

## 摘 要

J. H. Wilkinson<sup>[2]</sup>建立了非奇异矩阵的逆是矩阵元素的连续函数的理论。G. W. Stewart<sup>[2]</sup>推出了矩阵的广义逆的连续性。为了得到Drazin逆的连续性, 本文先给出了 $M$ -矩阵、 $H$ -矩阵类的逆的连续性。Campbell和Meyer<sup>[2]</sup>也给出了Drazin逆的连续性性质, 但没有给出明显的边界。

Drazin逆对扰动是很不稳定的。然而, 在某种特定的扰动条件下, 矩阵 $(A + E)^D$ 与 $A^D$ 的接近程度能够得到量化且也能得到明显的相对误差边界。基于Drazin逆的不同形式, 很多科学家和学者从事这一方面的研究。U. G. Rothblum给出的Drazin逆的以下的表达式:

$$A^D = (A - H)^{-1}(I - H) = (I - H)(A - H)^{-1}$$

其中 $H = I - AA^D = I - A^DA$ 。基于这个表达式, 我们在本文中也给出了 $\|(A + E)^D - A^D\|_2 / \|A^D\|$ 和 $\|(A + E)^\# - A^D\|_2 / \|A^D\|_2$ 的范数估计, 并与前人的成果进行了比较。

**关键词:**  $M$ -矩阵,  $H$ -矩阵, Drazin逆, Pseudo-Drazin逆, 条件数



## ABSTRACT

The theory that the inverse of a nonsingular matrix is continuous function of the elements of the matrix was established by J. H. Wilkinson<sup>[2]</sup>. The continuity of the generalized inverse  $A^+$  of a matrix  $A$  was introduced by G. W. Stewart<sup>[2]</sup>. In this paper, at first, the continuity of the special matrices inverse, such that  $M$ –matrices and  $H$ –matrices, respectively, are provided. Campbell and Meyer<sup>[2]</sup> also established the continuity properties of Drazin inverse, but the explicit bound was not given.

The Drazin inverse is unstable with respect to perturbation. However, under some specific perturbation, the closeness of the matrices  $(A + E)^D$  and  $A^D$  can be proved and the explicit bound the relation error can also be obtained. Based on the different representations of Drazin inverse, many scientists and scholars have worked it research. U. G. Rothblum gave the following representation of Drazin inverse:

$$A^D = (A - H)^{-1}(I - H) = (I - H)(A - H)^{-1}$$

where  $H = I - AA^D = I - A^D A$ . Based on the representation, we also obtain the norm estimate of  $\|(A + E)^D - A^D\|_2 / \|A^D\|$  and  $\|(A + E)^\# - A^D\|_2 / \|A^D\|_2$  and compare with the precedent results.

**Keywords:**  $M$ –matrices,  $H$ –matrices, Drazin inverse, Pseudo-Drazin inverse, Condition number



# 目 录

第一章 绪论 .....	1
1.1 研究工作的背景与意义 .....	1
1.1.1 研究工作的背景 .....	1
1.1.2 研究工作的意义 .....	1
1.2 国内外研究历史与现状 .....	3
1.3 本文的主要贡献与创新 .....	3
1.4 本文的结构安排 .....	3
1.5 本章小结 .....	3
第二章 基于趋势预测算法的理论基础 .....	4
2.1 卫星在轨异变数据分析 .....	4
2.2 小波分析理论 .....	4
2.2.1 小波的定义 .....	4
2.2.2 连续小波变换 .....	6
2.2.3 离散小波变换 .....	8
2.3 自回归滑动平均 (ARMA) 模型 .....	9
2.3.1 ARMA模型的定义 .....	9
2.3.2 ARMA序列的自相关、偏相关函数 .....	10
2.3.2.1 自相关函数 .....	10
2.3.2.2 偏相关函数 .....	11
2.3.3 ARMA模型的参数估计 .....	12
2.4 支撑向量机回归 (SVR) 模型 .....	13
2.5 本章小结 .....	13
致 谢 .....	14
参考文献 .....	15













## 第一章 绪论

### 1.1 研究工作的背景与意义

本论文依托于国家“973”项目“卫星故障演变规律与故障反演技术”。本项目基于两颗国防卫星，从2011年至2013年近两年半的数十种遥测信号，在时域、频域、时频联合域及其他变换域，对卫星在轨异变状态进行研究。项目主要研究内容包括，对卫星遥测信号异变状态的特征提取，分析不同特征参数的演变趋势，建立特征参数模型，最后对卫星状态异变进行短期预测。本项目旨在，通过对卫星遥测信号的分析，能够掌握卫星的健康状况，即卫星的异变状态，从而为卫星管理人员提供正确的决策参考。

#### 1.1.1 研究工作的背景

本论文的研究工作，是在国内卫星系统不断扩大，对卫星运行的稳定性和卫星寿命水平的要求不断提高的同时提出的。研究工作不仅仅要求对卫星故障进行诊断和预测，同时对卫星的异变状态的检测和预测也提出了要求。

卫星“状态异变”的含义较“故障信号”更为广泛。在卫星系统中，故障信号指的是卫星的机械装置或者电路系统已经不能完成预设的功能时产生的信号，即已经出现了功能性缺失<sup>[1]</sup>；而状态异变包括故障信号，它还包括，在发生功能性缺失的前后，设备产生的不同于正常状态下的信号。在此要说明的是，异变信号的出现可能伴随着故障的生成，也有可能不会引起故障，即设备出现扰动，但是并未造成功能性缺失。所以，相较于故障信号，状态异变更具有隐蔽性，随机性。这样对信号特征的提取，建模，乃至预测的难度都大大提高。在本论文及项目中，研究对象状态异变信号使用的都是实际的卫星遥测信号，由于遥测信号的接收、干扰等因素，信号的野值较多，质量较差。并且卫星遥测信号，大多具有非平稳的特性。这些因素对状态异变信号的分析 and 预测工作提出了更大的挑战。

#### 1.1.2 研究工作的意义

首先，卫星造价昂贵，工艺复杂，制造周期长，且具有唯一性，一旦卫星因异变而损坏废弃，造成的损失将非常严重。所以研究卫星状态的异变并预测，对卫星行业具有极其重要的意义。

对于投资巨大和庞大复杂的卫星系统，可靠性和安全性是迫切需要的。否则，一次故障可能导致灾难性的后果和巨大的经济损失。如1986年1月美国“挑战

者”号航天飞机失事导致7名字航员全部遇难；1999年4月9日到5月4日的不到一个月的时间里，美国大力神4B、雅典娜2、德尔它2运载火箭等发射连续失败，损失达十亿美元；1999年11月日本H2运载火箭发射失败，损失2.99亿美元；2000年11月，印度INSA-2B卫星丧失对地指向功能，造成重大损失；2003年2月1日美国哥伦比亚号航天飞机在返回途中解体，机组人员全部遇难。可见，对卫星系统的故障乃至状态异变进行诊断和预测，对航天事业的健康发展有着重要意义。

其次，目前我国的卫星在数量、型号、功能等各方面不断增加，加上国外势力对我国卫星的干扰等其他因素，传统的异变分析及预测方法将不再完全适用于目前的卫星状况。所以研究更可靠的预测算法必然是目前的趋势。

随着在轨卫星数量、设计寿命和型号种类的不断增加，维持其安全稳定运行变得越来越重要，在轨管理的难度也逐年加大。在轨卫星长期运行在空间环境中，受到多种不确定性因素的作用，其性能与功能可能会出现变化，反映在遥测参数上也会有些变化，如果在轨卫星发生异常，相应的遥测参数的变化趋势也会发生改变。因此，分析在轨卫星的遥测数据变化规律，选择相适应的数据预测方法，对遥测数据进行预测，并在此基础上实现预警，可以在早期及时发现遥测数据的异常变化，有效避免可能发生的重大故障，降低卫星在轨运行的风险，同时为异常的处理赢得宝贵时间，这对于提高卫星在轨运行的安全性和可靠性具有重要的意义<sup>[2]</sup>。

最后，当前卫星异变状态分析和预测工作通常是一项耗时、重复和劳动强度很大的工作<sup>[3]</sup>。所以研究自动化的卫星状态异变的预测算法将为卫星管理工作带来极大的便利。

在大部分情况下，卫星管理人员采用手工检查卫星遥测数据的方式来确定卫星是处于健康状态还是异变状态，以及卫星是否存在危险的趋势，以预测卫星是否在不久的将来处于故障状态。应用的具体方法或者是一些统计学估计方法，或者是通过比较卫星遥测参数的实测值与期望值之间的差异方法。这些方法存在严重的缺陷，主要是过分依赖人工经验以及难以实现故障诊断与预测的自动推理<sup>[3]</sup>。当卫星状态异变出现了新的模式，传统方法的预测结果就会出现较大偏差。研究自动化的卫星状态异变的预测方法，既为卫星管理人员提供了便利，更重要的是，在预测精度上有显著提升，减小预测的虚警和漏警。

## **1.2 国内外研究历史与现状**

## **1.3 本文的主要贡献与创新**

## **1.4 本文的结构安排**

## **1.5 本章小结**

## 第二章 基于趋势预测算法的理论基础

本论文对卫星在轨异变状态的预测算法基于两种思路进行研究，第一种是基于趋势的预测算法，第二种是基于相似度的预测算法。在本章中，将详细描述基于趋势的预测算法的理论研究，而这两种算法的理论研究和验证试验的余下内容，会在之后的章节分别中逐一介绍。

在此，首先对卫星在轨异变数据进行简要的分析介绍。一

### 2.1 卫星在轨异变数据分析

### 2.2 小波分析理论

在1984年，Morlet和Grossman提出小波（wavelet）一词，他们用的是法语词 ondelette，意思就是“小波”。后来在英语里，“onde”被改为“wave”而成了 wavelet<sup>[4]</sup>。小波分析算法作为一种数学理论和方法在科学界引起越来越多的重视，并被运用到各个技术领域。

由于小波具有可以自由“变焦”的自适应窗口和紧支撑性，特别适合处理卫星信号这种细节分量多而杂的信号。因此，本论文中采用小波算法对卫星在轨异变信号进行处理分析。

#### 2.2.1 小波的定义

小波分析，即小波变换，是从傅里叶变换发展而来，其中还经历了短时傅里叶变换，最后建立小波理论。

Fourier在1807年提出，任何函数都可以用一组正余弦函数的和来表示，这就是傅里叶分析。傅里叶变换是傅里叶分析的抽象，它是将信号分解成不同频率的数学方法。它可以将时域中某一信号变换至频域中，予以定量认识和分析，他能描述信号的整体频谱特征。从实用的角度出发，当人们考虑傅里叶分析的时候，通常指的是（积分）傅里叶变换和傅里叶级数。

时间信号函数 $f(t) \in L^1(R)$ （其中 $t$ 表示时间域自变量），满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$ 时，其连续傅里叶变换 $F(\omega)$ （其中 $\omega$ 表示时间域自变量），定义为：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (2-1)$$

$F(\omega)$ 的傅里叶逆变换定义为:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} F(\omega) d\omega \quad (2-2)$$

为了计算傅里叶变换, 需要数值积分, 即取 $f(t)$ 在 $R$ 上的离散点上的值来计算这个积分。下面给出离散傅里叶变换 (DFT) 的定义。

给定的离散时间序列 $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ , 设该序列绝对可和, 即满足 $\sum_{n=0}^{N-1} |f_n| < \infty$ 时, 序列 $\{f_n\}$ 的离散傅里叶变换定义为:

$$X(k) = F(f_n) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi k}{N}n} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2-3)$$

序列 $\{X(k)\}$ 的离散傅里叶逆变换定义为:

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i\frac{2\pi k}{N}n} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2-4)$$

虽然傅里叶变换能够将信号的时域特征和频域特征联系起来, 并分别观察, 但却不能把两者有机的结合起来。这是因为傅里叶变换是一种全局的变换, 从式(2-1)和式(2-3)可以看出, 它是整个时间域内的积分, 没有局部分析信号的功能。也就是说, 对于傅里叶谱中的某一频率, 不知道这个频率是在什么时候产生的。这样在信号分析中面临一对矛盾: 时域和频域的局部化矛盾。

在实际的信号处理过程中, 尤其是对非平稳信号的处理中, 信号在任一时刻附近的频域特征都很重要。为了克服傅里叶变换在时域上无分辨率能力的缺点, Dennis Gabor引入了短时傅里叶变换 (STFT), 也称窗口傅里叶变换, 其实质是在傅里叶变换中加一个时间窗, 以给出信号的谱的时变信息。

短时傅里叶变换的基本思想是把信号划分成许多小的时间间隔, 用傅里叶变换分析每一个时间间隔, 以便确定该时间间隔存在的频率。其表达式为:

$$S(\omega, \tau) = \int_R f(t) g^*(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \quad (2-5)$$

其中“\*”表示复共扼,  $g(t)$ 是有紧支集的函数,  $f(t)$ 是进入分析的信号。 $e^{-i\omega t}$ 起频限作用,  $g(t)$ 起时限作用, 合在一起起时频分析作用。随着时间 $\tau$ 的变化, 所确定的“时间窗”在 $t$ 轴上移动, 使 $f(t)$ “逐渐”进行分析。因此,  $g(t)$ 被称为窗口函数,  $S(\omega, \tau)$ 大致反映了 $f(t)$ 在时刻 $\tau$ 、频率 $\omega$ 的“信号成分”的相对含量。

由此可见, 短时傅里叶变换在一定程度上克服了标准傅里叶变换不具有时域局部分析能力的缺陷, 但它也存在着自身不可克服的缺陷, 即当窗函数 $g(t)$ 确定后, 时间宽度是一个定值, 矩形窗口的形状就确定了,  $\tau, \omega$ 只能改变窗口在相平面上的位置, 而不能改变窗口的形状。可以说短时傅里叶变换实质上是具有单一

分辨率的信号分析方法，若要改变分辨率，则必须重新选择窗函数 $g(t)$ 。因此，对于非平稳信号，短时傅里叶变换同样不适合。

所以对于在现实情况中普片存在的非平稳信号，信号分析方法希望拥有一个灵活可变的时间窗。即对于由多种频率分量组成的非平稳信号，当信号尖锐变化时，需要有一个短的时间窗为其提供更多的频率信息当信号变化平缓时，需要一个长的时间窗用于描述信号的整体行为。这就导致了小波分析的出现。

现给出小波变换的定义，对于函数 $f \in l^2(R)$ 的小波变换为：

$$w_f(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_R \bar{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) f(t) dt \quad (2-6)$$

其中， $a, b \in R, a > 0$ ，式中 $a$ 为伸缩（尺度）因子， $b$ 为平移（位移）因子， $\langle \dots \rangle$ 为内积， $\bar{\Psi}$ 是 $\Psi$ 的共轭。

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2-7)$$

此函数称为小波函数族，式中 $a$ 为伸缩因子， $b$ 为平移因子。

### 2.2.2 连续小波变换

先给出平方可积的函数空间 $L^2(R)$ 的定义，它是要求在整个实数轴 $R$ 上的满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ 的可测函数 $f(t)$ 的全体集合，并带有相应的函数运算和内积。工程上常常说成是能量有限的全体信号的集合。

小波（基本小波或母小波）就是函数空间 $L^2(R)$ 中满足下述条件的一个函数或者信号 $\Psi(t)$ ：

$$C_\Psi = \int_{R^*} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (2-8)$$

其中， $R^* = R - 0$ 表示非零实数全体。 $\Psi(t)$ 也称为小波函数，或称母小波。式(2-8)称为容许性条件。

对于任意的实数对 $(a,b)$ ，其中，参数 $a$ 必须为非零参数，连续小波的函数定义式如下：

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a, b \in R; a \neq 0) \quad (2-9)$$

它是由小波母函数 $\Psi(t)$ 经伸缩和平移后生成的依赖于参数 $(a,b)$ 的连续小波函数序列，简称为小波。其中：

- (1) 式(2-9)中 $a$ 为伸缩因子， $b$ 为平移因子。如果小波母函数 $\Psi(t)$ 的傅里叶变换 $\hat{\Psi}(\omega)$ 在 $\omega = 0$ 是连续的，那么，式(2-8)说明 $\hat{\Psi}(0) = 0$ 。这说明，函数 $\Psi(t)$ 有“波动”的特点，另外，小波函数 $\Psi(t)$ 只在原点的附近它的波



动才会明显偏离水平轴，在远离原点的地方函数值将迅速“衰减”为零，整个波动趋于平静。这是称函数 $\Psi(t)$ 为“小波”函数的基本原因。

- (2) 对于任意的参数对 $(a, b)$ ，显然 $\int_R \Psi_{a,b}(t)dt = 0$ 。但是，这里 $\Psi_{a,b}(t)$ 却是在的附近存在 $t = b$ 明显的波动，而且，有明显波动的范围的大小完全依赖于参数 $a$ 的变化。当 $a = 1$ 时，这个范围和原来的小波函数 $\Psi(t)$ 的范围是一致的；当 $a > 1$ 时，这个范围比原来的小波函数的范围要大一些，小波的波形变矮变胖，而且，当 $a$ 变得越来越大时，小波的波形变得越来越胖、越来越矮，整个函数的形状表现出来的变化越来越缓慢；当 $0 < a < 1$ 时， $\Psi_{a,b}(t)$ 在 $t = b$ 的附近存在明显波动的范围比原来的小波母函数的 $\Psi(t)$ 要小，小波的波形变得尖锐而消瘦。

- (3) 设初始伸缩系数为 $a_0$ ，当 $a > a_0$ 时，式(2-9)中 $\Psi_{a,b}(t)$ 定域增大，窗口变大；当 $a < a_0$ 时，则窗口变小，窗的高度增加，窗口面积大小不变（ $b$ 一定时）。以上体现了小波的“变焦”能力。

为使信号分解及重构的实现在数值上是稳定的，要求小波基函数 $\Psi(t)$ 应该满足下面的约束条件：

- (1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|dt < \infty$ ；  
 (2)  $\hat{\Psi}(\omega)$ 在原点必须等于0，即 $\hat{\Psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)dt = 0$ ；  
 (3)  $A \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\Psi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B$ ， $(0 < A \leq B < \infty)$ 。

对于任意的函数或者信号 $f(t) \in L^2(R)$ ，用小波函数集 $\{\Psi_{a,b}(t)\}$ 进行分解运算，其连续小波变换为：

$$W_f(a, b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle = |a|^{-1} \int_R f(t) \bar{\Psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2-10)$$

其中， $\langle \dots \rangle$ 为内积， $\bar{\Psi}$ 是 $\Psi$ 的共轭， $W$ 表示小波变换。因为小波母函数 $\Psi(t)$ 只有在原点的附近才会有明显偏离水平轴的波动，在远离原点的地方函数值将迅速衰减为零，整个波动趋于平静，所以，对于任意的参数对 $(a, b)$ ，小波函数 $\Psi_{a,b}(t)$ 在 $t = b$ 的附近存在明显的波动，远离 $t = b$ 的地方将迅速地衰减到0，因而，从形式上可以看出，式(2-10)的数值 $\Psi_f(a, b)$ 表明本质上是原来的函数或者信号 $f(t)$ 在 $t = b$ 点附近按 $\Psi_{a,b}(t)$ 进行加权的平均，体现的是以 $\Psi_{a,b}(t)$ 为标准快慢的 $f(t)$ 的变化情况，这样，参数 $b$ 表示分析的时间中心或时间点，而参数 $a$ 体现的是以 $t = b$ 为中心的附近范围的大小，所以，一般称参数 $a$ 为尺度参数，而参数 $b$ 为时间中心参数。

小波变换的逆变换重构公式为：

$$f(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a, b) \Psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (2-11)$$

### 2.2.3 离散小波变换

工程应用中所采集的信号（如位移量、压力、电压电荷量），都是有限长的离散信号。在实际信号处理中，出于数值计算的可行性和理论分析的简便性考虑，对连续小波 $\Psi_{a,b}(t)$ 和连续小波变换 $W_f(a,b)$ ，加以离散化处理。这一离散化都是针对连续的尺度参数 $a$ 和连续的平移参数 $b$ 的，而不是针对时间变量 $t$ 的。

把连续小波变换式(2-9)中尺度参数 $a$ 和平移参数 $b$ 的离散化分别取作 $a = a_0^j$ ， $b = ka_0^j b_0$ ， $j \in Z$ ，扩展步长 $a_0 \neq 1$ 是固定值，为方便起见，取定 $a_0 > 1$ 与 $b_0 > 0$ 。可得到相应的离散小波集：

$$\Psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \Psi(a_0^{-j} t - kb_0) \quad (j, k \in Z) \quad (2-12)$$

离散化小波变换系数则可以表示为：

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi_{j,k}^*(t) dt \quad (2-13)$$

离散小波变换重构公式为：

$$f(t) = C \int_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} \Psi_{j,k}(t) + R \quad (2-14)$$

其中 $C$ 为一个与信号无关的常数， $R$ 为误差项。从上式可以看出，要使 $f(t)$ 能够达到不失真重构，这要求我们选取适当的 $a_0$ 、 $b_0$ 及 $\Psi(t)$ ，使 $\Psi_{j,k}(t)$ 构成表示信号空间上的完备集，从而实现小波集 $\{\Psi_{j,k}(t)\}$ 的精确线性表示，即使 $R = 0$ 。

基于上述小波变换的变形分析应用特征如下：

- （1）小波变换是一种多分辨率分析，在变换中取较小的 $a_0^j$ ，则时间的分辨率较高，这时可用于分析频率较高的建筑物的动态变形（如高层建筑的在风力作用下的摆），可以揭示建筑物动态变形特征；
- （2）当取较大的 $a_0^j$ 时，则频率分辨率较高，这时宜于分析频率较低的常见的建筑物变形，对分析建筑物规律并进行预报具有较好的稳健性。

设小波为 $\Psi(t)$ ，如果函数族

$$\{\Psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j} t - k); j, k \in Z\}$$

构成空间 $L^2(R)$ 的标准正交基，即满足下述条件的基：

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{l,n} \rangle = \int_R \Psi_{j,k}(t) \bar{\Psi}_{l,n}(t) dt = \delta(j-l) \delta(k-n) \quad (2-15)$$

则称 $\Psi(t)$ 是正交小波， $\delta(m)$ 其中符号的定义是：

$$\delta(m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (2-16)$$

对任何函数或信号 $f(t)$ ，有如下的波级数展开：

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \quad (2-17)$$

其中的系数 $A_{j,k}$ 由公式 $A_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle = \int_R f(t) \bar{\Psi}_{j,k}(t) dt$ 给出，称为小波系数。容易看出，小波系数 $A_{j,k}$ 正好是信号 $f(t)$ 的连续小波变换 $W_f(a,b)$ 在尺度系数 $a$ 的二进离散点 $a_j = 2^j$ 和时间中心参数 $b$ 的二进整倍数的离散点 $b_k = 2^j k$ 上所构成的点 $(2^j, 2^j k)$ 上的取值，因此，小波系数 $A_{j,k}$ 实际上是信号 $f(t)$ 的离散小波变换。也就是说，在对小波添加一定的限制之一下，连续小波变换和离散小波变换在形式上简单明了地统一起来了，而且，连续小波变换和离散小波变换都适合空间 $L^2(R)$ 上的全体信号。

## 2.3 自回归滑动平均（ARMA）模型

ARMA模型是由美国统计学家 George E. P. Box 和英国统计学家 Gwilym Jenkins 在二十世纪七十年代提出的时序分析模型<sup>[5]</sup>，即自回归滑动平均模型（Auto Regressive Moving Average Model）。

用ARMA模型模拟随机性时序在实际应用中许多方便之处。例如它是线性的，只要给出少量参数后，模型就完全确定，便于处理；另外，ARMA模型具有有理谱密度，它能逼近任何连续谱密度；最后，ARMA模型便于分析数据的结构和内在性质，也便于在线性最小方差意义下进行最佳预报和控制。

### 2.3.1 ARMA模型的定义

ARMA模型是AR模型和MA模型的组合。

AR模型的预测方式是通过历史的观测值和现在的干扰值的线性组合对数据的未来走势进行预测，自回归模型的数学公式为：

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2-18)$$

其中， $p$ 为自回归模型的阶数， $\phi_i, (i = 1, 2, \dots, p)$ 为模型的待定系数， $\varepsilon_t$ 为误差， $x_t$ 为平稳时间序列。

MA模型的预测方式是通过历史的干扰值和现在的干扰值的线性组合对数据的未来走势进行预测。滑动平均模型的数学公式为：

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2-19)$$

其中， $q$ 为自回归模型的阶数， $\theta_i, (i = 1, 2, \dots, q)$ 为模型的待定系数， $\varepsilon_t$ 为误差， $x_t$ 为一个平稳时间序列。

ARMA( $p, q$ )的定义式为:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2-20)$$

在该模型中引入延迟算子, ARMA( $p, q$ )模型简记为:

$$\Phi(B)x_t = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (2-21)$$

其中,  $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B^1 - \cdots - \phi_p B^p$  为  $p$  阶自回归系数多项式;  $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B^1 - \cdots - \theta_q B^q$  为  $q$  阶移动平均系数多项式。

当  $p$  和  $q$  分别等于零时, ARMA 模型分别退化成 AR 模型和 MA 模型。

### 2.3.2 ARMA 序列的自相关、偏相关函数

在实际中, 我们经常研究一对变量之间的夫系。在收集的数据处理中, 用相关概念来描述两个变量之间的相依关系。它有两种形式, 一种是线性相关, 指两个变量之间可用线性方程来描述; 另一种是非线性相关, 指两变量之间需用非线性方程来描述。不过, 这些都是与时间无关的随机变量之间的关联性。在时间序列分析中, 需要了解与时间有关的信息在不同时刻的取值有无内在的关联性, 这就需要引入相关函数的概念。

#### 2.3.2.1 自相关函数

在  $t, t+a$  时刻的样本记录  $X(t), X(t+a)$  的自相关性可以通过在观察时间  $T$  上对这两个值的乘积作平均得到。  $T$  趋于无穷时, 平均乘积的极限将接近一个正确的自相关函数。用公式表示, 就是:  $R_x(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+a)dt$ 。零均值化后的样本自协方差函数和样本自相关函数可作为自协方差函数和自相关函数的估计。样本自协方差函数:

$$\hat{r}_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{n-k} x_t x_{t+k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-22)$$

样本自相关函数:

$$\hat{p}_k = \frac{\hat{r}_k}{\hat{r}_0} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-23)$$

(1) 对于 AR 过程, 用  $x_{t-k}$  乘以式(2-18)的两端, 并取数学期望, 可得差分方程:

$$r_k = \phi_1 r_{k-1} + \phi_2 r_{k-2} + \cdots + \phi_p r_{k-p} \quad (2-24)$$

当  $k > 0$  时,  $x_{t-k}$  和  $a_t$  不相关, 所以  $E[x_{t-k}a_t] = 0$ 。可得:

$$p_k = \phi_1 p_{k-1} + \phi_2 p_{k-2} + \cdots + \phi_p p_{k-p} \quad (2-25)$$

当 $k = 0$ 时, 因为 $E[x_t a_t] = E[a_t^2] = \sigma_a^2$ 。可得:

$$p_k = C_1 w_1^{-k} + C_2 w_2^{-k} + \cdots + C_p w_p^{-k}, k > -p \quad (2-26)$$

其中,  $w_1, w_2, \dots, w_p$  是  $\Psi(w) = 0$  的根, 系数  $C_1, C_2, \dots, C_p$  由  $P$  个初始值来定。

一般来说, 平稳时间序列的自相关函数是由指数衰减和衰减正弦波组成。即自相关函数的尾部不可能在延迟某步之后等于零, 而只是按负指数律衰减。因此, AR 过程的自相关函数序列具有拖尾的特性。

(2) 对于 MA 过程, 其自相关函数为:

$$p_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (2-27)$$

可见, MA 序列的自相关函数, 从  $k > q$  以后全部为零。我们称这一性质为“截尾”, 反之, 可以证明, 若一平稳时间序列的自相关函数为截尾, 那么它必是 MA( $q$ ) 序列。

### 2.3.2.2 偏相关函数

MA( $q$ ) 过程的自协方差或自相关函数在  $q$  步滞后就截止为零, 截尾性是 MA 序列特有的标志, 据此可以推测出 MA( $q$ ) 模型的阶数。而 AR( $p$ ) 过程的自相关函数没有截止点, 拖尾性是 AR 和 ARMA 序列的共有特性。为了构造出某种函数使得 AR( $p$ ) 过程在滞后  $P$  步之后能够截止, 引入偏相关函数的概念。

设  $\{x_t\}$  为平稳、零均值序列, 考虑  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}$  对  $x_t$  的线性最小方差估计, 即选择系数  $\Phi_{k1}, \Phi_{k2}, \dots, \Phi_{kk}$ , 使得

$$\delta = E[x_t - \sum_{j=1}^k \phi_{kj} x_{t-j}]^2 = \gamma_0 - 2 \sum_{i,j=1}^k \phi_{kj} \phi_{ki} \gamma_{j-i}$$

达到极小。为达此目的, 对  $\delta$  的右端分别求偏导数  $\frac{\partial \delta}{\partial \Phi_{kj}}, j = 1, 2, \dots, k$ , 令其为零, 便得到  $\Phi_{kj}$  应该满足的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1 & \cdots & p_{k-1} \\ p_1 & 1 & \cdots & p_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \quad (2-28)$$

对  $k = 1, 2, \dots$ ，依次利用Cramer法则，可得：

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{k-2} & p_1 \\ p_1 & 1 & p_1 & \cdots & p_{k-3} & p_2 \\ p_2 & p_1 & 1 & \cdots & p_{k-4} & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_1 & p_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{k-1} \\ p_1 & 1 & p_1 & \cdots & p_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \quad (2-29)$$

可以看出，当  $k > p$  时， $\text{AR}(p)$  过程的行列式  $\phi_{kk}$  将变为零，因为其中的任一行可以写成其它行的线性组合。我们称  $\phi_{kk}, (k = 1, 2, \dots)$  为  $x_t$  的偏相关函数。显然，偏相关函数  $\phi_{kk}$  是利用自相关函数  $p_k$  构造出来的。对于  $p$  阶自回归过程  $\text{AR}(p)$ ，出现了偏相关函数序列的截尾特性： $\phi_{kk} \neq 0, k \leq p$ ； $\phi_{kk} = 0, k > p$ 。

这就是说  $\text{AR}(p)$  模型的偏相关函数是  $p$  步截尾的，并且也只有  $\text{AR}$  过程的偏相关函数具有截尾的特性。

故此，我们可以依据样本的自相关、偏相关函数的截尾性和拖尾性，辨别模型类别，识别模型的阶数。

### 2.3.3 ARMA模型的参数估计

模型参数估计是基于  $\text{ARMA}$  模型的参数识别一个关键，它既是识别的主要目标，又是进行模型检验的基础。选择适当的时间序列模型建模，通过考察样本自相关系数与偏自相关系数的性质进行初步识别：

- 若平稳时间序列的偏相关函数是截尾的，而自相关函数是拖尾的，则可断定此序列适合  $\text{AR}$  模型。
- 若平稳时间序列的偏相关函数是拖尾的，而自相关函数是截尾的，则可断定此序列适合  $\text{MA}$  模型。
- 若平稳时间序列的偏相关函数和自相关函数均是拖尾的，则  $\text{ARMA}$  模型适合此序列。

根据上述原则，总结的识别方法可见表2-1。

按照上述方法选取的模型和参数，往往并不能确认是否完全符合线性关系。所以一般也难以仅仅按照机理方法建立模型。因而必须要利用一种可行的估计模型的方法，用有限数量的参数最逼真的描述某一时间序列。故通过上述方法选取

表 2-1 ARMA模型识别方法

自相关系数	偏相关系数	模型识别
拖尾	$p$ 阶截尾	AR( $p$ )模型
$q$ 阶截尾	拖尾	MA( $q$ )模型
拖尾	拖尾	ARMA( $p, q$ )模型

的参数，对序列 $\{x_t\}$ 由低阶到高阶逐一拟合模型ARMA( $p, q$ )，并经有关统计量的检验选优。

有关统计量方法主要有FPE 准则（最终预测误差准则）方法、AIC 准则方法、F 检验临界值定阶准则方法等。但是，由于实际问题多种多样、随机过程千变万化，从而使统计分析计算存在误差。在本论文中，使用的是AIC 准则方法。下面就这一方法准则介绍。

AIC（Akaike's Information Criterion）准则方法是 Akaike 教授把极大似然函数用于时序模型假设检验而推导出相应的 AIC 准则：

$$AIC = -2\ln(\text{模型的极大似然度}) + 2(\text{模型的独立参数个数})$$

对于ARMA( $p, q$ )模型而言，其极大似然度和残差方差的对数有关，因此，其 AIC 函数为：

$$AIC = N\ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + (p + q + l) \quad (2-30)$$

在不同模型参数做比较时，希望AIC指标越小越好。

## 2.4 支撑向量机回归（SVR）模型

## 2.5 本章小结

## 致 谢

历时将近两个月的时间终于将这篇论文写完，在论文的写作过程中遇到了无数的困难和障碍，都在同学和老师的帮助下度过了。尤其要强烈感谢我的论文指导老师—XX老师，她对我进行了无私的指导和帮助，不厌其烦的帮助进行论文的修改和改进。另外，在校图书馆查找资料的时候，图书馆的老师也给我提供了很多方面的支持与帮助。在此向帮助和指导过我的各位老师表示最中心的感谢！

感谢这篇论文所涉及到的各位学者。本文引用了数位学者的研究文献，如果没有各位学者的研究成果的帮助和启发，我将很难完成本篇论文的写作。

感谢我的同学和朋友，在我写论文的过程中给予我了很多你问素材，还在论文的撰写和排版灯过程中提供热情的帮助。由于我的学术水平有限，所写论文难免有不足之处，恳请各位老师和学友批评和指正！



## 参考文献

- [1] A. Belov, E. Eroshenko, V. Yanke, et al. Space weather research: the connection between satellite malfunction data and cosmic ray activity indices[J]. International Journal of Modern Physics A, 2005, 20(29):6675–6677
- [2] 秦巍, 郭永富. 一种基于历史遥测数据的在轨卫星故障预警系统[J]. 航天器工程, 2010(6):40–45
- [3] 杨天社, 杨开忠, 李怀祖. 基于知识的卫星故障诊断与预测方法[J]. 中国工程科学, 2004, 5(6):63–67
- [4] A. Grossmann, J. Morlet. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape[J]. SIAM journal on mathematical analysis, 1984, 15(4):723–736
- [5] G. E. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinsel. Time series analysis: forecasting and control[M]. John Wiley & Sons, 2011