Polycopié de Calcul différentiel et intégral
Licence 1- Université de Marne-la-Vallée

Laurent Hauswirth

3 janvier 2021

Chapitre 1

Fonctions d'une variable

1.1 Généralité sur les fonctions

Définition 1.1.1. *Une fonction ou application est un "procédé" qui à tout élément x d'un ensemble X associe un et un seul élément d'un ensemble Y qui est en général noté $f(x)$.*

X est l'ensemble de départ ou *domaine de définition* de f, Y est l'*ensemble d'arrivée* de f ; $f(x)$ est l'*image* de x par f ou encore la *valeur* de f en x. Lorsque $y = f(x)$, on dit que x est **un** antécédent de y par la fonction f (il peut en avoir plusieurs). On pourra noter $X = D_f$. L'ensemble des images de f sera noté

$$\text{Im}(f) = \{y \in Y; y = f(x) \text{ pour } x \in D_f\} \subset Y.$$

Lorsque $X \subset \mathbb{R}$ ou $X \subset \mathbb{C}$ on parle de fonctions à *variable réelle* ou *complexe*. Au lycée nous avons vu les fonctions usuelles suivantes :

— Fonction *Carré, cube, puissance* n-ième : $x \to x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

— Fonction *sinus, cosinus, exponentielle* : $\cos, \sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$$

— Fonction *logarithme* qui n'est définie que pour les nombres strictement positifs :

$$\ln\ : \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

— Fonction *racine carrée* qui n'est définie que pour les nombres positifs ou nuls :

$$\sqrt{\ }\ : \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

— Fonction *inverse* qui n'est définie que pour les nombres non nuls :

$$\begin{array}{rcl} \text{Inv} : \quad \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, = \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Domaine de définition. Le domaine de définition est l'ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ où la fonction a un sens :

$$\boxed{D_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \text{ a un sens }\}}$$

Remarque : Un domaine de définition est constitué d'une union d'intervalle de $\mathbb{R}$. Par exemple

$$D_f =]-\infty, a[\cup]b, c[\cup[d, +\infty[$$

On a pour l'addition et la multiplication des fonctions, les propriétés suivantes :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \Rightarrow D_{fg} = D_f \cap D_g$$

A partir de deux fonctions $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on formera la composée de deux fonction noté $f \circ g(x)$:

$$\begin{array}{rccc} f \circ g : & D_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Pour que cette fonction soit bien définie il faut vérifier que $\mathrm{Im}(g)$ soit contenue dans le domaine de définition de f : $\boxed{\mathrm{Im}(g) \subset D_f}$. Pour déterminer le domaine de définition de $f \circ g$, pour deux fonctions $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il faudra déterminer des ensembles du type

$$\{g(x) = \lambda\} = g^{-1}(\lambda) \text{ ou } \{g(x) \geq \lambda\} = g^{-1}([\lambda, +\infty))$$

Trouver le domaine de D_G ou $G(x) = (\mathrm{Inv} \circ g)(x) = \frac{1}{g(x)}$ où

$$G : x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{\mathrm{Inv}} \frac{1}{g(x)}$$

nécessite de connaître les antécedents $\{g(x) = 0\} = g^{-1}(0)$ et $D_g = \mathbb{R} - g^{-1}(0) = g^{-1}(\mathbb{R}^*)$.

Fonctions Surjective. Une fonction $f(x) : D_f \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$ est dite **surjective** si pour tout $y \in J$, il existe un antécédent $x \in D_f$ tel que $f(x) = y$,

Exemple : La fonction $\mathrm{Inv} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective car $y = 0$ n'a pas d'antécédent, mais $g(x) : \mathrm{Inv} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est surjective.

Une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ est surjective par définition de l'image d'une fonction.

Définition 1.1.2. *Une fonction $f(x) : D_f \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$ est* **injective** *si il n y a pas deux éléments $x_1 \neq x_2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.*

Une fonction $f(x) : D_f \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$ est **bijective** *si elle est à la fois surjective et injective.*

Définition 1.1.3. *On dit que la fonction $f : D_f \longmapsto \mathbb{R}$ est* **paire** *si et seulement si D_f est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in D_f$, on a $f(-x) = f(x)$.*

On dit que la fonction $f : D_f \longmapsto \mathbb{R}$ est **impaire** *si et seulement si D_f est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in D_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.*

1.2 Notion de limite d'une fonction, continuité

Quand une fonction est définie sur un domaine du type

$$D_f =]-\infty, a[\cup]b, c[\cup[d, +\infty[,$$

on se pose la question naturelle du comportement de la fonction quand elle s'approche des bornes d'un intervalle où elle n'est pas définie. C'est pour étudier ce comportement que nous avons besoin de la notion de **Limite** d'une fonction à droite ou à gauche en une extrémité $x_0 = a, b, c, +\infty, -\infty$ du domaine (mais pas d puisque la fonction est définie en d). On écrit alors

$$\boxed{\lim_{x\to x_0-} f(x) \text{ ou } \lim_{x\to x_0^+} f(x)}$$

pour décrire ce comportement. La notation $-$ ou $+$ nous dit dans quelle intervalle x varie pour calculer cette limite. Au premier semestre, on doit savoir calculer ces limites. La définition rigoureuse sera abordée au 2 ème semestre.

Remarque On va définir la notion de limite d'une fonction au voisinage de la valeur 0. Cette définition délicate a nécessité beaucoup de tâtonnement. On dira qu'une fonction $f(x)$ a pour limite ℓ, si les valeurs de $f(x)$ sont aussi proche ℓ que l'on veut à condition que x soit assez près de 0. La difficulté est de préciser la notion *"aussi proche que l'on veut"*. On fixe un $\epsilon > 0$ présupposé fixé au début puis on cherche à se placer assez proche de x_0.

Définition 1.2.1. *On dit que la fonction $f :]-a, 0[\cup]0, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ a pour limite ℓ quand x tend vers zero si et seulement si*

$$\boxed{\forall\epsilon > 0,\ \textit{il existe un nombre réel } k > 0,\ \textit{tel que } x \in]-k, 0[\cup]0, k[\Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon}$$

On écrit que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \ell}$$

Fin de la Remarque.

Cette définition permet de définir la notion de continuité pour les fonctions :

Définition 1.2.2. *On dit que la fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in]a, b[$ si quand on restreint $f :]a, x_0[\cup]x_0, b[\to \mathbb{R}$ on a*

$$\boxed{\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)}$$

Vitesse de convergence Quand la limite de la fonction $f(x)$ au voisinage de zéro tend vers la limite $\ell = 0$, on voudra comprendre avec quelle vitesse la fonction converge vers 0. Les fonctions les plus simples sont les monômes du type x^n, avec $n \in \mathbb{N}$. Ce qui est en jeu dans cette définition, c'est la vitesse avec laquelle la fonction f s'approche de sa limite si celle-ci existe. On veut comparer, la vitesse avec laquelle la fonction x^2 et x^8 tendent chacune vers zero quand x tend vers zéro. Evidemment x^8 est le "plus rapide" des deux. D'ailleur on observe que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^2} = 0.$$

Par contre on observe que $f(x) = 2x^8$ et $g(x) = x^8 + x^{10}$ converge tous les deux vers 0 et

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^8 + x^{10}}{2x^8} = \frac{1}{2}.$$

L'une ne l'emporte pas sur l'autre. On va définir une notation qui décrit le comportement d'une fonction au voisinage de zero et qui facilitera de nombreux calculs et raisonnements.

Définition 1.2.3. *Sur un intervalle de type $I =]-k, k[$, on dit que la fonction $f(x)$ est négligeable devant x^n, s'il existe une fonction $h(x)$ défini sur I tel que*

$$\boxed{f(x) = x^n h(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} h(x) = 0.}$$

1.3 Derivabilité d'une fonction

Derivabilité. Nous allons admettre l'existence d'une opération algébrique sur l'ensemble des fonctions dérivables.

Définition 1.3.1. *Une fonction f est dérivable en x_0, si elle est définie sur un intervalle $I =]a, b[$ contenant x_0 et si il existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tel que le taux d'accroissement défini sur $]a, x_0[\cup]x_0, b[$:*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite a_1 dans $\mathbb{R}$ quand $x \to x_0$. De manière équivalente on écrit

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1}.$$

Géométriquement. Avec les notations de la définition, si M_0 est le point de coordonnée $(x_0, f(x_0))$ du graphe de f et M est un autre point du graphe de la courbe de coordonnée $(x, f(x))$, le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est la pente de la droite (MM_0) dans le repère orthonormé. Lorsque f est dérivable en x_0, ce rapport admet une limite qui est la pente a_1 de la tangente au graphe de f au point M_0.

Proposition 1.3.2. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$. Il y a équivalence entre les trois ?énoncés suivants :*

(a) f est dérivable en x_0

(b) *Il existe un réel a_1 et une fonction $h :]a,b[\to \mathbb{R}$ tels que*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + (x - x_0)h(x) \text{ pour } x \in I \text{ avec } \lim_{x \to x_0} h(x) = 0}$$

Dans ce cas $a_1 = f'(x_0)$ et $(x - x_0)h(x)$ est négligeable devant $(x - x_0)$.

(c) *Il existe un réel a_1 tel que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a_1(x - x_0)}{(x - x_0)} = 0$$

et $a_1 = f'(x_0)$

Remarque. (a) La définition 2.1. de la limite d'une fonction nous dit que pour k assez petit, la fonction $|h(x)| \leq \varepsilon$ sur $]-k, k[$.

(b) La droite d'équation $y = f(x_0) + a_1(x - x_0)$ est la droite tangente à la courbe du graphe de la fonction f au point x_0.

Proposition 1.3.3. *Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

Démonstration : Pour $x \neq x_0$,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}(x - x_0)$$

En passant à la limite dans cette identité nous avons par la définition 2.2 :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0| \text{ et } \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Fin de la démonstration.

Dérivation On va maintenant décrire comment on obtient la dérivé a_1 d'une fonction à variable réelle.

Theorem 1.3.4. *Pour tout intervalle réel $I =]a,b[$ non vide et tout élément x_0 de I, il existe sur l'ensemble des fonctions dérivables en x_0, définies sur I et à valeurs réelles une opération sur cet ensemble appelé la dérivation de f au point x_0, qui à toute fonction dérivable en x_0 associe un nombre réel appelé nombre dérivé de f en x_0 que l'on note $f'(x_0)$*

tels que :

1. *Pour toutes les fonctions $I \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$ dérivables en x_0 et tout nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $f + g, \lambda f$ et fg sont dérivables et*

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}$$

2. *Pour tout intervalles ouverts non vides I, J et toute les fonctions : $I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ avec g dérivable en x_0 et f dérivable en $y_0 = g(x_0) \in J$, alors la composée $f \circ g$ est dérivable en x_0 et*

$$\boxed{(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)}$$

3. *La dérivabilité des fonctions usuelles :*
   - *Les polynômes réels sont dérivables en tout* $x_0 \in R$ *et leur dérivé est donné par*

$$\boxed{(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n)'(x_0) = a_1 + a_2 x_0 + \cdots + n a_n x_0^n}$$

   - *La fonction* $\frac{1}{x}$ *est dérivable en tout* $x \neq 0$.
   - *La fonction* $\sqrt{x}$ *est dérivable en tout* $x > 0$.

1.4 Dérivées des fonctions usuelles :

Proposition 1.4.1. *Pour deux fonctions dérivable* $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$

La dérivée de l'inverse sur $\mathbb{R}^*$ *et de la racine carrée sur* $\mathbb{R}_+^*$ *sont données par*

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}} \text{ et } \boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

La dérivée de l'inverse et de la racine carrée d'une fonction est donnée par

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \text{ si } f \neq 0} \text{ et } \boxed{(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}} \text{ si } f > 0}$$

La dérivée d'un quotient de fonction en tout point du domaine de définition

$$\boxed{\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{fg' - gf'}{f^2}}$$

La dérivée d'une fonction puissance pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{(f^n)' = n f' f^{n-1}}$$

Démonstration : Comme $\frac{1}{x}$ est dérivable et que x est dérivable, leur produit aussi, de dérivée :

$$0 = 1' = \left(\frac{1}{x}x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' x + \left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où le résultat. De même sur $\mathbb{R}_+^*$, en appliquant le formule de dérivation de fonctions composées, on a :

$$1 = x' = \left((\sqrt{x})^2\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' 2\sqrt{(}x)$$

d'où pour $x > 0$:

$$\sqrt{(}x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La fonction $\frac{1}{f}$ est la composée de deux fonctions dérivable :

$$I \overset{f}{\mapsto} \mathbb{R}^* \overset{\text{Inv}}{\longmapsto} \mathbb{R} \ \frac{1}{f} = \text{Inv} \circ f.$$

Cette fonction est dérivable, de dérivée

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = f' \times (\text{Inv})' \circ f = -\frac{f'}{f^2}$$

Le quotient $\frac{g}{f}$ est le produit de deux fonctions dérivables d'où la formule

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = g'\left(\frac{1}{f}\right)' - \frac{gf'}{f^2}$$

La dérivabilité des fonctions puissances se démontre par récurrence :

Pour $n = 1$, c'est vrai car f est supposé dérivable. Si c'est vrai à l'ordre n, alors $f^{n+1} = f^n f$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables et sa dé'rivée vaut

$$(f^{n+1})' = (f^n f)' = (f^n)' f + f^n f' = nf' f^n + f^n f' = (n+1) f^n f'$$

La formule est vraie également pour des n négatifs.

1.5 Théorème des Accroissements finis et tableau de variation

Pour tracer le tableau de variation d'une fonction, il faut utiliser la dérivée de la fonction pour comprendre sa monotonie (décroissance ou décroissance). Le théroème des Accroissements finis nous précise ce lien :

Theorem 1.5.1. *Pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervelle ouvert $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

autrement dit

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} = f'(c)}$$

Géométriquement : Pour deux points $M_1 = (a, f(a))$ et $M_2 = (b, f(b))$ sur le graphe de la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$m la droite (M_1M_2) est une corde dont la pente est le taux de variation

$$\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}.$$

Le théorème nous dit qu'il existe une droite tangente en $(c, f(c))$ qui a même pente que la corde (M_1M_2) i.e. cette tangente est parallèle à la corde.

Remarque Ce thèorème permet de dire que si la dérivée est positive sur un ouvert $]a,b[$, alors la fonction est croissante :

$$\boxed{\text{Si } b > a \text{ et } f'(c) > 0 \text{ alors } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) > 0.}$$

De plus

$$\boxed{\text{Si } f(b) = f(a) \text{ alors il existe un point} c \in]a, b[\text{ tel que} f'(c) = 0.}$$

Développement d'une fonction. Le développement d'une fonction mesure la proximité de la fonction avec une fonction polynomiale au voisinage de zero. On dit qu'une fonction $f(x) :]a, b[\to \mathbb{R}$ admet un développement à l'ordre n au point $x_0 \in]a, b[$ s'il existe une fonction $h :]a, b[\to \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2 x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n h(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} h(x) = 0}$$

En particulier on remarque que $\boxed{a_0 = f(x_0)}$ et $\boxed{a_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}}$.

Remarque. Les fonctions qui admettent un développement à l'ordre 1 sont dérivables.

1.6 Primitives et fonction logarithme :

Theorem 1.6.1. (**Admis**) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors il existe une fonction $F : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que*

$$\boxed{F \text{ dérivable et } F' = f}$$

On dit que f admet une primitive sur I. De plus

1) *Deux fonctions F_1 et F_2 primitives de la même fonction f sur I diffèrent d'une constante sur I :*

$$\text{Pour tout } x \in I, \text{ il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } F_1(x) - F_2(x) = c.$$

2) *On notera pour une valeur $x_0 \in I$, la primitive de f sur I qui s'annule au point x_0 par*

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 1.6.2. *Une fonction polynomiale donnée par $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ a pour primitive qui s'annule en $x = 0$, la fonction*

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

On introduit maintenant le logarithme comme la primitive de la fonction continue Inv.

Définition 1.6.3. *La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \ln(x)$ est la primitive de la fonction $\mathrm{Inv}(x) = \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$*

$$\boxed{\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt}$$

Proposition 1.6.4. *La fonction logarithme vérifie les proprétés suivantes*

1. *La fonction* $\ln : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ *est dérivable et pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$*, on a* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
2. *La fonction* $f(x) = \ln(x)$ *est strictement croissante.*
3. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{\ln(xy) = \ln(x)\ln(y)}$
4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{\ln(x^n) = n\ln(x)}$ *et* $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$

Démonstration : La démonstrations de 1. découle de la définition de la primitive. La définition de la dérivabilité nous permet d'écrire en tout point que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Comme $f'(x_0) = \frac{1}{x_0} > 0$, on observe que $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) > 0$ pour tout $x > x_0$ assez proche de x_0 (pour que le reste soit assez petit devant $f'(x_0)$) et la fonction f est strictement croissante au voisinage de x_0. Cette monotonie locale permet de montrer que pour tout $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$.

Pour l'affirmation 3., on remarque que pour $y \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$ donné par $g(x) = \ln(xy)$ a pour dérivée par la formule des derivation composée pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = \ln'(xy).(xy)' = \frac{1}{xy}.y = \frac{1}{x}.$$

Donc $f(x) = \ln(x)$ est également une primitive de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème 1.6.1, 1-, les fonctions f et g diffèrent d'une constante $c \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - g(x) = c.$$

La constante c peut-être évalué par la valeur des fonctions en $x = 1$ et $c = g(1) - f(1) = \ln(y)$ et on obtient la formule 3 :

$$g(x) = f(x) + c = \ln(x) + \ln(y)$$

L'affirmation 4. découle de l'affirmation 3.

Corollaire 1.6.5. *Sur* $\mathbb{R}^*$*, la fonction* $\mathrm{Inv}(x) = \dfrac{1}{x}$ *a pour primitive* $\ln|x|$*. Plus généralement, soit* f *une fonction dérivable qui ne s'annule pas ; alors une primitive de* $\dfrac{f'}{f}$ *est* $\ln|f|$ *i.e.*

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \quad \textit{et} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)|}$$

1.7 Fonctions réciproques et exponentielle :

Theorem 1.7.1. (**de la Bijection continue. Admis**) *Soit* $f : I \mapsto J = f(I)$ *une fonction continue strictement monotone, alors*

1. $f : I \mapsto J$ *est une bijection*

2. *la fonction réciproque* $f^{-1} : J \mapsto I$ *est également continue et strictement monotone de même monotonie.*
3. *Si* $y = f(x)$*, le point* $(x, f(x))$ *est le symétrique de* $(y, f^{-1}(y)) = (y, x)$ *par rapport à l'axe* $x = y$*.*
4. *Si* f *est dérivable sur l'intervalle* I *et* $f'(x) \neq 0$*, alors* $f^{-1} : J \mapsto I$ *est dérivable sur l'intervalle* J *et*

$$\boxed{\text{Pour tout } y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Démonstration :

1- Strictement monotone implique injectif L'image d'un intervelle est un intervalle=Théorème des valeurs intermédiaires sur la continuité.

2-f^{-1} est continue ?

2-Dérivable se montre grace a la formule des applications composées. Pourquoi, est-ce dérivable.

Proposition 1.7.2. (Application Exponentielle) *L'application* $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ *est l'application réciproque de la fonction* $\ln : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}$*. Elle vérifie*

1. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
2. $\exp(0) = 1$
3. $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ *est dérivable et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $(\exp)'(x) = \exp(x)$

Démonstration : Par définition de la fonction réciproque on a :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \exp(\ln(x)) = e^{\ln(x)} = x$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \;\; \ln(\exp(x)) = \ln(e^x) = x$$

1) On remarque que $\ln(e^{x+y}) = x + y$ et $\ln(e^x e^y) = \ln(e^x) + \ln(e^y) = x + y$

2) On remarque que $\exp(0) = \exp(2.0) = (\exp(0))^2$.

3) La dérivabilité vient du théorème de la bijection continue. Pour la formule de la dérivabilité, on applique la formule de dérivation de la fonction réciproque avec $\ln'(x) = \frac{1}{x}$:

$$\exp'(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$$

1.8 Fonctions Puissances :

Le nombre $\sqrt[q]{x^p}$ ne dépend que du nombre $r = \dfrac{p}{q}$. Si on le note x^r

Proposition 1.8.1. *Soients un nombre réel* $x > 0$ *et deux entiers* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$*. Alors on a :*

$$\boxed{\sqrt[q]{x^p} = e^{\frac{p}{q}\ln x}.}$$

Démonstration : On a

$$\left(e^{\frac{p}{q}\ln x}\right)^q = e^{\frac{p}{q}\ln x \times q} = e^{p\ln x} = e^{\ln x^p} = x^p.$$

Comme $e^{\frac{p}{q}\ln x}$ est un nombre positif on a bien l'égalité avec la racine q-ième.

Le nombre $\sqrt[q]{x^p}$ ne dépend que du nombre $r = \dfrac{p}{q}$. On le note x^r, la fonction puissance d'ordre r.

On peut étendre la notion de fonction puissance à tout $r \in \mathbb{R}$ de la manière suivante

Définition 1.8.2. *Soient $x > 0$ et $r \in \mathbb{R}$. On définit la puissance d'ordre r de x par :*

$$\boxed{x^r := e^{r\ln(x)} \text{ avec } x^0 = 1}$$

Cette fonction vérifie les propriétés usuelles suivantes :

Proposition 1.8.3. *Soient $x, y > 0, r, s, \in \mathbb{R}$, et une fonction dérivable $f : I \mapsto \mathbb{R}_+^*$:*

1- $\boxed{x^{r+s} = x^r x^s,\ x^{-r} = \frac{1}{r}}$

2- $\boxed{(x^r)^s = x^{rs}}$

3- $\boxed{(xy)^r = x^r y^r}$

4- $\boxed{\ln(x^r) = r\ln x}$

5- *La fonction puissance $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée* $\boxed{\dfrac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}}$. *De plus*

$$\boxed{\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \qquad \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}}$$

6- *Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a les primitives suivantes :*

$$\int x^s \mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x| & \text{si } s = -1 \\ \dfrac{x^{s+1}}{s+1} & \text{si } s \neq -1 \end{cases}$$

7- *Si $f : I \mapsto \mathbb{R}_+^*$ est une fonction dérivable*

$$(f^r)' = rf'f^{r-1} \text{ et } \int f'(x)f^r(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|f| & \text{si } s = -1 \\ \dfrac{f^{s+1}}{s+1} & \text{si } s \neq -1 \end{cases}$$

8- *La fonction puissance $x \mapsto x^r$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}_+^*$. Sa réciproque est la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{r}}$.*

1.9 Fonctions Trigonométriques :

Proposition 1.9.1. (Existence de l'exponentielle complexe-Admis) *Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}^*$ dérivable telle que*

$$f'(t) = zf(t) \text{ avec } f(0) = 1.$$

En particulier quand $z = \mathbb{i}$, la solution de cette équation est l'exponentielle complexe $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^1$ que l'on note $\exp(\mathbb{i}x)$ *et :*

$$\boxed{(\exp(\mathbb{i}x))' = \mathbb{i}\exp(\mathbb{i}x)}$$

En particulier les fonction $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme partie réelle et imaginaire de $\exp(\mathbb{i}x)$ *sont dérivable et*

$$\boxed{(\cos x)' = -sinx \;\; et \;\; (\sin x)' = \cos x}.$$

- *La fonction* $\cos : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1]$ *est surjective.*
- *La fonction* $\sin : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1]$ *est surjective.*

Démonstration : L'existence de la solution de l'équation est admise. L'unicité se démontre à partir de la dérivation. Si f est une solution que l'on note $f(t)$, on a :

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + o(t) = 1 + zt + o(t).$$

Si $g(t)$ est une autre solution de l'èquation, on posera $h(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$ car $f(t)$ ne prend pas la valeur 0, et

$$h'(t) = \frac{g'(t)f(t) - g(t)f'(t)}{f^2(t)} = 0$$

Donc $h(t) = h(0) = 1$ et on en déduit que $g(t) = f(t)$. On notera cette fonction $f(t) = e^{zt}$ et on retrouve l'exponentielle complexe quand $z = \mathbb{i}$.

La partie réelle et imaginaire sont les fonctions trigonométriques usuelles et on en déduit la dérivation :

$$(\cos x + \mathbb{i}\sin x)' = (e^{\mathbb{i}x})' = \mathbb{i}e^{\mathbb{i}x} = \mathbb{i}\cos x - \sin x.$$

La surjectivité des fonctions sinus et cosinus se déduit de la surjectivité de la fonction exponentielle complexe. Pour tout $y \in [-1, 1]$, on a surjectivité de la partie réelle comme fonction de $\mathbb{S}^1$ sur $[-1, 1]$

$$y + \mathbb{i}\sqrt{1 - y^2} \in \mathbb{S}^1 \text{ et } \Re e(y + \mathbb{i}\sqrt{1 - y^2}) = y$$

Comme $\cos x = \Re e(e^i x)$, la fonction cosinus est la composée de deux fonctions surjectives :

$$\mathbb{R} \xmapsto{e^{ix}} \mathbb{S}^1 \xmapsto{\Re e} [-1, 1]$$

La surjectivité de la fonction sinus se démontre de la même manière.

Remarque 1.9.2. *Si pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note par $f_z(t)$ la solution de l'équation, on peut montrer grâce à l'unicité que*

$$f_{(z+w)}(t) = f_z(t)f_w(t)$$

En particulier, la valeur de la fonction $f(t)$ en $t = 1$, définie une généralisation de léxponentielle réelle. On note

$$e^z := f_z(1)$$

Cette fonction vérifie $e^{z+w} = e^z e^w$ et $e^0 = 1$. Ainsi on aura $e^{x+\mathbb{i}y} = e^x e^{\mathbb{i}y}$. Cependant si beaucoup de propriétés découlent de l'équation, il faut des connaissances en topologie pour conclure à la surjectivité de l'exponentielle $\exp : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^1$.

Dans un triangle rectangle le rapport des longueurs du côté opposé et du côté adjacent d'un sommet est donné par la fonction tangente :

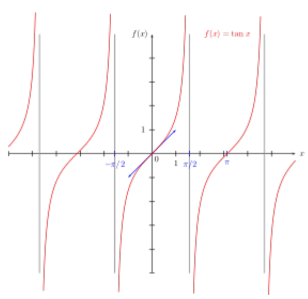
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

— Le domaine de définition de $\tan x$ est $\mathbb{R}$ privé des points où la fonction $\cos x$ s'annule.
— La fonction tangente est périodique de période π
— La fonction tangente est impaire.
— On a la relation $\boxed{\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$.
— La fonction $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est surjective sur $\mathbb{R}$.

Pour démontrer la surjectivité il suffit de construire géométriquement la réciproque de la fonction $\tan x$ sur un triangle rectangle dont le sommet a un angle $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. On peut déterminer explicitement cette construction en utilisant la fonction $f(z) = \frac{z-1}{\mathbb{i}(z+1)}$ (voir exercice).

Proposition 1.9.3. *La fonction* $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \mathbb{R}$ *est une bijection continue strictement croissante. Elle est dérivable*

$$\boxed{(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \qquad \textit{et} \qquad \tan x \geq x}$$



Démonstration : On étudie la fonction sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$ car celle-ci est impaire. Comme quotient de deux fonctions dérivables, la fonction *tanx* est dérivable sur son domaine de définition et

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$$

On remarque que la fonction $h(x) = \tan x - x$ a une dérivée positive $h'(x) = \tan^2 x \geq 0$. Elle est donc croissante et $h(x) \geq h(0) = 0$ ce qui montre l'inégalité.

Définition 1.9.4. *La fonction arctangente est la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *i.e.*

$$\boxed{\arctan : \mathbb{R} \mapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$$

$$\boxed{\textit{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x \qquad \textit{et} \qquad \textit{Pour tout } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan x) = x}$$

— La fonction arctan : $\mathbb{R} \mapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable et $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

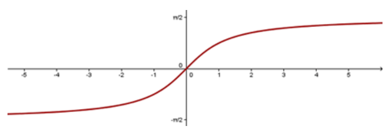
— La fonction $\arctan x$ est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en $x = 0$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

— La fonction $\arctan x$ est impaire car réciproque d'une fonction impaire

— Les valeurs remarquable de la fonction $\arctan x$ sont

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\arctan x$
$\tan\theta$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	x



Définition 1.9.5. *La fonction arcsinus est la bijection réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *i.e.*

$$\boxed{\arcsin : [-1,1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$$

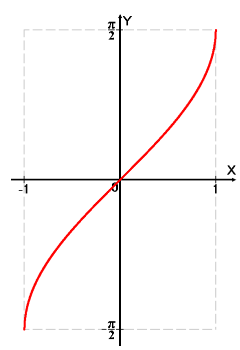
$$\boxed{\textit{Pour tout } x \in [-1,1], \sin(\arcsin(x)) = x \quad \textit{et} \quad \textit{Pour tout } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin x) = x}$$

— *La fonction* $\arcsin x$ *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

— *La fonction* $\arcsin x$ *est l'unique primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *qui s'annule en* $x = 0$ *:*

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

— *La fonction* $\arcsin x$ *est impaire car réciproque d'une fonction impaire*



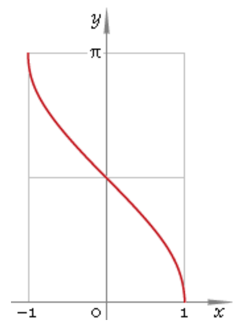
Définition 1.9.6. *La fonction arccosinus est la bijection réciproque de la fonction cosinus restreinte à l'intervalle* $]0, \pi[$ *i.e.*

$$\boxed{\arccos : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x \quad \text{et} \quad \text{Pour tout } x \in [0, \pi], \arccos(\cos x) = x}$$

— *La fonction* $\arccos x$ *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et* $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
— *La fonction* $\arccos x$ *est l'unique primitive de la fonction* $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *qui est égale à* $\pi/2$ *en* $x = 0$ *:*

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$



1.10 Trigonométrie hyperbolique :

A partir de l'exponentielle réelle on définit l'équivalent de la fonction cosinus et sinus pour représenter des points (x, y) qui vérifie l'équation des hyperboles $x^2 - y^2 = 1$.

Définition 1.10.1. *Les fonctions* $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ *et* $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ *sont des fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$. *Elles vérifient les propriétés suivantes*

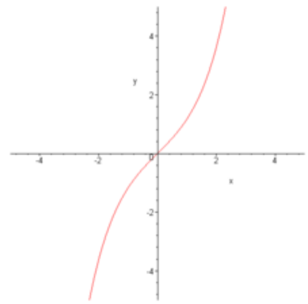
a) $\cosh(-x) = \cosh x$ *et* $\sinh(-x) = -\sinh x$
b) $\cosh x + \sinh x = e^x$
c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
d) $\cosh(x + y) \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
e) $\sinh(x + y) \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
f) $(\cosh x)' = \sinh x$ *et* $(\sinh x)' = \cosh x$

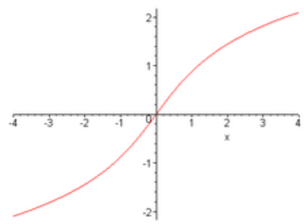
La demonstration des propriétés découlent des propriétés de l'exponentielle. On étudie les fonctions hyperboliques réciproques également.

Définition 1.10.2. *La fonction* $\sinh x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *est une bijection strictement croissante dont la dérivée est* $(\sinh x)' = \cosh x$.

La fonction $\mathrm{argsinh} x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$*(argument du sinus hyperbolique) est impaire et strictement croissante*

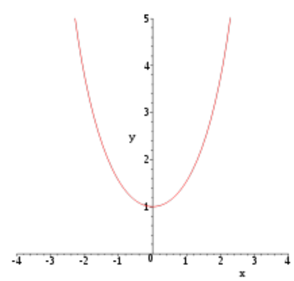
— *La fonction* $\mathrm{argsinh} x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $(\mathrm{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$



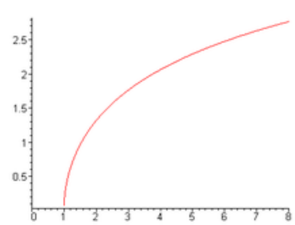


- *La fonction* argsinh$x$ *est l'unique primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *qui s'annule en* $x = 0$ *:*
$$\text{argsinh}x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$
- *L'équation* $\sinh x = a$ *est donné par* $\text{argsinh}a = \ln(a + \sqrt{a^2+1})$

Définition 1.10.3. *La fonction* $\text{cosh}x : \mathbb{R} \mapsto [1, +\infty[$ *est une fonction paire et strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$*, sa dérivée est* $(\cosh x)' = \sinh x$*.*



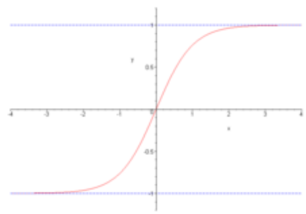
La fonction $\text{argcosh}x : [1, +\infty[\mapsto [0, +\infty[$ *(argument du cosinus hyperbolique) est une fonction strictement croissante.*



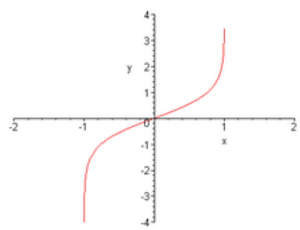
- *La fonction* argcosh$x$ *est dérivable sur* $]1, \infty[$ *et* $(\text{argcosh}x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- *La fonction* argcosh$x$ *est l'unique primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ *qui s'annule en* $x = 0$ *:*
$$\text{argcosh}x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$$

— *L'équation* $\cosh x = a$ *est donné par* $\text{argcosh} a = \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$

Définition 1.10.4. *La fonction* $\tanh x : \mathbb{R} \mapsto] - 1, 1[$ *est une bijection strictement croissante, impaire dont la dérivée est* $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$*.*



La fonction $\text{argtanh} x :] - 1, 1[\mapsto \mathbb{R}$ *est impaire, strictement croissante*



— *La fonction* $\text{argtanh} x$ *est dérivable sur* $] - 1, 1[$ *et* $(\text{argtanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$
— *La fonction* $\tanh x$ *est l'unique primitive de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ *qui s'annule en* $x = 0$ *:*

$$\tanh x = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} \mathrm{d}t$$

— *L'équation* $\tanh x = a$ *est donné par* $\text{argtanh} a = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1+a}{1-a} \right)$

1.11 Primitives des fonctions usuelles

Il s'agit de trouver à partir d'une fonction continue $f : I \mapsto \mathbb{R}$ l'expression d'une primitive. On va résoudre si possible à la main l'équation du premier ordre :

$$F'(x) = f(x) \text{ avec donnée intiale } F(x_0) = 0.$$

Proposition 1.11.1. *Soient* a, b *des nombres réels tel que* $a \neq 0$ *et* f *une fonction qui admet une primitive* F*. Alors la fonction* $f(ax + b)$ *admet la primitive :*

$$\int f(ax + b) \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax + b)$$

Démonstration :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} F(ax + b) \right) = \frac{1}{a} \times a F'(ax + b) = f(ax + b)$$

Proposition 1.11.2. *Soient* $a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*. Alors on a les primitives suivantes :*

1- $$\boxed{\int \frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x-a| & \textit{si } n=1 \\ \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}} & \textit{si } n \neq 1 \end{cases} \quad \textit{sur } \mathbb{R}-\{\alpha\}}$$

2- $$\boxed{\int \frac{1}{(x+\beta)^2+\alpha^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{x+\beta}{\alpha}\right) \ \textit{sur } \mathbb{R}}$$

Démonstration :

$$\frac{1}{(x+\beta)^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{(1+\left(\frac{x+\beta}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{(1+(ax+b)^2}$$

avec $a=\frac{1}{\alpha}$ et $\beta = \frac{\beta}{\alpha}$. La proposition précédente avec $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et sa primitive $\arctan x$ donne le résultat.

Plus généralement, on recherche les primitives des fonctions

Proposition 1.11.3. *Soit la fonction polynomiale $f(x) = x^2+px+q$ avec $p,q \in \mathbb{R}$ dont le discriminant est Δ :*

1- Si $\Delta > 0$, il existe $\alpha \neq 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x réel on a :

$$\boxed{\frac{1}{x^2+px=q} = \frac{1}{(x+\beta)^2+\alpha^2}}$$

2- Si $\Delta > 0$, soient x_1, x_2 les deux racines réelles de $f(x)=0$. Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x réel différent de x_1 et x_2 :

$$\boxed{\frac{1}{x^2+px=q} = k\left(\frac{1}{(x-x_1)} - \frac{1}{(x-x_2)}\right)}$$

3- Si $\Delta = 0$, soit x_1 la racine double de $f(x)=0$. Alors pour tout x réel différent de x_1, on a :

$$\boxed{\frac{1}{x^2+px=q} = \frac{1}{(x-x_1)^2}}$$

Dans tous les cas, on pourra trouver une primitive en fonction de $\ln, \arctan$ et d'une fraction rationnelle en utilisant la proposition précedente.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 1.11.4. *Pour toute fraction rationnelle f de la forme*

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$

il existe des constantes réels r et s tels que on peut décomposer f en

$$\boxed{f(x) = r\frac{2x+p}{x^2+px+q} + s\frac{1}{x^2+px+q}}$$

On pourra donc trouver une primitive de f en fonction de $\ln, \arctan$ et d'une fraction rationnelle.

Tableau des primitives usuelles

Fonctions	Intervalle	Primitive
$x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ où $c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \ln|x| + c$ où $c \in \mathbb{R}$

Calcul de primitives par intégration par parties Sur un intervalle $I \overset{u,v}{\longmapsto} \mathbb{R}$ deux fonctions continues, dérivables et à dérivées continues. Le calcul de $u'(x)v(x)$ se ramène au calcul de la primitive de $u(x)v'(x)$:

$$\boxed{\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x}$$

Si on charche une primitive qui s'annule en $x_0 \in I$, on a

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} u(t)v'(t)\mathrm{d}t}$$

Démonstration : En dérivant la formule du produit, on trouve

$$(u(x)v(x))' - u(x)v'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x) = u'(x)v(x)$$

Soit F une primitive de $u'(x)v(x)$. D'après la formule précedente, $uv - F$ est une primitive de $u'v$, donc

$$\int_{x_0}^{x} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [uv - F]_{x_0}^{x} = [u(t)v(t)]_{x_0}^{x} - [F(t)]_{x_0}^{x} = [u(t)v(t)]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} u(t)v'(t)\mathrm{d}t.$$

Calcul des primitives par changement de variable

Le changement de variable et une technique qui de ramener le calcul d'une primitive au calcul d'une autre primitive moyennent le choix d'une nouvelle "variable" ou plutôt une fonction. Il s'agit en fait de pouvoir reconnaître une dérivée d'une fonction composée :

$$(f \circ \varphi)'(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Proposition 1.11.5. (Dérivée d'une fonction composée) : *Soient deux fonctions d'une variable réelle :*

$$I \overset{\varphi}{\mapsto} J \overset{f}{\mapsto} \mathbb{R}$$

telle que φ soit dérivable, et φ, φ', f sont continues. Alors :

$$\boxed{\int f'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int f(x)\mathrm{d}x \text{ avec } x = \varphi(t).}$$

Démonstration On utilise la dérivée d'une fonction composée. Si F est la primitive de la fonction f, alors

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t).$$

Méthode de calcul de la primitive d'une fonction de la forme $g(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$:

1. Remplacer dans la primitive $\varphi(t)$ par x
2. Remplacer $\varphi'(t)\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$
3. Calculer une primitive de f en exprimant le résultat avec la variable x
4. Remplacer la variable x par $\varphi(t)$ dans le résultat obtenu.

Proposition 1.11.6. (Changement de variable bijectif) *Soient deux fonctions $I \overset{\varphi}{\mapsto} J \overset{f}{\mapsto} \mathbb{R}$ telles que boxedφ est bijective, sa réciproqie φ^{-1} est dérivable, et φ, φ', f sont continues. Alors :*

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = \int f'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \text{ avec } x = \varphi(t).}$$

Démonstration : Comme φ, φ', f sont continues, il en est de même de $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$; il existe une primitive G de cette fonction composée. Alors en utilisant la bijection pour s'assurer de la dérivabilité de $\varphi^{-1}(x)$:

$$\frac{G(\varphi^{-1}(x))}{dx} = G'((\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \big(f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\big)\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$$

Remarque 1.11.7. *Si $\psi : J \mapsto I$ est une bijection dérivable et ψ^{-1}, ψ' et f sont continues. Alors*

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = \int f'(\psi^{-1}(t))\frac{\mathrm{d}t}{\psi'(\psi^{-1}(t))} \text{ avec } t = \psi(x).}$$

La notation de Leibnitz permet d'unifier les notations $x = \varphi(t)$ et $t = \psi(t)$ en utilisant

$$x = \varphi(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$$

et on a également :

$$t = \psi(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \psi'(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\psi'(x)} = \frac{\mathrm{d}t}{\psi'(\psi^{-1}(t))}.$$

En remplacant le x et les $\mathrm{d}x$ par les t et les $\mathrm{d}t$, on obtient une nouvelle fonction dont on calculera la primitive.