PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 2

1. Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng.
2. Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng.
3. Phương pháp biến thiên hằng số của Lagrange.

PTVP Tuyến Tính Cấp 2 Với Hệ Số Hằng

❖ Dạng:

$$y'' + py' + qy = f(x) \qquad (1)$$

$$(p, q = const)$$

- Nếu $f(x) = 0$: phương trình (1) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất với hệ số hằng.
- Nếu $f(x) \neq 0$: phương trình (1) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất với hệ số hằng.

1. Phương trình thuần nhất

❖ Dạng:

$$y" + py' + qy = 0 \qquad (2)$$

Phương trình có 2 nghiệm riêng $y_1(x),\ y_2(x)$

Nghiệm tổng quát:

$$y = C_1y_1(\text{x}) + C_2y_2(\text{x}), \quad C_1, C_2\text{: hằng số} \qquad (3)$$

Nghiệm riêng có dạng:

$$y = e^{kx}$$

Trong đó, k là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (4)$$

Phương trình (4) luôn có 2 nghiệm k_1, k_2

1. Phương trình thuần nhất

- *Trường hợp 1*: (4) có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1,\ k_2$

  Khi đó, phương trình (2) có 2 nghiệm riêng:

  $$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = e^{k_2x}$$

  Suy ra, nghiệm tổng quát của (2):

  $$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

- ***Ví dụ1***. Giải phương trình $y" + y' - 2y = 0$

  Phương trình đặc trưng: $k^2 + k - 2 = 0$

  Có 2 nghiệm phân biệt: $k_1 = 1,\ k_2 = -2.$

  Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

  $$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$$

1. Phương trình thuần nhất

- ***Ví dụ 2.*** Giải phương trình $y" - 7y' + 6y = 0$ với điều kiện *y(0) = 0, y'(0) = - 5.*
- Phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 7k + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = 6$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x}$$

Suy ra: $y' = C_1e^x + 6C_2e^{6x}$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 6C_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

➢ Vậy nghiệm cần tìm: $y = e^x - e^{6x}$

1. Phương trình thuần nhất

- *Trường hợp 2*: (4) có 2 nghiệm thực trùng nhau $k_1 = k_2$

Khi đó phương trình (2) có 2 nghiệm riêng:

$$y_1 = e^{k_1x}, y_2 = xe^{k_1x}$$

Suy ra, nghiệm tổng quát của (2):

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$$

- ***Ví dụ 3.*** Giải phương trình $y" - 6y' + 9y = 0$.

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 6k + 9 = 0$

Có nghiệm kép: $k_1 = k_2 = 3$

➢ Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$$

1. Phương trình thuần nhất

- *Trường hợp 3*: (4) có 2 nghiệm phức liên hợp

$$k_1 = \alpha + i\beta; \;\; k_2 = \alpha - i\beta$$

Khi đó phương trình (2) có 2 nghiệm riêng:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x},$$
$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$$

Nghiệm tổng quát của (2):

$$y = e^{\alpha x}(C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x)$$

1. Phương trình thuần nhất

- ***Ví dụ 4***: Giải phương trình $y" - 2y' + 5y = 0$.

Phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 2k + 5 = 0$$

Có 2 nghiệm phức liên hợp:

$$k_1 = 1 + 2i, k_2 = 1 - 2i$$

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = e^x(C_1 cos2x + C_2 sin2x)$$

1. Phương trình thuần nhất

- ***Ví dụ 5***: Giải phương trình $2y" + 4y' + 4y = 0$

  Phương trình đã cho tương đương:

  $$y" + 2y' + 2y = 0$$

  Phương trình đặc trưng:

  $$k^2 + 2k + 2 = 0$$

  Có 2 nghiệm phức liên hợp:

  $$k_1 = -1 + i, k_2 = -1 - i$$

  Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

  $$y = e^{-x}(C_1 cosx + C_2 sinx)$$

1. Phương trình thuần nhất

- ***Ví dụ 6***: Giải phương trình $y''' - 4y' = 0$

  Phương trình đặc trưng:

  $$k^3 - 4k = 0$$

  Có 3 nghiệm phân biệt:

  $$k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = -2$$

  Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

  $$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$$

2. Phương trình không thuần nhất

❖ Dạng:

$$y" + py' + qy = f(x) \qquad (5)$$

Nghiệm của phương trình (5):

$$y = y^* + y_r \qquad (6)$$

Trong đó:

y^*: nghiệm tổng quát của phương trình

$$y" + py' + qy = 0$$

y_r: nghiệm riêng của phương trình (5).

2. Phương trình không thuần nhất

❖ ***Tìm nghiệm riêng của phương trình (5)***

- *Trường hợp 1*: $f(x) = e^{\alpha x}.P_n(x), \alpha = const$

  $P_n(x)$: đa thức bậc n

✓ Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (4), nghiệm riêng của (5) có dạng:

$$y_r = e^{\alpha x}.Q_n(x)$$

✓ Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (4), nghiệm riêng của (5) có dạng:

$$y_r = xe^{\alpha x}.Q_n(x)$$

✓ Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (4), nghiệm riêng của (5) có dạng:

$$y_r = x^2e^{\alpha x}.Q_n(x)$$

2. Phương trình không thuần nhất

- Xác định các hệ số của $Q_n(x)$ bằng cách tính y_r', y_r'' rồi thay y_r, y_r', y_r'' vào (5).
- ***Ví dụ 7***. Giải phương trình $y'' + 3y' - 4y = x$ (7)

  Phương trình đặc trưng: $k^2 + 3k - 4 = 0$

  Có 2 nghiệm phân biệt: $k_1 = 1, k_2 = -4$

  Suy ra, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

  $$y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$$

  Vế phải của phương trình (7) có dạng: $e^{\alpha x}.P_1(x)$

  Trong đó: $\alpha = 0, P_1(x) = x$

  α không phải là nghiệm phương trình đặc trưng

2. Phương trình không thuần nhất

Suy ra nghiệm riêng của (7) có dạng

$$y_r = Ax + B$$

Suy ra: y' = A; y'' = 0 thế vào phương trình (7) được:

$$3A - 4(Ax + B) = x \Leftrightarrow -4Ax + 3A - 4B = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4A = 1 \\ 3A - 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{3}{16} \end{cases} \Rightarrow y_r = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$$

Vậy nghiệm tổng quát phương trình (7):

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$$

2. Phương trình không thuần nhất

- ***Ví dụ 8***. Giải phương trình $y" - y' = e^x(x+1)$ (8)

  Phương trình đặc trưng: $k^2 - k = 0$

  Có 2 nghiệm phân biệt: $k_1 = 0, k_2 = 1$

  Suy ra, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$y^* = C_1 + C_2 e^x$$

  Vế phải của phương trình (7) có dạng: $e^{\alpha x}.P_1(x)$

  Trong đó: $\alpha = 1, P_1(x) = x + 1$

  $\alpha = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng

  Suy ra nghiệm riêng của (8) có dạng

$$y_r = xe^x(Ax + B\ ) = e^x(Ax^2 + Bx\ )$$

2. Phương trình không thuần nhất

Suy ra: $\begin{cases} y'_r = e^x(Ax^2 + Bx\ ) + e^x(2Ax + B\ ) \\ y_r'' = e^x(Ax^2 + Bx\ ) + 2e^x(2Ax + B\ ) + 2Ae^x \end{cases}$

Thế vào phương trình (8) được:

$$e^x(2Ax + 2A + B) = e^x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2Ax + 2A + B = x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y_r = \frac{1}{2}x^2e^x$$

Vậy nghiệm tổng quát phương trình (8):

$$y = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}x^2e^x$$

2. Phương trình không thuần nhất

- ***Ví dụ 9***: Giải phương trình

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} \qquad (9)$$

Phương trình đặc trưng: $k^2 - 6k + 9 = 0$

Có nghiệm kép: $k_1 = k_2 = 3$

Suy ra, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$y^* = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$$

$\alpha = 3$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng

Suy ra nghiệm riêng của (8) có dạng

$$y_r = x^2e^{3x}(Ax + B) = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2)$$

2. Phương trình không thuần nhất

$$y'_r = 3e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx)$$

$$y''_r = 9e^{3x}(Ax^3 + Bx^2) + 6e^{3x}(3Ax^2 + 2Bx) + e^{3x}(6Ax + 2B)$$

Thế vào phương trình (9) được:

$$e^{3x}[(6A - 10B)x + 2B] = xe^{3x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6A - 10B = 1 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y_r = \frac{1}{6}x^3e^{3x}$$

Vậy nghiệm tổng quát phương trình (9):

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{6}x^3e^{3x}$$

2. Phương trình không thuần nhất

❖ ***Tìm nghiệm riêng của phương trình (5)***

- *Trường hợp 2*: $f(x) = P_m(x)cos\beta x + P_n(x)sin\beta x$

  Trong đó: $\beta = const$,

  $P_m(x)$, $P_n(x)$ là các đa thức bậc *m, n*

✓ Nếu $\pm i\beta \neq k_1 \neq k_2$, nghiệm riêng của (5) có dạng:
$y_r = Q_l(x)cos\beta x + R_l(x)sin\beta x, l = \max(m, n)$

✓ Nếu $\pm i\beta \equiv k_1, k_2$, nghiệm riêng của (5) có dạng:
$y_r = x[Q_l(x)cos\beta x + R_l(x)sin\beta x], l = \max(m, n)$

2. Phương trình không thuần nhất

- ***Ví dụ 10***: Giải phương trình $y" - y' = \cos 2x$ (10)

  Phương trình đặc trưng: $k^2 - k = 0$

  Có 2 nghiệm phân biệt: $k_1 = 0, k_2 = 1$

  Suy ra, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

  $$y^* = C_1 + C_2e^x$$

  Vế phải (10) bằng: $\cos 2x \Rightarrow \beta = 2$

  $\pm i\beta = \pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng

  Suy ra nghiệm riêng của (10) có dạng

  $$y_r = Bcos2x + Csin2x$$

2. Phương trình không thuần nhất

Suy ra: $y'_r = 2Ccos2x - 2Bsin2x$

$y"_r = -4Bcos2x - 4Csin2x.$

Thế vào (10) ta được:

$-4Bcos2x - 4Csin2x - (2Ccos2x - 2Bsin2x) = cos2x$

Hay: $(-4B - 2C)cos2x + (2B - 4C)sin2x = cos2x$

Suy ra: $\begin{cases} -4B - 2C = 1 \\ 2B - 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1/5 \\ C = -1/10 \end{cases}$

Suy ra: $y_r = -\frac{1}{5}cos2x - \frac{1}{10}sin2x$

Nghiệm tổng quát

$$y = C_1 + C_2e^x - \frac{1}{5}cos2x - \frac{1}{10}sin2x$$

2. Phương trình không thuần nhất

- ***Ví dụ 11***: Giải phương trình $y" + y = xsinx$ (10)

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 1 = 0$

Có 2 nghiệm phức liên hợp: $k_1 = i, k_2 = -i$

Suy ra, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$y^* = C_1cosx + C_2sinx$$

Vế phải (10) bằng: $xsinx \Rightarrow \beta = 1, R_1(x) = x$

$\pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng

Suy ra, nghiệm riêng của (11) có dạng

$$y_r = x[(Ax + B)cosx + (Cx + D)sinx]$$

2. Phương trình không thuần nhất

Tính y_r', y_r'', Thế vào (11) ta được:

$$[4Cx + 2A + 2D]cosx + [-4Ax + 2C - 2B]sinx = xsinx$$

Suy ra: $\begin{cases} C = 0 \\ A + D = 0 \\ -4A = 1 \\ C - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/4 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 1/4 \end{cases}$

Suy ra: $y_r = x\left[-\frac{1}{4}xcosx + \frac{1}{4}sinx\right] = \frac{x}{4}(sinx - xcosx)$

Nghiệm tổng quát

$$y = C_1cosx + C_2sinx + \frac{x}{4}(sinx - xcosx)$$

2. Phương trình không thuần nhất

- ***Ví dụ 12***: Giải phương trình $y'' - y' = 2cos^2x$ (12)

  Phương trình đặc trưng: $k^2 - k = 0$

  Có 2 nghiệm phân biệt: $k_1 = 0, k_2 = 1$

  Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

  $$y^* = C_1 + C_2e^x$$

  Vế phải (12) bằng: $2cos^2x = 1 + cos2x$

  Đặt $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = cos2x$

  y_{1r} là nghiệm riêng của phương trình với vế phải là $f_1(x)$

  y_{2r} là nghiệm riêng của phương trình với vế phải là $f_2(x)$

  Suy ra, $y_r = y_{1r} + y_{2r}$

2. Phương trình không thuần nhất

- Với $f_1(x) = 1 = 1.e^0 \Rightarrow \alpha = 0 = k_1, n = 0$

$$\Rightarrow y_{r1} = A.x$$

Thay vào phương trình $y" - y' = 1$

$$\Rightarrow -A = 1 \Leftrightarrow A = -1 \Rightarrow y_{r1} = -x$$

- Với $f_2(x) = cos2x \Rightarrow \beta = 2; \pm i\beta = \pm 2i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$y_{r2} = Bcos2x + Csin2x$$

Suy ra: $y'_{r2} = 2Ccos2x - 2Bsin2x$

$$y"_{r2} = -4Bcos2x - 4Csin2x.$$

Thay vào phương trình $y" - y' = cos2x$

6/3/2020 daothaohus@gmail.com 25

2. Phương trình không thuần nhất

ta được:

$$-4Bcos2x - 4Csin2x - (2Ccos2x - 2Bsin2x) = cos2x$$

Hay: $(-4B - 2C)cos2x + (2B - 4C)sin2x = cos2x$

Suy ra: $\begin{cases} -4B - 2C = 1 \\ 2B - 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1/5 \\ C = -1/10 \end{cases}$

Suy ra: $y_{r2} = -\frac{1}{5}cos2x - \frac{1}{10}sin2x$

Nghiệm tổng quát

$$y = C_1 + C_2e^x - x - \frac{1}{5}cos2x - \frac{1}{10}sin2x$$

6/3/2020 daothaohus@gmail.com 26

Bài tập. Giải các phương trình sau

1) $y''-7y'+6y=\sin x$
2) $y''+9y=6e^{3x}$
3) $y''-3y'=2-6x$
4) $y''-2y'+3y=e^{-x}\cos x$
5) $y''+4y=2\sin 2x$
6) $y''+2y'+y=4e^{-x}$
7) $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}$
8) $y''+4y'-5y=2e^{x}$

Bài tập. Giải các phương trình sau:

9) $y''+y=x^2\cos^2 x$
10) $y''-3y'=e^{3x}-18x$
11) $y''-3y'+2y=e^{x}+\sin 3x$
12) $y''-5y'+4y=x^2e^{x}+x-1$
13) $y''-4y'+4y=e^{2x}\cos^2 x$
14) $y''+6y'+9y=e^{x}+e^{3x}$
15) $y''-6y'+9y=e^{2x}+xe^{3x}$
16) $y''+4y'+3y=\cos x-\sin x$