CHAPITRE 2 : CINEMATIQUE CARTÉSIENNE

UN PEU DE CINÉMATIQUE OU COMMENT DÉCRIRE UN MOUVEMENT EN MÉCANIQUE

Préambule

1. **De quoi avons-nous besoin?**
2. **Choisir un référentiel**
3. **Repérer un point : le vecteur position**
4. **La position varie : connaitre le vecteur vitesse**
5. **La vitesse varie : connaitre le vecteur accélération**
6. **Connaitre la position à partir de ses dérivées**
7. **Quelques caractéristiques remarquables des mouvements simples**
8. **Un mot sur la dérivation et l'intégration**
9. **Définir les moyennes de la vitesse et de l'accélération**

Préambule

La **mécanique** est la science expérimentale qui vise à **décrire les mouvements**, les déformations et les états d'équilibre de différentes sortes **de corps qui évoluent selon certaines lois dans un espace vide à 3D, homogène et isotrope dans lequel un temps absolu s'écoule toujours dans le même sens**.

Nous allons continuer à explorer certains aspects du mouvement ou des équilibres (trajectoire, vitesse, durée, …) des corps soumis ou non à des forces extérieures (forces newtoniennes, frottements, tension,…) ***dans des référentiels galiléens***.

Nous restons dans le cadre de la ***mécanique newtonienne*** : ni trop vite (sinon relativité restreinte), ni trop petit (sinon φ quantique), ni trop massif (sinon relativité générale).

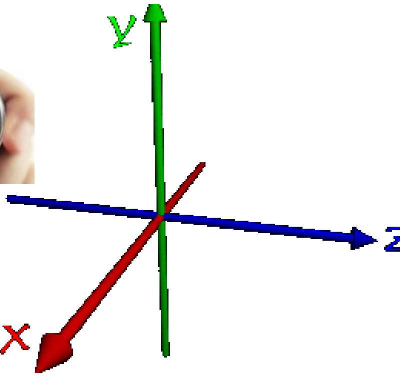
1. De quoi avons-nous besoin?

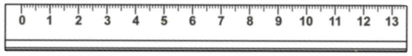
Pour étudier le mouvement d'un corps (système) , il faut tout d'abord :

- **Définir le corps** (système) étudié (que l'on notera entre accolades),
- **Choisir le référentiel** d'étude, un objet par rapport auquel on étudie le mouvement :
    - cet objet est équipé d'un **repère**,
    - et d'un **chronomètre**).

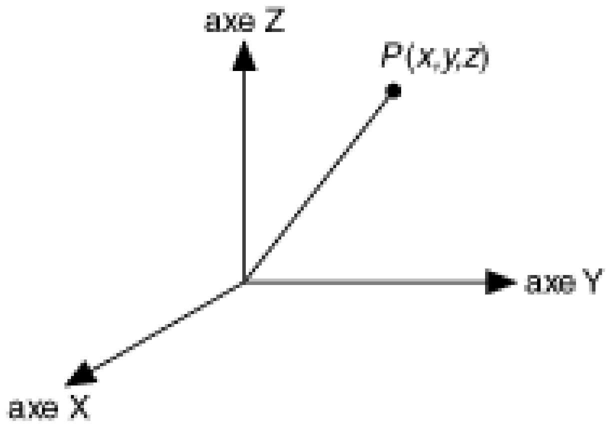
- Système : {papillon}
- Référentiel : référentiel terrestre que l'on suppose galiléen



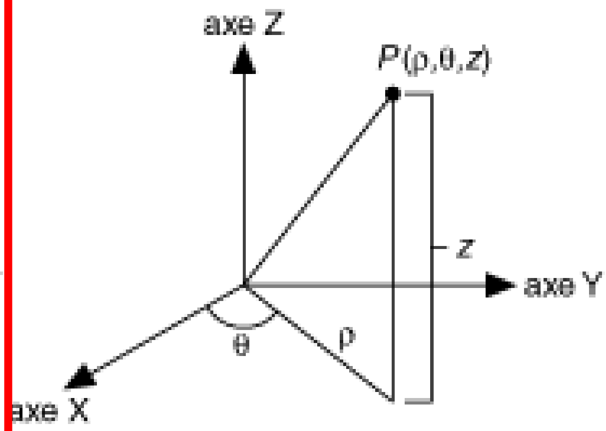





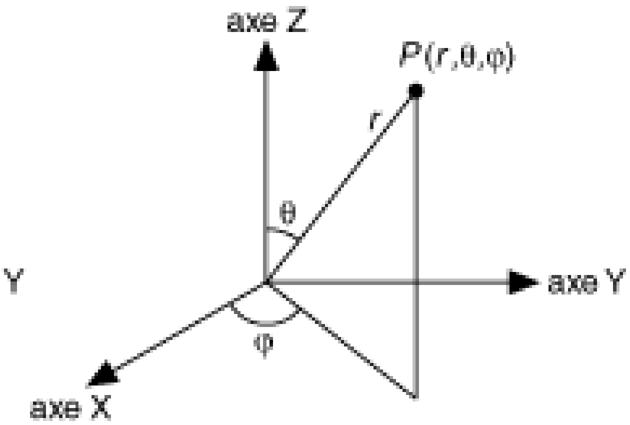
Les trois systèmes fréquents de repérage spatial en physique



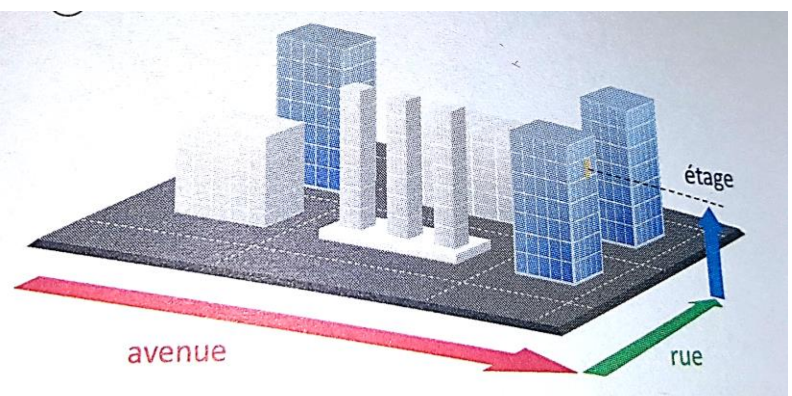
Coordonnées cartésiennes

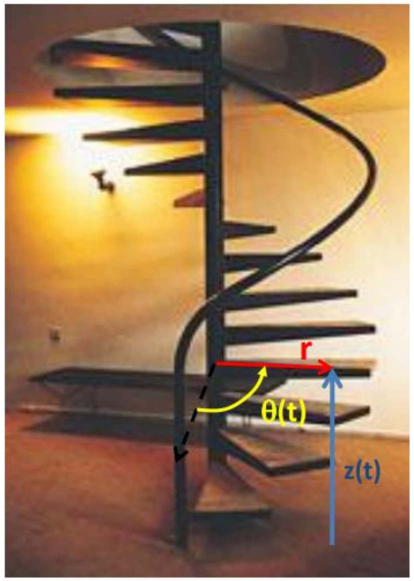


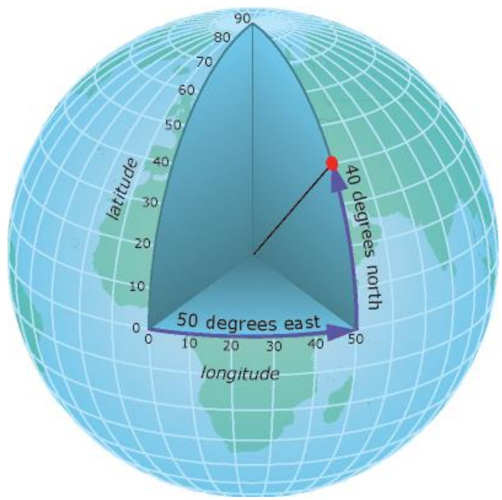
Coordonnées cylindriques



Coordonnées sphériques



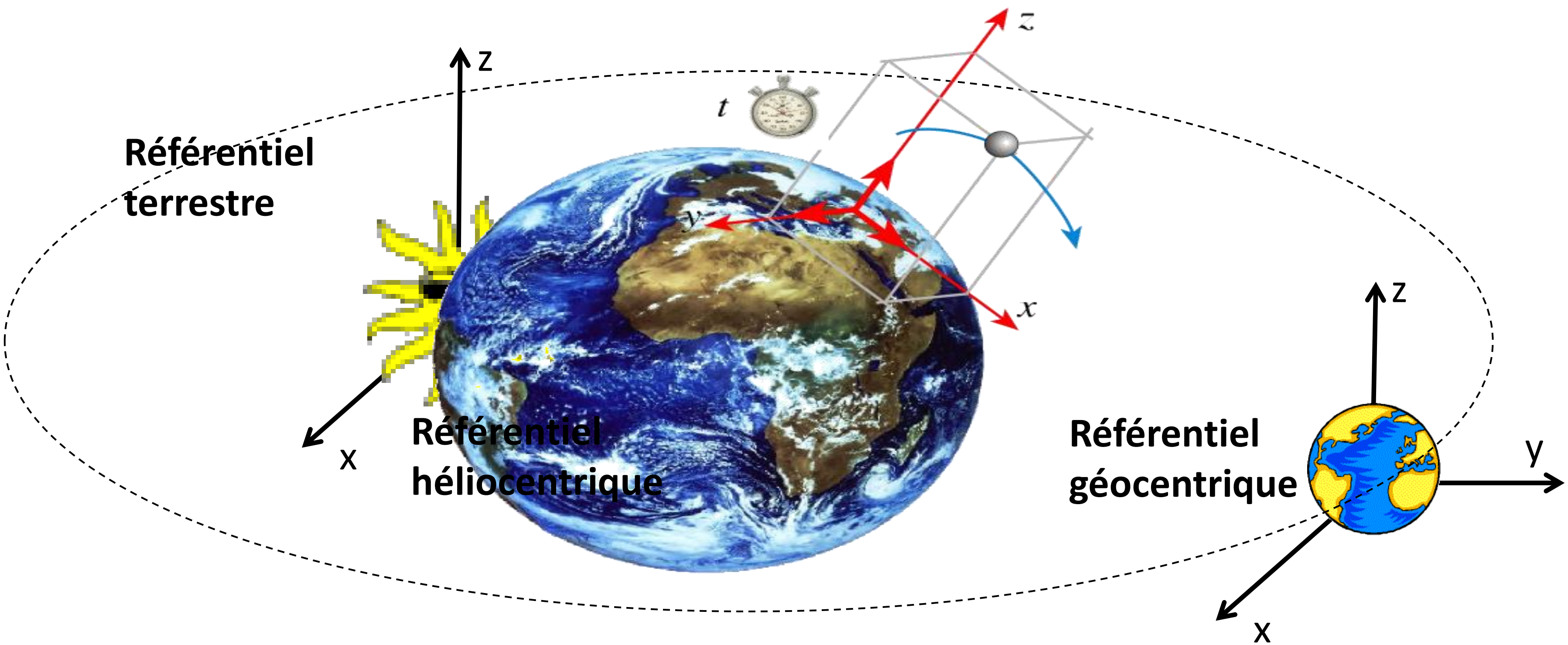




2. Choisir un référentiel

- Un référentiel est un solide que l'on équipe **d'un repère de temps** et **d'un repère d'espace**.
- Un référentiel dans lequel les lois de Newton s'appliquent est un **référentiel galiléen**.
- Tout référentiel en **translation uniforme** par rapport a un référentiel galiléen est galiléen.

Selon les systèmes étudiés (planète, satellite ou projectile, …) ***l'on choisit le référentiel dans lequel l'étude du mouvement sera la plus adaptée***.

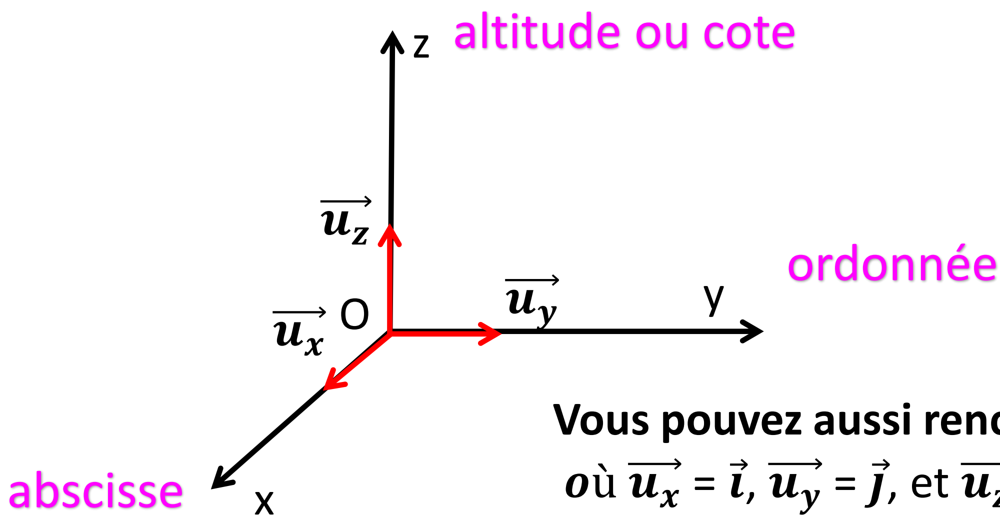


3. Repérer un point dans le système cartésien: le vecteur position

En **dynamique du point**, on considère que **toute la masse du système est contenue dans un point** qui rend compte du mouvement de tous les autres points, on choisit généralement ***le centre de gravité du système noté G*** (penser à l'équilibre).

Nous utiliserons (en général) **un repère cartésien**, défini par :

- Une **origine O(0,0,0)**
- Un **trièdre direct basé sur des vecteurs unitaires** $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ qui définissent les plans, les axes et composantes pour l'étude.



Vous pouvez aussi rencontrer la base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$)

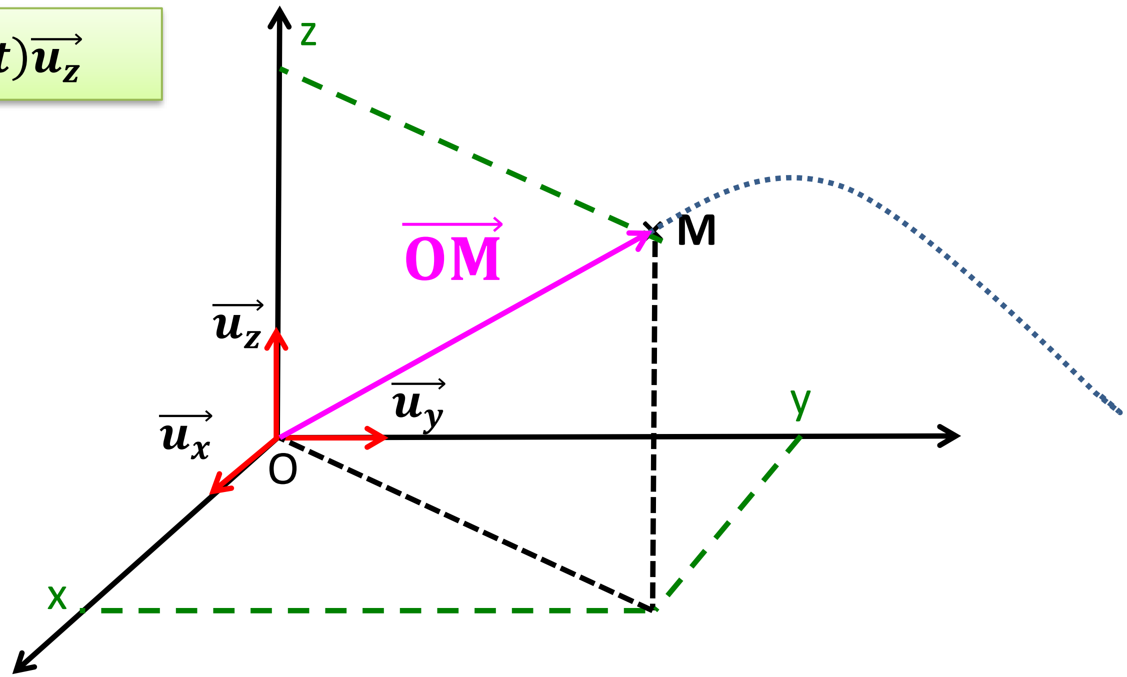
*o*ù $\overrightarrow{u_x}$ = $\vec{\imath}$, $\overrightarrow{u_y}$ = $\vec{\jmath}$, et $\overrightarrow{u_z} = \vec{k}$

Si on étudie le point M, de coordonnées M(x,y,z) alors **le vecteur position** est caractérisé par la valeur de ses composantes sur chaque axe :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

Autre écriture :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



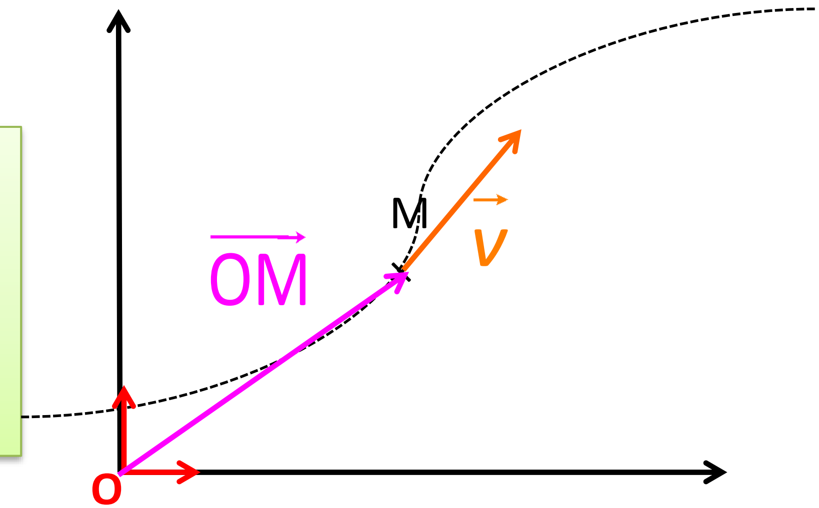
En général, x,y et z sont des fonctions du temps x(t), y(t) et z(t) (on parle d'<u>équations horaires</u>) et PARFOIS ce n'est pas indiqué. Le **temps est LA variable implicite en mécanique.**

L'ensemble des **positions successives** occupées par le point au cours de son mouvement s'appelle **la trajectoire.**

4. La position varie ? → connaitre le vecteur vitesse

Par définition, **le vecteur vitesse** est la **dérivée au cours du temps du vecteur** position :

$$\boldsymbol{\vec{v}} = \frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{dt}}$$



Dans un repère cartésien cela donne:

Soit $\boldsymbol{\vec{v}} = \frac{\boldsymbol{d\overrightarrow{OM}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}.\boldsymbol{\overrightarrow{u_x}} + \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}.\boldsymbol{\overrightarrow{u_y}} + \frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}}.\boldsymbol{\overrightarrow{u_z}}$

ou encore $\boldsymbol{\vec{v}} = \begin{pmatrix} v_x(t) = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} \\ v_y(t) = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}} \\ v_z(t) = \frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\dot{x}} \\ \boldsymbol{\dot{y}} \\ \boldsymbol{\dot{z}} \end{pmatrix}$

Notation utilisée en physique pour la dérivée première par rapport au temps. Elle sera modifiée pour la variation des fonctions à plusieurs variables…

Remarques:

- La **vitesse** d'un point est modélisée par un **vecteur**, qui se caractérise par :
  - Un *point d'application* : le point M,
  - Une *direction* : la tangente à la trajectoire en M,
  - Un *sens* : celui du mouvement,
  - Une *norme* (ou valeur) : $v(t) = \left(\frac{dOM}{dt}\right)_t$ dont **l'unité** du S.I. est le **m.s^{-1}**
- Il ne faut **pas confondre vitesse instantanée v(t) et vitesse en moyenne** ($\mathrm{v_{moy}} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du parcours}}$)
- La vitesse traduit la variation de la position de l'objet étudié, si on connait $\vec{v}$, on peut déterminer **le déplacement** pour l'instant suivant Δt :

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \vec{v} \times \Delta t$$

5. La vitesse varie ? → connaitre le vecteur accélération

L'accélération traduit **la variation de vitesse au cours du temps.**

Par définition, le vecteur accélération est **la dérivée du vecteur vitesse**, soit **la dérivée seconde du vecteur position** :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

La valeur de l'accélération s'exprime **en $m.s^{-2}$**

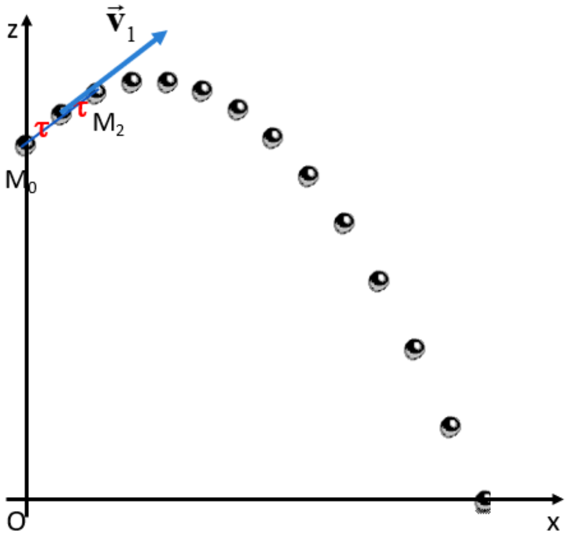
$$\text{ou encore } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y(t) = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z(t) = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

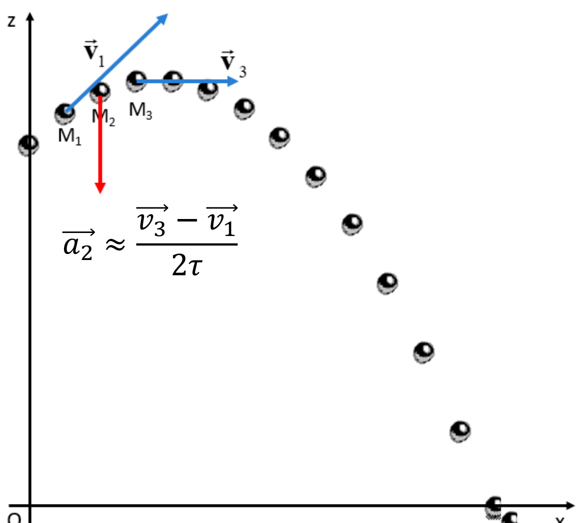
Au final : **Position** $\xrightarrow{\textbf{Dérivation}}$ **Vitesse** $\xrightarrow{\textbf{Dérivation}}$ **Accélération**

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

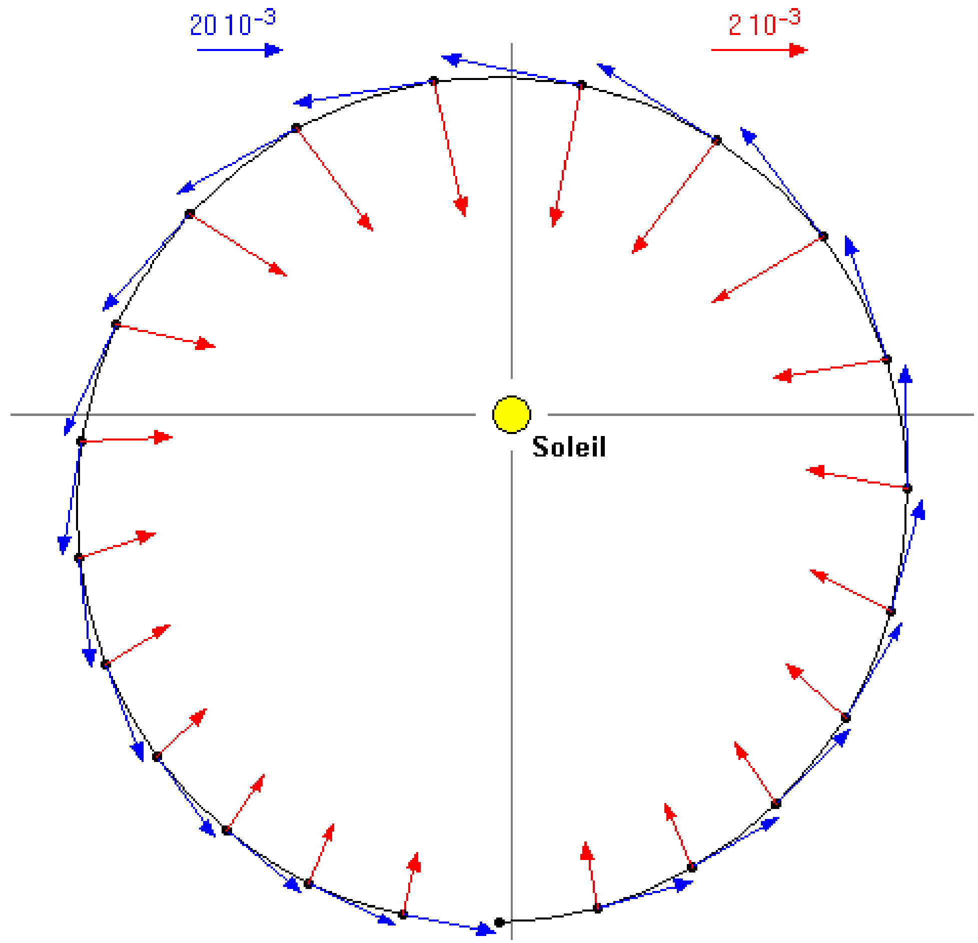
Remarque : Il se trouve que c'est l'accélération qui dépend directement des forces qui agissent sur le point matériel et pas la vitesse comme le montrera Newton via le PFD.

On peut déterminer la vitesse de manière approchée : $\overrightarrow{v_i} \approx \frac{\overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}}{2\tau}$, ainsi que l'accélération $\overrightarrow{a_i} \approx \frac{\overrightarrow{v_{i+1}}-\overrightarrow{v_{i-1}}}{2\tau}$ à partir d'une chronophotographie par exemple.





Tracés de vecteurs approché d'après chronophotographie d'un lancer de boule



Positions, vitesses et accélérations successives d'une planète autours du soleil

6. Connaitre la position à partir de ses dérivées

Pour déterminer le vecteur position à partir du vecteur vitesse, il faut chercher les primitives des fonctions $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v_z(t)$ qui sont compatibles avec les données du problème (positions initiales x(t=0), y(t=0) et z(t=0)).

Position **Vitesse** **Accélération**

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \xleftarrow[\text{Recherche de Primitives compatibles}]{\text{Intégration}} \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \xleftarrow[\text{Recherche de primitives compatibles}]{\text{Intégration}} \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$$

Si l'on ne possède que le vecteur accélération, il vaut d'abord chercher les primitives $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v_z(t)$ des composantes de l'accélération compatibles avec les données du problèmes pour ensuite reproduire le processus précédent.

7. Quelques caractéristiques remarquables des mouvements

- La <u>**valeur**</u> **du vecteur vitesse est** <u>**constante**</u> : $\|\vec{\boldsymbol{v}}\| = \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{Cste}}\right\|$
  Le mouvement est dit « <u>**uniforme**</u> » (rectiligne, circulaire ou curviligne).

- Le <u>**vecteur vitesse est constant**</u> : $\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{Cste}}$
  Le mouvement est rectiligne et uniforme (<u>**m.r.u.**</u>),
  L'accélération est nulle $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\mathbf{0}}$,
  la trajectoire est une droite.

- **Le produit scalaire** $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \neq \mathbf{0}$ alors le mouvement est varié:
  si $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} > \mathbf{0}$ alors le mouvement est accéléré,
  si $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} < \mathbf{0}$ alors le mouvement est décéléré ou retardé.

- Si le vecteur accélération est constant : $\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{Cste}}$, le mouvement est dit uniformément varié (**m.u.v.**).

M.R.U. Mouvement rectiligne est uniforme 2D

$\vec{a} = \vec{0} = \begin{pmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \overrightarrow{Cste} = \begin{pmatrix} v_x = Cste1 = v_{0x} \\ v_y = Cste2 = v_{0y} \end{pmatrix}$ Où v_{0x} et v_{0y} sont les composantes de la vitesse initiale

- Recherche de primitives compatibles pour les composantes du vecteur position:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = v_{0x} \times t + x_0 \\ y(t) = v_{0y} \times t + y_0 \end{pmatrix}$$

Où x_0 et y_0 sont les composantes de la position initiale.

En exprimant t en fonction de x on montre que l'équation de la trajectoire est celle d'une droite.

M.U.V. Mouvement uniformément varié 2D

$\vec{a} = \overrightarrow{Cste} = \begin{pmatrix} a_x = a_{0x} \\ a_y = a_{0y} \end{pmatrix}$

- Recherche de primitives compatibles pour les composantes du vecteur vitesse:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = a_{0x} \times t + v_{0x} \\ v_y = a_{0y} \times t + v_{0y} \end{pmatrix}$$

Où v_{0x} et v_{0y} sont les composantes de la vitesse initiale.

- Recherche de primitives compatibles pour les composantes du vecteur position:

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = \frac{1}{2} a_{0x} \times t^2 + v_{0x} \times t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2} a_{0y} \times t^2 + v_{0y} \times t + y_0 \end{pmatrix}$$

Où x_0 et y_0 sont les composantes de la position initiale.

8. Un mot sur la dérivation et l'intégration de la vitesse (ou d'une autre fonction scalaire ou vectorielle)

Ces deux opérations mathématiques sont « réciproques » l'une de l'autre.

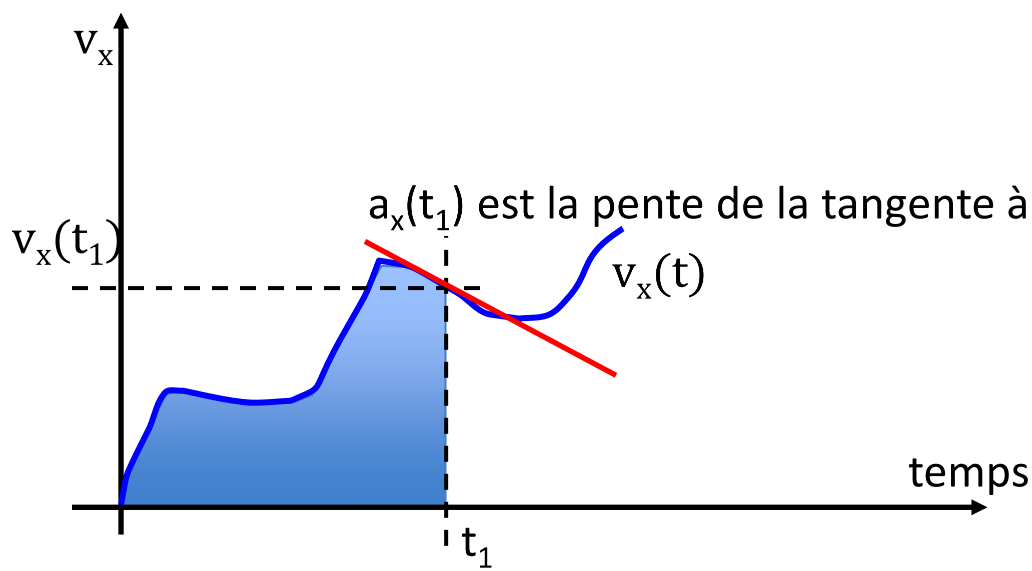
- L'une 'regarde' les différences (les variations) de la fonction, c'est la dérivée :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- L'autre 'regarde' les accumulations (les sommes) de la fonction, c'est l'intégrale :

(qui peut se calculer avec les primitives) $\overrightarrow{OM}(t) = \int_{t=0}^{t} \vec{v}(t)\,.\,dt$

Par exemple, pour chaque composante de la vitesse



$x(t_1)$ est l'accumulation d'espace jusqu'à l'instant t_1 ⇔ aire sous la courbe $v_x(t_1)$

9. Définir les moyennes de la vitesse et de l'accélération

La valeur moyenne d'une fonction variable se calcule à partir d'une intégrale :

- Valeur moyenne de la vitesse entre $A(t_A)$ et $B(t_B)$:

$$v_{moy} = \frac{1}{t_B - t_A} \int_{t_A}^{t_B} v(t)dt = \frac{\widehat{AB}}{t_B - t_A}$$

- Valeur moyenne de l'accélération entre $A(t_A)$ et $B(t_B)$:

$$a_{moy} = \frac{1}{t_B - t_A} \int_{t_A}^{t_B} a(t)dt$$