CHAPITRE 5

FORMULES DE TAYLOR ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1/ Formule de Taylor

Théorème: (Formule de Taylor-Young)

$a<b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$

($f^{(n)}$ existe et est continue) et $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$(*)\ f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Remarque: Si $n=0$, on retrouve le théorème des accroissements finis:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

→ Autre formulation de $(*)$: si $b = a+h$ (on pose $h = b-a$)

alors $$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

↳ **Preuve:**

$\forall x \in [a,b]$, on pose $g(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$

où A est une constante choisie plus tard

g est continue sur $[a,b]$ car f est C^n.

g' existe sur $]a,b[$ car $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$.

Pour appliquer le théorème de Rolle on a besoin de $g(a) = g(b)$ $\qquad g(b) = 0$

On choisit A de sorte que $g(a) = 0$

$$f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = A\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$

Calculons $g'(x)$.

$$g'(x) = -f'(x) - \frac{f''(x)}{1!}(b-x) + \frac{f'(x)}{1!} \dots - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{f^{(n)}(x)\cancel{n}}{(n-1)!\,\cancel{n!}}(b-x)^{n-1} + \frac{A\cancel{(n+1)}}{n!\,\cancel{(n+1)!}}(b-x)^n$$

On remplace ensuite A par sa valeur et on vérifie que $g'(c)=0$ donne exactement le théorème.

Corollaire : (Formule de Taylor-Lagrange)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a,b]$ et $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$.

Supposons que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, pour tout $x \in]a,b[$,

alors $\left| f(b) - \left[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \right] \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Exemple :

$f(x) = \sin(x) \qquad f : [0,1] \to \mathbb{R}$

f est C^∞ sur $[0,1]$, donc C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\to$ $\underline{n=4}$: f est C^4 et $f^{(5)}$ existe sur $]0,1[$

D'après Taylor-Lagrange :

$$f(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(1-0) + \frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(1-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(1-0)^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(1-0)^5$$

$f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f^{(3)} = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$, $f^{(5)}(x) = \cos(x)$

$\sin(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{\cos(c)}{5!} \qquad$ où $0 < c < 1$

$\Leftrightarrow \sin(1) = \frac{5}{6} + \frac{\cos(c)}{120}$

$\Leftrightarrow \left| \sin(1) - \frac{5}{6} \right| \leq \frac{1}{120}$

On peut approcher $f(b)$ à partir de $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$

Corollaire : (Formule de Taylor-Young 2)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ de classe } C^n}$ sur $[a,b]$

Alors $\exists\, \theta :]0,\alpha[\to \mathbb{R}$ telle que $\exists \alpha > 0$ $\lim_{h\to 0} \theta(h) = 0$ et

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n} + \boxed{h^n \theta(h)} \quad \text{pour tout } 0 \leq h \leq \alpha$$

ne dépend que de $f(a), f'(a), \dots f^{(n)}(a)$

Proposition : (application)

> Soit I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2.
>
> Soit $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$
>
> - Si $f''(x_0) > 0$ alors x_0 est un minimum local de f
> - Si $f''(x_0) < 0$ alors x_0 est un maximum local de f
> - Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure.

↳ **Preuve :** (avec $n = 2$)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + h^2 \theta(h)$$

$$= \underbrace{f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \underbrace{h^2}_{\geq 0}}_{\substack{>0 \text{ si } f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ minimum local} \\ <0 \text{ si } f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ maximum local}}} + h^2 \theta(h)$$

Exemple :

- $f(x) = \cos(x)$ sur $]-\pi, \pi[$, f est C^2, $x_0 = 0$

  $f'(x) = -\sin(x)$, $f'(x_0) = 0$

  $f''(x) = -\cos(x)$, $f''(x_0) = -1 < 0$ Donc : $x_0 = 0$ est un maximum local.

- f C^4 sur I ouvert

  $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) \neq 0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0) h}{1!}}_{0} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{0} h^2 + \underbrace{\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}}_{0} h^3 + \frac{f^{(4)}(x_0) h^4}{4!} + h^4 \underbrace{\theta(h)}_{\to 0 \text{ si } h \to 0}$$

→ Si $f^{(4)}(x_0) > 0$, min local

→ Si $f^{(4)}(x_0) < 0$, max local.

Remarque : $f : I \to \mathbb{R}$, f est C^3, I intervalle ouvert, $x_0 \in I$

$f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ et $f^{(3)}(x_0) \neq 0$

Alors f n'a pas de min ou de max local en x_0.

→ Preuve :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0) h}{4!} + \frac{f''(x_0) h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x_0) h^3}{3!} + h^3 \theta(h)$$

Supposons $f^{(3)}(x_0) > 0$.

alors $\frac{f^{(3)}(x_0) h^3}{3!} \begin{cases} > 0 \text{ si } h > 0 \\ < 0 \text{ si } h < 0 \end{cases}$ en x_0.

Donc : f n'a pas d'extremum local

2/ Développements limités

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $0 \in I$.

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 ($DL_n(0)$), s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ tel que $\deg P \leqslant n$ et $f(x) = P(x) + x^n \theta(x)$ où $\theta(x) \to 0$ si $x \to 0$

P est appelé la partie régulière de $DL_n(0)$

- La partie régulière est unique.

↳ **Preuve :**

Supposons qu'il existe P_1 et P_2 ($P_1 \neq P_2$) deux polynômes de degré $\leqslant n$ tel que :

$f(x) = P_1(x) + x^n \theta_1(x)$ où $\theta_1(x) \to 0$ si $x \to 0$

$f(x) = P_2(x) + x^n \theta_2(x)$ où $\theta_2(x) \to 0$ si $x \to 0$

Donc : $0 = \underbrace{(P_1(x) - P_2(x))}_{\text{degré} \leqslant n} + x^n (\theta_1(x) - \theta_2(x))$

$x \neq 0$ D'où $\dfrac{P_2(x) - P_1(x)}{x} = \theta_1(x) - \theta_2(x)$ avec $\theta_1(x) - \theta_2(x) \to 0$ si $x \to 0$

ABSURDE car, $\left| \dfrac{P_2(x) - P_1(x)}{x^n} \right| \to +\infty$ ou vers une constante $\neq 0$ si $P_2(x) - P_1(x) = ax^n$ où $a \neq 0$.

Exemple :

1. $f(x) = e^x$, f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = e^x$

Appliquons Taylor-Young 2, avec $a = 0$ et $b = x$.

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + x^n\theta(x)$ où $\theta(x) \to 0$ si $x \to 0$

On obtient : $\boxed{e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n \theta(x)}$ où $\theta(x) \to 0$ si $x \to 0$

La partie régulière de $DL_n(0)$ de $x \mapsto e^x$ est $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!}$

→ application: $n=2$.

$$\lim_{n\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^n} = ?$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\theta(x) \text{ où } \theta(x)\to 0 \text{ si } x\to 0$$

$$\Rightarrow e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + x^2\theta(x) \Rightarrow \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2} + \theta(x)$$

Donc: $\lim_{n\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^n} = \frac{1}{2}$

② $f(x) = \cos(x)$, f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, $a=0$, $b=x$

Taylor-Young 2 en 0 à l'ordre n:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\theta(x)$$

$f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f^{(3)}(x) = \sin(x)$, $f^{(4)}(x) = \cos(x)$

$f'(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 0$ $\Rightarrow f^{(2k+1)}(0) = 0$

Donc: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2k}\theta(x)$ (si $n = 2k$)

$+ x^{2k+1}\theta(x)$ (si $n = 2k+1$)

Proposition: Si f est paire, $DL_n(0)$ de f n'a que des puissances paires
impaire impaires

Exemple:

$f(x) = \sin(x)$, f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ $DL_n(0)$?

$f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + x^{2k}\theta(k)$ (si $n = 2k$)

$+ x^{2k+1}\theta(k)$ (si $n = 2k+1$)