CHAPITRE 2

INTERFÉRENCES LUMINEUSES À 2 ONDES

1/ Résultante de deux vibrations

- $s(t,M) = A\cos\Big[\underbrace{\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(L)_{SM} + \Phi}_{\varphi}\Big]$ ← phase liée à la source

- $I = K\langle s^2\rangle$
  - $\langle s^2\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s^2\,dt$

En notation complexe : $s^*(t,M) = Ae^{i\varphi}$

$\rightarrow s(t,M) = Re\left[s^*(t,M)\right]$

$\rightarrow \boxed{I = K'\langle s^* \cdot \overline{s^*}\rangle}$ ← complexe conjugué de s^*

ex: si $s(t) = A\cos(\omega t)$, $I = \frac{KA^2}{2}$ avec $s^*(t) = Ae^{i\omega t}$

$I = K'\langle A\cos^{i\omega t} \times A\cos^{-i\omega t}\rangle$

$= K'\langle A^2 \exp(\underbrace{i\omega t - i\omega t}_{=0})\rangle$

$= K'A^2$

donc: $\frac{KA^2}{2} = K'A^2 \iff K = \frac{K'}{2}$

On a: $s_1^* = A_1 e^{i\varphi_1}$ $\rightarrow \varphi_1 = \omega_1 t = \frac{2\pi}{\lambda_1}(L)_{S_1M} + \Phi_1(t)$

$s_2^* = A_2 e^{i\varphi_2}$ $\rightarrow \varphi_2 = \omega_2 t = \frac{2\pi}{\lambda_2}(L)_{S_2M} + \Phi_2(t)$

(def: si Φ est indépendant de t alors s est dit monochromatique)

$\Rightarrow s^* = s_1^* + s_2^* = A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2}$

2/ Intensité résultante

$$I = K' \langle s^* \overline{s^*} \rangle$$

$$= K' \langle (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}) \rangle$$

$$= K' \langle A_1^2 e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_1} + A_2^2 e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_2} + A_2 A_1 e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_1} + A_1 A_2 e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} \rangle$$

$$= K' \langle A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)})$$

$$= K' \langle A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \times 2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$= K' A_1^2 + K' A_2^2 + 2K' A_1 A_2 \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle$$

On introduit les intensités des sources :

$$I_1 = K' \langle s_1^* \overline{s_1^*} \rangle = K' A_1^2$$

$$I_2 = K' A_2^2$$

Donc : $$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle}$$

→ **Remarque :** $I \neq I_1 + I_2$ en général

- Si $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle \neq 0$ alors il y a des interférences.
  ⇒ il y a cohérence entre les 2 signaux ex : laser
- Si $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0$ alors il y a décohérence (pas d'interférences)
  ex : Soleil

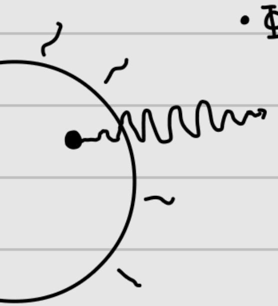
Le déphasage vaut : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

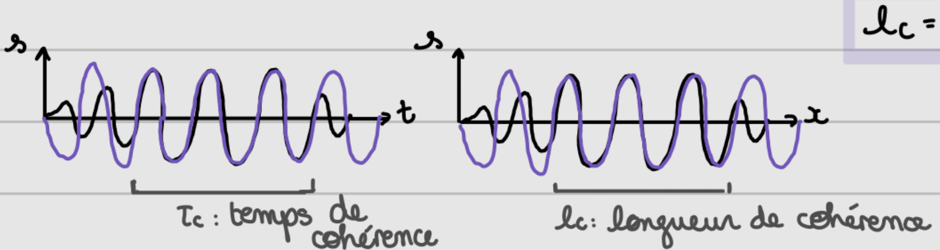
$$= \omega_2 t - \frac{2\pi}{\lambda_2}(L)_{S_2M} + \Phi_2(t) - \omega_1 t + \frac{2\pi}{\lambda_1}(L)_{S_1M} - \Phi_1(t)$$

$$= (\omega_2 - \omega_1)t - \frac{2\pi}{\lambda_2}(L)_{S_2M} + \frac{2\pi}{\lambda_1}(L)_{S_1M} + \Phi_2(t) - \Phi_1(t)$$

→ Pour qu'il y ait cohérence, il faut :

- $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
- $\Phi_2(t) - \Phi_1(t) = \text{cst.}$



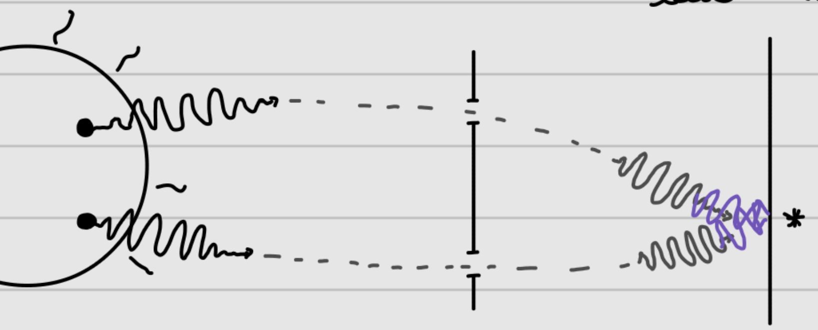


$$\boxed{l_c = c\,\tau_c}$$

vitesse de la lumière

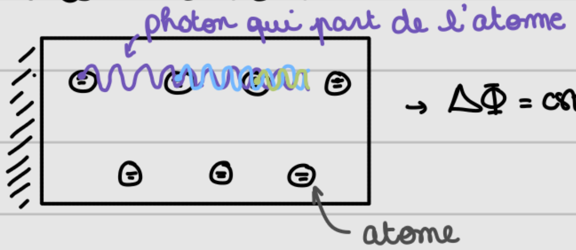
Quelques ordres de grandeur : → soleil : $\tau_c \sim 10^{-5}$ s ; $l_c \sim 10^{-6}$ m

→ laser : $\tau_c \sim 10^{-19}$ s ; $l_c \sim 0{,}3$ m



$^*\Delta\Phi$ = aléatoire $\Rightarrow \langle \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \rangle = 0$, donc pas d'interférences

Dans le cas du laser :



→ $\Delta\Phi = cst$ si $\delta < l_c$

différence de marche

$\Rightarrow \langle \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \rangle \neq 0$

3/ Cohérence et déphasage

On a : $\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 \\ \Phi_2(t) - \Phi_1(t) = cst \end{cases}$ donc $\varphi_2 - \varphi_1 = -\dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta + \Phi_2 - \Phi_1$

↳ $\delta = (L)_{S_2M} - (L)_{S_1M}$

L'intensité devient :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Big(\underbrace{\Phi_2 - \Phi_1 - \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta}_{=\Delta\varphi}\Big)$$

4/ Franges et ordre d'interférence

- Si $I = I_{max}$ alors $\cos(\Delta\varphi) = 1 \iff \Delta\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

→ il y a interférences constructives : ($I_1 = I_2 = I_0$ alors $I_{max} = 4I_0$)

$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2}$ ⇒ franges brillantes

• Si $I = I_{min}$ alors $\cos(\Delta\varphi) = -1 \Leftrightarrow \Delta\varphi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

→ il y a interférences destructives : ($I_1 = I_2 = I_0$ alors $I_{min} = 0$)

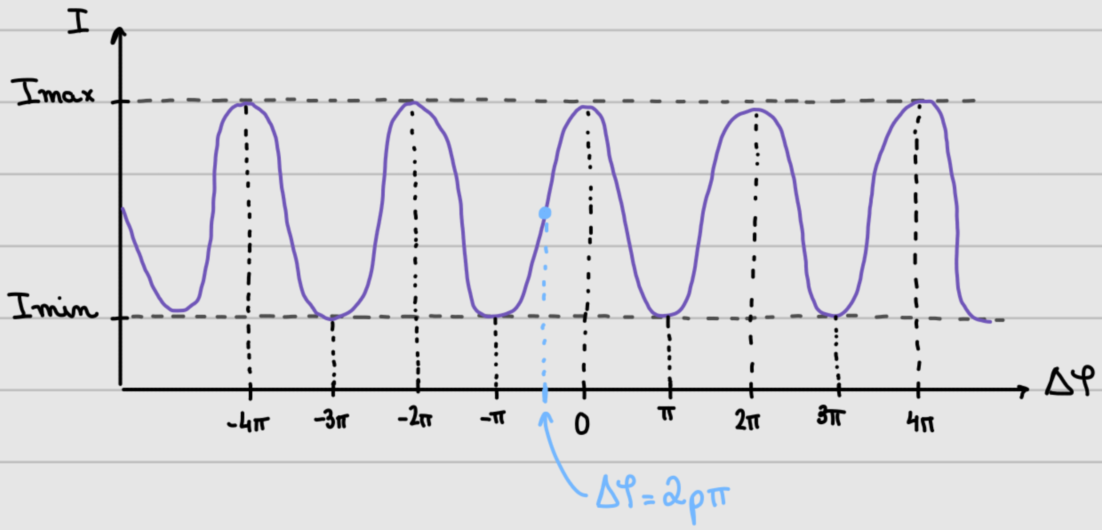
$$\boxed{I = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2}$$

• L'ordre d'interférence :

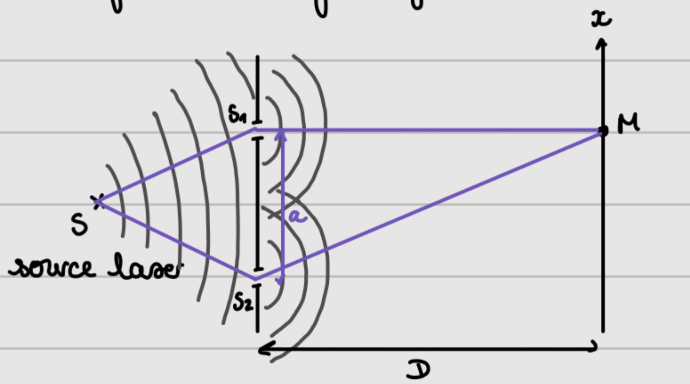
$$\boxed{p = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}}$$

→ si p est un entier : constructive

→ si p est demi-entier : destructive



5/ Les fentes de Young

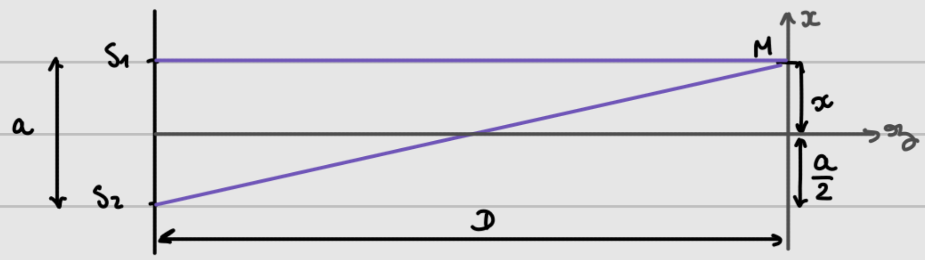


On a : $\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 \\ \Phi_2 = \Phi_1 \ (\text{si } (L)_{SS_1} = (L)_{SS_2}) \\ l_c \geq \delta \end{cases}$

On veut relier $\Delta\varphi$ à la position x :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

→ calcul de δ ($n \simeq 1$) dans le cas où $D \gg x, a$:



$\delta = (L)_{S_2M} - (L)_{S_1M}$

$$\to S_2M = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} = D\sqrt{1 + \frac{1}{D^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)^2} = D\sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2}$$

comme $D \gg x \Rightarrow 1 \gg \frac{x}{D}$

$D \gg a \Rightarrow 1 \gg \frac{a}{D}$ $\qquad \Rightarrow 1 \gg \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2$

$$S_2M = D\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{a}{2D} + \frac{x}{D}\right)^2}_{=\varepsilon}} \simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2D} + \frac{x}{D}\right)^2\right)$$

car, $(1+\varepsilon)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\varepsilon$

$$\to S_1M \simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2D} - \frac{x}{D}\right)^2\right)$$

$\Rightarrow S_2M - S_1M \approx \frac{ax}{D}$ $\qquad \underset{n=1}{\Rightarrow} \Delta\varphi = 2\pi \frac{ax}{\lambda D}$

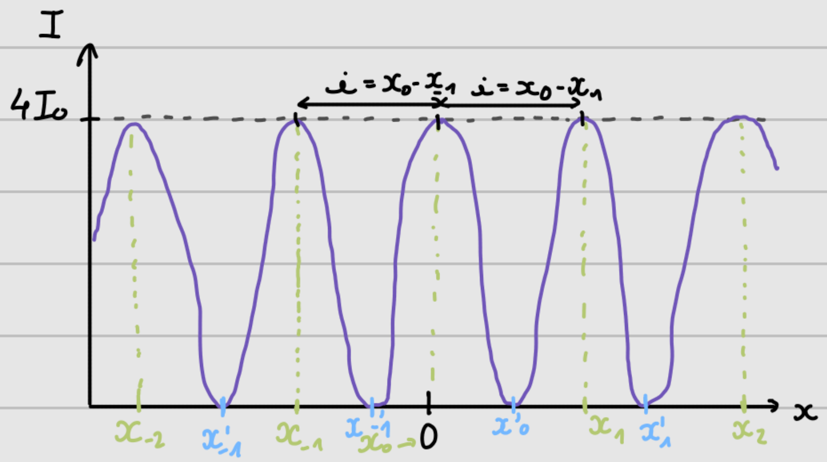
- Franges brillantes si $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = p \in \mathbb{Z}$ donc si $\frac{ax}{\lambda D} \in \mathbb{Z}$.

Leurs positions sont données par $x_k = k\frac{\lambda D}{a}$, $k \in \mathbb{Z}$

- Franges sombres si $x'_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a}$

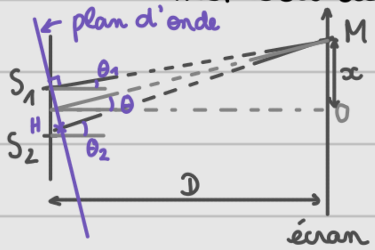
$\Rightarrow$ L'interfrange : distance entre 2 franges brillantes

$$\boxed{i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{a}}$$



$$I = 2I_0\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{ax}{\lambda_0 D}\right)\right)$$

⇝ méthode de calcul de $\delta = (L)_{S_2M} - (L)_{S_1M}$:



$x = D \tan\theta$

$\delta = (L)_{S_2M} - (L)_{S_1M}$

$= (L)_{S_2H} + \underbrace{(L)_{HM} - (L)_{S_1M}}_{=}$ → vrai si rayons sont //

$= (L)_{S_2H}$

$= n \times S_2H$

$= n\, a \sin\theta_2$

↳ approximations : · rayons //

· $D \gg a, x \Rightarrow \theta \simeq \theta_1 \simeq \theta_2 \ll 1$

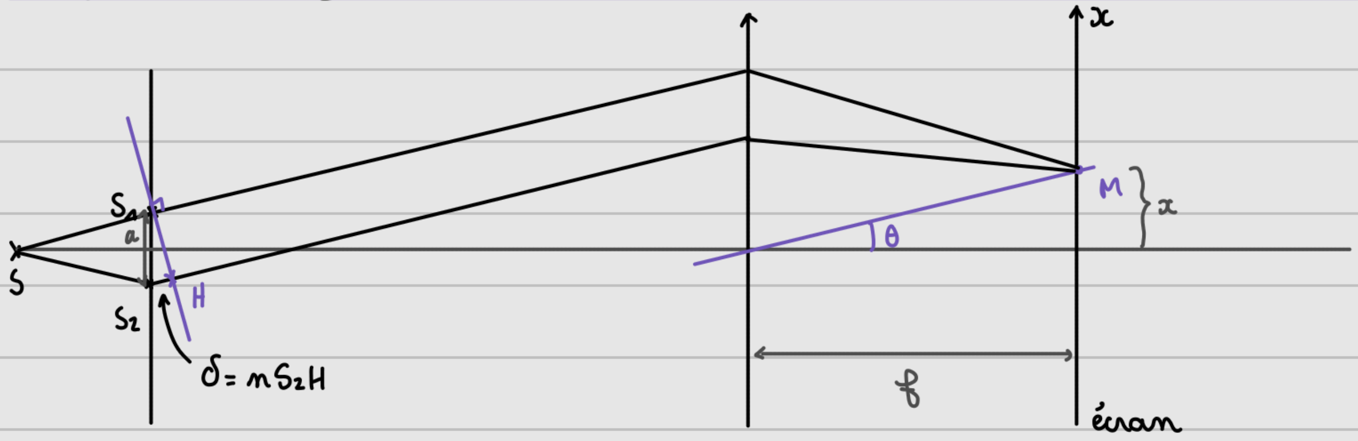
· $\left.\begin{array}{l}\tan\theta \simeq \theta \\ \sin\theta_2 \simeq \theta_2\end{array}\right\} \tan\theta \simeq \sin\theta_2$

Donc : $\delta = n\, a \sin\theta_2$

$\simeq n\, a \tan\theta$

$\simeq n \dfrac{a x}{D} \overset{n=1}{=} \dfrac{a x}{D}$

6 / Utilisation de lentilles

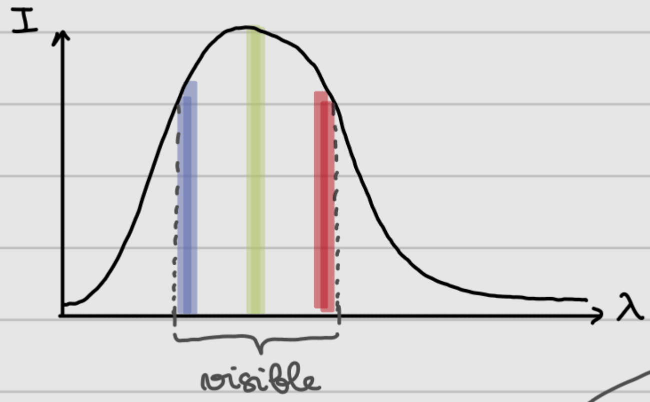


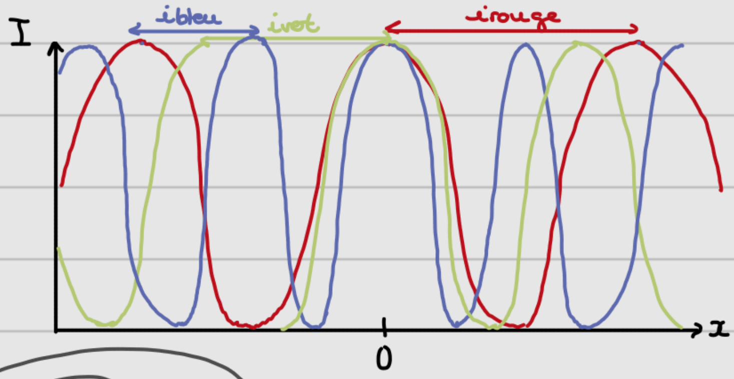
→ $x = f \tan\theta$

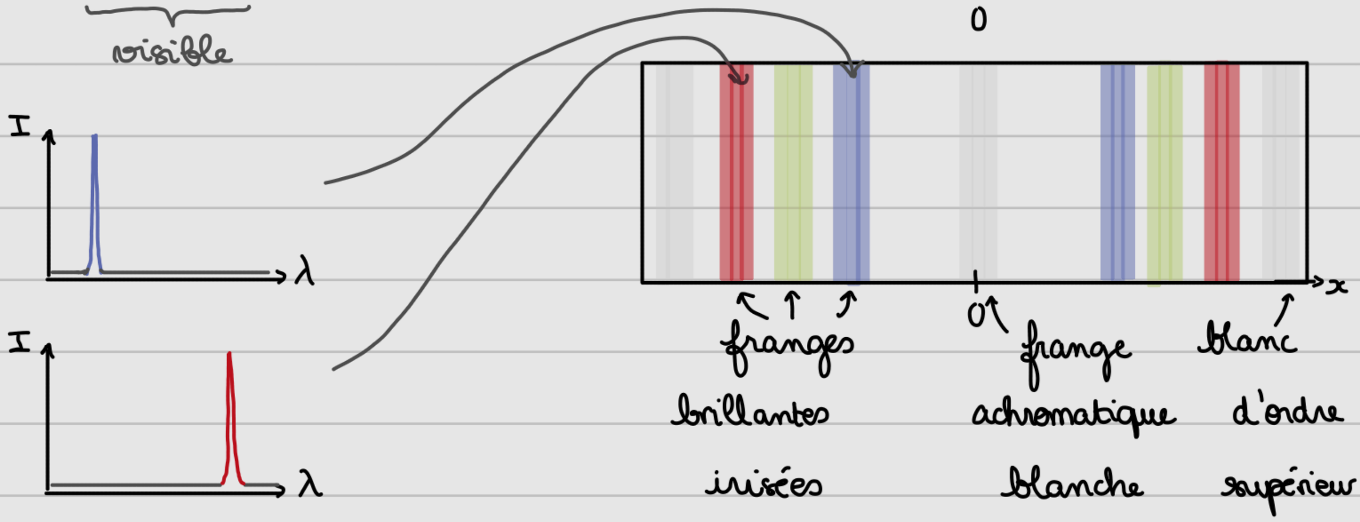
→ $\delta = n\, a \underbrace{\sin\theta}_{= \frac{x}{\sqrt{x^2 + f^2}}}$

Si $f \gg x$: $\delta \simeq n \dfrac{a x}{f}$

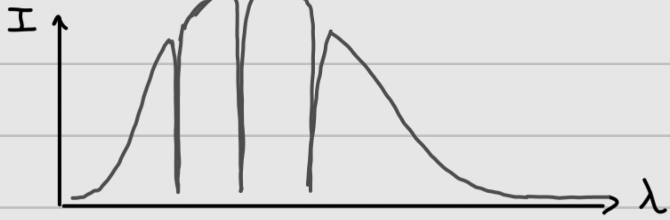
4 / Interférences en lumière blanche



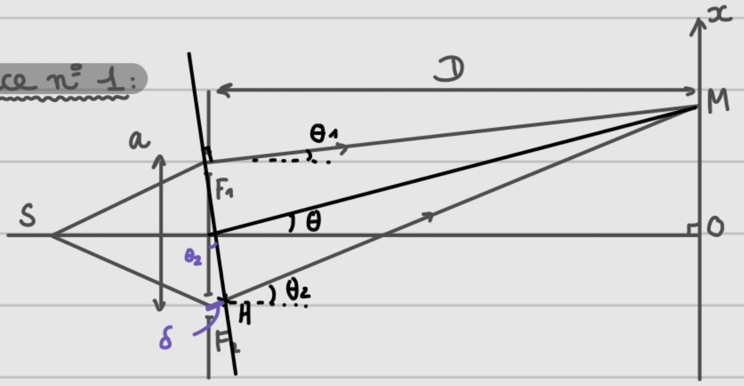




<u>Spectre cannelé</u>:



Exercice n° 1 :



1) Sachant que $D \gg a$, on suppose que les rayons R_1 et R_2 sont parallèles, on a donc $\theta \simeq \theta_1 \simeq \theta_2 \ll 1$.

Par méthode géométrique, on a : $\delta = a \times \sin(\theta_2) \simeq a\sin(\theta) \simeq a\tan\theta \simeq \frac{ax}{D}$

• Le déphasage vaut : $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = 2\pi\frac{ax}{\lambda_0 D}$

• L'intensité lumineuse au point M : $I = 2I_0(1+\cos(\Delta\varphi))$

$$= 2I_0\left(1+\cos\left(2\pi\frac{ax}{\lambda_0 D}\right)\right)$$

• Abscisses des franges sombres : $I = 0 \Leftrightarrow 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\frac{ax_k}{\lambda_0 D} = \pi + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2ax_k}{\lambda_0 D} = 2k+1$$

$$\Leftrightarrow x_k = (2k+1)\frac{\lambda_0 D}{a}$$

• Abscisses des franges brillantes : $I = max \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right) = 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi ax_{k'}}{\lambda_0 D} = 2k'\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x_{k'} = \frac{\lambda_0 D k'}{a}$$

Exercice n° 2.

1) $i = \dfrac{\lambda D}{a}$

$\rightarrow i_{violet} = \dfrac{400 \times 10^{-9} \times 2}{2 \times 10^{-3}} = 4 \times 10^{-4}\ m = 0,4\ mm$

$\rightarrow i_{vert} = \dfrac{530 \times 10^{-9} \times 2}{2 \times 10^{-3}} = 5,30 \times 10^{-4}\ m = 0,53\ mm$

$\rightarrow i_{rouge} = \dfrac{750 \times 10^{-9} \times 2}{2 \times 10^{-3}} = 7,50 \times 10^{-4}\ m = 0,75\ mm$

2) • Ordre d'interférence : $p = \dfrac{\delta}{\lambda} = \dfrac{ax}{\lambda D}$ avec $x = 1,0$ cm

$$\begin{cases} p_{violet} = 25 \\ p_{vert} = 18,9 \\ p_{rouge} = 13,3 \end{cases}$$

• $\underbrace{400\ nm}_{\lambda violet} \leq \lambda \leq \underbrace{750\ nm}_{\lambda rouge} \iff \dfrac{1}{\lambda violet} \geq \dfrac{1}{\lambda} \geq \dfrac{1}{\lambda rouge}$

$\iff \underbrace{\dfrac{ax}{\lambda violet\ D}}_{p_{violet}} \geq \underbrace{\dfrac{ax}{\lambda D}}_{p_\lambda} \geq \underbrace{\dfrac{ax}{\lambda rouge\ D}}_{p_{rouge}}$

$\iff p_{violet} \geq p_\lambda \geq p_{rouge}$

→ interférence constructive si $p \in \mathbb{Z}$ $\quad p_{violet} = 25 \geq p \geq p_{rouge} = 13,3$

$\Rightarrow p \in \underbrace{\{14, 15, \ldots, 25\}}_{12\ \text{longueurs d'onde}}$

→ franges sombres si $p + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$: $25 \geqslant p + \frac{1}{2} \geqslant 13,3$

$24,5 \geqslant p \geqslant 12,8$

$\Rightarrow p \in \{ \underbrace{13, \dots, 24}_{\text{12 longueurs d'onde}} \}$

p	13,5	....	24,5
λ (nm)	740,7		408,2

$\Rightarrow$ Spectre cannelé, 12 raies manquantes.