)** *Un fluide est un système composé de molécules libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres et qui peuvent se déplacer sous l'action d'une force très faible. Il prend la forme du récipient qui le contient. Il peut être liquide ou gazeux.*

**Définition 1.3 (Etat liquide)** *Un liquide est un fluide occupant un volume bien défini pouvant présenter des surfaces libres, car un certain degré de cohésion persiste entre les molécules qui le composent. Ce volume ne peut varier que sous l'action de très fortes variations de pression : les liquides sont quasi-incompressibles.*

**Définition 1.4 (Etat gazeux)** *Un gaz occupe toujours le volume maximal qui lui est offert : c'est un fluide essentiellement compressible ou dilatable.*

**Remarque 1.1** *Les définitions ci-dessus ne sont pas intrinsèques car il existe de nombreux états intermédiaires de la matière : par exemple des liquides à seuil ou des liquides visco-élastiques qui ont des comportements de fluides ou de solides selon l'intensité ou la durée de la contrainte qu'ils subissent (cf. Fig. 1.1). En plus des quatre états solide, liquide, gazeux et les plasmas (gas ionisés), on considère aussi*



*qu'il existe un cinquième état de la matière : les fluides supercritiques. Ce sont des fluides denses (comme les liquides) mais qui sont peu visqueux et très diffusifs et n'ont pas de tension de surface (comme les gaz). Ils sont aussi hyper compressibles près du point critique. Ils sont obtenus à hautes températures et à hautes pressions (cf. Fig. 1.2).*

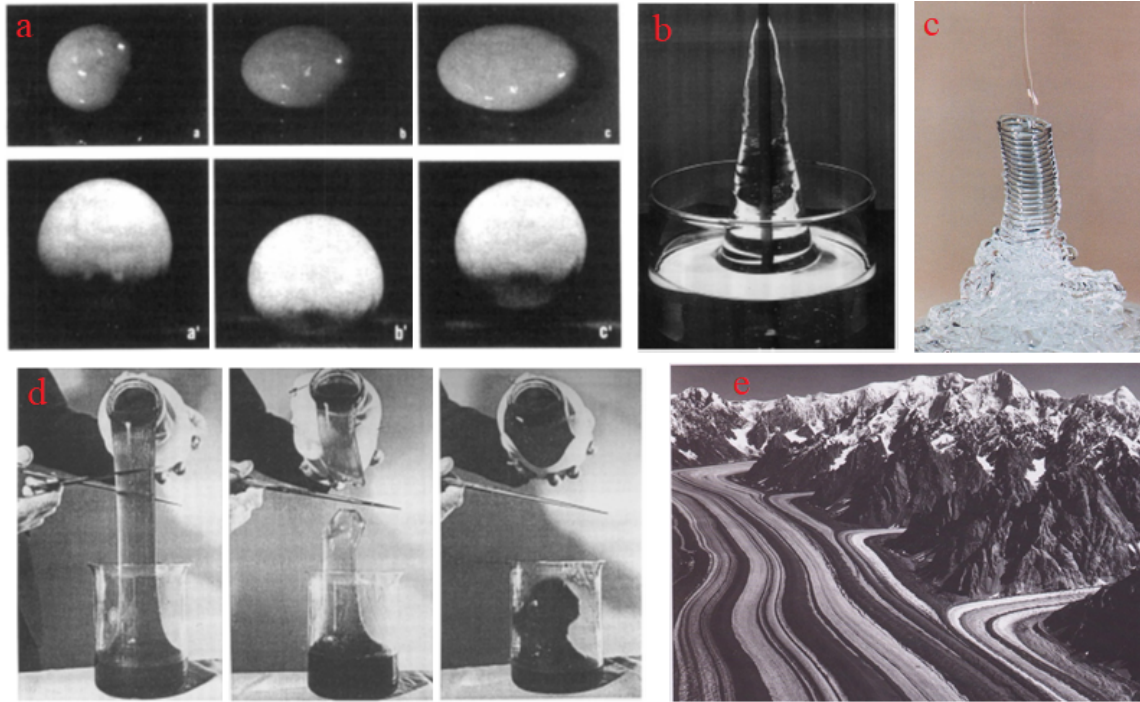


FIGURE 1.1 – Exemples d'écoulements de liquides complexes : (a) balle de Silly-putty s'écoulant comme un fluide pour un temps long de sollicitation (haut) et rebondissant comme une balle élastique pour un temps court de sollicitation (bas) ; (b) effet Weissenberg présentant la remontée d'un liquide viscoélastique le long d'une tige en rotation ; (c) écoulement vertical d'un liquide visco-élastique qui se love comme une corde (d) détente élastique d'un liquide viscoélastique versé d'un récipient qui, lorsqu'il est coupé avec des ciseaux, remonte seul dans le récipient ; (e) glacier Barnard en Alaska photographié en 1957 ... solide ou liquide ? (Figures tirées de [1,7])

## 1.2 L'approche "milieux continus"

La particule élémentaire d'un milieu fluide est l'atome ou la molécule. On peut donc envisager d'étudier le mouvement d'un fluide à partir de celui de chacune de ces particules. On se trouve alors à un niveau de description microscopique. Cette approche est proposée par la **dynamique moléculaire** qui calcule le mouvement des atomes

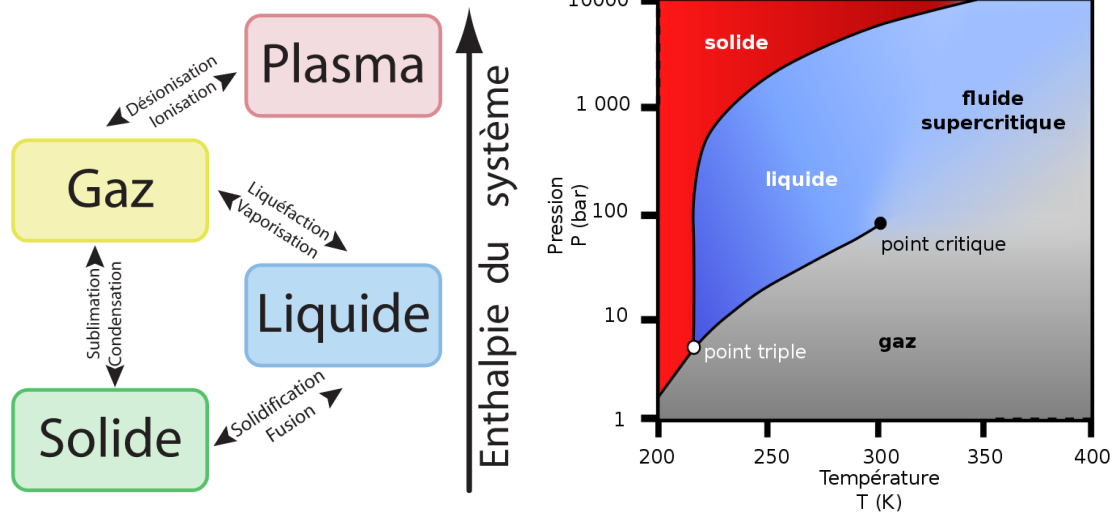


FIGURE 1.2 – A gauche : les quatre états de la matière [<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10242232>]. A droite : diagramme de phase pression-température du dioxyde de carbone,  $CO_2$ , montrant le point triple et le point critique, au delà duquel apparaît le domaine fluide supercritique [Ben Finney, Mark Jacobs, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17910244>].

et des molécules les uns par rapport aux autres en se basant sur la mécanique du point : la relation fondamentale de la dynamique est appliquée à un ensemble de masses ponctuelles (les atomes et les molécules) dans un champ de forces dérivant de leurs potentiels d'interaction. Actuellement, la puissance des ordinateurs permet de faire des simulations par dynamique moléculaire pour de l'ordre de  $10^8$  atomes et molécules.

Une autre approche est la **théorie cinétique des gaz**. Elle a pour objet d'expliquer le comportement macroscopique d'un gaz à partir des caractéristiques des mouvements des particules (atomes ou molécules) qui le composent. Le niveau de description macroscopique est atteint à partir du niveau de description microscopique en effectuant un traitement statistique (prise de moyenne) sur un grand nombre de molécules. Les hypothèses liées à cette théorie sont assez restrictives. Cette approche fournit une évaluation satisfaisante des propriétés macroscopiques des gaz pour des espèces monoatomiques ou diatomiques (de faible poids moléculaire et à basse pression dans ce cas) de manière à pouvoir considérer que les collisions entre les molécules sont élastiques.

Pour la grande majorité des applications pratiques, dès que le fluide est suffisamment dense, ces niveaux de description microscopique ne sont pas nécessaires (cas de la dynamique moléculaire) ou pas assez précis (cas de la théorie cinétique des gaz). On

adopte alors un niveau de description macroscopique dont l'objectif est de donner une « vision moyenne » du comportement d'un fluide. Ce niveau de description est décrit par la mécanique des fluides classique qui adopte une **approche de type milieu continu**, c'est à dire qu'on considère que la matière est répartie continûment dans le champ de l'écoulement. Le tableau 1.1 résume les caractéristiques des différents niveaux de description qui viennent d'être décrits.

Niveau descript°	Entité élémentaire	Approche	Limitations
Microscopique	Atome/molécule	Dynamique moléculaire	$< 10^8$ molécul., coût calcul
Micro vers macro	Atome/molécule	Théor. cinétique des gaz	Gaz mono ou diatomique
Macroscopique	Particule fluide	Milieu continu	$Kn = \lambda/L \leq 0,1$

TABLE 1.1 – Les différents niveaux de description en mécanique des fluides

Au niveau de description macroscopique de l'approche "milieu continu", l'entité élémentaire est un volume élémentaire de fluide qui regroupe un très grand nombre de molécules et qui est appelé la **particule fluide**. Cette particule fluide est suffisamment petite par rapport à l'échelle macroscopique pour permettre une description fine du fluide et suffisamment grande par rapport à l'échelle moléculaire, notamment par rapport au libre parcours moyen  $\lambda$  des molécules, pour permettre la détermination de grandeurs moyennes. L'expérience montre que le nombre de molécules contenues dans une particule fluide de dimension caractéristique  $L$  est suffisant pour que cette particule soit assimilée à un milieu continu si le **nombre de Knudsen**  $Kn = \lambda/L < 0,1$  (cf. tableaux 1.1 et 1.2). Par exemple, dans les conditions habituelles de température et de pression, le libre parcours moyen des molécules qui composent l'air est approximativement égal à  $\lambda = 100 \text{ nm}$ . Donc, la dimension caractéristique de la particule fluide doit être supérieure à  $L = 1 \text{ }\mu\text{m}$  pour que l'hypothèse de milieu continu s'applique. Notez que, dans les conditions habituelles de température et de pression, **un cube de  $1 \text{ }\mu\text{m}^3$  renferme environ  $27.10^6$  molécules d'air**. Ce même cube renfermerait  $27.10^9$  molécules d'eau.

Régime d'écoulement	Gamme de $Kn$	Approche "milieu continu" valide ?	Longueur caractéristique $L$ (cas : air à $P_{atm}$ et $T_{amb}$ )
continu avec adhérence	$Kn \leq 0,01$	Oui	$L \geq 10 \text{ }\mu\text{m}$
continu avec glissement	$0,01 < Kn < 0,1$	Oui	$1 \text{ }\mu\text{m} < L < 10 \text{ }\mu\text{m}$
transitionnel	$0,1 < Kn < 10$	Non	$0,01 \text{ }\mu\text{m} < L < 1 \text{ }\mu\text{m}$
moléculaire discontinu	$10 \leq Kn$	Non	$L < 0,01 \text{ }\mu\text{m}$

TABLE 1.2 – Les différents régimes d'écoulements en fonction du nombre de Knudsen

En mécanique des milieux continus, l'état d'un domaine  $D$  de fluide pur (composé d'une seule espèce chimique) est entièrement déterminé dès que l'on connaît, à chaque instant  $t$  et pour chaque particule fluide  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $D$ , sa masse volumique  $\rho(x, y, z, t)$ , sa température  $T(x, y, z, t)$ , sa pression  $P(x, y, z, t)$  et les composantes de son vecteur vitesse  $\vec{v}(x, y, z, t)$ . On appelle ces variables les **variables primitives**. Si on note  $\varepsilon(M, t)$  le volume de la particule fluide et  $m_\varepsilon$  sa masse, alors

$\rho(M, t)$  et  $\vec{v}(M, t)$  sont obtenues en sommant, respectivement, les masses  $m_k$  et les quantités de mouvement  $m_k \vec{v}_k$ , des  $N(\varepsilon)$  molécules du fluide contenues dans  $\varepsilon(M, t)$  :

$$\rho(M, t) = \frac{m_\varepsilon}{\varepsilon(M, t)} = \frac{\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} m_k}{\varepsilon(M, t)} \quad (1.1)$$

$$\vec{v}(M, t) = \frac{\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} m_k \vec{v}_k}{\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} m_k \vec{v}_k}{m_\varepsilon} \quad (1.2)$$

La figure Fig. 1.3 ci-dessous présente l'évolution de la masse totale des molécules contenues dans un volume  $V$  de fluide, centré sur le même point, dont la taille varie de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique. La masse volumique  $\rho$  de la particule fluide de volume  $\varepsilon$  est représentée : elle est obtenue pour une échelle mésoscopique intermédiaire entre les fluctuations micro et macroscopiques de  $\frac{\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} m_k}{V}$ .

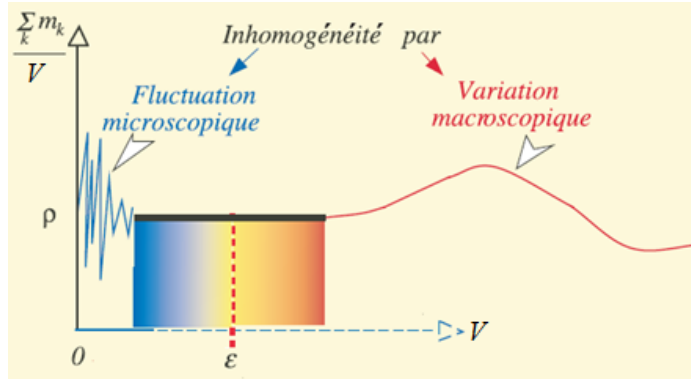


FIGURE 1.3 – Evolution de la masse volumique pour un volume  $V$  de fluide, en fonction de la taille de  $V$ . Des fluctuations sont observées aux échelles macroscopique et microscopique alors que cette grandeur reste constante aux échelles intermédiaires (échelle mésoscopique) : cela définit la masse volumique  $\rho$  locale à l'échelle du milieu continu (tiré de [2]).

## 1.3 Propriétés thermodynamiques

### 1.3.1 Masse volumique

**Définition 1.5 (Masse volumique)** La masse volumique  $\rho$  d'un fluide est le rapport entre sa masse  $m$  et le volume  $V$  qu'il occupe :  $\rho = m/V$  ( $[\rho] = \text{kg/m}^3$ ). La définition précise a été donnée à l'Eq. (1.1) et Fig. 1.3.

**Définition 1.6 (Densité)** *La densité  $d$  d'un fluide est le rapport de la masse volumique de ce fluide sur une valeur de référence,  $d = \rho/\rho_{ref}$ . Pour les liquides et les gaz, les références sont respectivement la masse volumique de l'eau ( $\rho_{eau} = 998,3 \text{ kg/m}^3$ ) et celle de l'air sec ( $\rho_{air} = 1,204 \text{ kg/m}^3$ ) ( $[d] = 1$ ) généralement prises à une température de  $20^\circ\text{C}$  et à pression atmosphérique.*

### 1.3.2 Température

**Définition 1.7 (Température)** *La température (statique ou thermodynamique) est une mesure de l'énergie cinétique moyenne de translation des particules constituant le fluide. C'est une mesure de l'énergie cinétique du mouvement Brownien des particules effectuée dans un repère qui se déplace à la même vitesse moyenne que le fluide. L'unité internationale de la température est le Kelvin ( $[T] = K$ ). L'unité usuelle de la température est le degré Celcius ( $[T] = ^\circ\text{C}$ ) définie par :  $T[K] = T[^\circ\text{C}] + 273,15$ .*

### 1.3.3 Pression

#### Origine de la pression (point de vue microscopique)

Dans un fluide au repos ou en écoulement, la notion macroscopique de pression et son évolution spatiale ont deux origines au niveau microscopique : l'intensité de l'agitation moléculaire (agitation thermique du mouvement Brownien des molécules) et la nature des chocs inter moléculaires liée aux potentiels d'interaction entre les molécules.

**Exemple 1 :** Les chocs qu'exercent les molécules d'un fluide au repos (macroscopiquement) sur les parois fixes d'un récipient se traduisent, à l'échelle macroscopique, par une force de pression. Plus précisément, celle-ci résulte de la variation de la quantité de mouvement des molécules frappant la paroi, entre l'amont et l'aval du choc (cf. Fig. 3.1).

**Exemple 2 :** Plus on s'enfonce dans une colonne d'eau, plus la pression augmente, car plus les forces de répulsion entre les molécules et, par conséquent, leur quantité de mouvement augmentent pour pouvoir résister au poids de la colonne d'eau (cf. Fig. 3.2).

**Exemple 3 :** Lorsqu'un fluide visqueux s'écoule dans une conduite, on observe que la pression décroît dans la direction de l'écoulement : on dit qu'il y a « perte de charge ». En effet, au cours de l'écoulement, la quantité de mouvement des molécules et l'énergie cinétique de l'agitation moléculaire diminuent car les couches fluides « frottent » les unes sur les autres : les chocs entre molécules sont inélastiques et les molécules ne récupèrent pas toute leur énergie après un choc car une partie est dissipée sous forme de chaleur (cf. Fig. 1.6).

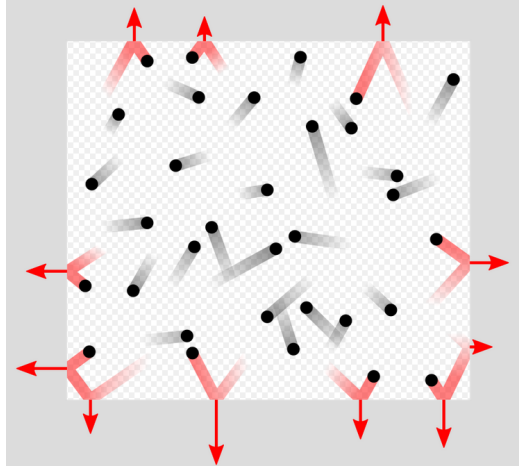


FIGURE 1.4 – Illustration de la pression résultant de la variation de la quantité de mouvement des particules d'un gaz lors de leur interaction avec les parois d'un récipient [Becarlson, [http ://www.becarlson.com/](http://www.becarlson.com/), [https ://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14728470](https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14728470)].

### Relation entre force et pression (point de vue macroscopique)

Soit un domaine fluide  $D_1$  quelconque séparé d'un domaine  $D_2$  (fluide ou solide) par une surface  $S$ . Si  $D_2$  est solide,  $S$  est une paroi. Si  $D_2$  est fluide,  $S$  est une interface fictive qui sépare les domaines  $D_1$  et  $D_2$  au cours de leur mouvement (elle suit le mouvement moyen de  $D_1$  et  $D_2$ ) (cf. Fig. 1.7).

La résultante des chocs des molécules du domaine  $D_1$  sur l'élément de surface  $dS$  de  $S$  est orientée de  $D_1$  vers  $D_2$ . A l'échelle macroscopique, elle se traduit par une force élémentaire, notée  $d\vec{F}_{1,2}$  [N], dont l'intensité est proportionnelle à  $dS$ . La force  $d\vec{F}_{1,2}$  a une direction quelconque, mais elle peut se décomposer en une composante tangentielle  $d\vec{F}_t = dF_t \vec{e}_t$  et une composante normale  $d\vec{F}_n = dF_n \vec{e}_n$ , où  $\vec{e}_t$  et  $\vec{e}_n$  sont respectivement les vecteurs unitaires tangent et normal à  $dS$ ,  $\vec{e}_n = \vec{n}$  étant ici la normale extérieure à  $D_1$  :

$$d\vec{F}_{1,2} = dF_t \vec{e}_t + dF_n \vec{e}_n \quad [N] \quad (1.3)$$

On appelle "contrainte tangentielle" ou "contrainte de cisaillement", notée  $\tau_t$ , et "contrainte normale", notée  $\sigma_n$ , les grandeurs suivantes qui s'expriment en pascal [Pa] = [N/m<sup>2</sup>] :

$$\tau_t = \frac{dF_t}{dS} \text{ et } \sigma_n = \frac{dF_n}{dS} \quad [Pa] \quad (1.4)$$

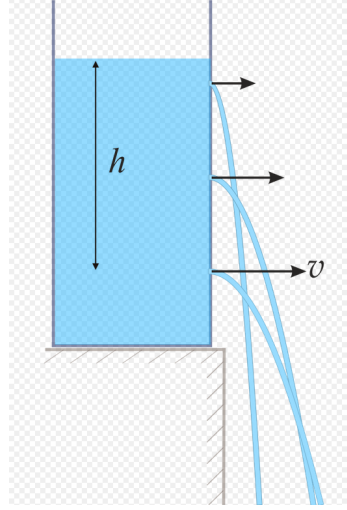


FIGURE 1.5 – Illustration de l’augmentation de la pression lorsqu’on s’enfonce dans une colonne d’eau [Mpfiz, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4520859>].

La pression  $P$  exercée par  $D_1$  sur  $D_2$  à travers  $dS$  contribue uniquement à la contrainte normale  $\sigma_n$ . Plus précisément, on montre que :

1. **pour un fluide au repos** (si  $\vec{v} = \vec{0}$ ) **ou pour un écoulement de fluide parfait** (fluide non visqueux), la contrainte de cisaillement est nulle et la contrainte normale est égale à la pression  $P$  :

$$d\vec{F}_t = \vec{0} \text{ et } \tau_t = 0 \quad (1.5)$$

$$P = \sigma_n = \frac{dF_n}{dS} \quad (1.6)$$

Ainsi on obtient :

$$d\vec{F}_{1,2} = dF_n \vec{e}_n \quad (1.7)$$

$$= P dS \vec{e}_n \quad (1.8)$$

$$= P dS \vec{n} \quad (1.9)$$

avec  $\vec{n} = \vec{n}_{1,2} = \vec{e}_n$  le vecteur unitaire normal à  $dS$ , dirigé de  $D_1$  vers  $D_2$ .

2. **pour un écoulement de fluide réel** (visqueux et compressible), la contrainte de cisaillement est différente de zéro et les effets de compressibilité contribuent en plus à la contrainte normale :

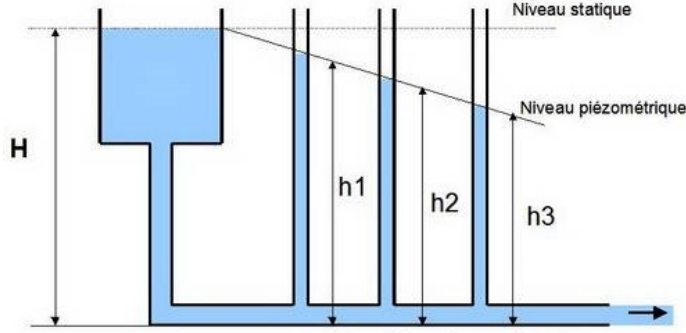


FIGURE 1.6 – Evolution de la pression hydrostatique le long d’une conduite d’eau : elle diminue le long de l’écoulement sous l’effet des pertes de charge (frottements visqueux).

$$d\vec{F}_t \neq \vec{0} \text{ et } \tau_t \neq 0 \quad (1.10)$$

$$d\vec{F}_n = (P dS + \text{terme visqueux compressible})\vec{n} \quad (1.11)$$

**Remarque 1.2** En statique des fluides et pour les écoulements de fluide parfait, seules les forces normales de pression,  $d\vec{F}_n = P dS \vec{n}$ , interviennent. Les forces tangentielles  $d\vec{F}_t$  n’apparaissent qu’en dynamique des fluides réels (visqueux) : elles correspondent aux frottements visqueux des couches fluides en mouvement les unes par rapport aux autres et par rapport aux parois.

**Remarque 1.3** Selon le *principe des actions réciproques*, la force exercée par  $D_2$  sur  $D_1$  à travers  $dS$  est égale à  $d\vec{F}_{2,1} = -d\vec{F}_{1,2}$  et la force de pression exercée par  $D_2$  sur  $D_1$  à travers  $dS$  est égale à  $-P dS \vec{n}$ .

**Remarque 1.4** La pression thermodynamique  *$P$  en  $M$  ne dépend pas de l’orientation de la facette  $dS$*  considérée au point  $M$  : elle ne dépend pas de  $\vec{n}$ . Autrement dit, la pression en un point est la même dans toutes les directions de l’espace.

### Démonstration :

Considérons, dans le champ de gravité, un prisme de fluide au repos, de taille infinitésimale, de section triangulaire de longueurs des côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $ds$  et de profondeur  $dz$  (cf. Fig. 1.8). On note  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  les pressions qui s’exercent sur les trois surfaces



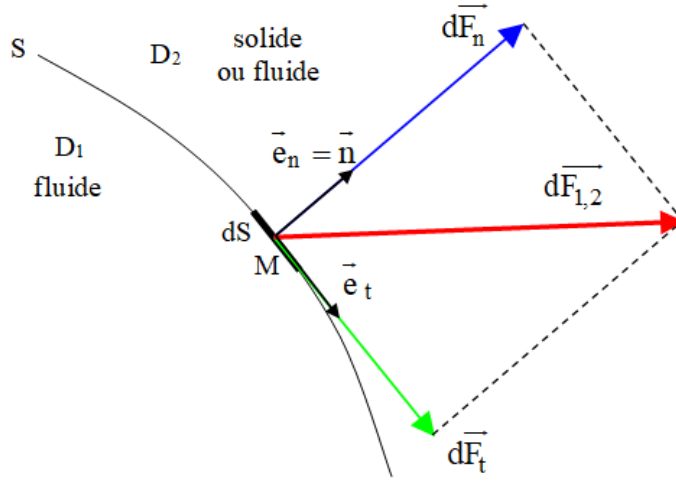


FIGURE 1.7 – Décomposition de la force  $d\vec{F}_{1,2}$  exercée par le domaine fluide  $D_1$  sur le domaine fluide ou solide  $D_2$ , sur un élément de surface  $dS$  de l'interface  $S$  entre  $D_1$  et  $D_2$ .

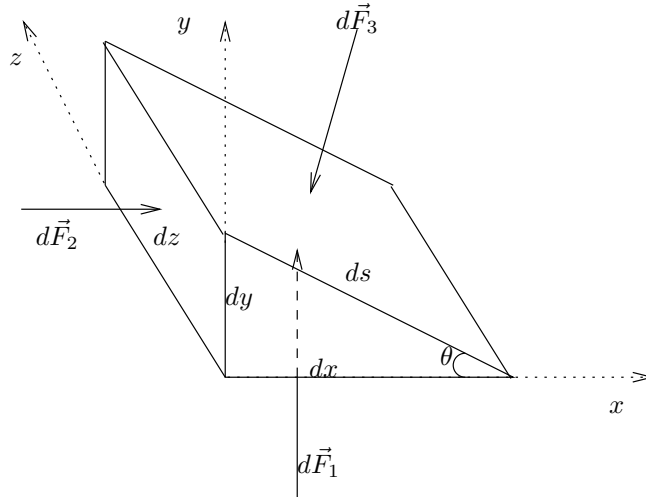


FIGURE 1.8 – Equilibre des forces sur un prisme fluide de taille infinitésimale.

$dx dz$ ,  $dy dz$  et  $ds dz$ . L'équilibre des forces de pression et de gravité qui s'exercent sur le prisme dans les directions horizontale,  $x$ , et verticale,  $y$ , s'écrit :

$$\text{selon } x : \quad dF_2 - dF_3 \sin \theta = 0 \quad (1.12)$$

$$P_2(dy dz) - P_3(ds dz) \sin \theta = 0 \quad (1.13)$$

$$\text{selon } y : \quad dF_1 - dF_3 \cos \theta - \rho g \left( \frac{1}{2} dx dy dz \right) = 0 \quad (1.14)$$

$$P_1(dx dz) - P_3(ds dz) \cos \theta - \rho g \left( \frac{1}{2} dx dy dz \right) = 0 \quad (1.15)$$

On simplifie les Eqs. (1.14) et (1.15) en utilisant les relations  $ds \sin \theta = dy$  et  $ds \cos \theta = dx$ . En divisant l'Eq. (1.14) par  $(dy dz)$ , on obtient :

$$P_2 = P_3 \quad (1.16)$$

et en divisant l'Eq. (1.15) par  $(dx dz)$ , on obtient :

$$P_1 - P_3 = \rho g \left( \frac{1}{2} dy \right) \quad (1.17)$$

Ainsi, **quand**  $dy \rightarrow 0$ , i.e. quand le prisme tend vers un volume de la taille d'un point, alors  $P_1 = P_2 = P_3$  (CQFD).

## Définitions relatives à la pression

**Définition 1.8 (Pression au sein d'un fluide au repos)** *Comme on l'a vu à l'Eq. (1.6), la pression au sein d'un fluide au repos est la grandeur scalaire  $P = \frac{dF_n}{dS}$ . Elle s'exprime, dans le système international d'unités, en pascal ([Pa]).*

**Définition 1.9 (Pression statique ou thermodynamique)** *La pression statique ou thermodynamique,  $P$ , est la pression mesurée dans un repère qui se déplace à la même vitesse moyenne que le fluide. Cette pression est une mesure de l'énergie cinétique du mouvement brownien des molécules. Concrètement, la pression statique est mesurée par une sonde se déplaçant à la vitesse de l'écoulement. Pour un fluide au repos, la pression mesurée par une sonde immobile est la pression statique.*

**Définition 1.10 (Pression dynamique)** *La pression dynamique est une mesure de l'énergie cinétique par unité de volume de l'écoulement :  $P_{dyn} = \frac{1}{2} \rho v^2$ , où  $v$  est la vitesse moyenne de l'écoulement par rapport à la sonde de mesure.*

**Définition 1.11 (Pression totale)** *La pression totale est la somme des pressions statique et dynamique :  $P_{tot} = P + P_{dyn} = P + \frac{1}{2} \rho v^2$ . C'est une mesure de l'énergie cinétique totale du mouvement brownien et du mouvement moyen des particules du fluides.*

**Définition 1.12 (Pression motrice)** La pression motrice  $P_g$  ou  $P_m$  est la somme de la pression statique,  $P$ , et de la pression hydrostatique,  $\rho gz$ , où  $z$  est la hauteur :  $P_g = P + \rho gz$ .

**Définition 1.13 (Pression absolue)** La pression absolue est mesurée par rapport à la pression du vide dont la pression absolue est nulle (en absence de molécules, il n'y a pas de choc, donc pas de pression). La pression absolue est toujours positive.

**Définition 1.14 (Pression relative)** On appelle pression relative la pression mesurée par rapport à une pression de référence :  $P_r = P - P_{ref}$ . Généralement,  $P_{ref}$  est la pression atmosphérique  $P_{atm}$  de telle sorte que :  $P_r = P - P_{atm}$  (cf. Fig. 1.9). La pression relative peut-être positive ou négative.

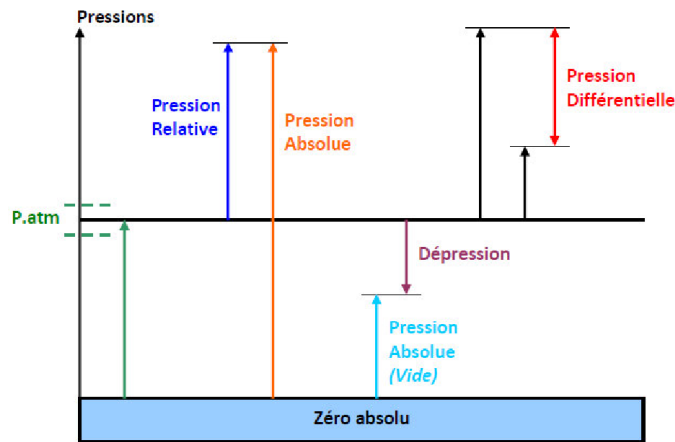


FIGURE 1.9 – Représentation des pressions absolue, relative (par rapport à la pression atmosphérique) et différentielle

**Remarque 1.5** On peut donc définir des pressions statiques absolues ou relatives, des pressions dynamiques absolues ou relatives, des pressions totales absolues ou relatives et des pressions motrices absolues ou relatives.

**Définition 1.15 (Manomètre)** L'appareil mesurant la pression est un manomètre. Les manomètres industriels sont généralement gradués en pression relative à la pression atmosphérique.

**Définition 1.16 (Surface isobare)** Une surface isobare est définie par l'ensemble des points au sein du fluide qui sont à une même pression.

**Définition 1.17 (Fluide incompressible)** *Un fluide est en général compressible et dilatable :  $\rho = \rho(P, T)$ . Un fluide est dit incompressible et dilatable si sa masse volumique ne varie pas avec la pression :  $\rho = \rho(T)$ . En l'absence de variation de température (cas isotherme), la masse volumique d'un fluide incompressible est considérée constante :  $\rho = \text{cste}$ . Les liquides sont généralement considérés comme incompressibles.*

## Unités usuelles de la pression

Comme on l'a vu à l'Eq. (1.6), la dimension de la pression est celle d'une contrainte, c'est à dire d'une force par unité de surface :  $[P] = [F]/[S]$ . L'unité de la pression s'exprime en  $[N/m^2]$  ou en pascal  $[Pa]$  dans le système international d'unités. Mais il existe d'autres unités usuellement employées :

**pascal** :  $1 Pa = 1 N/m^2 = 1 kg/(m.s^2) = 1 J/m^3$  ;

**bar** :  $1 bar = 10^5 Pa$  ;

**atmosphère** :  $1 atm = 1,01325 bar = 101325 Pa = 760 mm Hg = 760 torr$  ;

**mètre d'eau** :  $1 m H_2O = 9806,38 Pa$  ; c'est la pression exercée par une colonne d'eau à  $4^\circ C$ , de masse volumique  $\rho_{H_2O} = 999,972 kg/m^3$ , de  $1 m$  de hauteur, sur une surface de  $1 m^2$ , dans le champ de gravité  $g = 9,80665 m/s^2$  ;

**millimètre de mercure (torr)** :  $1 mm Hg = 1 torr = 133,322 Pa$  ; c'est la pression exercée par une colonne de mercure à  $0^\circ C$ , de masse volumique  $\rho_{Hg} = 13595,1 kg/m^3$ , de  $1 mm$  de hauteur, sur une surface de  $1 m^2$ , dans le champ de gravité  $g = 9,80665 m/s^2$ .

## 1.4 Loi d'état des gaz

### 1.4.1 Loi des gaz parfaits et loi de Laplace

L'état d'un gaz dépend de sa température  $T$ , de sa masse volumique  $\rho$  et de sa pression  $P$ . En thermodynamique, on montre qu'il existe une fonction, appelée loi d'état, telle que

$$f(T, \rho, P) = 0$$

On peut alors exprimer une variable en fonction des deux autres :

$$T = g_1(\rho, P)$$

$$\rho = g_2(T, P)$$

$$P = g_3(\rho, T)$$

La loi d'état la plus connue est la **loi des gaz parfaits**. Elle s'applique pour des gaz peu denses, monoatomique ou diatomique (comme l'air), jusqu'à des pressions de l'ordre de 5 bar environ à température ambiante. Elle s'écrit :

$$P = \rho r T \quad (1.18)$$

avec  $r = \frac{R}{M}$  la constante spécifique du gaz,  $R = 8,314 \text{ J/(mol.K)}$  la constante universelle des gaz parfaits et  $M \text{ [g/mol]}$  la masse molaire du gaz considéré. Pour l'air sec,  $M = 28,964 \text{ g/mol}$  et  $r = 287 \text{ J/(kg K)}$ .

Pour pouvoir intégrer le champ de pression à partir de la loi d'état (Eq. (1.18) par exemple), il faut aussi connaître la **loi d'évolution spatiale de la masse de gaz**. Plusieurs situations simplifiées peuvent exister :

- cas isotherme :  $T = cste$  ;
- cas isochore :  $\rho = cste$  ;
- cas isobare :  $P = cste$  ;
- cas isentropique : l'évolution de la masse de gaz s'effectue sans échange de chaleur (transformation adiabatique) et de façon réversible (sans frottement ou dissipation mécanique). On montre qu'un gaz parfait isentropique suit la **loi de Laplace** :

$$P/\rho^\gamma = cste \quad ; \quad T/\rho^{\gamma-1} = cste \quad ; \quad T^\gamma/P^{\gamma-1} = cste \quad (1.19)$$

avec  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  le **coefficient isentropique** (rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constant). Pour des gaz monoatomiques,  $\gamma = 1,67 \equiv \frac{5}{3}$  et pour les gaz diatomiques (air par exemple)  $\gamma = 1,40 \equiv \frac{7}{5}$ .

**Définition 1.18 (Fluide barotrope)** *Un fluide barotrope est un fluide dont la masse volumique est uniquement fonction de la pression :  $\rho = \rho(P)$  ou  $P = P(\rho)$ . Ainsi, un gaz parfait isotherme (Eq. (1.18) à  $T = cste$ ) et un gaz parfait isentropique (cf. 1<sup>re</sup> équation de Eq. (1.19)) sont des fluides barotropes.*

## 1.4.2 Module de compressibilité

**Définition 1.19 (Module de compressibilité)** *Le module de compressibilité  $\chi$  désigne la variation relative de volume  $V$  (ou de la masse volumique  $\rho$ ) rapportée à l'augmentation de la pression,  $\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$ . Il s'exprime en  $[Pa^{-1}]$ . S'il est mesuré pour une transformation isotherme, on le note  $\chi_T$ . S'il est mesuré pour une transformation isentropique, on le note  $\chi_S$ .*

Le **module de compressibilité d'un liquide** est toujours très faible et il décroît lorsque la pression augmente. Pour l'eau et dans des conditions normales, il est de l'ordre de  $\chi_T = 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} = \frac{1}{20\,000} \text{ bar}^{-1}$ .

Le **module de compressibilité d'un gaz** prend différentes expressions selon l'évolution qu'il subit (isotherme ou isentropique). En utilisant la loi des gaz parfaits (Eq. (1.18) ou la loi de Laplace (Eq. (1.19), on obtient :

- cas isotherme (température constante) :  $\chi_T = \frac{1}{P}$  ;
- cas isentropique (adiabatique et réversible) :  $\chi_S = \frac{1}{\gamma P}$ .

## 1.5 Equilibre d'un système mécanique

### 1.5.1 Les trois lois de Newton

<sup>1</sup>On présente ici les trois lois de Newton (lois de la mécanique classique) dans un énoncé modernisé.

**Définition 1.20 (Référentiel galiléen)** *Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout point matériel isolé (ou pseudo-isolé, i.e. qui est soumis à des forces externes dont la somme est nulle) est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.*

**1<sup>ère</sup> loi de Newton ou principe d'inertie** : Dans un référentiel galiléen, le vecteur vitesse du centre d'inertie (ou centre de masse ou barycentre) d'un système matériel est constant si et seulement si la résultante des vecteurs forces qui s'exercent sur le système est égale à vecteur nul.

**Conséquence** : un objet ne changera pas l'état de son mouvement à moins qu'une résultante de forces extérieures non nulle ne l'ait affecté.

**2<sup>ème</sup> loi de Newton ou relation fondamentale (ou principe fondamental) de la dynamique (RFD)** : Dans un référentiel galiléen, l'accélération  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  du centre d'inertie d'un système de masse  $m$  constante est proportionnelle à la résultante des forces extérieures qu'il subit ( $\sum_i \vec{F}_{ext,i}$ ) et inversement proportionnelle à  $m$  :

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_{ext,i} \Leftrightarrow \sum_i \vec{F}_{ext,i} = m\vec{a} \quad (1.20)$$

---

1. Début de la séance de cours n°2.

**Conséquence** : plus la force appliquée est grande, plus l'objet accélère vite ; plus l'objet est lourd, plus il accélère lentement.

**Remarque 1.6** Les forces extérieures  $\vec{F}_{ext,i}$  qui agissent sur le système sont toujours de deux types :

1. les forces de contact ou de surface :  $\vec{F}_{ext,i}^{surf}$ 
  - Exemple : un système en équilibre sur un support solide subit une force de réaction du support vers le système.
2. les forces de volume :  $\vec{F}_{ext,i}^{vol}$ 
  - Exemple : dans le champ de pesanteur, un système de masse  $m$  reçoit une force de gravité :  $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ .

**3<sup>ème</sup> loi de Newton ou principe de l'action et de la réaction** : Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B.

## 1.5.2 Moment des forces

**Définition 1.21 (Produit vectoriel)** Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  donne le vecteur  $\vec{C}$  tel que :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \quad (1.21)$$

Le vecteur  $\vec{C}$  est défini par :

- son intensité : égale à  $\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times \sin \alpha$  avec  $\alpha$  l'angle entre les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  ;
- sa direction : perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  ;
- son sens : défini par la règle des 3 doigts de la main droite i.e. le pouce indique le vecteur  $\vec{A}$ , l'index indique le vecteur  $\vec{B}$  et le majeur, orienté perpendiculairement aux 2 autres doigts, indique le sens du vecteur  $\vec{C}$ .

Par ailleurs, les composantes du vecteur  $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$  se calculent par :

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_A z_B - z_A y_B \\ z_A x_B - x_A z_B \\ x_A y_B - y_A x_B \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

**Définition 1.22 (Bras de levier)** *Lorsqu'on applique une force pour mettre en rotation un objet autour d'un axe, le bras de levier est la partie du levier située entre l'axe de rotation (ou le point d'appui) et la ligne d'action de la force.*

**Définition 1.23 (Bras de levier efficace)** *Le bras de levier efficace est la distance la plus courte entre la ligne d'action de la force et l'axe de rotation (cf. Fig. 1.10).*

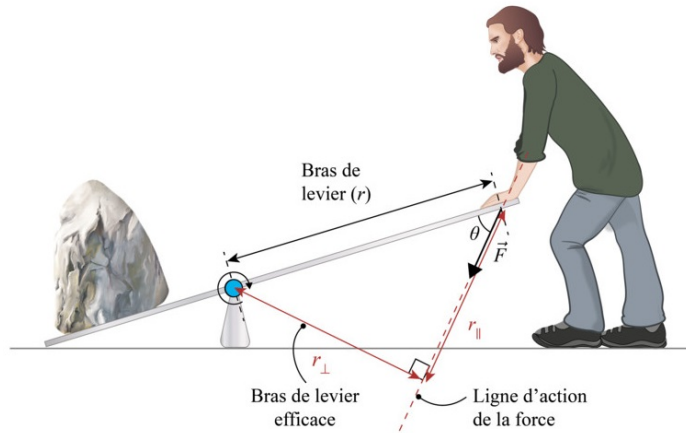


FIGURE 1.10 – Bras de levier et bras de levier efficace.

Expérimentalement, on montre que :

- dans un plan, deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , appliquées aux points  $M_1$  et  $M_2$ , de même sens et agissant perpendiculairement aux extrémités d'une tige pivotant autour d'un axe  $\Delta$  perpendiculaire à ce plan et passant par le point  $O$ , s'équilibrent si :

$$r_1 \times F_1 = r_2 \times F_2 \quad (1.23)$$

où  $F_i = \|\vec{F}_i\|$  et  $r_i = \|\vec{OM}_i\|$  est le bras de levier efficace, avec  $i = 1, 2$  (cf. Fig. 1.11).

- une force dont la ligne d'action passe par l'axe de rotation  $O$  d'un système n'engendre aucune rotation (cf. Fig. 1.12).
- pour une force d'amplitude donnée, plus l'angle entre la tige et la ligne d'action est proche de  $90^\circ$ , plus la force aura d'effet ; autrement dit, plus le bras de levier efficace est grand, plus la force aura d'effet (cf. Fig. 1.12).



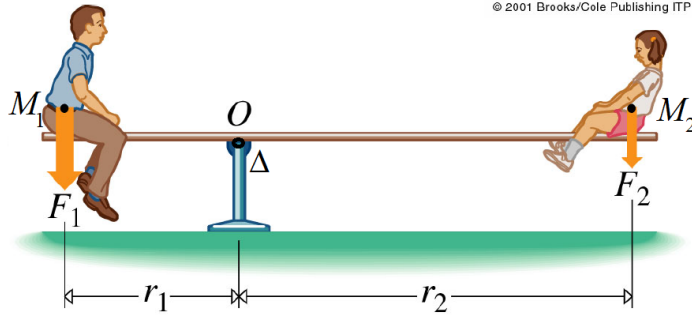


FIGURE 1.11 – Equilibre des moments des forces (poids) sur une balançoire.

La capacité à créer une rotation d'un bras de levier ( $OM$ ) qui tourne autour d'un axe  $\Delta$  passant par  $O$  dépend donc (cf. Fig. 1.13) :

- de l'intensité  $\|\vec{F}_M\|$  de la force exercée exercée sur le point  $M$ ,
- du bras de levier efficace  $r_\perp = r \sin \alpha = \|\vec{OM}\| \sin \alpha$ , avec  $\alpha > 0$  le plus petit angle formé par la droite  $(OM)$  et la ligne d'action de la force  $\vec{F}_M$ .

**Définition 1.24 (Moment d'une force)** *Le moment d'une force  $\vec{F}_M$  appliquée en  $M$  par rapport à un point  $O$  fixé (appelé pivot) est une grandeur vectorielle qui traduit l'aptitude de cette force à faire tourner le système mécanique autour du pivot. Ce moment, noté  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_M)$ , est défini par :*

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_M) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_M \quad (1.24)$$

*Il s'exprime en newtons mètres,  $[N.m]$ , ou en joules,  $[J]$ . Le moment d'un ensemble de forces, et notamment d'un couple, est la somme vectorielle des moments de ces forces.*

**Définition 1.25 (Vecteur moment)** *Le vecteur moment  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_M)$  est caractérisé par :*

- son point d'application  $M$ ,
- son intensité  $\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_M)\|$ ,
- sa direction  $\Delta$  définie par la droite perpendiculaire au plan  $(\vec{OM}, \vec{F}_M)$ ,
- son sens, donné par la règle des 3 doigts de la main droite : le pouce indique le vecteur  $\vec{OM}$ , l'index indique le vecteur  $\vec{F}_M$  et le majeur, orienté perpendiculairement aux 2 autres doigts, indique le sens du vecteur  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_M)$ .

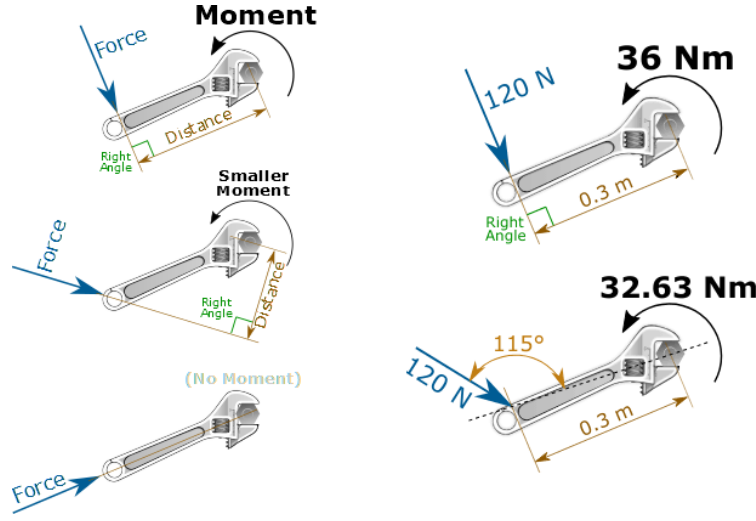


FIGURE 1.12 – Efficacité des moments appliqués sur une clef à molette pour différentes directions d'application d'une force d'intensité constante.

**Définition 1.26 (Intensité du moment)** L'intensité du moment de la force,  $\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_M)\|$ , ne dépend que des composantes orthogonales entre elles de la force  $\vec{F}_M$  et du vecteur  $\vec{r} = \vec{OM}$  (cf. Fig. 1.13) :

$$\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_M)\| = \|\vec{OM}\| \times \|\vec{F}_M\| \times \sin \alpha = r F_M \sin \alpha = r F_{M\perp} = r_{\perp} F_M \quad (1.25)$$

- avec  $\alpha > 0$  le plus petit angle formé par la droite  $OM$  et la ligne d'action de la force,
- $r_{\perp} = r \sin \alpha$  la distance entre  $O$  et la ligne d'action de la force  $\vec{F}_M$  passant par  $M$ ,
- et  $F_{M\perp} = F_M \sin \alpha$  l'intensité de la force dans la direction perpendiculaire à la droite  $OM$ , passant par  $M$ .

**Définition 1.27 (Signe du moment)** Dans un plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , le signe de la valeur algébrique du moment,  $\mathcal{M}_O(\vec{F}_M)$ , indique le sens de rotation :

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_M) = \|\vec{F}_M\| \times \|\vec{OM}\| \times \sin(\widehat{\vec{OM}, \vec{F}_M})$$

avec  $(\widehat{\vec{OM}, \vec{F}_M})$  l'angle algébrique :

- positif si  $(\widehat{\vec{OM}, \vec{F}_M})$  tourne de  $\vec{e}_x$  à  $\vec{e}_y$ ,
- négatif sinon.

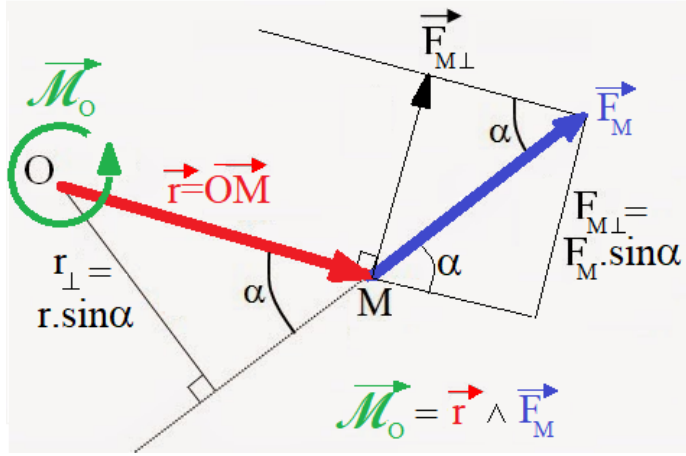


FIGURE 1.13 – Décomposition des forces et distances nécessaires au calcul du moment autour du point  $O$  de la force  $\vec{F}_M$  appliquée en  $M$  sur le bras de levier ( $OM$ ).

**Remarque 1.7 (Calcul des composantes du moment)** *Le vecteur moment autour d'un point  $O$  s'écrit :*

$$\vec{M}_O(\vec{F}_M) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_M$$

*Ainsi, les composantes de ce vecteur dans un repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  s'écrivent :*

$$\vec{M}_O(\vec{F}_M) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_O^x(\vec{F}_M) = y_M F_M^z - z_M F_M^y \\ \mathcal{M}_O^y(\vec{F}_M) = z_M F_M^x - x_M F_M^z \\ \mathcal{M}_O^z(\vec{F}_M) = x_M F_M^y - y_M F_M^x \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

*et elles correspondent respectivement à :*

- $\mathcal{M}_O^x(\vec{F}_M) = \vec{M}_O(\vec{F}_M) \cdot \vec{e}_x$  : contribution du moment algébrique autour  $(O, \vec{e}_x)$ ,
- $\mathcal{M}_O^y(\vec{F}_M) = \vec{M}_O(\vec{F}_M) \cdot \vec{e}_y$  : contribution du moment algébrique autour  $(O, \vec{e}_y)$ ,
- $\mathcal{M}_O^z(\vec{F}_M) = \vec{M}_O(\vec{F}_M) \cdot \vec{e}_z$  : contribution du moment algébrique autour  $(O, \vec{e}_z)$ .

### 1.5.3 Principe général de l'équilibre

**Définition 1.28 (Equilibre)** *Un système mécanique est à l'équilibre dans un référentiel donné si son accélération est nulle (si  $\vec{a} = \vec{0}$ ), c'est-à-dire si le système est immobile ou en mouvement de translation à vitesse constante dans ce référentiel.*

**Définition 1.29 (Equilibre statique)** *Ce système mécanique est à l'équilibre statique si, en plus, il est immobile dans ce référentiel :  $\vec{a} = \vec{v} = \vec{0}$ .*

**Définition 1.30 (Equilibres en translation et rotation)** *En conséquence, d'après la RFD (1.20), dans un référentiel galiléen, la condition générale d'équilibre d'un corps solide soumis à des forces extérieures,  $\vec{F}_{ext}$ , s'écrit :*

**Equilibre en translation :**

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad (1.27)$$

**Equilibre en rotation autour d'un point  $O$  quelconque :**

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \quad (1.28)$$

# Chapitre 2

## Statique des fluides

### 2.1 Relations fondamentales de la statique des fluides dans un référentiel galiléen (immobile)

#### 2.1.1 Cas général dans un champ de force volumique $\vec{f}_{ext}$ quelconque

Soit un domaine fluide  $D$  en équilibre ( $\vec{a} = 0$ ) dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  du laboratoire, supposé galiléen et de repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Soit une particule fluide de  $D$ , centrée en  $M$ , de forme parallélépipédique, de taille infinitésimale, de masse  $dm$ , de volume  $dV = dxdydz$  et de masse volumique  $\rho(M)$ , soumises aux forces extérieures suivantes :

- forces de surface qui s'expriment au moyen de la pression  $P$  (en  $[N/m^2]$ ) sous la forme  $d\vec{F}_{ext}^{surf} = P\vec{n}dS$ , où  $\vec{n}$  est la normale extérieure sur un élément de surface  $dS$ , dirigée vers l'intérieur de  $dV$  ;
- la force de volume sur  $dV$  qui s'exprime par  $d\vec{F}_{ext}^{vol} = \vec{f}_{ext}dV$ , où  $\vec{f}_{ext} = (f_{ext})_x \vec{e}_x + (f_{ext})_y \vec{e}_y + (f_{ext})_z \vec{e}_z$  (en  $[N/m^3]$ ) est le champ de force volumique dans lequel le domaine fluide  $D$  est plongé. C'est par exemple le champ de pesanteur  $\vec{f}_{ext} = \rho\vec{g}$  ou un champ magnétique ou électrique.

La condition d'équilibre (1.27) appliquée à cette particule fluide représentée sur la Fig. 2.1, s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext}^{surf} + \sum \vec{F}_{ext}^{vol} = \vec{0} \quad (2.1)$$

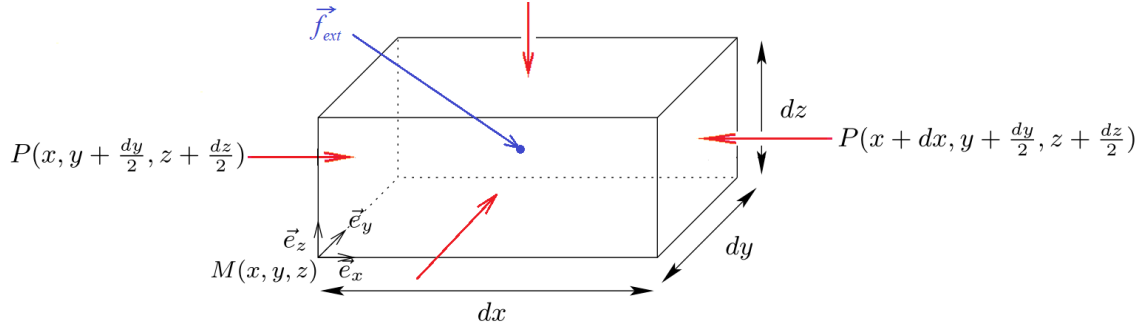


FIGURE 2.1 – Répartition des pressions et force volumique sur une particule fluide de volume  $dV = dxdydz$ .

Dans la direction  $Ox$ , en projetant l'éq. (2.1) sur  $\vec{e}_x$ , on obtient :

$$P(x, y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2}) dydz - P(x + dx, y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2}) dydz + (f_{ext})_x dxdydz = 0$$

$$\frac{P(x + dx, y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2}) - P(x, y + \frac{dy}{2}, z + \frac{dz}{2})}{dx} = (f_{ext})_x$$

Comme la particule fluide est de taille infinitésimale, on a  $dx, dy, dz \rightarrow 0$  et on obtient :

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P(x + dx, y, z) - P(x, y, z)}{dx} = (f_{ext})_x$$

En définissant la dérivée partielle d'une variable  $A(x, y, z)$  dans la direction  $x$  par :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A(x + dx, y, z) - A(x, y, z)}{dx} \quad (2.2)$$

on obtient :

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} = (f_{ext})_x \quad (2.3)$$

En effectuant le même raisonnement dans les directions  $y$  et  $z$ , on obtient :

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = (f_{ext})_y \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} = (f_{ext})_z \quad (2.5)$$

avec les dérivées partielles de la pression dans les directions  $y$  et  $z$  définies par :

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{P(x, y + dy, z) - P(x, y, z)}{dy} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{P(x, y, z + dz) - P(x, y, z)}{dz} \quad (2.7)$$

On obtient finalement la **relation fondamentale de la statique des fluides** :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_{ext})_x \\ (f_{ext})_y \\ (f_{ext})_z \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

soit

$$\vec{grad}P = \vec{f}_{ext} \quad (2.9)$$

avec  $\vec{grad}P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix}$ .

### 2.1.2 Relation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur $\vec{f}_{ext} = \rho \vec{g}$

Dans le champ de la pesanteur, dirigé dans la direction opposée à la direction verticale  $\vec{e}_z$ , le champ de force volumique extérieur s'écrit :

$$\vec{f}_{ext} = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_z \quad (2.10)$$

Ainsi, dans le repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , la relation fondamentale de la statique des fluides (2.8) devient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} &= 0 \Rightarrow P = P(y, z) \\ \frac{\partial P(y, z)}{\partial y} &= 0 \Rightarrow P = P(z)\end{aligned}$$

La **relation fondamentale de la statique dans le champ de pesanteur** s'écrit donc simplement :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g \quad (2.12)$$

ou encore

$$dP = -\rho g dz \quad (2.13)$$

**Remarque 2.1** *Pour des gaz, la masse volumique  $\rho(M)$  des particules fluides peut varier spatialement, en particulier avec l'altitude  $z$  : ainsi, dans les éqs. (2.12) et (2.13), on a  $\rho = \rho(z)$ . En revanche, pour les liquides, La masse volumique est considérée constante en général et on obtient la loi de l'hydrostatique (voir ci-dessous).*

### 2.1.3 Statique des liquides dans le champ de pesanteur : loi de l'hydrostatique

Ici, la masse volumique des liquides et l'accélération de la pesanteur sont supposées constantes. La primitive des éqs. (2.12) et (2.13) donne la **loi de l'hydrostatique** :

$$P + \rho g z = cste \quad (2.14)$$

**Définition 2.1 (Pression motrice)** *On rappelle que la pression motrice,  $P_g$  ou  $P_m$ , est la somme de la pression statique et de la pression hydrostatique :  $P_g = P + \rho g z$ .*

La loi de l'hydrostatique se réduit donc à  **$P_g = cste$  dans tout le liquide à l'équilibre.**

**Application :** Mesure de la différence de pression à l'aide d'un manomètre hydrostatique en forme de "U" rempli d'un liquide de masse volumique  $\rho = cste$  (cf. Fig. 2.2).



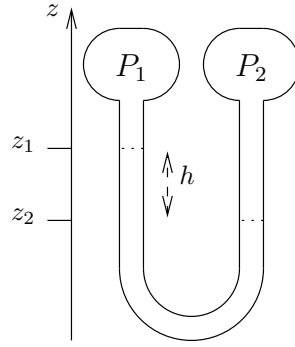


FIGURE 2.2 – Manomètre hydrostatique en forme de U.

$$\begin{aligned}
 P_g &= cste \\
 P_{g1} &= P_{g2} \\
 P_1 + \rho g z_1 &= P_2 + \rho g z_2 \\
 P_2 - P_1 &= \rho g (z_1 - z_2) \\
 P_2 - P_1 &= \rho g h
 \end{aligned}$$

Si  $P_1$  est la pression atmosphérique ( $P_1 = P_a$ ) alors la pression relative en 2 s'écrit :

$$P_{r2} = \rho g h$$

**Définition 2.2 (Sensibilité d'un manomètre hydrostatique)** La sensibilité,  $s$ , d'un manomètre hydrostatique est définie par le rapport entre la dénivellation mesurée  $h$  sur l'écart de pression  $\Delta P$  qui l'a générée :  $s = \frac{h}{\Delta P}$ .

**Application (suite) :** Mesure de la sensibilité du manomètre hydrostatique en forme de "U" décrit à la Fig. 2.2 :

La sensibilité de ce manomètre s'écrit :

$$s = \frac{h}{\Delta P} = \frac{h}{\rho g h} = \frac{1}{\rho g} \quad (2.15)$$

Ainsi, plus la masse volumique  $\rho$  du liquide est importante, plus la sensibilité est faible.

Les **conséquences de la loi de l'hydrostatique** (2.14) sont les suivantes : dans les liquides au repos,

1. La différence de pression entre deux particules fluides  $A$  et  $B$  distinctes prises au sein d'un même liquide ne dépend que de la distance verticale  $z_A - z_B$  entre ces deux particules :  $P_B - P_A = \rho g(z_A - z_B)$  ;
2. Les surfaces isobares dans des liquides homogènes sont des plans horizontaux ;
3. Une surface libre, interface du liquide avec l'air ambiant à la pression atmosphérique, où  $P_{atm} = cste$ , est horizontale ;
4. Les surfaces libres de vases communicants sont dans le même plan horizontal (Fig. 2.3) ;
5. L'interface de séparation entre deux liquides non miscibles, de masses volumiques différentes, est un plan horizontal ;
6. Principe de Pascal

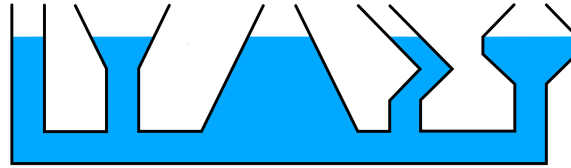


FIGURE 2.3 – Surfaces libres dans le même plan horizontal entre vases communicants [Werneuchen, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3777743>].

**Enoncé 2.1 (Principe de Pascal)** Dans un fluide incompressible (liquide) à l'équilibre dans un récipient, les variations de pression exercées en un point se transmettent à l'identique (instantanément et intégralement) à tous les points du fluide. Pascal a illustré ce principe avec l'expérience du "crève-tonneau" (Fig. 2.4).

**Démonstration :** Soit un liquide de masse volumique  $\rho$  au repos. On note  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  et  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  deux points aux pressions  $P_1$  et  $P_2$ . On a donc :

$$P_2 + \rho g z_2 = P_1 + \rho g z_1$$

Si on exerce une surpression  $\Delta P_1$  en  $M_1$ , comme le liquide reste à l'équilibre, la variation de pression,  $\Delta P_2$ , ressentie en  $M_2$  vérifie :

$$(P_2 + \Delta P_2 + \rho g z_2) = (P_1 + \Delta P_1 + \rho g z_1)$$

Or, d'après l'équilibre initial, on a  $P_2 + \rho g z_2 = P_1 + \rho g z_1$ , donc

$$\Delta P_2 = \Delta P_1 \quad (\text{CQFD})$$

**Application : Presse hydraulique** (Fig. 2.5)

Sur le petit piston de surface  $S_1$  est exercée une force  $F_1$ . La surpression engendrée est  $\Delta P = \frac{F_1}{S_1}$ . Cette surpression se propage jusqu'au grand piston de surface  $S_2$  et génère une force  $F_2 = \Delta P \times S_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$ . Cette force  $F_2$  est donc  $\frac{S_2}{S_1}$  fois plus grande que  $F_1$ .

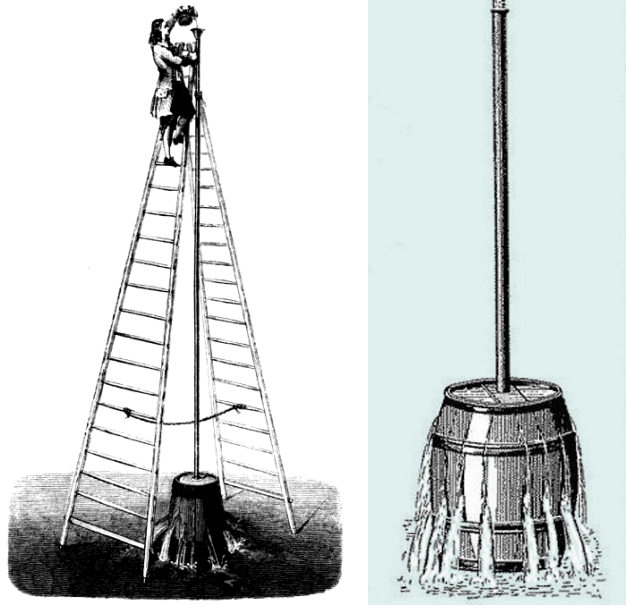


FIGURE 2.4 – Illustration de l'expérience du crève-tonneau de Pascal [Amédée Guillemin, The forces of nature : a popular introduction to the study of physical phenomena p. 69., <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18259522> et <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15631706>].

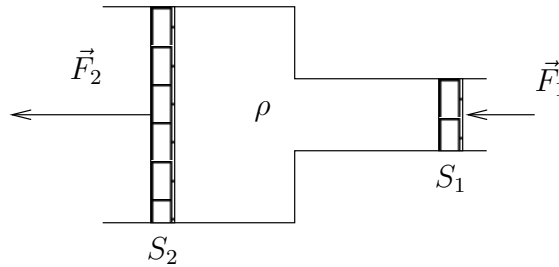


FIGURE 2.5 – Presse hydraulique.

**Remarque 2.2** *Les liquides transmettent les variations de la pression tandis que les solides transmettent les variations de la force.*

### 2.1.4 Statique des gaz

Les gaz sont fortement compressibles. Pour les gaz, les variations de volume et de pression dépendent de la loi d'état  $\rho = f(P, T)$  et de la loi d'évolution.

- Pour des dénivellations de quelques mètres ou dizaines de mètres de haut, la variation de la masse volumique du gaz est négligeable :  $\rho = cste$ .
- Lorsque les dénivellations sont plus importantes, comme lorsqu'on étudie l'atmosphère terrestre, il faut utiliser :
  - une loi d'état, par exemple la loi des gaz parfaits (1.18) :  $P = \rho r T$  avec  $r$  la constante spécifique de chaque gaz (air :  $r = 287 \text{ J/(kg K)}$ ).
  - une loi d'évolution du gaz qui peut être :

**isotherme**  $T = T_0 = cste$ . On trouve alors l'évolution de la pression suivante en fonction de la hauteur :

$$\frac{P(z)}{P(z=0)} = \exp\left(-\frac{g}{rT_0}z\right) \quad (2.16)$$

**isentropique**  $P/\rho^\gamma = cste$ . On trouve alors les évolutions suivantes de  $T(z)$ ,  $P(z)$  et  $\rho(z)$  (cf. TD) :

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{P_0} z\right) \equiv T_0 - \frac{(\gamma-1)g}{\gamma r} z \quad (2.17)$$

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{P_0} z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.18)$$

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{P_0} z\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.19)$$

## 2.2 Relation fondamentale de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen (en mouvement)

### 2.2.1 Lois de composition des vitesses et des accélérations

<sup>1</sup>Soit  $\mathcal{R}_0$  le référentiel du laboratoire, supposé galiléen et de repère de centre  $O$ . Soit  $\mathcal{R}_1$  un référentiel mobile par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , de repère de centre  $O_1$ , avec  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} = \vec{\Omega}_e$  la vitesse de rotation d'entraînement de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . Soit  $M$  un point quelconque tel que  $\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$ . Alors la loi de composition des vitesses s'écrit :

---

1. Début de la séance de cours n°3.

$$\vec{v}_{\mathcal{R}_0}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}_1}(M) + \vec{v}_{\mathcal{R}_0}(O_1) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} \quad (2.20)$$

$$\text{donc } \vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) \quad (2.21)$$

$$\text{avec } \vec{v}_e(M) = \vec{v}_a(O_1) + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O_1M} \quad (2.22)$$

où  $\vec{v}_a(M)$ ,  $\vec{v}_r(M)$  et  $\vec{v}_e(M)$  sont les vitesses absolue, relative et d'entraînement du point  $M$ , respectivement.

De même, la loi de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M) \quad (2.23)$$

$$\text{avec } \vec{a}_a(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(M) \quad (2.24)$$

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}_1}(M) \quad (2.25)$$

$$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r(M) \quad (2.26)$$

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_a(O_1) + \left( \frac{d\vec{\Omega}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_e \wedge (\vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O_1M}) \quad (2.27)$$

où  $\vec{a}_a(M)$ ,  $\vec{a}_r(M)$ ,  $\vec{a}_c(M)$  et  $\vec{a}_e(M)$  sont les accélérations absolue, relative, de Coriolis et d'entraînement du point  $M$ , respectivement.

## 2.2.2 Forces d'inertie sur une particule fluide

Dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}_1$ , la particule fluide en  $M$ , de volume  $dV$  et de masse  $dm = \rho dV$ , est soumise à des forces d'inertie en plus des forces extérieures de surface (forces de pression) et de volume (force de gravité). Pour mettre en évidence ces forces d'inertie, on part de la RFD (1.20) dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  appliquée à la particule fluide en  $M$  :

$$dm \vec{a}_{\mathcal{R}_0}(M) = dm \vec{a}_a(M) = \sum_i d\vec{F}_{ext,i}(M) \quad (2.28)$$

D'après la loi de composition des accélérations (2.23), on obtient :

$$dm (\vec{a}_r(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_e(M)) = \sum_i d\vec{F}_{ext,i}(M) \quad (2.29)$$

$$dm \vec{a}_r(M) = \sum_i d\vec{F}_{ext,i}(M) - dm \vec{a}_c(M) - dm \vec{a}_e(M) \quad (2.30)$$

$$dm \vec{a}_{\mathcal{R}_1}(M) = \sum_i d\vec{F}_{ext,i}(M) + d\vec{F}_{ic}(M) + d\vec{F}_{ie}(M) \quad (2.31)$$

Cette dernière relation est la **RFD dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}_1$**  appliquée à la particule fluide en  $M$  où :

- $d\vec{F}_{ir} = -dm \vec{a}_r = -dm \vec{a}_{\mathcal{R}_1}$  est la force d'inertie relative (en  $[N]$ ), de densité volumique  $\vec{f}_{ir} = -\rho \vec{a}_r$  (en  $[N/m^3]$ );
- $d\vec{F}_{ic} = -dm \vec{a}_c = -2dm \vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r$  est la force d'inertie de Coriolis, de densité volumique  $\vec{f}_{ic} = -\rho \vec{a}_c = -2\rho \vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}_r$ , avec  $\vec{\Omega}_e$  le vecteur vitesse de rotation du repère  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  et  $\vec{v}_r = \vec{v}_{\mathcal{R}_1}$  la vitesse relative dans le repère  $\mathcal{R}_1$ .
- $d\vec{F}_{ie} = -dm \vec{a}_e$  est la force d'inertie d'entraînement, de densité volumique  $\vec{f}_{ie} = -\rho \vec{a}_e$ ,
- $\sum_i d\vec{F}_{ext,i}$  est la somme des forces extérieures de surface et de volume (en  $[N]$ ), dont on a vu, aux eqs. (2.9) et (2.10), que la densité volumique s'écrit  $-\vec{grad}P + \vec{f}_{ext} = -\vec{grad}P + \rho \vec{g}$  (en  $[N/m^3]$ ) si on ne prend en compte que la pression et les forces de gravité dans les forces extérieures.

Ainsi, dans le cas général et dans le champ de gravité, **la RFD dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}_1$**  s'écrit en  $[N/m^3]$  :

$$\rho \vec{a}_{\mathcal{R}_1}(M) = -\vec{grad}P(M) + \vec{f}_{ext}(M) + \vec{f}_{ic}(M) + \vec{f}_{ie}(M) \quad (2.32)$$

$$\rho \vec{a}_{\mathcal{R}_1}(M) = -\vec{grad}P(M) + \rho(M)\vec{g} - \rho \vec{a}_c(M) - \rho \vec{a}_e(M) \quad (2.33)$$

D'après la section §1.5.3, le principe de l'équilibre statique dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$  est donné par  $\vec{v}_{\mathcal{R}_1} = \vec{v}_r = \vec{0}$  et  $\vec{a}_{\mathcal{R}_1} = \vec{a}_r = \vec{0}$ . Ainsi, à l'équilibre dans  $\mathcal{R}_1$ , les forces d'inertie relative et de Coriolis sont nulles et **la relation fondamentale de la statique en référentiel non galiléen** s'écrit :

$$\vec{grad}P(M) = \vec{f}_{ext}(M) + \vec{f}_{ie}(M) \quad (2.34)$$

$$\vec{grad}P(M) = \rho(M)\vec{g} - \rho \vec{a}_e(M) \quad (2.35)$$

## 2.3 Gradient de pression et surfaces isobares

### 2.3.1 Différentielle et gradient d'une fonction scalaire

Soit, dans un espace à une dimension, de repère  $(O, \vec{e}_x)$ , une fonction scalaire  $f$  du point  $M$  de coordonnée  $x$  :  $f(M) = f(x)$ .

**Définition 2.3 (Différentielle  $df(x)$ )** La différentielle  $df(M) = df(x)$  représente la variation infinitésimale que subit la fonction  $f(x)$  lorsque que le point  $M(x)$  se déplace d'un déplacement infinitésimal  $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'} = dx\vec{e}_x$  jusqu'au point  $M'$  de coordonnée  $x + dx$  (cf. Fig. (2.6)). Cette différentielle se calcule par :

$$df(M) = f(M') - f(M) \Leftrightarrow df(x) = \frac{df}{dx}(x).dx \quad (2.36)$$

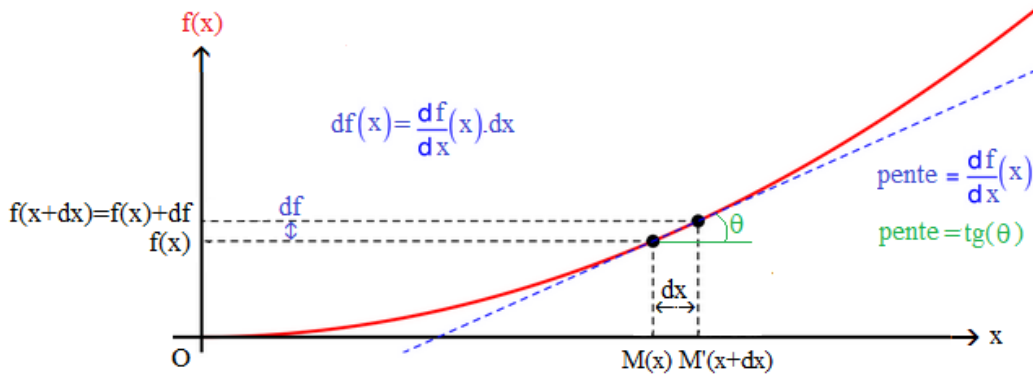


FIGURE 2.6 – Représentation de la différentielle  $df(x)$  d'une fonction scalaire

Cette définition se généralise à un espace à trois dimensions, de repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

**Définition 2.4 (Vecteur déplacement élémentaire)** Soit  $M$  le point de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $M'$  le point de coordonnées  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Le vecteur déplacement élémentaire du point  $M$  jusqu'au point  $M'$  est le vecteur :

$$\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

**Définition 2.5 (Différentielle  $df(x,y,z)$ )** La différentielle  $df(M) = df(x, y, z)$  d'une fonction scalaire  $f$  du point  $M$  représente la variation infinitésimale que subit la fonction  $f(x, y, z)$  lorsque que le point  $M(x, y, z)$  se déplace d'un déplacement élémentaire  $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'}$ . Cette différentielle se calcule par :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z).dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z).dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z).dz \quad (2.38)$$

$$df(M) = f(M') - f(M) = \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot \overrightarrow{dM} \quad (2.39)$$

**Remarque 2.3** L'éq. (2.39) est la définition intrinsèque d'une différentielle d'une fonction. Cette définition se généralise à une fonction quelconque : scalaire, vectorielle ou tensorielle. Elle reste valable quel que soit le système de coordonnées utilisé (cartésien, cylindrique, sphérique, ...).

**Remarque 2.4**  $\vec{\text{grad}} f$  est un vecteur orthogonal aux isosurfaces  $f = \text{cste}$  et il est dirigé vers les valeurs croissantes de  $f$ .

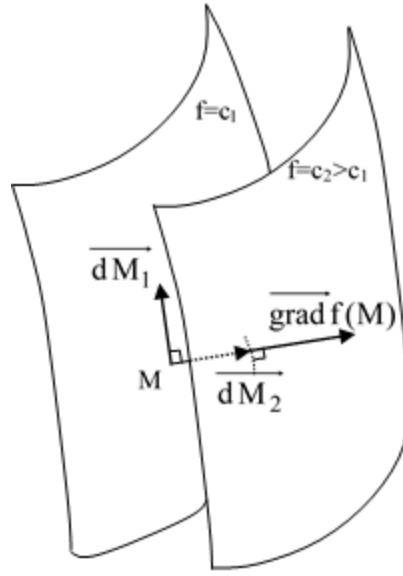


FIGURE 2.7 – Représentation du gradient  $\vec{\text{grad}} f$  d'une fonction scalaire

**Démonstration (cf. Fig. 2.7) :**

- Soit  $\vec{dM}_1$  un déplacement élémentaire du point  $M$  sur l'isosurface  $f = c_1 = \text{cste}$  alors, d'après l'éq. (2.39) :  $df_1 = c_1 - c_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{dM}_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{\text{grad}} f \perp \vec{dM}_1$ . Donc  $\vec{\text{grad}} f$  est bien orthogonal aux isosurfaces  $f = \text{cste}$ .
- Soit  $\vec{dM}_2$  un déplacement élémentaire de l'isosurface  $f = c_1$  à l'isosurface  $f = c_2$ , avec  $c_2 > c_1$  alors, d'après l'éq. (2.39) :  $df_2 = c_2 - c_1 > 0 \Leftrightarrow \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{dM}_2 > 0$ . Donc  $\vec{\text{grad}} f$  a la même direction que  $\vec{dM}_2$ , c'est-à-dire que  $\vec{\text{grad}} f$  est dirigé vers les valeurs croissantes de  $f$ .

### 2.3.2 Calcul des surfaces isobares

D'après la remarque 2.4, le gradient de la pression  $\vec{\text{grad}} P$  est orthogonal aux surfaces isobares  $P = \text{cste}$  et il est dirigé vers les valeurs croissantes de  $P$  (cf. Fig. 2.8).



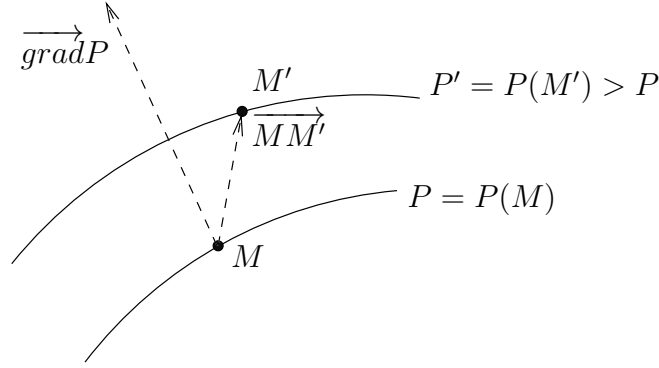


FIGURE 2.8 – Sens du gradient de pression.

**Définition 2.6 (Surfaces isobares)** Une surface isobare est l'ensemble des points au sein du fluide qui sont à la même pression. D'après l'éq. (2.39),  $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'}$  est un déplacement élémentaire sur une surface isobare si et seulement si (cela définit les surfaces isobares) :

$$dP(M) = P(M') - P(M) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}P} \cdot \overrightarrow{dM} = 0 \quad (2.40)$$

$$dP(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = 0 \quad (2.41)$$

#### Application : surfaces isobares dans un réservoir en accélération constante

Soit un réservoir se déplaçant en translation horizontale, contenant un liquide pesant homogène, de masse volumique  $\rho = \text{cste}$ . Dans le repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au réservoir, le liquide est au repos. L'accélération d'entraînement du réservoir est constante :  $\vec{a}_e = a_e \vec{e}_x$  avec  $a_e = \text{cste}$ . L'accélération de la gravité est  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ . L'objectif est de calculer l'équation des isobares dans le repère du réservoir.

Les forces extérieures qui agissent sur une particule du liquide contenu dans le réservoir sont :

- les forces de pression, de densité volumique  $[N/m^3]$  :  $-\text{grad}P$ ,
- la force de gravité (le poids), de densité volumique :  $\rho \vec{g} = -\rho g \vec{e}_z$ ,
- la force d'inertie d'entraînement, de densité volumique :  $\vec{f}_{ie} = -\rho a_e \vec{e}_x$ .

D'après l'éq. (2.35), la relation fondamentale de la statique dans le référentiel non galiléen lié au réservoir s'écrit :

$$\vec{\text{grad}}P = +\rho\vec{g} - \rho\vec{a}_e \quad (2.42)$$

$$\vec{\text{grad}}P = -\rho g\vec{e}_z - \rho a_e\vec{e}_x \quad (2.43)$$

qui s'écrit

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_e \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (2.46)$$

Alors, la différentielle de la pression  $dP$  s'écrit :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \quad (2.47)$$

$$dP = -\rho a_e dx - \rho g dz \quad (2.48)$$

D'après l'éq. (2.41), les surfaces isobares vérifient  $dP = 0$ , soit

$$dP = -\rho a_e dx - \rho g dz = 0 \quad (2.49)$$

$$-a_e dx - g dz = 0 \quad (2.50)$$

Si  $g$  est constant, alors on peut intégrer et on obtient :

$$-a_e x - g z = cste \quad (2.51)$$

$$z = -\frac{a_e}{g}x + cste \quad (2.52)$$

Les isobares sont donc des droites parallèles de pente  $-a_e/g$ .

**Remarque 2.5** Une autre méthode, plus générale, pour déterminer l'équation des isobares est d'intégrer successivement les équations aux dérivées partielles (EDP) (2.44-2.46). Dans le cas général, en statique des fluides,  $P = P(x, y, z)$ . Or l'éq. (2.45) s'écrit :

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow P = P(x, z)$$

L'éq. (2.44) donne :

$$\frac{\partial P(x, z)}{\partial x} = -\rho a_e \Rightarrow P(x, z) = -\rho a_e x + f(z)$$

et l'éq. (2.46) donne :

$$\frac{\partial P(x, z)}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow \frac{df(z)}{dz} = -\rho g \Rightarrow f(z) = -\rho g z + cste$$

Donc,

$$P(x, z) = -\rho a_e x - \rho g z + cste$$

Par conséquent, les équations des isobares sont données par  $P(x, z) = cste$ , soit

$$z = -\frac{a_e}{g}x + cste \quad (CQFD)$$

## Chapitre 3

# Force de pression exercée sur une paroi par un fluide

### 3.1 Force de gravité $\vec{F}_g$ , centre de gravité $G$ , poussée $\vec{F}_P$ , centre de poussée $C$

Les notations utilisées sont celles de la figure 3.1.

**Définition 3.1 (Force de gravité)** *On appelle force de gravité, notée  $\vec{F}_g$  [N], ou poids d'un domaine matériel  $\mathcal{D}$ , la résultante des forces de gravité exercée sur chaque particule de matière  $M \in \mathcal{D}$  :*

$$\vec{F}_g = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) \vec{g}(M) dV \quad (3.1)$$

**Définition 3.2 (Poussée)** *On appelle la poussée, notée  $\vec{F}_P$  [N], la résultante des forces de pression exercée par un fluide en tout point  $N$  d'une surface/paroi  $S$  quelconque, de normale  $\vec{n}$  dirigée du fluide vers la surface/paroi :*

$$\vec{F}_P = \iint_S P(N) \vec{n}(N) dS \quad (3.2)$$

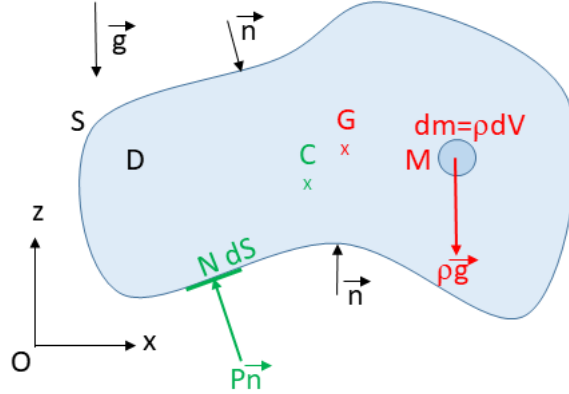


FIGURE 3.1 – Notations utilisées dans les définitions des centres de gravité et de poussée

**Définition 3.3 (Centre de gravité  $G$ )** *Le centre de gravité, noté  $G$ , de coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$ , est le point d'application de la résultante des forces de gravité (du poids)  $\vec{F}_g$ . Dans le cas général d'un domaine fluide  $\mathcal{D}$  continu, le point  $G$  est le point tel que le moment de  $\vec{F}_g$  appliqué en  $G$  est égal à la somme (intégrale) des moments élémentaires dus aux forces de gravité en tout point  $M$  de  $\mathcal{D}$  :*

$$\vec{OG} \wedge \vec{F}_g = \vec{OG} \wedge \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) \vec{g}(M) dV = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{OM} \wedge \rho(M) \vec{g}(M) dV \quad (3.3)$$

$$\Leftrightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \vec{GM} \wedge \rho(M) \vec{g}(M) dV = \vec{0} \quad (3.4)$$

où  $O$  est un point quelconque (on prend le centre du repère en général),  $M = (x, y, z)$  est le point courant du domaine  $\mathcal{D}$  et  $\vec{GM} = \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ z - z_G \end{pmatrix}$ .

**Remarque 3.1** *Notez que le point  $G$  n'est pas unique car tous les points de la droite orientée dans la direction de  $\vec{F}_g$  et qui passent par  $G$  satisfont aussi les définitions (3.3) et (3.4). On dit que le point  $G$  est porté par tous les points de la ligne d'action de la force de gravité  $\vec{F}_g$ .*

Comme le vecteur accélération de la gravité est en général considéré constant,  $\vec{g} = c\vec{st}$ , on peut simplifier les définitions (3.3) et (3.4). On obtient :

$$\begin{aligned} \left( \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) dV \right) \overrightarrow{OG} \wedge \vec{g} &= \left( \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) \overrightarrow{OM} dV \right) \wedge \vec{g} \\ \Leftrightarrow \left( \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) \overrightarrow{GM} dV \right) \wedge \vec{g} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Ceci implique que le point  $G$  est défini par l'une des trois propositions suivantes, où  $m_{\mathcal{D}} = \iiint_{\mathcal{D}} \rho dV$  est la masse du domaine  $\mathcal{D}$  :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) \overrightarrow{OM} dV \quad (3.5)$$

$$\Leftrightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) \overrightarrow{GM} dV = \vec{0} \quad (3.6)$$

ou

$$\iiint_{\mathcal{D}} \rho(M) \overrightarrow{GM} dV \parallel \vec{g} \quad (3.7)$$

Les eqs. (3.5) et (3.6) sont les définitions du **centre de masse ou centre d'inertie** d'un domaine continu  $\mathcal{D}$ . Notez que si  $\mathcal{D}$  est un ensemble discret de  $n$  masses ponctuelles  $m_i$  localisées aux points  $M_i$  (où  $i = 1, \dots, n$ ), les eqs. (3.5) et (3.6) deviennent :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad (3.9)$$

où  $m_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^n m_i$  est la masse du domaine  $\mathcal{D}$ . On retrouve ainsi la définition classique du **barycentre de masses ponctuelles**.

**Définition 3.4 (Centre géométrique du domaine  $\mathcal{D}$ )** *Si la masse volumique est constante ( $\rho = \text{cste}$ ) dans les eqs. (3.5) et (3.6), on retrouve la définition du centre géométrique  $G$  du domaine  $\mathcal{D}$  de volume  $V_{\mathcal{D}}$  :*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V_{\mathcal{D}}} \iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{OM} dV \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow \iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{GM} dV = \vec{0} \quad (3.11)$$

**Définition 3.5 (Centre de poussée)** *Le centre de poussée, noté  $C$ , de coordonnées  $(x_C, y_C, z_C)$ , est le point d'application de la poussée  $\vec{F}_P$  (résultante des forces de pression). Par analogie, on peut dire que le centre de poussée  $C$  est aux forces aérodynamiques ce que le centre de gravité  $G$  est aux forces de pesanteur, les forces aérodynamiques étant les forces de surface dues à la pression et aux contraintes visqueuses (en cas d'écoulement d'un fluide visqueux). En effet, lorsqu'un solide est placé dans un fluide (statique ou en mouvement), en tout point de sa surface est exercée une force (pression ou dépression). La somme de ces forces, en direction et en intensité, s'applique au centre de poussée  $C$  comme la pesanteur cumulée de tous les éléments d'un objet s'applique en son centre de gravité  $G$ , et l'un comme l'autre de ces points physiques peuvent ne correspondre à aucun point matériel.*

*Par analogie avec les définitions ci-dessus du centre de gravité  $G$ , dans le cas général d'un domaine fluide continu  $\mathcal{D}$ , limité par une surface  $S$ , de normale  $\vec{n}$  rentrante dans  $\mathcal{D}$ , le centre de poussée  $C$  est l'un des points tel que le moment de  $\vec{F}_P$  appliqué en  $C$  est égal à la somme (intégrale) des moments élémentaires dus aux forces de pression en tout point  $N$  de  $S$  :*

$$\vec{OC} \wedge \vec{F}_P = \vec{OC} \wedge \iint_S P(N) \vec{n} dS = \iint_S \vec{ON} \wedge P(N) \vec{n} dS \quad (3.12)$$

$$\Leftrightarrow \iint_S \vec{CN} \wedge P(N) \vec{n} dS = \vec{0} \quad (3.13)$$

où  $O$  est un point quelconque (on prend le centre du repère en général),  $N = (x, y, z)$  est le point courant de la surface  $S$  de  $\mathcal{D}$  et  $\vec{CN} = \begin{pmatrix} x - x_C \\ y - y_C \\ z - z_C \end{pmatrix}$ .

**Remarque 3.2** *Notez que le point  $C$  n'est pas unique car tous les points de la droite orientée dans la direction de la poussée,  $\vec{F}_P$ , et qui passe par  $C$  satisfont aussi les définitions (3.12) et (3.13). On dit que le point  $C$  est porté par tous les points de la ligne d'action de la poussée.*

Si la normale à la surface  $S$  est constante ( $\vec{n} = \vec{cst}$ ), i.e. si la surface  $S$  est plane, les relations précédentes se simplifient et on obtient que le point  $C$  est défini par :

$$\vec{OC} = \frac{1}{F_P} \iint_S P(N) \vec{ON} dS \quad (3.14)$$

$$\Leftrightarrow \iint_S P(N) \vec{CN} dS = \vec{0} \quad (3.15)$$

ou

$$\iint_S P(N) \overrightarrow{CN} dS \parallel \vec{n} \quad (3.16)$$

où  $F_P = \iint_S P dS \geq 0$  est la norme de la poussée sur  $S$ .

**Définition 3.6 (Centre géométrique d'une surface  $S$ )** Si, dans les eqs. (3.14) et (3.15), la pression est constante ( $P(N) = cste$ ), on retrouve la définition du centre géométrique  $C$  d'une surface  $S$ , où  $N$  est le point courant de  $S$  et  $O$  un point quelconque (le centre du repère en général) :

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{S} \iint_S \overrightarrow{ON} dS \quad (3.17)$$

$$\Leftrightarrow \iint_S \overrightarrow{CN} dS = \vec{0} \quad (3.18)$$

**Définition 3.7 (Ligne d'action d'une force)** Si la résultante d'une force  $\vec{F}$  s'exerce en  $M$ , alors tout point de la droite passant par  $M$  et de direction  $\vec{F}$  a également un moment nul. Cette droite est appelée la ligne d'action de la force. Par conséquent, les définitions générales du centre de gravité (eqs. (3.3-3.4)) et du centre de poussée (eqs. (3.12-3.13)) consistant à calculer le moment nul des forces de gravité et de pression, résumer/rassembler ces forces en un point d'application ( $G$  ou  $C$ ) se ramène à choisir un point particulier sur leur ligne d'action.

## 3.2 Cas des gaz à pression constante

Pour les gaz à l'équilibre statique, la pression et la masse volumique ne varient notablement que pour des très grandes variations de hauteur. Pour le calcul des forces sur la surface  $S$  ou dans le volume  $\mathcal{D}$  d'un domaine gazeux de taille modérée,  $P$  et  $\rho$  sont choisis constants.

### 3.2.1 Pression d'un gaz sur une paroi plane

Pour une surface plane  $S$ , comme la normale  $\vec{n} = \vec{cst}$  et que la pression exercée par le gaz sur la paroi est aussi constante, **la poussée** (la résultante des forces de pression)



est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_P &= \int_S P \vec{n} dS \\
 &= P \vec{n} \int_S dS \\
 &= PS \vec{n}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

D'après les éqs. (3.14)-(3.15) et (3.17)-(3.18), pour un gaz à pression constante, le **centre de poussée**  $C$  se situe au **centre géométrique** de la surface plane  $S$ .

**Application :** Calcul du centre de poussée exercée par la pression  $P = cste$  d'un gaz sur une plaque plane rectangulaire horizontale de dimensions  $L_x \times L_y$  dans le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

La norme de la poussée étant  $F_P = P L_x L_y$ , l'éq. (3.11) se réécrit :

$$\begin{aligned}
 \vec{OC} &= \frac{1}{P L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} P \vec{ON} dx dy \\
 \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} &= \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z=0 \end{pmatrix} dx dy
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{1}{L_x L_y} \left[ \int_0^{L_y} \left( \int_0^{L_x} x dx \right) dy \right] = \frac{1}{L_x L_y} \left[ \int_0^{L_y} \left( \frac{L_x^2}{2} \right) dy \right] \\
 \Leftrightarrow x_C &= \frac{L_x}{2 L_y} \left[ \int_0^{L_y} dy \right] = \frac{L_x}{2 L_y} [L_y] = \frac{L_x}{2}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

De même, on trouve  $y_C = \frac{L_y}{2}$  et  $z_C = 0$ . Donc le centre de poussée  $C$  est bien au milieu de la plaque rectangulaire.

### 3.2.2 Pression d'un gaz sur une paroi courbe

Considérons la surface courbe  $S$  de la figure 3.2. La pression  $P$  du gaz est constante mais la normale  $\vec{n}$  ne l'est pas : ses composantes varient le long de la surface. **La**

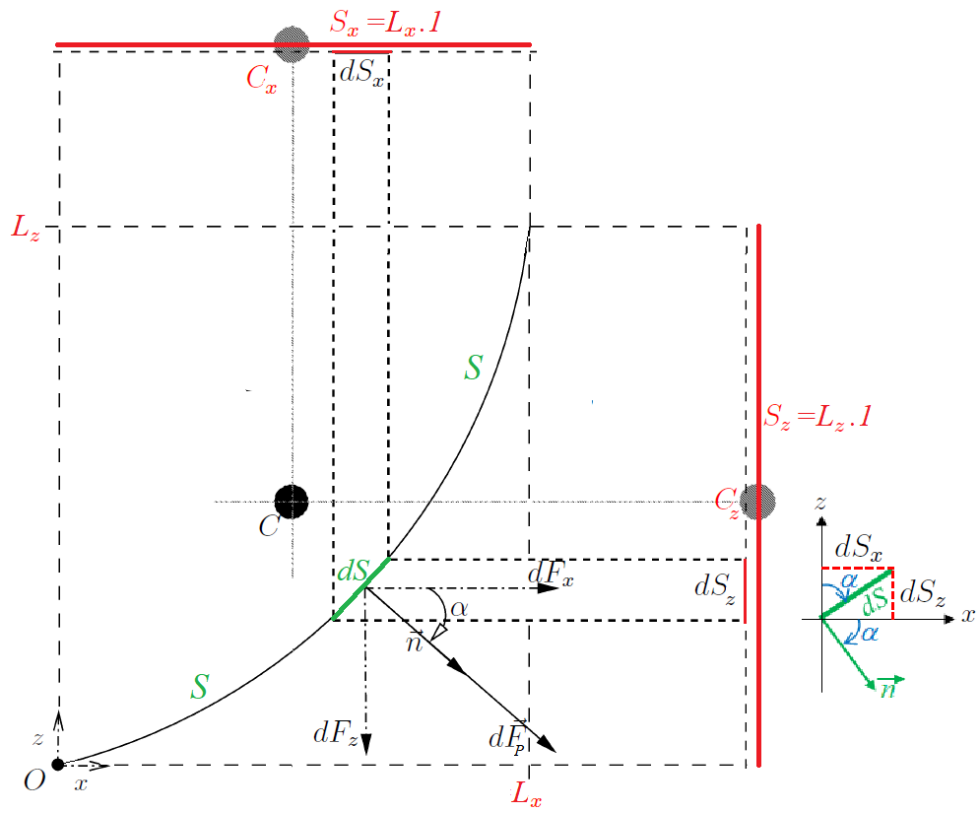


FIGURE 3.2 – Poussée d'un gaz selon  $Ox$  et  $Oz$  et centre de poussée  $C$  sur une paroi courbe.

**poussée** s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_P &= \int_S P \vec{n} dS \\ &= P \int_S \vec{n} dS\end{aligned}$$

Chaque composante  $F_{P,x} = \vec{F}_P \cdot \vec{e}_x$  et  $F_{P,z} = \vec{F}_P \cdot \vec{e}_z$  s'écrit donc :

$$F_{P,x} = P \int_S \vec{n} \cdot \vec{e}_x dS = P \int_S \cos \alpha dS = P \int_S dS_z = PS_z \quad (3.22)$$

$$F_{P,z} = P \int_S \vec{n} \cdot \vec{e}_z dS = P \int_S -\sin \alpha dS = -P \int_S dS_x = -PS_x \quad (3.23)$$

avec  $\alpha = \widehat{(\vec{e}_x, \vec{n})}$  (négatif sur le dessin),  $\frac{dS_x}{dS} = \sin \alpha$ ,  $\frac{dS_z}{dS} = \cos \alpha$  et  $S_x$  et  $S_z$  les projections de  $S$  sur le plan horizontal et le plan vertical respectivement.

<sup>1</sup>On va montrer maintenant que **le centre de poussée** est à l'intersection de la droite verticale passant par le milieu de  $S_x$  et de la droite horizontale passant par le milieu de  $S_z$  (cf. Fig. 3.2). D'après l'éq. (3.13) et en tenant compte du fait que la pression  $P$  du gaz est constante, on obtient que le centre de poussée  $C$  est donné par :

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{CN} \wedge \vec{n} dS &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \iint_S \begin{pmatrix} x - x_C \\ 0 \\ z - z_C \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} n_x \\ 0 \\ n_z \end{pmatrix} dS &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \iint_S \begin{pmatrix} x - x_C \\ 0 \\ z - z_C \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} dS &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ (z - z_C) \cos \alpha + (x - x_C) \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} dS &= \vec{0}\end{aligned}$$

La composante selon  $(Oy)$  de cette relation vectorielle intégrale donne :

---

1. Début de la séance de cours n°4

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \iint_S [(z - z_C) \cos \alpha + (x - x_C) \sin \alpha] dS = 0 \\
 &\Leftrightarrow \iint_S (z - z_C) \cos \alpha dS + \iint_S (x - x_C) \sin \alpha dS = 0 \\
 &\Leftrightarrow \iint_S (z - z_C) dS_z + \iint_S (x - x_C) dS_x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \int_{z=0}^{L_z} (z - z_C) dz + \int_{x=0}^{L_x} (x - x_C) dx = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left[ \frac{z^2}{2} - z_C z \right]_{z=0}^{L_z} + \left[ \frac{x^2}{2} - x_C x \right]_{x=0}^{L_x} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left[ \frac{L_z^2}{2} - z_C L_z \right] + \left[ \frac{L_x^2}{2} - x_C L_x \right] = 0
 \end{aligned}$$

Une solution particulière évidente de cette dernière équation est le point  $C$  de coordonnées  $x_C = \frac{L_x}{2}$  et  $z_C = \frac{L_z}{2}$ . Mais cette position du centre de poussée n'est pas unique : tous les points situés sur la droite d'équation :

$$\Leftrightarrow z_C = \frac{L_z^2 + L_x^2}{2L_z} - \frac{L_x}{L_z} x_C \quad (3.24)$$

sont aussi des centres de poussée. Cette droite est la ligne d'action de la poussée. Elle est dessinée en bleu clair sur la Fig. 3.3 : elle passe par le point  $C$  et est orthogonale à la corde  $(O, Q)$  de la surface courbe  $S$ . La position du centre de poussée qui est retenue habituellement est le point  $C$  situé à l'intersection de la corde et de la ligne de poussée.

### 3.2.3 Epaisseur de conduite critique due à la pression interne

Soit une conduite cylindrique rectiligne de longueur  $L$ , dont la paroi est d'épaisseur  $e$ , de rayon interne  $R$  et de rayon externe  $R+e$  (cf. Fig. 3.4). Cette conduite est traversée par un fluide sous haute pression,  $P$ , de telle sorte que la chute de pression due aux pertes de charge au sein de l'écoulement est négligeable. On peut donc considérer que la pression  $P$  qui s'exerce sur toute la paroi interne de la conduite est constante. A l'extérieur, la pression est la pression atmosphérique,  $P_{atm}$ , également constante. On note  $P_{lim}$  la pression limite que peut supporter le matériau de la conduite sans se fissurer/casser. L'objectif est de calculer l'épaisseur critique,  $e_{crit}$ , en dessous de laquelle la conduite est susceptible de se fissurer.

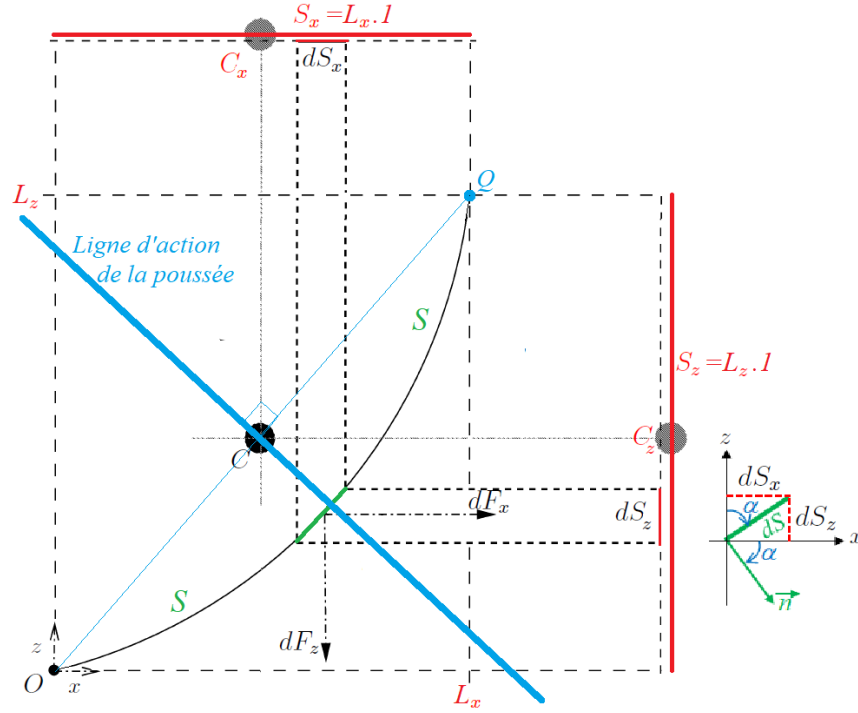


FIGURE 3.3 – Ligne d'action de la poussée d'un gaz sur une paroi courbe.

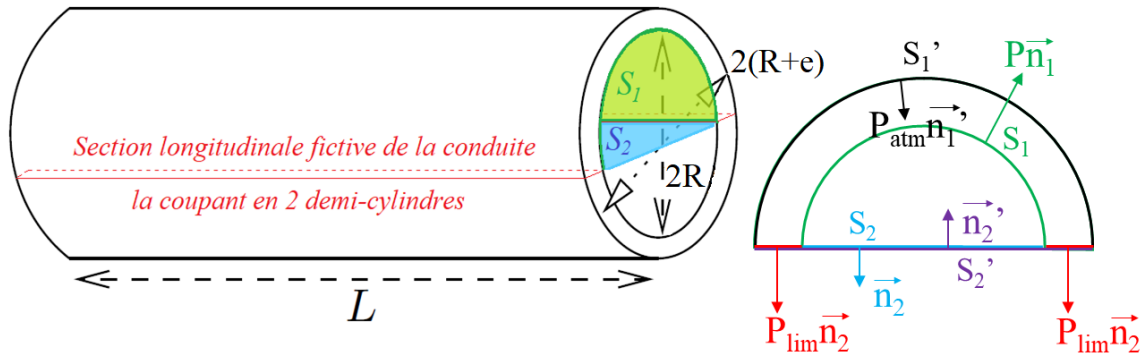


FIGURE 3.4 – Dimensions et notations pour la conduite sous pression.

La force  $F_P$  qu'exerce le fluide sur la paroi interne de la conduite est égale en intensité à celle qu'il faut exercer pour maintenir les deux demi-cylindres de la paroi l'un contre l'autre, c'est à dire la somme des contributions de la pression atmosphérique externe et de la contrainte normale interne à la paroi dont la valeur limite avant fissuration est donnée par la pression limite,  $P_{lim}$  (cf. Fig. 3.4).

- L'intensité de la force de pression s'exerçant sur la surface  $S_1$  du demi cylindre interne (surface verte sur la Fig. 3.4) s'écrit :

$$\vec{F}_P = \iint_{S_1} P \vec{n}_1 dS = P \iint_{S_1} \vec{n}_1 dS \quad (3.25)$$

où la normale  $\vec{n}_1$  est orientée du fluide vers la paroi.

A priori, le calcul de cette intégrale n'est pas aisé car  $\vec{n}_1$  varie sur la surface  $S_1$ . Pour calculer cette intégrale, on utilise une technique très classique qui consiste à fermer artificiellement la surface  $S_1$  avec une surface fictive  $S_2$  telle que l'intégrale sur  $S_2$  soit plus simple à calculer que l'intégrale sur  $S_1$  : en général, on prend une surface  $S_2$  plane dont la normale  $\vec{n}_2 = c\vec{s}te$ . Ainsi, soit la surface  $S_2$  telle que la surface  $S = S_1 \cup S_2$  soit la surface fermée d'un volume  $V$ , alors l'intégrale de la normale  $\vec{n}$  sur toute la surface fermée  $S$  est nulle car les normales s'annulent deux à deux :

$$\oiint_S \vec{n} dS = \vec{0} \quad (3.26)$$

$$\Leftrightarrow \oiint_{S_1 \cup S_2} \vec{n} dS = \vec{0} \quad (3.27)$$

$$\Leftrightarrow \iint_{S_1} \vec{n}_1 dS = - \iint_{S_2} \vec{n}_2 dS \quad (3.28)$$

En définissant  $S_2$  comme le rectangle fermant le demi cylindre interne (surface bleu clair sur la Fig. 3.4), le calcul de la force  $\vec{F}_P$  devient :

$$\vec{F}_P = P \iint_{S_1} \vec{n}_1 dS = -P \iint_{S_2} \vec{n}_2 dS = -P \vec{n}_2 \iint_{S_2} dS = -P S_2 \vec{n}_2 \quad (3.29)$$

soit

$$\vec{F}_P = -2RLP \vec{n}_2 \quad (3.30)$$

- L'intensité de la force de pression atmosphérique extérieure,  $P_{atm}$ , s'exerçant sur le demi cylindre externe de surface  $S'_1$  (surface noire sur la Fig. 3.4) s'écrit :

$$\vec{F}'_{P_{atm}} = \iint_{S'_1} P_{atm} \vec{n}'_1 dS = P_{atm} \iint_{S'_1} \vec{n}'_1 dS \quad (3.31)$$

Comme précédemment, en définissant  $S'_2$  comme le rectangle fermant le demi cylindre externe (surface violette sur la Fig. 3.4), on obtient :

$$\vec{F}'_{P_{atm}} = -P_{atm} \iint_{S'_2} \vec{n}'_2 dS = -P_{atm} \vec{n}'_2 \iint_{S'_2} dS = -P_{atm} S'_2 \vec{n}'_2 \quad (3.32)$$

soit

$$\vec{F}'_{P_{atm}} = -2(R + e_{crit})LP_{atm}\vec{n}'_2 \quad (3.33)$$

- La pression (ou la contrainte normale) que peut supporter le matériau de la conduite sans se casser est notée  $P_{lim}$ . La force de pression qu'il faut exercer sur la conduite juste avant qu'apparaisse la fissuration longitudinale de la paroi (sur les petites surfaces rectangulaires rouges internes à la paroi sur la Fig. 3.4) s'écrit donc :

$$\vec{F}_{P_{lim}} = 2e_{crit}LP_{lim}\vec{n}_2 \quad (3.34)$$

Dans le cas limite de l'équilibre, juste avant fissuration, on a :

$$\vec{F}_P + \vec{F}'_{P_{atm}} + \vec{F}_{P_{lim}} = \vec{0} \quad (3.35)$$

En remarquant que  $\vec{n}'_2 = -\vec{n}_2$  et en projetant la relation précédente sur  $\vec{n}_2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} -2RLP + 2(R + e_{crit})LP_{atm} + 2e_{crit}LP_{lim} &= 0 \\ \Leftrightarrow -RP + (R + e_{crit})P_{atm} + e_{crit}P_{lim} &= 0 \\ \Leftrightarrow R(P_{atm} - P) + e_{crit}(P_{atm} + P_{lim}) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, si on considère que  $P_{atm} \ll P_{lim}$  et  $P$ , et en utilisant la pression relative  $P_r = P - P_{atm}$ , l'épaisseur critique de la conduite est donnée par :

$$e_{crit} = \frac{R \times (P - P_{atm})}{P_{lim} + P_{atm}} \approx \frac{R \times P_r}{P_{lim}} \quad (3.36)$$

### 3.3 Cas des liquides à pression motrice constante

Pour les liquides, la masse volumique est considérée constante pour les profondeurs usuelles et la loi de l'hydrostatique (2.14) s'applique :  $P_g = P(z) + \rho g z = cste$ , où  $P_g$  est la pression motrice. En prenant la cote  $z = 0$  au niveau de la surface libre du liquide où règne la pression atmosphérique (cf. Fig. 3.5), on a :

$$P_g = P(z) + \rho g z = P_{atm} \quad (3.37)$$

$$\Leftrightarrow P_r(z) = P(z) - P_{atm} = -\rho g z \quad (3.38)$$

Pour les liquides, la pression statique absolue,  $P(z)$ , ou relative,  $P_r(z)$ , varie linéairement avec la hauteur. Elle est constante sur une surface horizontale, à  $z = cste$ . C'est ce qui est illustré sur la Fig. 3.5.

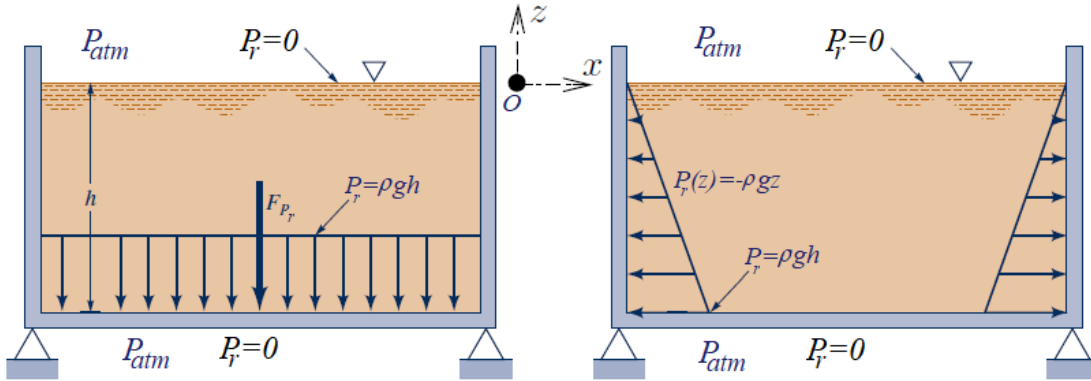


FIGURE 3.5 – Répartition de la pression relative,  $P_r(z) = P(z) - P_{atm} = -\rho g z$ , sur les parois d'un récipient contenant un liquide. A gauche, sur la paroi basse, la résultante de la poussée relative est verticale dirigée vers le bas. A droite, cette résultante sur les parois verticales est nulle car la poussée sur la paroi droite est horizontale mais égale en intensité et de sens opposé à la résultante sur la paroi gauche (Figure adaptée de [10]).

La poussée exercée par un liquide sur une surface  $S$  quelconque est donnée par l'éq. (3.2) :



$$\vec{F}_P = \iint_S P \vec{n} dS = \iint_S P_{atm} \vec{n} dS - \rho g \iint_S z \vec{n} dS \quad (3.39)$$

**Pour les liquides, le calcul de la poussée sur une surface immergée sera toujours effectué en pression relative**, c'est à dire qu'on calculera la poussée relative à la pression du gaz surmontant le liquide (ici le gaz est à  $P_{atm}$ ) :

$$\vec{F}_{P_r} = \iint_S P_r \vec{n} dS = \iint_S (P - P_{atm}) \vec{n} dS = -\rho g \iint_S z \vec{n} dS \quad (3.40)$$

Ainsi, la poussée réelle,  $\vec{F}_P$ , sera égale à la poussée relative,  $\vec{F}_{P_r}$ , à laquelle il faudra ajouter la force de pression du gaz (ici à  $P_{atm}$ ) surmontant la paroi :

$$\boxed{\vec{F}_P = \vec{F}_{P_r} + \iint_S P_{atm} \vec{n} dS} \quad (3.41)$$

### 3.3.1 Pression d'un liquide sur une paroi plane

**Poussée dans la direction  $\vec{n}$  normale à la paroi plane**

Comme la paroi est plane, la normale est constante,  $\vec{n} = c\vec{st}$ , et on peut projeter la relation (3.40) dans la direction  $\vec{n}$ . L'intensité de la poussée relative est donnée par :

$$F_{P_r} = \iint_S P_r dS = -\rho g \iint_S z dS \quad (3.42)$$

On rappelle que, dans le champ de gravité  $\vec{g} = c\vec{st}$ , le centre de gravité  $G$  d'un volume quelconque est donné par la relation (3.5). Par analogie, le centre de gravité  $G$  d'une surface quelconque est donné par :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_S} \iint_S \rho(N) \vec{ON} dS \quad (3.43)$$

où  $\rho$  est la masse surfacique (en  $[kg/m^2]$ ),  $m_S = \iint_S \rho dS$  est la masse de la surface  $S$  et  $N$  le point courant de  $S$ . Si  $\rho = cste$ , le centre de gravité  $G$  est simplement confondu avec le centre géométrique (cf. éq. (3.17)) :

$$\vec{OG} = \frac{1}{S} \iint_S \vec{ON} dS \quad (3.44)$$

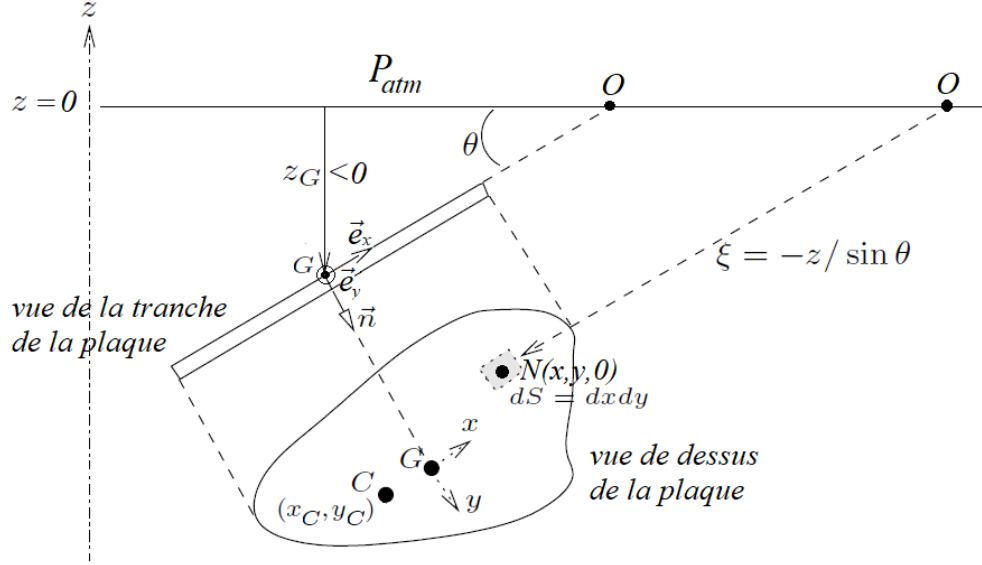


FIGURE 3.6 – Pression sur une plaque plane immergée dans un liquide.

Par conséquent, la profondeur  $z_G$  du centre de gravité de la surface  $S$  (cf. Fig. 3.6) est donnée par :

$$z_G = \frac{1}{S} \iint_S z dS \quad (3.45)$$

En introduisant (3.45) dans (3.42), on obtient :

$$\boxed{\vec{F}_{P_r} = -\rho g z_G S \vec{n}} \quad (3.46)$$

**Enoncé 3.1 (Poussée relative sur une surface plane inclinée)** *La poussée relative,  $\vec{F}_{P_r}$ , exercée sur une paroi plane inclinée par un fluide pesant en équilibre a une intensité égale au poids d'une colonne de fluide ayant pour base la surface  $S$  de la paroi et pour hauteur la profondeur  $z_G$  du centre de gravité de la surface en-dessous de la surface libre. Elle est orientée dans la direction  $\vec{n}$  normale à la surface plane.*

**Remarque 3.3** *L'intensité de la poussée relative,  $F_{P_r} = -\rho g S z_G$ , exercée sur une surface plane par un fluide pesant est indépendante de l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la plaque.*

D'après (3.41), pour obtenir la poussée absolue,  $\vec{F}_P$ , il faut ajouter à la poussée relative,  $\vec{F}_{P_r}$ , la contribution de la pression atmosphérique qui est égale à  $\iint_S P_{atm} \vec{n} dS = P_{atm} S \vec{n}$  :

$$\boxed{\vec{F}_P = (P_{atm} + \rho g(-z_G)) S \vec{n}} \quad (3.47)$$

**Application :** Forces exercée par une hauteur  $h$  de liquide sur le fond de surface  $S$  de trois récipients de formes différentes (Fig. 3.7)

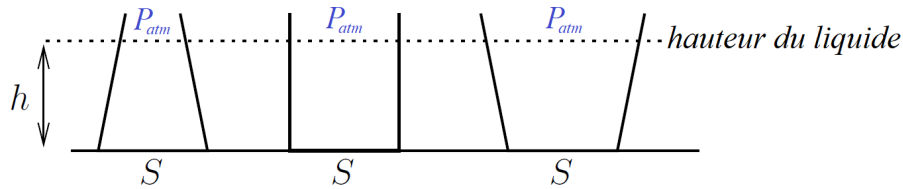


FIGURE 3.7 – Forces exercée sur le fond de surface  $S$  de trois récipients.

D'après le calcul précédent et l'éq. (3.47), la poussée sur  $S$  est la même pour les trois récipients. Elle est égale à :  $F_P = (P_{atm} + \rho g h) S$ .

**Application :** Poussée exercée par un liquide sur une paroi plane verticale rectangulaire,  $S$ , de largeur  $l$  et de hauteur  $h$  et dont le bord affleure la surface libre à la pression  $P_{atm}$  (Fig. 3.8).

D'après l'éq. (3.46), l'intensité de la poussée relative exercée par le liquide sur  $S$  est donnée par :

$$\|F_{P_r}\| = \rho g S |z_G| = \rho g l h \left| \frac{h}{2} \right| = \frac{1}{2} \rho g h^2 l$$

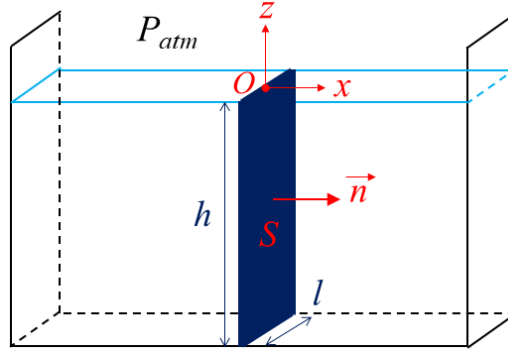


FIGURE 3.8 – Pression sur une plaque plane verticale rectangulaire immergée dans un liquide.

En tenant compte de la pression atmosphérique  $P_{atm}$ , l'intensité de la poussée absolue s'écrit :

$$\|F_P\| = \frac{1}{2}\rho gh^2l + P_{atm}lh$$

### Centre de poussée $C$

Alors qu'intuitivement, on pourrait croire que la poussée d'un fluide pesant s'applique au centre de la plaque, ce n'est pas le cas : elle s'applique toujours en dessous du centre géométrique si la plaque n'est pas horizontale. C'est ce que l'on va montrer ci-dessous. Le point (la ligne) d'application de la résultante des forces de pression est déterminée par intégration des moments élémentaires des forces de pression autour d'un axe horizontal (axe  $\vec{e}_y$  sur la Fig. 3.6).

On considère sur la Fig. 3.6 un repère local de la paroi,  $(G, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{n})$ , centré sur le centre de gravité  $G$  de  $S$  et dont les deux premiers vecteurs de base sont confondus avec la surface  $S$ . On souhaite calculer, dans cette base, les coordonnées  $(x_C, y_C, 0)$  du centre de poussée  $C$  due à la pression relative  $P_r(z) = -\rho gz$  par rapport au centre de gravité  $G$ , sachant que le centre de poussée due à la pression atmosphérique  $P_{atm} = cste$  se calcule comme on l'a fait à la fin de la sous-section §3.2.2. D'après la définition (3.12) (avec  $O = G$ ) et l'éq. (3.46), les coordonnées de  $C = (x_C, y_C)$  dues au moment de  $\vec{F}_P(z)$  par rapport à  $G$  s'obtiennent en déterminant le moment équivalent à la somme (intégrale) des moments élémentaires des forces de pression relative :

$$\overrightarrow{GC} \wedge \vec{F}_{P_r} = \iint_S \overrightarrow{GN} \wedge P_r(N) \vec{n} dS \quad (3.48)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GC} \wedge -\rho g S z_G \vec{n} = \iint_S \overrightarrow{GN} \wedge (-\rho g z) \vec{n} dS \quad (3.49)$$

$$\Leftrightarrow -\rho g z_G S \overrightarrow{GC} \wedge \vec{n} = -\rho g \iint_S z \overrightarrow{GN} dS \wedge \vec{n} \quad (3.50)$$

$$\Leftrightarrow z_G S \overrightarrow{GC} \wedge \vec{n} = \iint_S z \overrightarrow{GN} dS \wedge \vec{n} \quad (3.51)$$

Si on recherche le centre de poussée  $C$  appartenant au plan de la surface  $S$ , sa position par rapport au centre de gravité  $G$  est donnée par :

$$\overrightarrow{GC} = \frac{1}{z_G S} \iint_S z \overrightarrow{GN} dS \quad (3.52)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 0 \end{pmatrix}_{/(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{n})} = \frac{1}{z_G S} \iint_S z \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}_{/(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{n})} dS \quad (3.53)$$

- <sup>2</sup>La première composante de l'éq. (3.53) est due au moment de  $dF = P_r dS = -\rho g z dS$  par rapport à la droite  $Gy$  :  $\iint_S x dF = x_C \iint_S dF (\equiv -x_C \rho g S z_G)$ . Elle fournit la composante  $x_C$  :

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{z_G S} \iint_S x z dS \\ &= \frac{-1}{z_G S} \iint_S x \xi \sin \theta dS \\ &= \frac{-1}{z_G S} \sin \theta \iint_S x (\xi_G - x) dS \\ &= \frac{-1}{z_G S} \xi_G \sin \theta \iint_S x dS + \frac{1}{z_G S} \sin \theta \iint_S x^2 dS \\ \text{(eq. (3.44) avec } O=G) &= 0 + \frac{1}{z_G S} \sin \theta \iint_S x^2 dS \\ &= \frac{1}{z_G S} \sin \theta I_{Gy} \end{aligned}$$

où, d'après la Fig. 3.6,  $z = -\xi \sin \theta = -(\xi_G - x) \sin \theta$  et où  $I_{Gy} = \iint_S x^2 dS$  est le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe  $Gy$ . Par conséquent,

$$\boxed{x_C = \sin \theta \frac{I_{Gy}}{z_G \cdot S}} \quad (3.54)$$

**Profondeur  $\xi_C$  du centre de poussée le long de la plaque :** en utilisant les relations  $x_C = \xi_G - \xi_C$  et  $z_G = -\xi_G \sin \theta$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \xi_G - \xi_C &= \sin \theta \frac{I_{Gy}}{z_G \cdot S} \\ \xi_G - \xi_C &= \frac{I_{Gy}}{-\xi_G \cdot S} \\ \xi_C &= \xi_G + \frac{I_{Gy}}{\xi_G \cdot S} \end{aligned} \quad (3.55)$$

**Hauteur  $z_C$  du centre de poussée :** en utilisant la relation  $z = -\xi \sin \theta$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \xi_G - \xi_C &= \sin \theta \frac{I_{Gy}}{z_G \cdot S} \\ \frac{z_C - z_G}{\sin \theta} &= \sin \theta \frac{I_{Gy}}{z_G \cdot S} \\ z_C - z_G &= \sin^2 \theta \frac{I_{Gy}}{z_G \cdot S} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_C = z_G + \sin^2 \theta \frac{I_{Gy}}{z_G \cdot S}} \quad (3.56)$$

**Remarque 3.4** Comme le moment d'inertie  $I_{Gy} > 0$ ,  $\xi_G > 0$  et  $z_G < 0$  alors  $x_C < 0$ ,  $\xi_C > \xi_G$  et  $z_C < z_G$ , c'est-à-dire que le centre de poussée  $C$  est en dessous du centre de gravité  $G$ .

- La deuxième composante de l'éq. (3.53) est due au moment de  $dF = P_r dS = -\rho g z dS$  par rapport à la droite  $Gx$  :  $\iint_S y dF = y_C \iint_S dF (\equiv -y_C \rho g S z_G)$ . Elle fournit la composante  $y_C$  :

$$\begin{aligned}
 y_C &= \frac{1}{z_G S} \iint_S yz \, dS \\
 &= \frac{-1}{z_G S} \iint_S y\xi \sin \theta \, dS \\
 &= \frac{-1}{z_G S} \sin \theta \iint_S y (\xi_G - x) \, dS \\
 &= \frac{-1}{z_G S} \xi_G \sin \theta \iint_S y \, dS + \frac{1}{z_G S} \sin \theta \iint_S xy \, dS \\
 \text{(eq. (3.44) avec } O=G) &= 0 + \frac{1}{z_G S} \sin \theta \iint_S xy \, dS \\
 &= \frac{1}{z_G S} \sin \theta I_{xy}
 \end{aligned}$$

où  $I_{xy} = \iint_S xy \, dS$  est un des produits d'inertie de la surface. Par conséquent,

$$\boxed{y_C = \sin \theta \frac{I_{xy}}{z_G S}} \quad (3.57)$$

**Remarque 3.5** Si la plaque est symétrique par rapport à l'axe  $Gx$  alors  $I_{xy} = 0$  et donc  $y_C = 0$ .

**Application :** On a vu lors de la dernière application (cf. Fig. 3.8), que la poussée relative exercée par un liquide sur une paroi plane verticale rectangulaire,  $S$ , de normale  $\vec{n}$  dirigée du fluide vers la paroi, de largeur  $l$  et de hauteur  $h$  et dont le bord affleure la surface libre à la pression atmosphérique, est donnée par :

$$\vec{F}_{P_r} = \frac{1}{2} \rho g h^2 l \vec{n}$$

Par ailleurs la pression atmosphérique génère une poussée sur  $S$  égale à :

$$\vec{F}_{P_{atm}} = P_{atm} l h \vec{n}$$

Par conséquent, la poussée absolue s'écrit :

$$\vec{F}_P = \left( \frac{1}{2} \rho g h^2 l + P_{atm} l h \right) \vec{n}$$

En se plaçant dans le repère de la Fig. 3.8, on souhaite calculer pour cette paroi verticale rectangulaire  $S$  :

1. la position verticale  $z_{C_r}$  du centre  $C_r$  de la poussée relative,  $\vec{F}_{P_r}$ ,
  2. la position verticale  $z_{C_a}$  du centre  $C_a$  de la poussée atmosphérique,  $\vec{F}_{P_{atm}}$ ,
  3. la position verticale  $z_C$  du centre  $C$  de la poussée absolue,  $\vec{F}_P$ .
- 1- D'après l'éq. (3.56),  $z_{C_r} = z_G + \sin^2 \theta \frac{I_{Gy}}{z_G \cdot S}$ . En se servant des résultats pour la plaque rectangulaire dans la figure 3.9, on obtient :

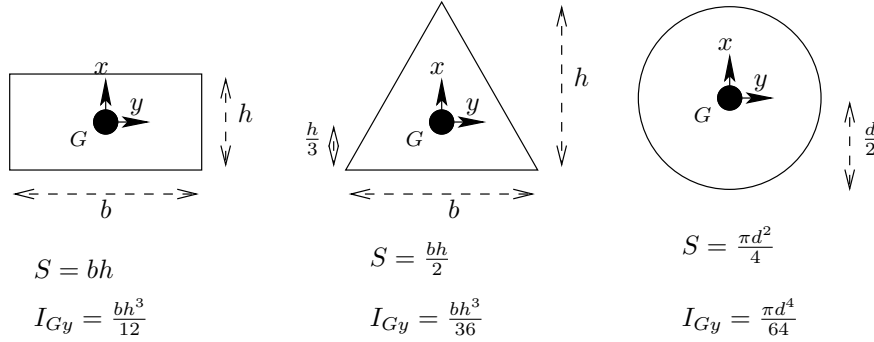


FIGURE 3.9 – Moments d'inertie et centre de gravité de surfaces simples.

$$z_{C_r} = -\frac{h}{2} + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \frac{\frac{lh^3}{12}}{-\frac{h}{2}hl} = -\frac{h}{2} - \frac{h}{6} = -\frac{2}{3}h$$

c'est à dire que  $C_r$  **est à une distance  $h/3$  par rapport au bas de la plaque rectangulaire**. Il est donc en-dessous du centre géométrique  $G$  de la plaque qui se situe en  $z_G = -h/2$  (cf. Fig. 3.10).

2- Déterminer  $C_a$  revient à calculer le centre de poussée exercée sur  $S$  par la pression constante d'un gaz à  $P_{atm}$  sur une paroi plane. Nous avons vu au §3.2.1 que  $C_a$  est le centre géométrique de  $S$ , i.e.  $C_a = G$  et  $z_{C_a} = -h/2$ .

3- Pour trouver le point d'application  $C$  de la poussée absolue (force totale),  $\vec{F}_P$ , il faut rechercher le point d'application du moment équivalent aux deux forces  $\vec{F}_{P_r}$  et  $\vec{F}_{P_{atm}}$ , c'est-à-dire que  $C$  est donné par (cf. Fig. 3.11) :



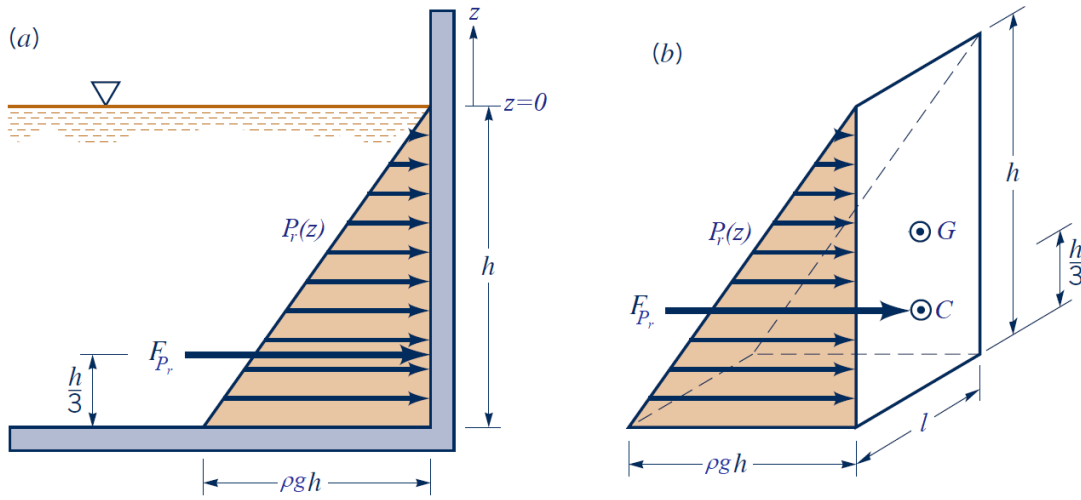


FIGURE 3.10 – Positions du centre géométrique  $G$  et du centre de poussée hydrostatique  $C$  sur une plaque plane verticale rectangulaire immergée dans un liquide (Figure adaptée de [10]).

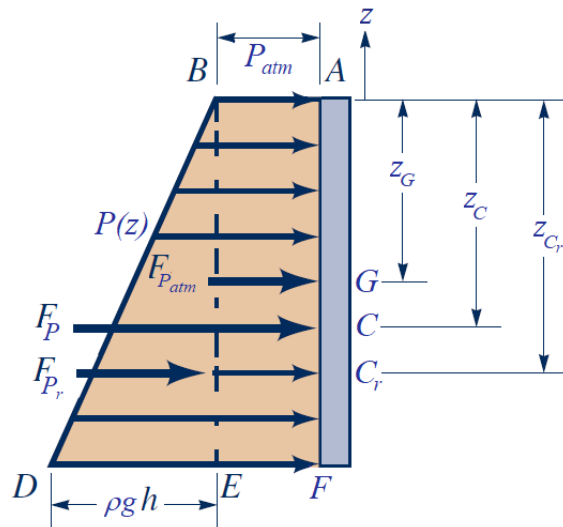


FIGURE 3.11 – Illustration de la décomposition des pressions sur une plaque plane verticale rectangulaire immergée dans un liquide pour le calcul du moment de la poussée absolue (totale) et de la position de son centre de poussée  $C$  ( $NB : C_r = h/3$  ce qui n'est pas respecté sur le schéma) (Figure adaptée de [10])

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F}_P &= \overrightarrow{OC_r} \wedge \vec{F}_{P_r} + \overrightarrow{OC_a} \wedge \vec{F}_{P_{atm}} \\
 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} \rho g h^2 l + P_{atm} l h \right) \overrightarrow{OC} \wedge \vec{n} &= \frac{1}{2} \rho g h^2 l \overrightarrow{OC_r} \wedge \vec{n} + P_{atm} l h \overrightarrow{OC_a} \wedge \vec{n} \\
 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} \rho g h^2 l + P_{atm} l h \right) z_C \vec{e}_z \wedge \vec{n} &= \frac{1}{2} \rho g h^2 l z_{C_r} \vec{e}_z \wedge \vec{n} + P_{atm} l h z_{C_a} \vec{e}_z \wedge \vec{n} \\
 \text{sur } -\vec{e}_y \Rightarrow \left( \frac{1}{2} \rho g h^2 l + P_{atm} l h \right) z_C &= \frac{1}{2} \rho g h^2 l \left( -\frac{2}{3} h \right) + P_{atm} l h \left( -\frac{1}{2} h \right) \\
 \div (lh) \Leftrightarrow \left( \frac{1}{2} \rho g h + P_{atm} \right) z_C &= -\frac{1}{3} \rho g h^2 - \frac{1}{2} P_{atm} h \\
 \Leftrightarrow z_C &= -\left( \frac{\frac{1}{3} \rho g h + \frac{1}{2} P_{atm}}{\frac{1}{2} \rho g h + P_{atm}} \right) h
 \end{aligned}$$

### 3.3.2 Pression d'un liquide sur une paroi courbe

On considère une surface  $S$  immergée dans un liquide dont la surface libre est à la pression atmosphérique.  $S$  est de forme quelconque dans le plan  $(O, x, z)$  et de dimension unité dans la direction  $(Oy)$  orthogonale au plan de la feuille (cf. Fig. 3.12). Le centre  $O$  du repère est au niveau de la surface libre du liquide et l'axe  $(O, z)$  est vertical dirigé vers le haut. La projection de  $S$  dans un plan vertical orthogonal à  $(Ox)$  est notée  $S_z$ . Elle est de hauteur  $L_z$  selon  $(Oz)$  de telle sorte que  $S_z = L_z \cdot 1$ . La projection de  $S$  dans un plan horizontal orthogonal à  $(Oz)$  est notée  $S_x$ . Elle est de longueur  $L_x$  selon  $(Ox)$  de telle sorte que  $S_x = L_x \cdot 1$ .  $G_x$  et  $G_z$  sont les centres géométriques de  $S_x$  et  $S_z$  respectivement. Le point bas,  $B$ , et le point haut,  $H$ , de la surface  $S$  ont des cotes  $z_B$  et  $z_H$  respectivement.

La poussée relative élémentaire exercée en tout point  $N$  de la surface  $S$  s'exprime par :

$$d\vec{F}_{P_r} = -\rho g z \vec{n} dS \quad (3.58)$$

Donc la poussée relative s'écrit :

$$\vec{F}_{P_r} = \iint_S -\rho g z \vec{n} dS = -\rho g \iint_S z \vec{n} dS \quad (3.59)$$

En notant  $\vec{F}_{P_r} = F_{P_r,x} \vec{e}_x + F_{P_r,z} \vec{e}_z$ , on a :

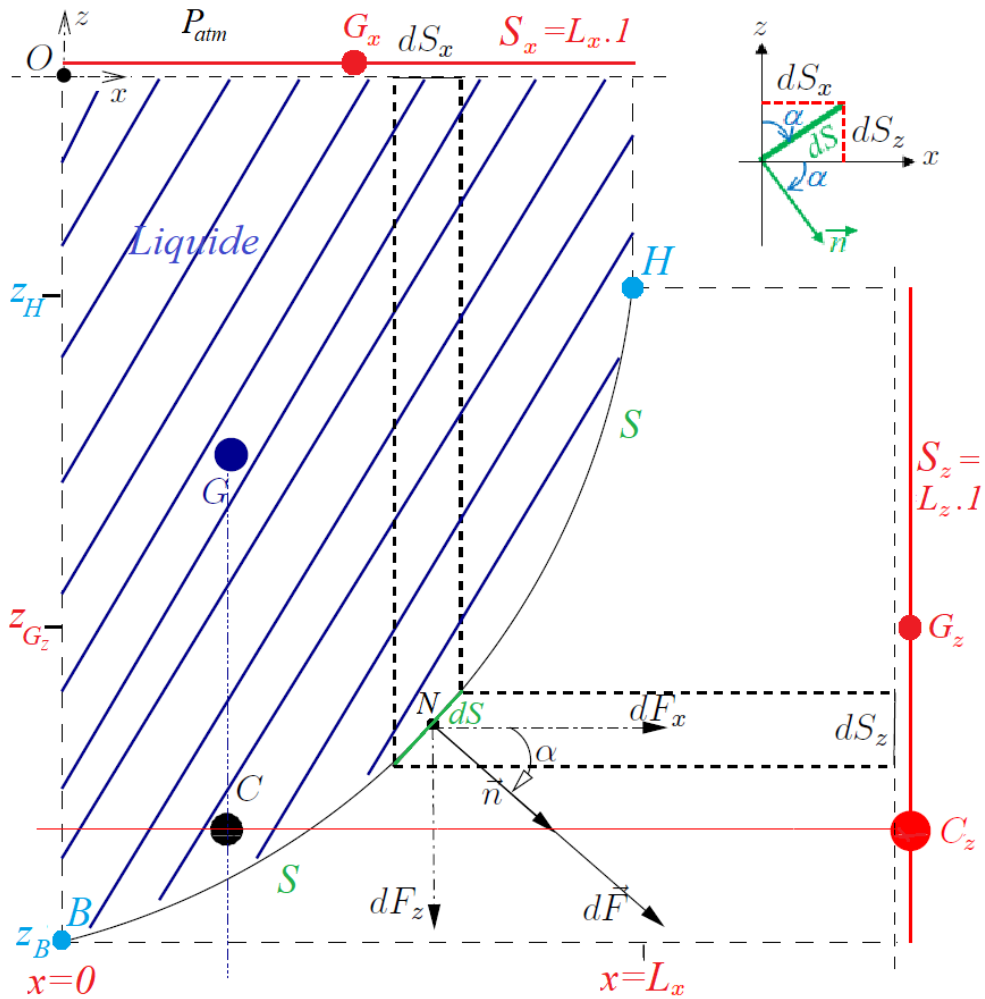


FIGURE 3.12 – Poussée selon  $Ox$  et  $Oz$  d'un liquide sur une surface courbe.

$$F_{P_r,x} = \vec{F}_{P_r} \cdot \vec{e}_x = -\rho g \iint_S z \cos \alpha dS = -\rho g \iint_S z dS_z \quad (3.60)$$

$$F_{P_r,z} = \vec{F}_{P_r} \cdot \vec{e}_z = -\rho g \iint_S z(-\sin \alpha) dS = \rho g \iint_S z dS_x \quad (3.61)$$

avec  $\alpha = (\widehat{\vec{e}_x, \vec{n}})$  (négatif sur le dessin),  $dS_x = dS \sin \alpha$ ,  $dS_z = dS \cos \alpha$ .

### Poussée relative dans la direction horizontale

D'après la définition (3.17) du centre géométrique d'une surface  $S$ , on a :

$$\iint_S z dS_z = \iint_{S_z} z dS_z = z_{G_z} \cdot S_z \quad (3.62)$$

où  $z_{G_z}$  est la cote du centre géométrique de  $S_z$  (cf. Fig. 3.12). Ceci se retrouve par (avec  $S_z = L_z \cdot 1$  et  $dS_z = dz \cdot 1$ ) :

$$\iint_S z dS_z = \int_{z=z_B}^{z_H} z dz = \frac{z_H^2 - z_B^2}{2} = \frac{z_H + z_B}{2} (z_H - z_B) = z_{G_z} \cdot L_z = z_{G_z} \cdot S_z \quad (3.63)$$

L'intensité de la poussée relative selon  $x$  (eq. (3.60)) s'écrit donc :

$$\boxed{F_{P_r,x} = -\rho g \iint_S z dS_z = -\rho g z_{G_z} S_z} \quad (3.64)$$

**Enoncé 3.2 (Poussée relative selon  $Ox$ )** Ainsi, l'intensité de la projection dans la direction horizontale  $Ox$  de la poussée relative,  $F_{P_r,x}$ , est égale à la poussée hydrostatique s'exerçant sur  $S_z$  à la cote  $z_{G_z}$  où  $S_z$  est la projection de la surface  $S$  sur un plan vertical et  $z_{G_z}$  est la cote du centre géométrique de  $S_z$ . L'origine des cotes est la position de la pression relative nulle. La direction de  $\vec{F}_{P_r,x}$  passe par le centre de poussée  $C_z$  de la surface plane verticale  $S_z$ . La position de  $C_z$  se calcule relativement au centre géométrique  $G_z$  de  $S_z$  (cf. Fig. 3.12), de la même manière qu'on a pu calculer la position du centre de poussée exercé par un liquide sur une surface plane inclinée, c'est-à-dire avec les éqs. (3.54), (3.56) et (3.57) avec  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $\sin \theta = 1$  :

$$x_{C_z} = \frac{I_{Gy}}{z_{G_z} \cdot S_z} \quad (3.65)$$

$$y_{C_z} = \frac{I_{xy}}{z_{G_z} \cdot S_z} \quad (3.66)$$

$$z_{C_z} = z_{G_z} + \frac{I_{Gy}}{z_{G_z} \cdot S_z} \quad (3.67)$$

### Remarque 3.6

1. La poussée relative selon  $Ox$  de l'éq. (3.64) est similaire à celle établie pour une surface plane (eq. (3.46));
2. Le résultat (3.64) établi pour une surface  $S$  quasi-2D (profondeur unité selon  $Oy$ ) et l'énoncé 3.2 s'appliquent de manière identique au calcul de la pression hydrostatique exercée horizontalement sur des surfaces de formes 3D totalement quelconques, ouvertes ou fermées (récipients contenant un liquide par exemple).

### Poussée relative dans la direction verticale

Dans l'éq. (3.61), l'intégrale se calcule par (avec  $S_x = L_x \cdot 1$  et  $dS_x = dx \cdot 1$ ) :

$$\iint_S z dS_x = \int_{x=0}^{L_x} z(x) dx \quad (3.68)$$

où  $z(x)$  est l'équation de la surface. Comme  $z(x)$  représente la distance entre la surface libre ( $z = 0$ ) et la surface  $S$  ( $z(x) < 0$ ), l'intégrale (3.68) représente l'opposé du volume  $\mathcal{V}_{0-z(x)} \geq 0$  de la colonne de liquide comprise entre la surface  $S$  et la surface libre. On peut le vérifier en prenant plusieurs exemples pour l'équation de la surface  $S$  de la Fig. 3.12 :

1. Si  $S$  est la surface horizontale  $S_x$  prise à la cote  $z_B$ , alors  $z(x) = z_B$  et on a :

$$\iint_S z dS_x = \int_{x=0}^{L_x} z_B dx = z_B L_x = z_B S_x = -\mathcal{V}_{0-z(x)} \quad (3.69)$$

2. Si  $S$  est la surface plane inclinée comprise entre les points  $B$  et  $H$  dans la Fig. 3.12, alors  $z(x) = z_B + \frac{L_z}{L_x} x$  et on a :

$$\iint_S z dS_x = \int_{x=0}^{L_x} \left( z_B + \frac{L_z}{L_x} x \right) dx = \left( z_B + \frac{L_z}{2} \right) L_x = z_{G_z} S_x = -\mathcal{V}_{0-z(x)} \quad (3.70)$$

3. Si  $S$  est la surface parabolique comprise entre les points  $B$  et  $H$  dans la Fig. 3.12, d'équation  $z(x) = z_B + \frac{L_z}{L_x^2} x^2$ , alors on a :

$$\iint_S z dS_x = \int_{x=0}^{L_x} (z_B + \frac{L_z}{L_x^2} x^2) dx = \left( z_B + \frac{L_z}{3} \right) L_x = -\mathcal{V}_{0-z(x)} \quad (3.71)$$

Ainsi, l'intensité de la poussée relative selon  $z$  (eq. (3.61)) s'écrit :

$$F_{P_r,z} = \rho g \iint_S z dS_x = -\rho g \mathcal{V}_{0-z(x)} \quad (3.72)$$

**Enoncé 3.3 (Poussée relative selon  $Oz$ )** *Ainsi, l'intensité de la projection dans la direction verticale  $Oz$  de la poussée relative,  $F_{P_r,z}$ , est égale, en valeur absolue, au poids de la colonne de liquide comprise entre la surface  $S$  et la cote où la pression relative est nulle (ici cela correspond à la surface libre et le volume de liquide correspond à la zone hachurée en bleu dans la Fig. 3.12). Le vecteur  $\vec{F}_{P_r,z}$  est donc dirigé vers le bas et passe par le centre de gravité  $G$  de cette colonne de liquide.*

### Remarque 3.7

1. Le résultat (3.72) établi pour une surface  $S$  quasi-2D et l'énoncé qui suit s'appliquent de manière identique au calcul de la pression hydrostatique exercée verticalement sur des surfaces de formes 3D totalement quelconques, ouvertes ou fermées (des récipients contenant un liquide par exemple) ;
2. Dans l'éq. (3.72) et l'énoncé 3.3, on prendra garde de toujours calculer le volume ou le poids de liquide compris entre la surface  $S$  et la cote où la pression relative est nulle (ici la surface libre à  $P_{atm}$ ) : ce volume peut-être totalement fictif et ne pas correspondre à un volume de liquide dans le problème réel.

### Poussée absolue

<sup>3</sup>En suivant l'éq. (3.41), pour déterminer la poussée absolue,  $\vec{F}_P$ , il faut ajouter à la pression relative,  $\vec{F}_{P_r}$ , la contribution de la pression de la surface libre (ici  $\vec{F}_{P_{atm}} = \iint_S P_{atm} \vec{n} dS$ ). Ce calcul a déjà été effectué aux eqs. (3.22) et (3.23). On obtient :

- 
3. Début de la séance de cours n°6

$$F_{P_{atm},x} = P_{atm} \int_S \vec{n} \cdot \vec{e}_x dS = P_{atm} \int_S \cos \alpha dS = P_{atm} \int_S dS_z = P_{atm} S_z \quad (3.73)$$

$$F_{P_{atm},z} = P_{atm} \int_S \vec{n} \cdot \vec{e}_z dS = P_{atm} \int_S -\sin \alpha dS = -P_{atm} \int_S dS_x = -P_{atm} S_x \quad (3.74)$$

Ainsi, d'après les eqs. (3.64) et (3.72)-(3.74), les composantes dans les directions  $(O, x)$  et  $(O, z)$  de la poussée absolue exercée par un liquide sur une paroi quelconque s'écrivent respectivement :

$$F_{P,x} = (P_{atm} - \rho g z_{G_z}) S_z \geq 0 \quad (3.75)$$

$$F_{P,z} = -(P_{atm} S_x + \rho g \mathcal{V}_{0-z(x)}) \leq 0 \quad (3.76)$$

### RÉSULTATS PRATIQUES :

#### Poussée sur les parois d'un récipient

**Enoncé 3.4 (Poussée horizontale sur les parois d'un récipient)** *Pour un fluide au repos contenu dans un récipient de forme quelconque, la résultante horizontale des forces de pression appliquées sur les parois est nulle.*

Ce résultat se démontre aisément : il suffit de couper la paroi du récipient en deux moitiés, selon la verticale, de telle sorte que le plan de coupe passe par la surface libre supérieure et le point le plus bas du récipient. Si on nomme  $S_1$  et  $S_2$  ces deux surfaces, d'après l'éq. (3.64), la poussée hydrostatique dans la direction horizontale sur la projection  $S_{z,1}$  de  $S_1$  est égale en intensité à la poussée horizontale sur la projection  $S_{z,2}$  de  $S_2$  car  $S_{z,1} = S_{z,2}$ . Mais  $S_1$  et  $S_2$  étant les surfaces opposées du même récipient, ces deux poussées sont de signe opposé et leur somme s'annule.

Par ailleurs, dans la continuité de ce qui a été établi à l'éq. (3.72), on a le résultat suivant dans un récipient :

**Enoncé 3.5 (Poussée relative verticale sur les parois d'un récipient)** *Pour un fluide au repos contenu dans un récipient de forme quelconque, la résultante verticale des forces de pression appliquées sur les parois est égale au poids du fluide contenu dans le récipient. Elle est appliquée au centre de gravité du fluide.*

Cela découle de la relation fondamentale de la statique des fluides appliquée au volume de fluide contenu dans le récipient. En effet, si le fluide est au repos, la somme du poids du fluide et de la poussée exercée par la paroi sur le fluide est nulle. Donc la poussée exercée par le fluide sur la paroi est égale au poids du fluide contenu dans le récipient.

**Centre de poussée sur une surface quelconque (cf. Fig. 3.12)**

**Enoncé 3.6 (Lignes d'action horizontale et verticale)**

- *La ligne d'action de la poussée horizontale est la droite horizontale passant par le centre de poussée  $C_z$  de la projection verticale  $S_z$  de  $S$ .*
- *La ligne d'action de la poussée verticale est la droite verticale passant par le centre de gravité  $G$  du volume  $\mathcal{V}_{0-z(x)}$  de fluide au-dessus de  $S$ .*

**Enoncé 3.7 (Centre de poussée  $C$ )** *Le centre de poussée  $C$  est à l'intersection de la ligne d'action horizontale passant par le centre de poussée  $C_z$  de  $S_z$  et de la ligne d'action verticale passant par le centre de gravité  $G$  du volume  $\mathcal{V}_{0-z(x)}$ .*

**Application :** Forces exercées sur les surfaces  $AB$  d'un récipient (cf. Fig. 3.13)

Dans la figure de gauche, la poussée verticale sur  $(A, B)$  correspond au poids de liquide contenu dans le volume hachuré en traits fins, conformément à l'éq. (3.72) et l'énoncé 3.3. La ligne d'action verticale passe par le centre de gravité  $G$  de ce volume hachuré.

Dans la figure de droite, la poussée horizontale sur  $(A, B)$  correspond à la poussée hydrostatique du liquide qui s'applique sur la projection de la surface  $(A, B)$  dans le plan vertical, conformément à l'éq. (3.64) et l'énoncé 3.2. La ligne d'action horizontale passe par le centre de poussée  $C$  de la surface projetée verticale.



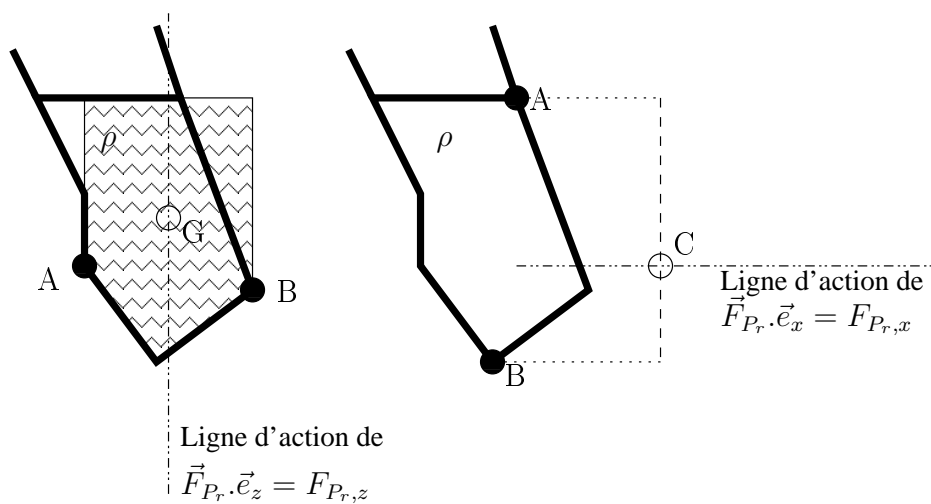


FIGURE 3.13 – Force exercée sur la surface  $AB$  d'un récipient contenant un liquide (le récipient et le niveau de liquide sont représentés par les lignes en gras).

## Chapitre 4

# Corps immergés ou partiellement immergés

### 4.1 Corps totalement immergés

#### 4.1.1 Théorème d'Archimède

Dans un domaine fluide au repos, de masse volumique  $\rho_f$ , on considère une surface fictive  $S$  délimitant un volume  $V$  de ce fluide. Le bilan des forces exercées sur  $(V, S)$  s'écrit :

- forces de pression sur  $S$  :  $\iint_S P \vec{n} dS$ , avec  $\vec{n}$  dirigé vers l'intérieur de  $S$  ;
- le poids du fluide contenu dans  $V$  :  $\vec{P}_f = - \iiint_V \rho_f g \vec{e}_z dV$

L'équilibre impose que la somme de ces forces est nulle :

$$\iint_S P \vec{n} dS - \iiint_V \rho_f g \vec{e}_z dV = 0 \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow \iint_S P \vec{n} dS = \iiint_V \rho_f g \vec{e}_z dV = -\vec{P}_f \quad (4.2)$$

Si on substitue le volume  $V$  de fluide par un corps solide, la poussée (la résultante des forces de pression) qu'exerce le fluide extérieur ne change pas. On appelle cette poussée la "poussée d'Archimède".

**Définition 4.1 (Poussée d'Archimède)** *La poussée d'Archimède, notée  $\vec{F}_A$ , est la poussée (la résultante des forces de pression) exercée par un fluide pesant sur un corps totalement ou partiellement immergé. Elle est définie par :*

$$\boxed{\vec{F}_A = \vec{F}_P = \iint_S P \vec{n} dS = -\vec{P}_f} \quad (4.3)$$

*Elle s'applique au centre de poussée  $C$  qui correspond au centre de gravité du volume de fluide pesant déplacé (centre géométrique du volume de fluide déplacé si  $\rho_f \vec{g} = c\vec{st}$ ) (cf. Fig. (4.1)).*

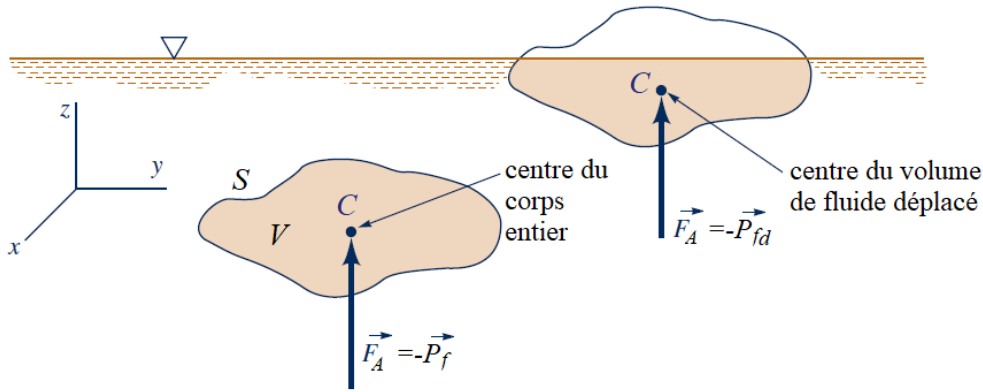


FIGURE 4.1 – Illustration de la poussée d'Archimède sur un corps partiellement ou totalement immergé :  $\vec{F}_A = -\vec{P}_f = -\rho_f V g \vec{e}_z$  (si  $\rho_f g = cste$ ) (adapté de [10]).

Le théorème d'Archimède traduit ce qui vient d'être établi :

**Enoncé 4.1 (Théorème d'Archimède)** *Un corps plongé dans un fluide pesant subit une poussée verticale, dirigée vers le haut, égale et directement opposée au poids du fluide déplacé. Le centre de poussée  $C$  est confondu avec le centre de gravité du fluide déplacé.*

**Remarque 4.1** *Pour que la poussée d'Archimède  $\vec{F}_A$  qui s'exerce sur un corps volumique soit non nulle, il faut nécessairement que la répartition de pression exercée par le fluide sur le corps soit non uniforme, autrement dit, il faut que le fluide soit pesant. En effet, on sait que si la pression sur la surface fermée  $S$  qui entoure un corps est constante, la poussée est nulle car l'intégrale des normales  $\vec{n}$  sur une surface fermée est nulle :*

$$\vec{F}_P = \iint_S P \vec{n} dS = P \iint_S \vec{n} dS = 0 \quad \stackrel{\text{eq (4.3)}}{\Leftrightarrow} \quad \vec{F}_A = -\vec{P}_f = 0 \quad (4.4)$$

Ainsi, pour calculer la poussée d'Archimède qui s'exerce sur une montgolfière, on ne peut plus faire l'hypothèse que la pression de l'air est constante (cf. Fig. 4.2) : les hauteurs d'air mises en jeu génèrent des fluctuations de pression non négligeables entre le sommet de la montgolfière et sa nacelle.

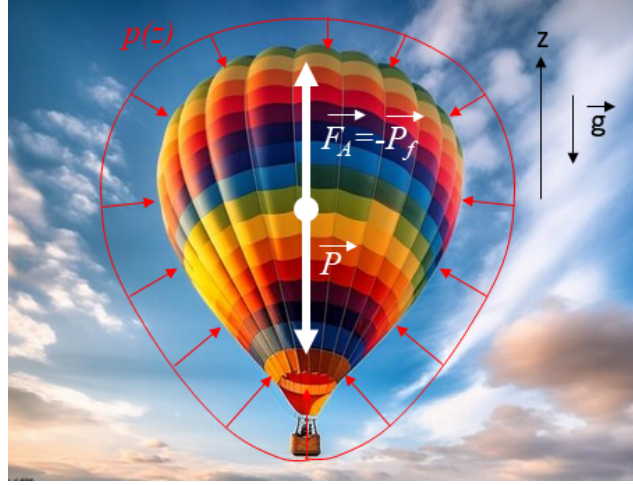


FIGURE 4.2 – Illustration de la force d'Archimède sur un corps partiellement ou totalement immergé :  $\vec{F}_A = -\vec{P}_f = -\rho_f V g \vec{e}_z$  si  $\rho_f g = \text{cste}$ .

**Application :** Quelle est la poussée d'Archimède  $\vec{F}_A$  qu'exerce l'air ( $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg/m}^3$ ) sur un ballon sonde sphérique de diamètre  $D = 5 \text{ m}$ , de masse  $m_b = 20 \text{ kg}$ , gonflé à l'hélium ( $\rho_{\text{He}} = 0,18 \text{ kg/m}^3$ ) et quelle charge utile  $m_{cu} [\text{kg}]$  peut-il emporter ?

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= -\vec{P}_{\text{air}} = \iiint_V \rho_{\text{air}} g \vec{e}_z dV = \rho_{\text{air}} g \frac{4\pi D^3}{3} \vec{e}_z \\ \vec{P}_{\text{He}} &= \iiint_V -\rho_{\text{He}} g \vec{e}_z dV = -\rho_{\text{He}} g \frac{4\pi D^3}{3} \vec{e}_z \\ \vec{P}_b &= -m_b g \vec{e}_z \\ \vec{P}_{cu} &= -m_{cu} g \vec{e}_z\end{aligned}$$

De plus, l'équilibre des forces exercées sur le ballon sonde s'écrit :

$$\vec{F}_A + \vec{P}_{\text{He}} + \vec{P}_b + \vec{P}_{cu} = \vec{0}$$

On obtient donc les intensités des forces suivantes :  $F_A \approx 835 \text{ N}$ ,  $P_{\text{He}} \approx 115 \text{ N}$ ,  $P_b \approx 200 \text{ N}$  et le poids utile embarqué est environ égal à  $P_{cu} = 835 - 115 - 200 \approx 520 \text{ N}$ . On en déduit que la charge utile est environ égale à :  $m_{cu} = \frac{P_{cu}}{g} \approx 50 \text{ kg}$ .

### 4.1.2 Stabilité de corps immergés

Soit un corps immergé incompressible de poids  $\vec{P}$  qui subit une poussée d'Archimède  $\vec{F}_A = -\vec{P}_f$ . Soit  $G_0$  la position du centre de gravité du corps lorsqu'il est à l'équilibre stable et soit  $G$  cette position lorsque le corps est déplacé hors de l'équilibre. On note  $\theta = (\widehat{CG_0}, \widehat{CG})$  l'angle entre la position courante du corps et sa position d'équilibre (cf. Fig. 4.3). Soit  $a$  la distance entre le centre de poussée d'Archimède  $C$  et le centre de gravité  $G$  du corps immergé et soit  $d = a \sin \theta$  la distance la plus courte entre la ligne d'action de  $\vec{P}$  et celle de  $\vec{F}_A = -\vec{P}_f$ .

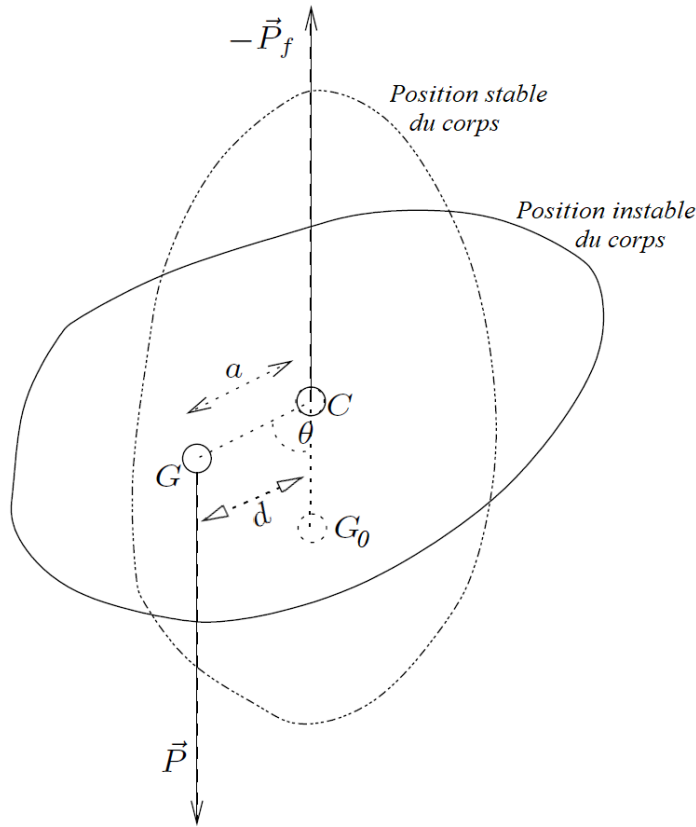


FIGURE 4.3 – Stabilité d'un corps immergé.

Alors la somme des moments par rapport au centre de poussée  $C$  des deux forces qui agissent sur le corps se résume au seul moment du poids  $\vec{P}$  puisque le moment de la force de poussée d'Archimède par rapport à  $C$  est nul :  $\mathcal{M}_C(\vec{F}_A) = \mathcal{M}_C(-\vec{P}_f) = 0$ . Pour obtenir l'équilibre, le moment du poids doit être nul :

$$\mathcal{M}_C(\vec{P}) = P.d = P.a \sin \theta = 0$$

c'est-à-dire que soit  $\theta = 0$ , soit  $\theta = \pi$ . Si le centre de gravité  $G$  est en-dessous du centre de poussée  $C$  (si  $\theta$  est proche de  $\theta = 0$ ), le couple  $\mathcal{M}_C(\vec{P})$  tend à ramener

le corps à l'équilibre : l'équilibre est dit stable. Dans le cas contraire, si  $G$  est au-dessus de  $C$  (si  $\theta$  est proche de  $\theta = \pi$ ), l'équilibre du corps est instable. Si  $G \equiv C$  l'équilibre est indifférent. Les situations stables et instables pour un corps immergé sont illustrées dans la Fig. 4.4.

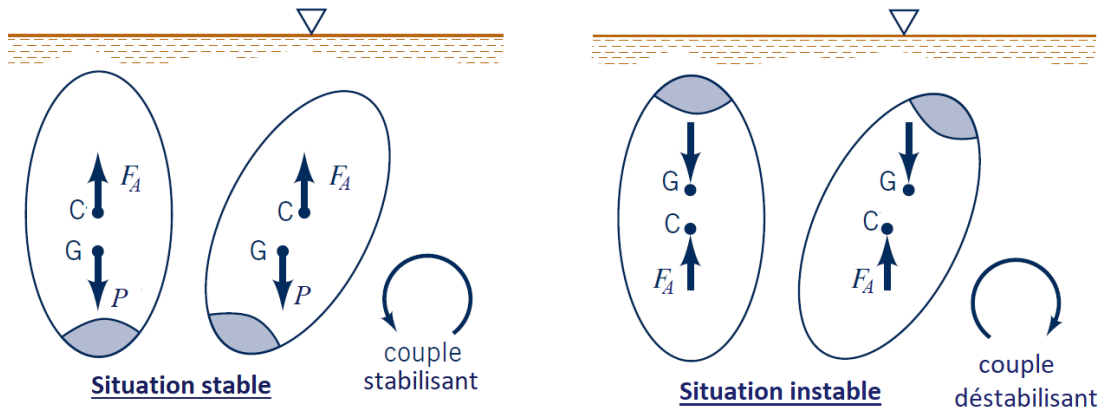


FIGURE 4.4 – Situations stables et instables pour un corps immergé. Ici on considère un corps creux lesté (zone en gris) (adapté de [10]).

### 4.1.3 Influence de la compressibilité

L'influence de la compressibilité du corps immergé modifie la condition de stabilité. Si, d'une position d'équilibre, le corps est déplacé vers le bas alors :

1. la pression augmente,
2. le volume du corps décroît,
3. la poussée d'Archimède qu'exerce le fluide sur le corps diminue,
4. et le corps continue sa descente.

## 4.2 Stabilité de corps flottants

<sup>1</sup>Pour les corps flottants, le principe d'Archimède s'applique encore. Le centre de poussée  $C$  est le centre de gravité de la partie immergée. Les situations stables et instables pour un corps flottant sont illustrées dans les Figs. 4.5 et 4.6.

1. Fin du cours ici : la suite n'a pas été traitée et ne fera pas l'objet de questions à l'examen

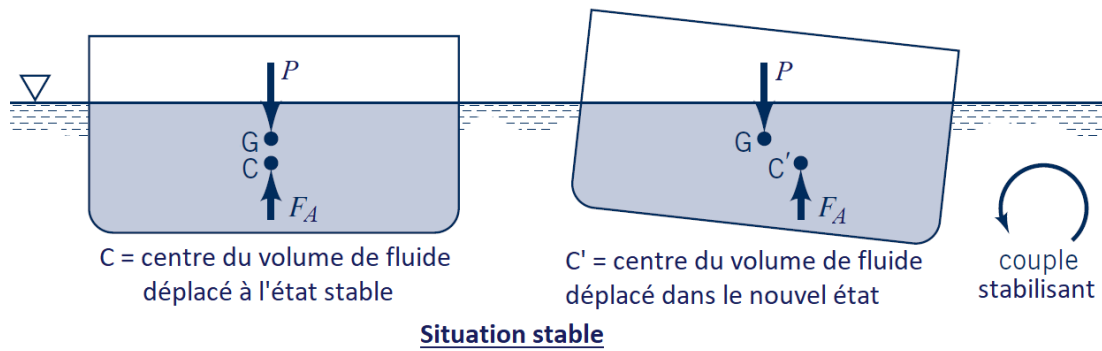


FIGURE 4.5 – Situation stable pour un corps flottant (adapté de [10]).

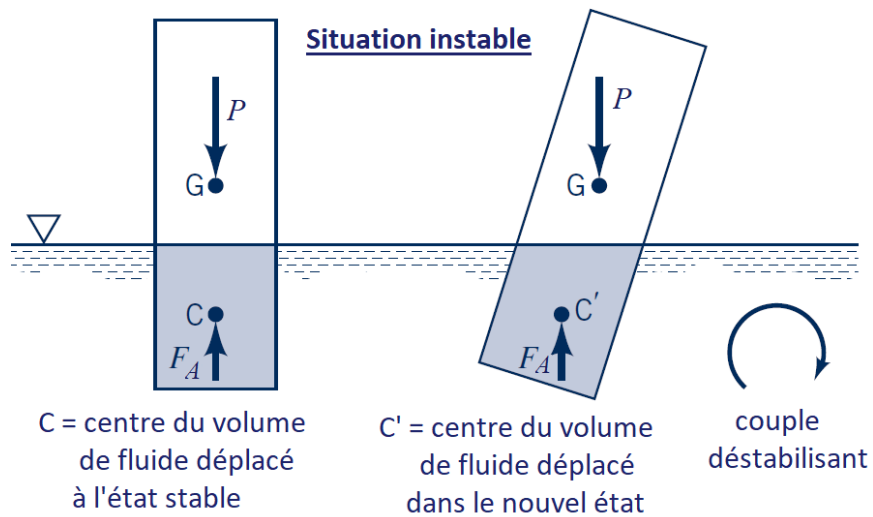


FIGURE 4.6 – Situation instable pour un corps flottant (adapté de [10]).

### 4.2.1 Définitions

**Définition 4.2 (Flotteur)** *On appelle flotteur un solide de forme quelconque en équilibre dans un liquide.*

**Définition 4.3 (Flottaison)** *Le plan de flottaison est le plan de la surface libre du liquide.*

*Ce plan coupe le flotteur suivant une surface appelée flottaison dont le contour est la ligne de flottaison.*

*La surface de flottaison est constituée par l'ensemble des lignes de flottaison lors d'un mouvement de carène.*

**Définition 4.4 (Carène)** *C'est le volume immergé du flotteur (cf. Fig. 4.7). Les flottaisons limitant des carènes de même volume sont dites isocarènes.*

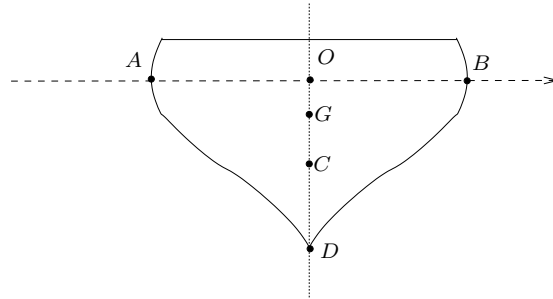


FIGURE 4.7 – Carène à l'équilibre.

**Remarque 4.2** *Bien que la poussée du liquide passe par le centre de gravité du volume de la carène, il ne doit pas être considéré comme le point d'application de la poussée lors de déplacements isocarènes.*

### 4.2.2 Stabilité de l'équilibre

Soit  $\theta$  un petit angle d'inclinaison autour de l'axe longitudinal de la carène de volume  $V$ . Le centre de poussée de la carène passe de  $C$  à  $C'$ . La ligne d'action de la poussée (verticale) rencontre l'axe de symétrie passant par le centre de gravité de la flottaison  $O$  au point  $M$ , appelé **métacentre**. Le métacentre est le point d'application de la poussée (cf. Fig. 4.8).



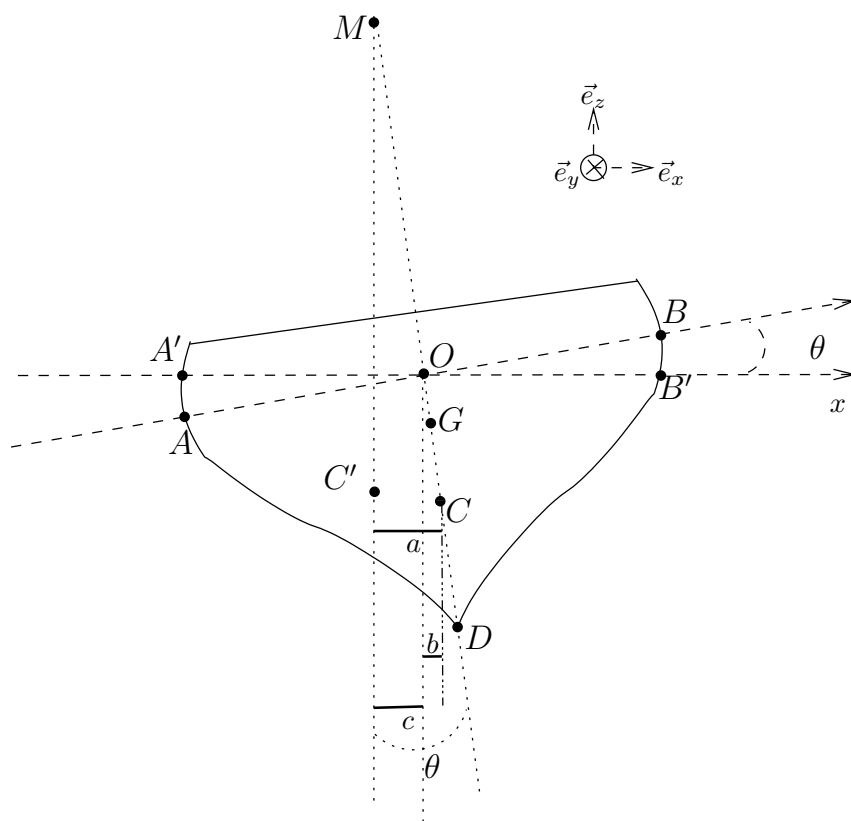


FIGURE 4.8 – Carène déplacée de l'équilibre d'un angle  $\theta$ .

Écrivons l'équilibre des moments des poussées par rapport à la droite  $(Oy)$  passant par le centre de gravité de la flottaison  $O$  :

$$\vec{M}_{P_{A'B'D}/Oy} = \vec{M}_{((P_{ABD})+(P_{OAA'})-(P_{OBB'}))/Oy} = \vec{M}_{P_{ABD}/Oy} + \vec{M}_{P_{OAA'}/Oy} - \vec{M}_{P_{OBB'}/Oy}$$

avec

$$\begin{aligned} - \vec{M}_{P_{A'B'D}/Oy} &= (-c\vec{e}_x) \wedge (\rho g V \vec{e}_z) = -\rho g V c (\vec{e}_x) \wedge (\vec{e}_z) = \rho g V c \vec{e}_y \\ - \vec{M}_{P_{ABD}/Oy} &= (b\vec{e}_x) \wedge (\rho g V \vec{e}_z) = \rho g V b (\vec{e}_x) \wedge (\vec{e}_z) = -\rho g V b \vec{e}_y \\ - \vec{M}_{P_{OAA'}/Oy} &= \int_{V(OAA')} (x\vec{e}_x) \wedge (\rho g dV \vec{e}_z) \end{aligned}$$

Lorsque  $x$  varie de  $A'$  à  $O$ , les coordonnées  $x$  et  $z$  sont négatives :  $z = x \tan \theta$ .

$$\begin{aligned} \vec{M}_{P_{OAA'}/Oy} &= \rho g \int_{S(OA')} \int_{z=x \tan \theta}^0 x \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z dz dS \\ &= \rho g \int_{S(OA')} x (-x \tan \theta) \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z dS \\ &= \rho g \int_{S(OA')} x (-x \tan \theta) (-\vec{e}_y) dS \end{aligned}$$

Pour de petits déplacements ( $\tan \theta \approx \theta$ ) :

$$\vec{M}_{P_{OAA'}/Oy} = \rho g \int_{S(OA')} x^2 \theta dS \vec{e}_y$$

$$- \vec{M}_{P_{OBB'}/Oy} = \int_{V(OBB')} (x\vec{e}_x) \wedge (\rho g dV \vec{e}_z)$$

En suivant la même démarche que précédemment :

$$\vec{M}_{P_{OBB'}/Oy} = -\rho g \int_{S(OB')} x^2 \theta dS \vec{e}_y$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{P_{A'B'D}/Oy} &= \vec{M}_{P_{ABD}/O} + \vec{M}_{P_{OAA'}/O} - \vec{M}_{P_{OBB'}/O} \\ \rho g V c \vec{e}_y &= \left[ -\rho g V b + \rho g \int_{S(OA')} x^2 \theta dS + \rho g \int_{S(OB')} x^2 \theta dS \right] \vec{e}_y \end{aligned}$$

soit

$$V(c + b) = \theta \left[ \int_{S(OA')} x^2 dS + \int_{S(OB')} x^2 dS \right]$$

Or  $O$  est le centre de gravité du plan de flottaison d'où  $S(OA') = S(OB')$ . En notant  $S(OA') + S(OB') = S$  alors

$$\begin{aligned} V(c+b) &= \theta \iint_S x^2 dS \\ V \times a &= \theta I_{Oy} \end{aligned}$$

avec  $a = b + c$  et  $I_{Oy}$  le moment d'inertie du plan de flottaison par rapport à  $(Oy)$ . Pour un petit angle d'inclinaison,  $a \approx \overline{CM} \cdot \theta$ ,

$$\overline{CM} = \frac{I_{Oy}}{V}$$

**La stabilité est assurée si le métacentre est situé au-dessus du centre de gravité  $G$ .**

Le couple de rappel est  $\mathcal{M}_M = P \times GM \times \sin \theta$  avec  $GM$  la hauteur métacentrique.

# Table des figures

1.1	Exemples d'écoulements de liquides complexes : (a) balle de Silly-putty s'écoulant comme un fluide pour un temps long de sollicitation (haut) et rebondissant comme une balle élastique pour un temps court de sollicitation (bas) ; (b) effet Weissenberg présentant la remontée d'un liquide viscoélastique le long d'une tige en rotation ; (c) écoulement vertical d'un liquide visco-élastique qui se love comme une corde (d) détente élastique d'un liquide viscoélastique versé d'un récipient qui, lorsqu'il est coupé avec des ciseaux, remonte seul dans le récipient ; (e) glacier Barnard en Alaska photographié en 1957 ... solide ou liquide ? (Figures tirées de [1,7]) . . . . .	2
1.2	A gauche : les quatre états de la matière [ <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10242232">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10242232</a> ]. A droite : diagramme de phase pression-température du dioxyde de carbone, $CO_2$ , montrant le point triple et le point critique, au delà duquel apparait le domaine fluide supercritique [Ben Finney, Mark Jacobs, <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17910244">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17910244</a> ]. . . . .	3
1.3	Evolution de la masse volumique pour un volume $V$ de fluide, en fonction de la taille de $V$ . Des fluctuations sont observées aux échelles macroscopique et microscopique alors que cette grandeur reste constante aux échelles intermédiaires (échelle mésoscopique) : cela définit la masse volumique $\rho$ locale à l'échelle du milieu continu (tiré de [2]). . . . .	5
1.4	Illustration de la pression résultant de la variation de la quantité de mouvement des particules d'un gaz lors de leur interaction avec les parois d'un récipient [Becarlson, <a href="http://www.becarlson.com/">http://www.becarlson.com/</a> , <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14728470">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=14728470</a> ]. . . . .	7
1.5	Illustration de l'augmentation de la pression lorsqu'on s'enfonce dans une colonne d'eau [Mpfiz, <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4520859">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4520859</a> ]. . . . .	8

1.6	Evolution de la pression hydrostatique le long d'une conduite d'eau : elle diminue le long de l'écoulement sous l'effet des pertes de charge (frottements visqueux). . . . .	9
1.7	Décomposition de la force $d\vec{F}_{1,2}$ exercée par le domaine fluide $D_1$ sur le domaine fluide ou solide $D_2$ , sur un élément de surface $dS$ de l'interface $S$ entre $D_1$ et $D_2$ . . . . .	10
1.8	Equilibre des forces sur un prisme fluide de taille infinitésimale. . . .	10
1.9	Représentation des pressions absolue, relative (par rapport à la pression atmosphérique) et différentielle . . . . .	12
1.10	Bras de levier et bras de levier efficace. . . . .	17
1.11	Equilibre des moments des forces (poids) sur une balançoire. . . . .	18
1.12	Efficacité des moments appliqués sur une clef à molette pour différentes directions d'application d'une force d'intensité constante. . . . .	19
1.13	Décomposition des forces et distances nécessaires au calcul du moment autour du point $O$ de la force $\vec{F}_M$ appliquée en $M$ sur le bras de levier $(OM)$ . . . . .	20
2.1	Répartition des pressions et force volumique sur une particule fluide de volume $dV = dxdydz$ . . . . .	23
2.2	Manomètre hydrostatique en forme de U. . . . .	26
2.3	Surfaces libres dans le même plan horizontal entre vases communicants [Werneuchen, <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3777743">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3777743</a> ].	27
2.4	Illustration de l'expérience du crève-tonneau de Pascal [Amédée Guillemin, The forces of nature : a popular introduction to the study of physical phenomena p. 69., <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18259522">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18259522</a> et <a href="https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15631706">https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15631706</a> ].	28
2.5	Presse hydraulique. . . . .	28
2.6	Représentation de la différentielle $df(x)$ d'une fonction scalaire . . . .	32
2.7	Représentation du gradient $\vec{grad}f$ d'une fonction scalaire . . . . .	33
2.8	Sens du gradient de pression. . . . .	34

3.1	Notations utilisées dans les définitions des centres de gravité et de poussée	38
3.2	Poussée d'un gaz selon $Ox$ et $Oz$ et centre de poussée $C$ sur une paroi courbe. . . . .	43
3.3	Ligne d'action de la poussée d'un gaz sur une paroi courbe. . . . .	46
3.4	Dimensions et notations pour la conduite sous pression. . . . .	46
3.5	Répartition de la pression relative, $P_r(z) = P(z) - P_{atm} = -\rho g z$ , sur les parois d'un récipient contenant un liquide. A gauche, sur la paroi basse, la résultante de la poussée relative est verticale dirigée vers le bas. A droite, cette résultante sur les parois verticales est nulle car la poussée sur la paroi droite est horizontale mais égale en intensité et de sens opposé à la résultante sur la paroi gauche (Figure adaptée de [10]).	49
3.6	Pression sur une plaque plane immergée dans un liquide. . . . .	51
3.7	Forces exercées sur le fond de surface $S$ de trois récipients. . . . .	52
3.8	Pression sur une plaque plane verticale rectangulaire immergée dans un liquide. . . . .	53
3.9	Moments d'inertie et centre de gravité de surfaces simples. . . . .	57
3.10	Positions du centre géométrique $G$ et du centre de poussée hydrostatique $C$ sur une plaque plane verticale rectangulaire immergée dans un liquide (Figure adaptée de [10]). . . . .	58
3.11	Illustration de la décomposition des pressions sur une plaque plane verticale rectangulaire immergée dans un liquide pour le calcul du moment de la poussée absolue (totale) et de la position de son centre de poussée $C$ ( $NB : C_r = h/3$ ce qui n'est pas respecté sur le schéma) (Figure adaptée de [10]) . . . . .	58
3.12	Poussée selon $Ox$ et $Oz$ d'un liquide sur une surface courbe. . . . .	60
3.13	Force exercée sur la surface $AB$ d'un récipient contenant un liquide (le récipient et le niveau de liquide sont représentés par les lignes en gras).	66
4.1	Illustration de la poussée d'Archimède sur un corps partiellement ou totalement immergé : $\vec{F}_A = -\vec{P}_f = -\rho_f V g \vec{e}_z$ (si $\rho_f g = cste$ ) (adapté de [10]). . . . .	68
4.2	Illustration de la force d'Archimède sur un corps partiellement ou totalement immergé : $\vec{F}_A = -\vec{P}_f = -\rho_f V g \vec{e}_z$ si $\rho_f g = cste$ . . . . .	69

4.3	Stabilité d'un corps immergé. . . . .	70
4.4	Situations stables et instables pour un corps immergé. Ici on considère un corps creux lesté (zone en gris) (adapté de [10]). . . . .	71
4.5	Situation stable pour un corps flottant (adapté de [10]). . . . .	72
4.6	Situation instable pour un corps flottant (adapté de [10]). . . . .	72
4.7	Carène à l'équilibre. . . . .	73
4.8	Carène déplacée de l'équilibre d'un angle $\theta$ . . . . .	74