Université Gustave Eiffel

Licences Sciences et Technologies
L1 PC, MPC, SPI, SPA

Cinématique et dynamique du point matériel : CC3 (12 janvier 2023)

Durée 2h

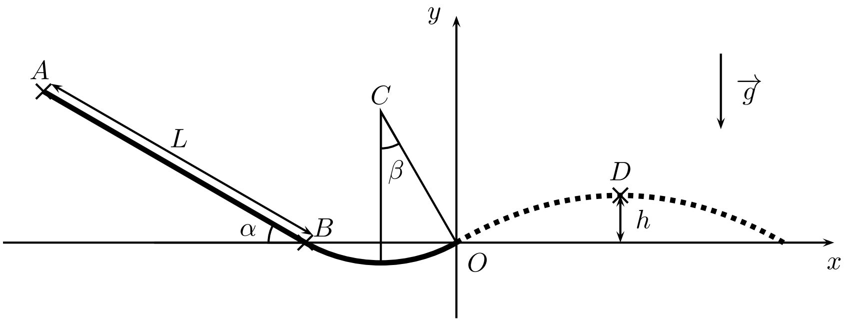
Documents NON autorisés ; les calculatrices collège sont autorisées.

Les réponses doivent être justifiées. La clarté de la rédaction sera prise en compte.
Les 3 exercices sont indépendants.

On rappelle la forme de l'accélération en coordonnées polaires (ρ, θ) : $\overrightarrow{a} = [\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t})^2]\overrightarrow{u}_\rho + [2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}]\overrightarrow{u}_\theta$.

Exercice I - Saut d'un snowboardeur avec un tremplin (6,5 points)

Un snowboardeur, de masse m, s'élance sur la piste d'un tremplin en vue de remporter une compétition de saut en hauteur. Le tremplin est constitué d'une droite, de longueur $L = AB$ suivie d'un arc de cercle de B à O (cf. schéma ci-dessous). La piste AB forme un angle α avec l'horizontale. L'arc de cercle a pour centre C et un angle β.



Le snowboardeur s'élance du point A sans vitesse initiale et commence son saut à partir du point O. Le point D représente le point le plus haut atteint lors du saut. Il est situé à une hauteur h au-dessus de l'horizontale. On décrit le mouvement du snowboardeur, considéré comme un point matériel M dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y)$ lié au référentiel d'étude, comme indiqué sur le schéma, où $\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{u}_y$ sont les vecteurs unitaires de base dans les directions x et y respectivement. Le vecteur $\overrightarrow{g}$ désigne l'accélération du champ gravitationnel et on notera g sa norme. On négligera le frottement entre le snowboardeur et la piste, ainsi que le frottement dû à l'air.

1) La première partie de l'étude est consacrée au mouvement du snowboardeur sur la piste.

- **a)** Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le snowboardeur lorsqu'il est en contact avec la piste, entre les points A et O.
  Établir le bilan des forces durant le saut entre O et D.
- **b)** Calculer le travail des forces entre A et O, puis entre O et D, en fonction de m, g, α, β, L, et h.
  Pour chaque travail, préciser en le justifiant s'il est moteur ou résistant.
- **c)** Énoncer le théorème de l'énergie cinétique et l'appliquer entre les points A et O.
  En déduire la norme de la vitesse au point O, notée v_O, en fonction de L, α, et g.

2) On étudie à présent le mouvement du snowboardeur pendant le saut.

- **a)** Exprimer, dans la base $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y)$, les composantes du vecteur vitesse en O en fonction de v_O et de β.
- **b)** Déterminer les équations horaires de la vitesse lors du saut.
- **c)** Que deviennent les composantes de la vitesse à l'altitude maximale (au point D). En déduire que la norme du vecteur vitesse au point D est $v_D = v_O \cos\beta$.
- **d)** En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre O et D, déterminer la hauteur h en fonction de m, g, b, et v_O.
- **e)** Déduire des questions précédentes que $h = L\sin(\alpha)\sin(\beta)^2$.
  Les caractéristiques du tremplin sont $L = 80$ m, $\alpha = 30°$ et $\beta = 30°$. Calculer la hauteur h.
  Les autres concurrents ont atteint la hauteur de $9,5$ m. Conclure sur la performance du snowboardeur.

Exercice II - Pendule simple modifié par un clou (9,5 points)

On considère un pendule simple modifié comme schématisé sur la Fig. 1. Un mobile ponctuel M de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixe en O. On néglige tout frottement. On repère la position du pendule par l'angle θ que le fil fait avec la verticale. Comme indiqué Figure 1, $\overrightarrow{g}$ représente l'accélération due à la pesanteur et on pose $\|\overrightarrow{g}\| = g$.
Lorsque $\theta > 0$ comme sur la Figure 1 (a), le système se comporte comme un pendule simple de centre O et de longueur de fil L. A la verticale et en dessous de O, un clou est planté en O' avec $OO' = L/3$. Ce clou bloque le mouvement de la partie haute du fil vers la gauche. Ainsi, quand $\theta < 0$, le système se comporte donc comme un pendule simple de centre O' et de longueur de fil $2L/3$.

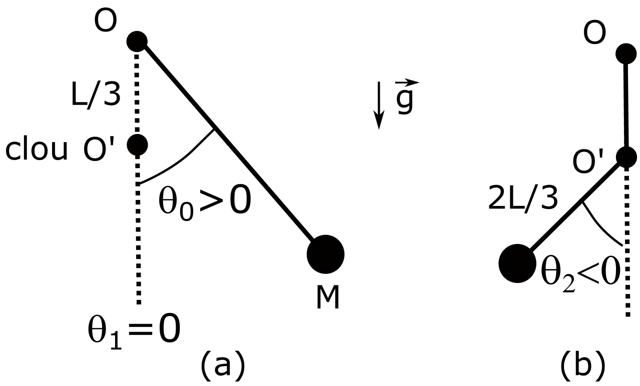


FIGURE 1 – (a) Première phase : avant contact avec le clou. (b) Deuxième phase : après contact avec le clou. $\overrightarrow{g}$ est l'accélération de la pesanteur et définit la verticale.

1) Première phase du mouvement. Le pendule est libéré dans la position de la Figure 1 (a), et on décrit son mouvement jusqu'au premier passage à $\theta_1 = 0$ rad, juste avant qu'il ne touche le clou.

- **a)** Sur votre copie, faire un schéma pour représenter le pendule et, après y avoir indiqué les forces, représenter le repère polaire associé à la masse m.
- **b)** Donner l'expression de la position et de la vitesse en coordonnées polaires. Quelles formes prennent ces expressions dans cet exercice ? Comment l'expression de l'accélération donnée dans le préambule se simplifie-t-elle ici ?
- **c)** Projeter les forces sur la base choisie. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, en déduire l'équation différentielle vérifiée par θ.

  Comment se simplifie cette équation différentielle dans l'approximation $\theta << 1$. Montrer que, dans ce cas, une solution de la forme $\theta = A\cos(\omega t + \phi)$ est acceptable si $\omega = \sqrt{g/L}$.
- **d)** En déduire la période du pendule T. On appelle t_1 le temps passé entre $\theta = \theta_0$ et $\theta_1 = 0$ rad. Le temps t_1 est-il égal à T, $T/2$ ou $T/4$?
- **e)** Le pendule est lâché en $\theta = \theta_0$ avec une vitesse initiale de norme $v_0 = 0$ m/s. À quelle hauteur se trouve alors le pendule par rapport à sa position d'équilibre à $\theta = \theta_1$? En utilisant le théorème de l'énergie cinétique entre θ_0 et θ_1, montrer que la norme de la vitesse en θ_1 est $v_1 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$.

2) On décrit à présent le mouvement pour $t > t_1$ et $\theta_2 < \theta < 0$, jusqu'à ce que le pendule perde le contact avec le clou, voir Figure 1 (b). On précise que juste après l'impact avec le clou en $\theta = \theta_1$, la norme de la vitesse est égale à v_1 donnée en question 1-e).

- **a)** Montrer que l'énergie potentielle en θ_2 est $Ep_2 = \frac{2}{3}mgL(1-\cos\theta_2)$ où l'on a choisi qu'en θ_1, on a $Ep_1 = 0$ J.
- **b)** À l'aide du théorème de l'énergie cinétique entre θ_1 et θ_2, montrer que l'angle maximum θ_2 satisfait la relation $\cos\,\theta_2 = \frac{3\cos\theta_0\,-\,1}{2}$.
- **c)** Sans calcul : quelle est la période du pendule pour $\theta < 0$? En déduire que le temps passé au cours de cette deuxième phase, jusqu'à ce que le pendule perde le contact avec le clou, s'écrit $t_2 = \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}$.

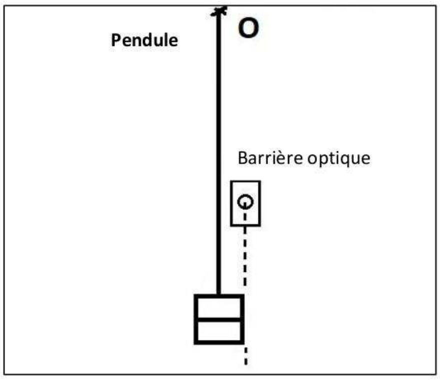
3) Mouvement global. On appelle T_t la période de ce pendule modifié, définie comme le temps passé pour que le pendule revienne à sa position initiale à $\theta = \theta_0$. Montrer que $T_t = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Exercice III - Détermination de la pesanteur en un lieu avec le pendule simple (4 points)

L'objectif est d'utiliser le dispositif de pendule du TP dans le cadre du modèle du pendule simple sans frottement pour déterminer la pesanteur du lieu de mesure et déterminer l'écart avec la valeur souvent utilisée dans les exercices : $g = 10$ S.I.
On considère un objet de masse M accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L. L'autre extrémité du fil est accrochée sur un axe de rotation autour duquel elle peut tourner sans frottement. On décrit le mouvement du pendule dans un repère cartésien lié au référentiel d'étude, dont l'origine O est située au centre de rotation, et l'axe vertical z dirigé vers le bas, parallèle au champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$.

1) Dans le TP, quels paramètres expérimentaux mesure-t-on pour déterminer la valeur de la pesanteur du lieu où l'on se trouve dans le cadre du modèle utilisé ? (On ne demande pas de justifier la formule qui met les paramètres en relation.)

2) Lors du TP, l'objet est constitué d'un petit cylindre (cf. schéma ci-dessous **à reproduire sur votre copie**). Quelle distance représente la longueur L du modèle ?
Reporter-la sur le schéma reproduit sur votre copie.



3) Que représente la période des oscillations ? Représenter schématiquement la trajectoire du pendule au cours d'une période et indiquer les positions limites du système sur le schéma.

4) Le compteur de temps numérique utilisé en TP est commandé par la rupture du faisceau d'une porte optique, placée de manière décalée par rapport à la position d'équilibre du pendule. Le compteur est déclenché lorsque le faisceau de la porte optique est coupé, puis arrêté lorsque le faisceau est à nouveau coupé. Voici trois réglages possibles du compteur pour le mode de déclenchement "Trigger" du compteur :

(1) (2) (3)

a) Quel est celui utilisé en TP pour mesure la période T des oscillations ? Justifier rapidement ce choix.

b) Quel est le protocole de mesure utilisé en TP pour déterminer la période des oscillations ?

5) Un groupe d'étudiants a obtenu les résultats suivants :

L (cm)	39,1	42,6	45,8	48,3	50,2
T (s)	1,26	1,32	1,37	1,39	1,42
g (S.I.)	9,72	9,80		9,87	9,83

Dans la cadre du modèle du pendule simple, on montre que la période des petites oscillations s'écrit $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

a) Exprimer g.
Faire l'analyse dimensionnelle de g et en déduire son unité dans le système international.

b) Déterminer la valeur de g pour $L = 45,8$ cm.

c) Déterminer la valeur moyenne de g, notée g_m, dans cette série de mesures.

d) Quel est l'écart relatif e entre g_m et g ? [$e(\text{en }\%) = (|g_m - g|/g_m) \times 100$]
Que peut-on en conclure sur l'approximation $g = 10$ S.I. utilisée souvent dans les exercices.