TD 3

Exercice n° 1 :

$f : x \mapsto (x-1)^2$

→ f continue en 1 : Soit $\varepsilon > 0$. On cherche η tel que $|x-1| \leq \eta \Rightarrow |(x-1)^2 - 0| < \varepsilon$

Prenons $\eta = \sqrt{\varepsilon}$

Alors $|(x-1)^2 - 0| = |x-1|^2 \leq (\sqrt{\varepsilon})^2 \leq \varepsilon$

→ f continue en 0 : Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\eta > 0$ tel que $|x| \leq \eta \Rightarrow |(x-1)^2 - 1| \leq \varepsilon$

$|(x-1)^2 - 1| = |x||x-2|$

Supposons $|x| \leq 1$. Alors $|x-2| \leq 3$ donc $|x||x-2| \leq 3|x|$

On prend $\eta = \min(1, \frac{\varepsilon}{3})$ car, $3|x| \leq 3\eta \leq \varepsilon \Leftrightarrow \eta \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

~ Autre méthode : On aurait pu faire $|x-2| \leq |x| + 2$ et en choisissant $\eta > 0$ tel que $\eta(\eta+2) \leq \varepsilon$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq \eta \Rightarrow |(x-1)^2 - 1| \leq \varepsilon$

Exercice n° 2 :

- f est discontinue :

$\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0$, $\exists x_0 \in D_f$ tq $|x_0 - a| \leq \eta$ et $|f(x_0) - f(a)| > \varepsilon_0$

➔ pour les suites :

Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D_f tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $(f(u_n))_n$ ne converge pas vers $f(a)$

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ → $\dfrac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ car, $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$

Montrons que f est discontinue en 1 :

Soit $\varepsilon = 1$. Soit $\eta \geq 0$. On cherche $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|x_0 - 1| \leq \eta$ et $|f(x_0) - 1| \geq 1$

Par exemple : $x_0 = 1 - \frac{\eta}{2}$

Alors $f(x_0) = -1$ et $|f(x_0) - 1| = 2 \geq 1$

- On cherche $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$ et $(f(U_n))_n$ ne converge pas vers 1.

  On pose $U_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. On a $\lim\limits_{+\infty} U_n = 1$.

  et $\forall n \geq 1$ $U_n < 1$ donc $f(U_n) = -1$

  $f(U_n) = f(1 - \frac{1}{n}) = -1$ car, $1 - \frac{1}{n} < 1$.

Donc: $(f(U_n))_n$ ne converge pas vers 1.

Exercice n° 4: $f : I \to \mathbb{R}$

f continue en a: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in I$ $|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$.

Dans le voisinage $|x - a| \leq \delta(\varepsilon)$ on a $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Donc: $|f(x)| \leq \varepsilon + |f(a)|$ car, $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x)| - |f(a)|$

et car, $|f(x) - f(a) + f(a)| = |f(x)|$

Exercice n° 6:

- $f_1(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $\Rightarrow$ discontinue partout

Soit $x \notin \mathbb{Q}$. Construire $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.

$$x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \quad , n \geq 0$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = 1$

Donc on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

Mais $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(x)$ donc f est discontinue en x.

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Construire $(x_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

$$x_n = x + \frac{\pi}{n} \quad , n \geq 1$$

$x \in \mathbb{Q}$ et $\forall n \geq 1$ $\frac{\pi}{n} \notin \mathbb{Q}$ Donc $\forall n \geq 1$ $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\lim\limits_{+\infty} x_n = x$.

On a $\forall n \geq 1$, $x_n \notin \mathbb{Q}$ donc $\forall n \geq 1$ $f(x_n) = 0$ mais $\forall n \geq 1$ $f(x) = 1$ car, $x \in \mathbb{Q}$

On a bien $\lim\limits_{+\infty} x_n = x$ mais $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(x)$.

Donc : f est discontinue en x.

- $f_2(x) = E(x)$

$\Rightarrow$ discontinue en tous les $p \in \mathbb{Z}$, continue partout ailleurs.

Soit $p \in \mathbb{Z}$. On cherche $(x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lim x_n = p$. Mais $(E(x_n))$ ne converge pas vers $E(p)$, elle diverge vers $+\infty$.

$$x_n = p - \frac{1}{n} \quad , n \geq 1$$

Alors $\forall n \geq 1$ $E(x_n) = p-1$. Or, $E(p) = p$

Donc on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = p$

Mais $(E(x_n))$ ne converge pas vers $E(p)$. Donc E est discontinue en p.

- $f_3(x) = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow$ discontinue en 0 et continue partout ailleurs

On va montrer que f_3 n'a pas de limite en 0.

On cherche (x_n) et (y_n) tel que $\lim\limits_{+\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} y_n = 0$

tel que $\lim\limits_{+\infty}(f(x_n)) = 0$

$\lim\limits_{+\infty}(f(y_n)) = 1$.

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \frac{1}{x} = k\pi \overset{k \in \mathbb{Z}}{} \iff x = \frac{1}{k\pi}$$

On prend $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $n \geq 1$

On a $\lim\limits_{+\infty}(x_n) = 0$ et $\forall n \geq 1$ $f_3(x_n) = 0$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \overset{k \in \mathbb{Z}}{} \iff x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

On prend $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \geq 0$

On a $\lim\limits_{+\infty}(y_n) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_3(y_n) = 1$

$\lim\limits_{+\infty} f_3(x_n) \neq \lim\limits_{+\infty} f_3(y_n)$ avec $\lim\limits_{+\infty} x_n = \lim\limits_{+\infty} y_n = 0$. Donc f_3 est discontinue en 0.

Exercice n° 8 :

• $h_1(x) = \dfrac{(x^2-1)x}{|x-1|}$ en 1

→ Si $x > 1$: $|x-1| = x-1$ $\quad h_1(x) = \dfrac{(x^2-1)x}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)x}{x-1} = (x+1)x$

Donc : $\lim\limits_{1^+} h_1(x) = 2$

→ Si $x < 1$: $|x-1| = -x+1$ $\quad h_1(x) = -(x+1)x$

Donc : $\lim\limits_{1^-} h_1(x) = -2$

$\Rightarrow \lim\limits_{1^+} h_1(x) \neq \lim\limits_{1^-} h_1(x)$ donc h_1 pas continue en 1.

• $h_2(x) = \sqrt{4-x^2}\,\ln(|x+2|)$ $\qquad$ et $|x+2| > 0$

$\Leftrightarrow 4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 \Leftrightarrow 2 \geq |x|$ $\qquad$ Donc, h_2 est définie sur $]-2,2]$

→ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{2^-} \ln(|x+2|) = \ln(4) \\ \lim\limits_{2^-} \sqrt{4-x^2} = 0\end{array}\right\}$ par multiplication : $\lim\limits_{2^-} h_2(x) = 0$

→ $h_2(x) = \sqrt{(2-x)(2+x)}\,\ln(|x+2|)$

$= \sqrt{2-x}\,\sqrt{2+x}\,\ln(|x+2|)$

~ chgt de variable : $t = x+2$

$\lim\limits_{x\to -2^+} \sqrt{2+x}\,\ln(|x+2|) = \lim\limits_{y\to 0^+} \sqrt{t}\,\ln(|t|) = 0$ (croissances comparées)

Donc : $\lim\limits_{x\to -2^+} h_2(x) = 0$

Exercice n° 5 :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

1) • On prend $x = y = 0$.

$f(0) = f(0) + f(0)$ $\qquad$ Donc : $f(0) = 0$.

• Montrons que f impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On prend $y = -x$. $f(0) = f(x) + f(-x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$

2). Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(n) = n \times f(1)$.

→ <u>initialisation</u>: $n=0$

$f(0) = 0 \times f(1) = 0$ ✓

→ <u>hérédité</u>: Supposons H_n: "$f(n) = nf(1)$". Alors:

$f(n+1) = f(n) + f(1) = n \times f(1) + f(1) = (n+1) f(n)$

Donc: H_{n+1} est vraie.

• Soit $p \in \mathbb{Z}$. Si $p \geq 0$ $f(p) = pf(1)$

Si $p \leq 0$ $f(p) = -f(-p) = -(-p)f(1) = pf(1)$

Donc: $\forall p \in \mathbb{Z}$ $f(p) = pf(1)$.

• On peut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall q \in \mathbb{N}$ $f(qx) = qf(x)$

(Pareil : $f((q+1)x) = f(qx) + f(x)$)

Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$.

$f(p) = f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = q f\left(\frac{p}{q}\right)$

$= p f(1)$ Donc: $\forall r \in \mathbb{Q}$ $f(r) = r f(1)$

3) On suppose f continue en 0. Montrons $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = xf(1)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $(x_n) \in \mathbb{Q}$ tel que $x_n \to x$.

La suite $(x - x_n)$ tend vers 0.

Donc car, f continue en 0, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x - x_n) = f(0) = 0$

Or, $f(x - x_n) = f(x) + f(-x_n) = f(x) - f(x_n) = f(x) - x_n f(1)$

Donc: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x - x_n) = f(x) - xf(1) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = xf(1)$

Exercice n° 3 :

$$f(x)\begin{cases} 5 \text{ si } x < -2 \\ ax+b \text{ si } -2 \leq x < 1 \\ \ln(x) \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

f est continue sur $]-\infty ; 2[$, sur $[-2, 1]$ et sur $[1, +\infty[$

f est continue en -2 si $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = f(-2)$

$\iff 5 = -2a + b.$

f est continue en 1 si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$

$\iff a + b = \ln(1) = 0$

Donc : $\begin{cases} -2a+b=5 \\ a+b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ 5=-2a-a \end{cases} \iff \begin{cases} b=\frac{5}{3} \\ a=\frac{-5}{3} \end{cases}$

Exercice n° 4 :

1) • $g_1(x) = 2x+1$ → $D_{g_1} = \mathbb{R}$

→ $g_1(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ car, c'est un polynôme

• $g_2(x) = \cos(2x+1)$ → $D_{g_2} = \mathbb{R}$

$= \cos \circ g_1(x)$ → $g_2(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ car, cos est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et g_1 aussi ET la composée de fonctions continues est continue.

• $g_3(x) = e^{\sqrt{x}}$ → $D_{g_3} = \mathbb{R}_+$

→ $g_3(x)$ continue sur $\mathbb{R}_+$ car, e^x est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\sqrt{x}$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

2) $g(x) = \begin{cases} f(2x) \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(2x-1) \text{ si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ (f continue sur $[0, 1]$ tq $f(0) = f(1)$)

Montrons que $g(x)$ est continue sur $[0, 1]$.

→ Montrons que $g(x)$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$:

On pose $h : [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1]$, $x \longmapsto 2x$ qui est continue car, c'est un polynôme

f est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$

⇒ $g(x)$ est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ comme composée de fonctions continues.

→ Montrons que g est continue sur $]\frac{1}{2};1]$:

On pose $h :]\frac{1}{2};1] \to [0;1]$ continue car, c'est un polynôme.
$x \longmapsto 2x-1$

f est continue sur $]\frac{1}{2},1]$

$\Rightarrow$ $g(x)$ est continue sur $]\frac{1}{2},1]$ comme composée de fonctions continues.

→ Montrons que g est continue en $\frac{1}{2}$:

Si g continue en $\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} g(x) = g(\frac{1}{2})$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(2x-1) = f(2 \times \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow f(0) = f(1) \quad \text{vrai} \checkmark$$

$\Rightarrow$ g est continue en $\frac{1}{2}$.

<u>CCLG:</u> g est continue sur $[0,1]$.

Exercice n° 9:

$f(x) :]0,\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

- $u_n =$ → $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$

$f(u_n) =$ → $\lim\limits_{+\infty} f(u_n) = 0$

•