CHAPITRE 4

DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉELLES

1/ Définitions

Définition :

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert. On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0 \\ x \in I}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$.

Remarque : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ avec $h = x - x_0$

Définition :

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert, f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $x_0 \in I$

Définition :

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

→ f dérivable en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

→ // en b si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ existe.

Proposition :

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert, $x_0 \in I$

Alors f est dérivable au point x_0 s'il existe $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall h \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\varepsilon(h)$ avec

$\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, $\varepsilon :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$

Dans ce cas, $l = f'(x_0)$

f dérivable en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et cette limite est notée $f'(x_0)$

Donc, si h est "assez petit", $\left|\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right|$ est "petit"

c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0$, $\underset{\alpha=\alpha(\varepsilon)}{\exists \alpha > 0}$ tel que $|h| < \alpha$, $\left|\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h}\right| \leq \varepsilon$

$|f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)| \leq \varepsilon . h$

Posons $\varepsilon(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)}{h}$ alors $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

et en prenant $l = f'(x_0)$ on obtient $f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0) = h.\varepsilon(h)$

$\Leftrightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + h.l + h.\varepsilon(h)$

Corollaire :

Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

↳ **Preuve :**

Soit $x_0 \in I$, f dérivable en x_0. Alors $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\,\varepsilon(h)$ pour $h \in]-\alpha, \alpha[$. Si $x \to x_0$, $x = x_0 + h$ avec $h \to 0$ et donc comme $\lim\limits_{h\to 0} (hf'(x_0) + h\,\varepsilon(h)) = 0$. On obtient $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Définition :

On dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et si

$f' : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$ est continue.

Définition :

$f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable à droite (à gauche) en x_0 si

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x > x_0\\ (x < x_0)}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe. On la note $f'_d(x_0)$ ($f'_g(x_0)$)

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I ouvert , $x_0 \in I$

Alors f est dérivable en x_0 ssi elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Définition :

$f : I \to \mathbb{R}$, I ouvert , $n \in \mathbb{N}^*$

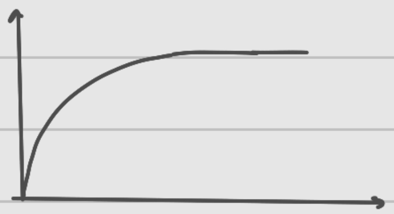
f est de classe C^n sur I si $f, f', f'', f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$ existent et qu'elles soient continues

Remarque : Ceci est équivalent à dire que f est n-fois dérivable et que sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est continue.

La dérivée $f'(x_0)$ = coefficient directeur de la tangeante à la courbe en x_0.

ex : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0,1]$ — f est continue et même uniformément d'après le théorème de Heine.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$



$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0,1]$

$C^n \Rightarrow C^{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow C^1 \Rightarrow$ dérivable $\Rightarrow$ continue

2/ Opérations sur les dérivées

Proposition :

$f, g : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert

i) $(f+g)' = f' + g'$

ii) $(fg)' = f'g + fg'$

iii) $(f^n)' = nf' f^{n-1}$

iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

v) $(f \circ g)' = g' . f' \circ g$

↳ Preuve :

① Soit $x_0 \in I$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \underbrace{\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h}}_{A} = ?$$

$$A = \frac{f(x_0+h) + f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) + g(x_0)}{h}$$

$$A \underset{h \to 0}{\to} f'(x_0) + g'(x_0)$$

② $$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \underbrace{\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h}}_{B} = ?$$

$$B = \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \underbrace{\left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right]}_{\text{tend vers } f'(x_0)} \underbrace{g(x_0+h)}_{\substack{\text{tend vers } g(x_0) \\ \text{car, } g \text{ continue}}} + f(x_0) \underbrace{\left[\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right]}_{\text{tend vers } g'(x_0)}$$

Proposition : FORMULE DE LEIBNIZ

Supposons que f, g sont n fois dérivables sur I.
Alors $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$

↳ Preuve :

Par récurrence. La propriété est vraie pour $n=0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(n)} g^{(n+1-k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$ donc on conclut par récurrence.

3/ Accroissements finis

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle et $x_0 \in I$.

- f admet un maximum en x_0 si $\forall x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$
- f admet un minimum en x_0 si $\forall x \in I$ $f(x) \geq f(x_0)$
- f admet un maximum local en x_0 si $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in I \cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ $f(x) \leq f(x_0)$
- f admet un minimum local en x_0 si $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in I \cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ $f(x) \geq f(x_0)$

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I intervalle ouvert.

Si $x_0 \in I$ est un $\left\{\begin{array}{l}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{array}\right.$ local de f si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

↳ **Preuve :**

Supposons x_0 un maximum local. Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset I$ (possible car I ouvert) et $\forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, $f(x) \leq f(x_0)$

Puisque f est dérivable en x_0, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe (et c'est $f'(x_0)$)

Soit $x \in]x_0-\alpha, x_0[$ alors $\dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{\leq 0}}$ est positif. Par passage à la limite, on a $f'(x_0) \geq 0$ (1)

En prenant $x \in]x_0, x_0+\alpha[$, on a $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Par passage à la limite, $f'(x_0) \leq 0$ (2)

(1) + (2) donne $f'(x_0) = 0$.

Théorème de Rolle :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(b) = f(a)$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$

↳ Preuve :

Si pour tout réel $x \in [a,b]$, $f(a) = f(b)$.

Alors, $c = \frac{a+b}{2}$ est un maximum local de f donc $f'(c) = 0$

Sinon il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > f(a) = f(b)$

Puisque f continue sur $[a,b]$, elle atteint un maximum en $c \in [a,b]$

Or, $f(c) \geq f(x) > f(a) = f(b)$. Donc, $c \in]a,b[$.

On a alors f dérivable en c et f admet un minimum en c.

Donc, $f'(c) = 0$

De même, s'il existe $x \in]a,b[$ tel que $f(x) < f(a)$

Théorème des accroissements finis :

Soit $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

↳ Preuve :

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$

On a alors :

(1) → $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$

(2) → $\forall x \in]a,b[$, $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(3) → φ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

(1) + (3) donne d'après le thm de Rolle qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$

D'après (2), $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

4/ Variations de fonctions

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Int}(I)$ son intérieur (l'intervalle ouvert de même borne que I)

Proposition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Pour que f soit constante, il faut et il suffit que :

→ f soit continue sur I

→ f soit dérivable sur $\mathrm{Int}(I)$

→ $f' = 0$ sur $\mathrm{Int}(I)$

↳ **Preuve :**

$\Rightarrow$ Supposons f constante sur I alors f est dérivable sur $\mathrm{Int}(I)$ et $f' = 0$. De plus, f est continue sur I.

$\Leftarrow$