

NOM :

Prénom :

Groupe de TD :

Exercice 1 : Algèbre de Boole

4 points

Simplifier algébriquement l'expression suivante :

$$(a) (A + C) \cdot (A + \bar{B}) + \overline{(0 + B) \cdot (1 + \bar{C})}$$

$$(a) (A + C) \cdot (A + \bar{B}) + \overline{(0 + B) \cdot (1 + \bar{C})} = A + \bar{B} \cdot C + \bar{B} = A + \bar{B}$$

2 points

Démontrer l'égalité suivante :

$$(b) (\bar{A} \oplus B) \oplus A = \bar{B}$$

$$(\bar{A} \oplus B) \oplus A = (\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B) \oplus A = (\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B) \cdot A + (\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B) \cdot \bar{A} = (A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) \cdot A + (\bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B) \cdot \bar{A} = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B}$$

2 points

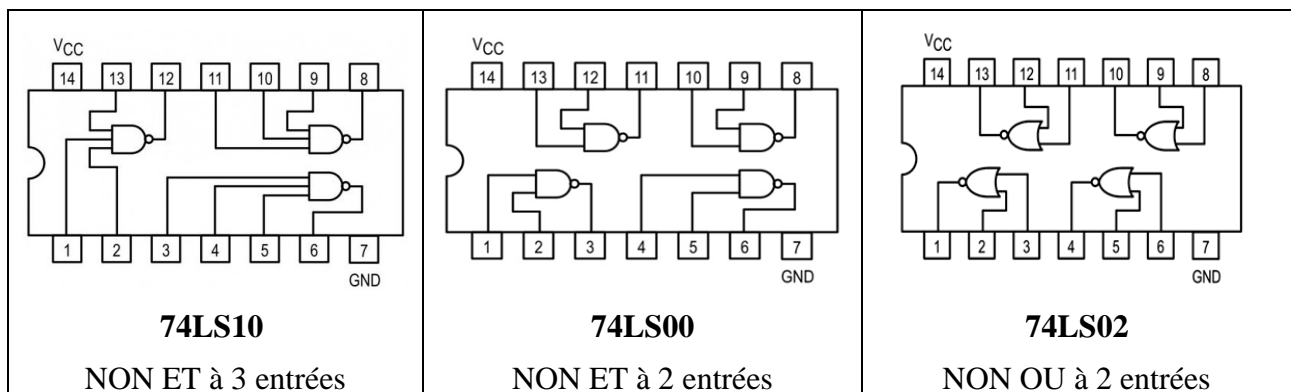
Exercice 2 : Universalité de la porte NON ET et NON OU

4,5 points

On considère l'expression logique simplifiée suivante :

$$S = A \cdot B \cdot C$$

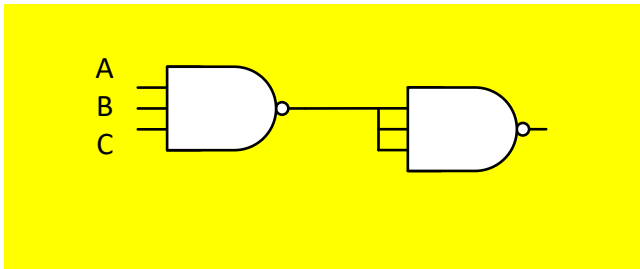
Pour la réalisation de cette expression, nous avons à disposition trois types de circuit intégré présentés dans le tableau ci-dessous :



(a) Dessiner le logigramme de la fonction logique S avec uniquement des portes NON ET à 3 entrées.

1 point

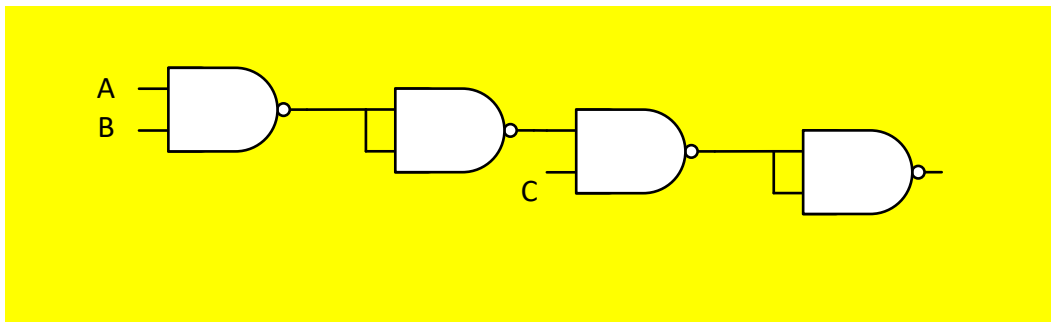
$$S = \overline{\overline{A \cdot B \cdot C}}$$



(b) Combien de circuits intégrés 74LS10 sont nécessaires pour réaliser cette fonction ? **0,5 point**
2 portes NON ET à 3 entrées → 1 CI 74LS10

(c) Dessiner le logigramme de la fonction logique S avec uniquement des portes NON ET à 2 entrées. **1 point**

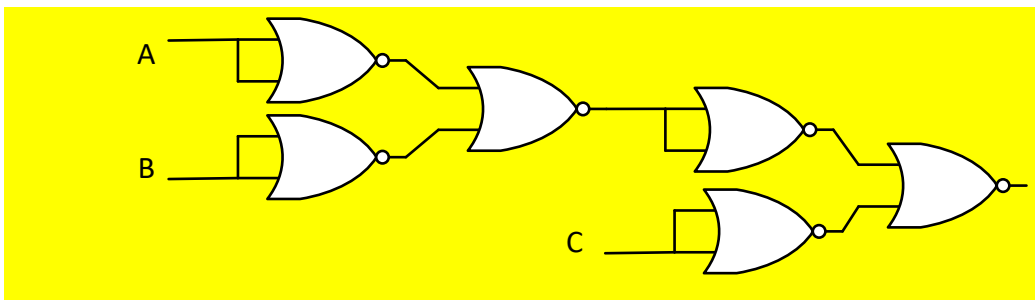
$$S = \overline{\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C}}$$



(d) Combien de circuits intégrés 74LS00 sont nécessaires pour réaliser cette fonction ? **0,5 point**
4 portes NON ET à 2 entrées → 1 CI 74LS00

(e) Dessiner le logigramme de la fonction logique S avec uniquement des portes NON OU à 2 entrées. **1 point**

$$S = \overline{\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}} = \overline{(\overline{\overline{A} + \overline{B}}) + \overline{C}}$$



(f) Combien de circuits intégrés 74LS02 sont nécessaires pour réaliser cette fonction ? **0,5 point**
6 portes NON OU donc 2 circuits 74LS02

Exercice 3 : Tableau de Karnaugh

4 points

On donne la table de vérité suivante de la fonction logique $F(A, B, C, D)$.

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

- a. Construire le tableau de Karnaugh correspondant à la fonction F et faire les regroupements nécessaires en utilisant tous les « 1 ».

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

Tableau 1 point

Regroupements 1,5 points (soit 0,5 point par regroupement)

- b. Extraire l'expression simplifiée de F.

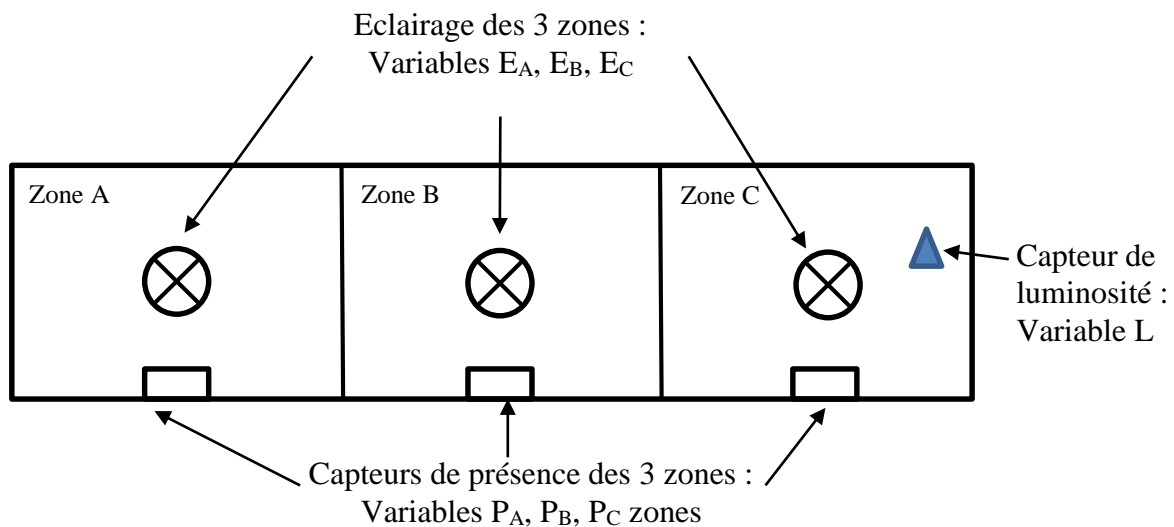
$$F = \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{D}$$

1,5 points (0,5 point par terme)

Exercice 4 : Synthèse d'un circuit combinatoire

7,5 points

On considère une solution domotique permettant de gérer l'éclairage dans un long couloir présenté sur la figure ci-dessous. Ce couloir est divisé en trois zones pour l'éclairage, appelées zones A, B et C. L'éclairage électrique de ces zones est géré par 3 variables booléennes E_A , E_B et E_C prenant la valeur « 0 » lorsque l'éclairage est éteint et « 1 » lorsqu'il est allumé.



La décision relative à l'état de l'éclairage dans chaque zone dépend d'une part de la luminosité ambiante et d'autre part de la présence d'une personne dans le couloir. Un capteur de luminosité est ainsi placé dans le couloir. Lorsque la luminosité est supérieure à un seuil fixé, les lampes restent toutes éteintes (même en présence d'une personne). La réponse du capteur de luminosité est représentée par la variable booléenne L : elle est égale à « 1 » au-dessus du seuil, et « 0 » en dessous.

Dans le cas où l'ambiance est sombre ($L = 0$), les lampes dans les 3 zones s'allument en présence d'une personne. Trois détecteurs de présence associés à chacune des 3 zones sont pour cela utilisés. Lorsqu'une présence est détectée dans la zone A, la variable P_A prend la valeur « 1 », dans la zone B, P_B prend la valeur « 1 », et dans la zone C, P_C prend la valeur « 1 ». Ces variables sont nulles dans les autres cas.

Dans une ambiance sombre ($L = 0$), l'éclairage s'allume suivant les conditions suivantes :

- Lorsque le capteur détecte une présence dans la zone A ($P_A = 1$), alors les éclairages s'allument dans les zones A et B.
- Lorsque le capteur détecte une présence dans la zone B ($P_B = 1$), alors les éclairages s'allument dans les zones A, B et C.
- Lorsque le capteur détecte une présence dans la zone C ($P_C = 1$), alors les éclairages s'allument dans les zones B et C.

On notera qu'en présence de plusieurs personnes, des présences peuvent être détectées simultanément dans plusieurs zones.

Partie 1 - Dans un premier temps, on considère que l'environnement est sombre ($L = 0$).

- a. Compléter dans ce cas la table de vérité de fonctionnement du système d'éclairage avec l'état des sorties E_A , E_B et E_C en respectant les règles énoncées ci-dessus. **1,5 points**

P_A	P_B	P_C	E_A	E_B	E_C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

- b. Déterminer alors la forme canonique disjonctive de la variable E_A d'après la table de vérité (sans tenir compte de la variable L). **1 point**

Pour $L=0$, $E_A = \overline{P_A} \cdot P_B \cdot \overline{P_C} + \overline{P_A} \cdot P_B \cdot P_C + P_A \cdot \overline{P_B} \cdot \overline{P_C} + P_A \cdot \overline{P_B} \cdot P_C + P_A \cdot P_B \cdot \overline{P_C} + P_A \cdot P_B \cdot P_C$

- c. Déterminer l'expression simplifiée minimale de la variable E_A en utilisant la méthode de votre choix (règles de l'algèbre de Boole ou tableau de Karnaugh). **1,5 points (dont 0,5 pour tableau sans regroupements)**

$P_A \setminus P_B P_C$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	1	1

$$E_A = P_A + P_B$$

- d. Déterminer les expressions simplifiées minimales des variables E_B et E_C en utilisant la méthode de votre choix (règles de l'algèbre de Boole ou tableau de Karnaugh). **1 point**

$$E_B = P_A + P_B + P_C$$

$$E_C = P_B + P_C$$

Partie 2 - On tient maintenant compte de la variable de luminosité L .

- e. Quelle est l'expression de E_A lorsque $L = 1$? En déduire l'expression de E_A en fonction des 4 variables d'entrée P_A , P_B , P_C et L (on utilisera l'expression minimale déterminée précédemment).

Si $L = 1$ alors $E_A = 0$, les lampes restent éteintes.

0,5 point

$$E_A = \bar{L} \cdot (P_A + P_B)$$

1 point

- f. Dessiner le logigramme correspondant à l'expression simplifiée de la variable E_A au moyen de portes logiques à deux entrées. 1 point

