PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1) Một số khái niệm cơ bản về phương trình vi phân.
2) Phương trình vi phân tách biến được;
3) Phương trình vi phân đẳng cấp.
4) Phương trình vi phân tuyến tính cấp một.

1. Một số khái niệm cơ bản

❖ Cho hàm số $y = f(x)$. Giải phương trình:

$$f(x) = 0$$

- Tìm giá trị x thỏa mãn phương trình trên.
- x – biến số;
- $y = f(x)$ là hàm số theo biến x.

Vấn đề đặt ra: Có tồn tại một dạng phương trình nào đó mà giải ra nghiệm $y = f(x)$?

1. Một số khái niệm cơ bản

❖ ***<u>Định nghĩa</u>***: <u>Phương trình vi phân</u> là một phương trình mà *đối tượng phải tìm là hàm số*, và hàm số phải tìm có mặt trong phương trình đó dưới *dấu đạo hàm hoặc vi phân.*

- ***<u>Ví dụ:</u>***

$$a)\quad y' = y^2 + x^2$$

$$b)\quad xdy - y^2dx = 0$$

$$c)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$$

1. Một số khái niệm cơ bản

Phân loại phương trình vi phân

Hàm phải tìm là hàm số 1 biến số: - Phương trình vi phân thường

$$a)\ \ y' = y^2 + x^2$$

$$b)\ \ xdy - y^2dx = 0$$

$$c)\ \ \frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$$

Hàm phải tìm là hàm số nhiều biến số: - Phương trình vi phân đạo hàm riêng

$$a)\ \ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$b)\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1. Một số khái niệm cơ bản

❖ *Cấp của phương trình vi phân*: là cấp cao nhất của đạo hàm hoặc vi phân của hàm phải tìm có mặt trong phương trình.

1) $xdy - y^2dx = 0$ ⟹ PTVP thường cấp 1

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$ ⟹ PTVP thường cấp 2

3) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$ ⟹ PTVP đạo hàm riêng cấp 1

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ⟹ PTVP đạo hàm riêng cấp 2

1. Một số khái niệm cơ bản

❖ Dạng tổng quát của phương trình vi phân thường cấp n:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1)$$

Trong đó, F: hàm *n* + *2* biến số.

Nếu giải ra được $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = \varphi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Ví dụ:

$$\frac{2y}{1+y^2}y' + \frac{2x}{1+x^2} = 0 \implies y' = -\frac{2x}{1+x^2}.\frac{1+y^2}{2y} = \varphi(x, y)$$

1. Một số khái niệm cơ bản

❖ Nghiệm của phương trình vi phân thường: là một hàm số $y = \varphi(x)$ xác định trên (a, b) nào đó thỏa mãn:

$$F\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)\right)=0$$

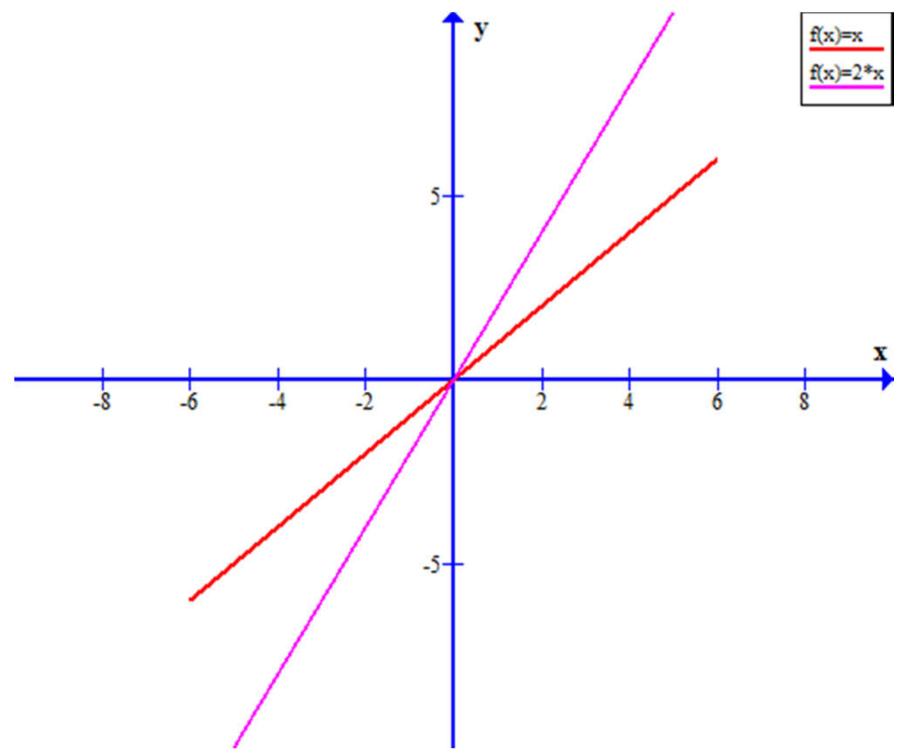
- Đồ thị của nghiệm $y = \varphi(x)$ được gọi là đường cong tích phân.

1. Một số khái niệm cơ bản

- ***Ví dụ:*** Phương trình $y'x - y = 0$ có nghiệm:

$$y = Cx,\ C \in R$$

vì thỏa mãn phương trình đã cho.



2. Phương trình vi phân thường cấp 1

❖ ***Dạng tổng quát***

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

Nếu rút được theo *y'*:

$$y' = f(x, y) \qquad (3)$$

Hoặc:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (4)$$

- ***Ví dụ***:

$$xy' + y = 0$$

$$y' = -\frac{y}{x}$$

$$xdy + ydx = 0$$

2. Phương trình vi phân thường cấp 1

❖ ***Nghiệm và tích phân của ptvp cấp 1***

- Nghiệm của một phương trình vi phân thường cấp 1 là một hàm số *y = φ(x)* xác định trên 1 khoảng (a,b) nào đó thỏa mãn:

$$F\left(x,\varphi(x),\varphi'(x)\right)=0 \qquad \text{(theo 2)}$$

Hay:

$$\varphi'(x)=f\left[x,\varphi(x)\right] \qquad \text{(theo 3)}$$

✓ Nghiệm có thể viết dưới dạng hàm ẩn:

$$\Phi(x,y)=0 \qquad (5)$$

✓ Phương trình (5) – được gọi là tích phân của PTVP

2. Phương trình vi phân thường cấp 1

❖ *Nghiệm và tích phân của ptvp cấp 1*

- *Ví dụ:* Phương trình $xdy + ydx = 0$

  có một nghiệm là:
$$y = \frac{1}{x}$$

Vì:
$$xd\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}dx = x\left(-\frac{1}{x^2}dx\right) + \frac{1}{x}dx = 0$$

Nhận thấy $y = \frac{c}{x}, c = const$ Cũng là nghiệm

➢ Nghiệm của phương trình vi phân cấp 1 là vô số.

2. Phương trình vi phân thường cấp 1

- Nghiệm của phương trình vi phân cấp 1 là vô số.
- Tập hợp nghiệm của PTVP cấp một phụ thuộc vào một hằng số c tùy ý.
- Trong thực tế, thường quan tâm đến nghiệm của PTVP cấp 1 thỏa mãn những điều kiện nào đó.
- ***Ví dụ***: $y(x_0) = y_0$ (6)

  Với x_0, y_0 là các số cho trước.
- Điều kiện cho ở (6) gọi là *điều kiện ban đầu*

➤ Bài toán tìm nghiệm PTVP cấp 1 thỏa mãn điều kiện ban đầu (6) được gọi là bài toán Cauchy.

2. Phương trình vi phân thường cấp 1

- ***Ý nghĩa hình học của bài toán Cauchy***:

Tìm đường cong tích phân của phương trình (3) đi qua điểm (x_0, y_0) cho trước.

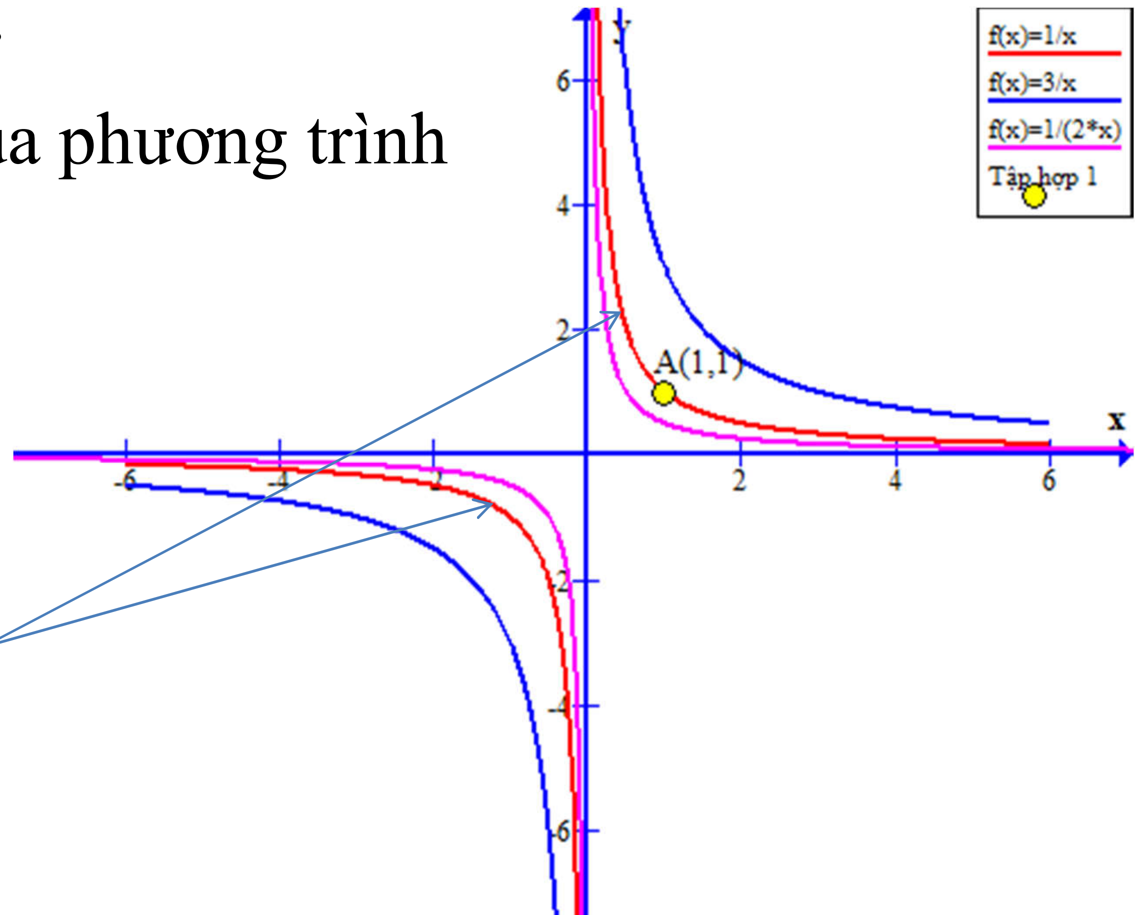
- ***Ví dụ***. Tìm nhiệm của phương trình

$$xdy + ydx = 0$$

Với điều kiện:

y(1) = 1.

➢ Nghiệm: $y = \dfrac{1}{x}$



2. Phương trình vi phân thường cấp 1

❖ ***Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng***

- Nghiệm tổng quát

$$y = \varphi(x, C),\ C = \text{const}$$

Hoặc viết dưới dạng hàm ẩn:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

- Khi gán cho C ở nghiệm tổng quát 1 giá trị bằng số nhất định, thu được 1 nghiệm riêng của phương trình.

2. Phương trình vi phân thường cấp 1

❖ ***Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng***

- *Ví dụ.* Phương trình $y' = x^2$ có nghiệm tổng quát:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C = const$$

Với C = 0: $y = \frac{1}{3}x^3$ là một nghiệm riêng của pt.

2.1 Phương trình biến số phân ly

❖ ***Dạng:***

$$f(x)dx = g(y)dy$$

- Lấy tích phân hai vế:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

Hay: $F(x) = G(y) + C$

Trong đó, F(x) là một nguyên hàm của f(x)

G(y) là một nguyên hàm của g(y)

2.1 Phương trình biến số phân ly

- ***Ví dụ***: Giải phương trình

$$xdx + ydy = 0$$

- Ta có: $xdx + ydy = 0 \Leftrightarrow xdx = -ydy$

  Lấy tích phân 2 vế

$$\int xdx = -\int ydy$$

  Thu được: $\dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{y^2}{2} + C \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = C$

2.1 Phương trình biến số phân ly

- ***Ví dụ*** . Giải phương trình

$$\frac{2x}{1+x^2}dx+\frac{2y}{1+y^2}dy=0$$

Tích phân tổng quát:

$$\int\frac{2x}{1+x^2}dx+\int\frac{2y}{1+y^2}dy=C\Leftrightarrow\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}+\int\frac{d\left(1+y^2\right)}{1+y^2}=C$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(1+x^2\right)+\ln\left(1+y^2\right)=C$$

$$\Leftrightarrow\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)=C',\ \left(C'=e^C\right)$$

2.1 Phương trình biến số phân ly

❖ ***Chú ý***: Phương trình có dạng

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (7)$$

Nếu: $N_1(y)M_2(x) \neq 0:\ (7) \Leftrightarrow \dfrac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \dfrac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$

Nếu $M_2(x) = 0$ tại $x = a$, thì $x = a$ là 1 nghiệm của PTVP.

Nếu $N_1(y) = 0$ tại $y = b$, thì $y = b$ là 1 nghiệm của PTVP.

➢ Các nghiệm đặc biệt này không chứa trong nghiệm tổng quát của PTVP trên.

2.1 Phương trình biến số phân ly

- ***Ví dụ.*** Giải phương trình

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$$

Giả sử: $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \neq 0 \Rightarrow \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = C \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-y^2\right)}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C', \left(C' > 0\right)$$

Nghiệm kì dị $\quad y_1 = 1,\ y_2 = -1,\ -1 < x < 1;$

$\quad x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ -1 < y < 1.$

2.1 Phương trình biến số phân ly

❖ ***Dạng***: $y' = f\left(ax + by + c\right)$

Đặt: $z = ax + by + c \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{dy}{dx} = f\left(z\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + bf\left(z\right) \Leftrightarrow \frac{dz}{a + bf\left(z\right)} = dx$$

- Phương trình biến số phân ly

2.1 Phương trình biến số phân ly

- ***Ví dụ***. Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = 2x + y$ (10)

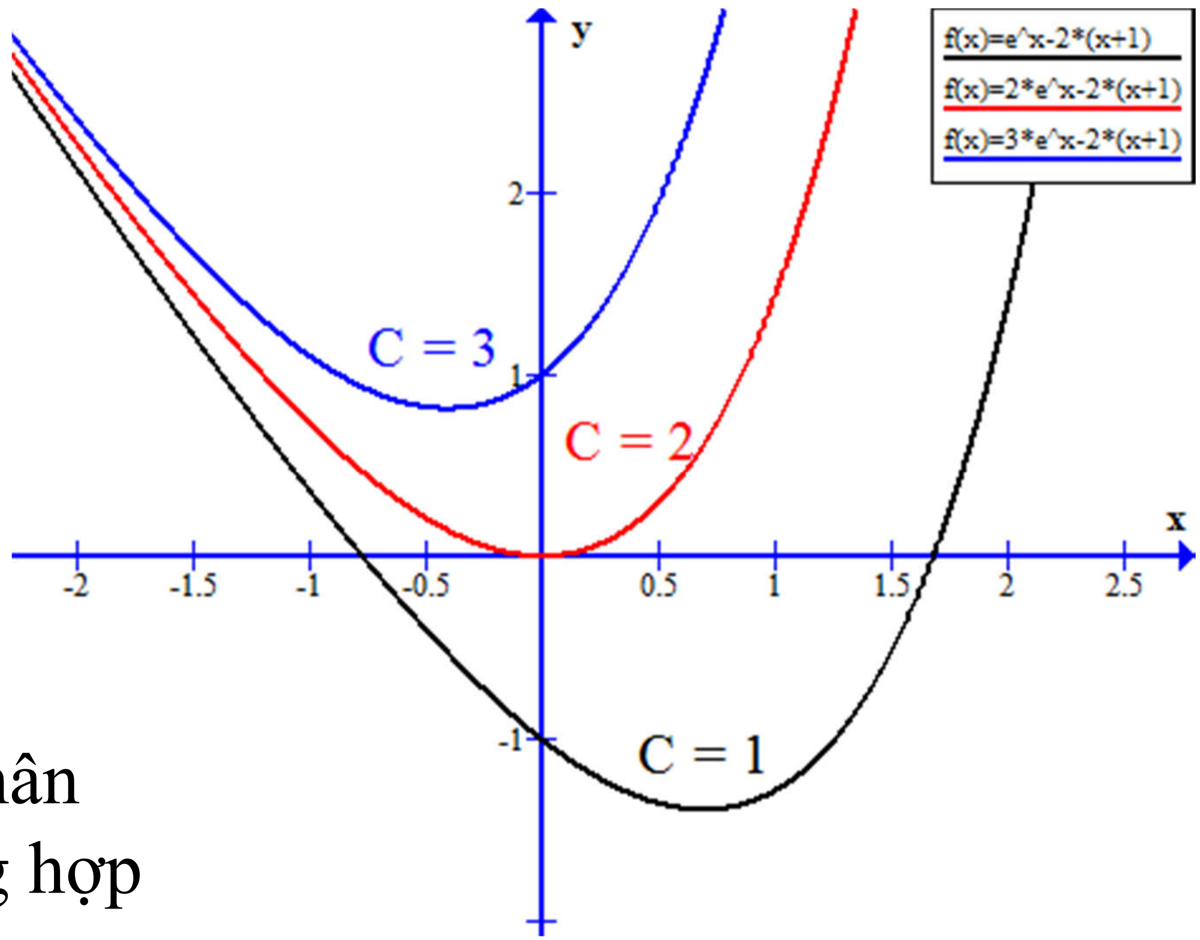
Đặt $z = 2x + y \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 2 + \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dy}{dx} = z$

Pt (10) trở thành: $\dfrac{dz}{dx} = 2 + z \Leftrightarrow \dfrac{dz}{2+z} = dx$

Nghiệm $\ln|2+z| = x + C \Leftrightarrow z = e^{x+C} - 2 \Leftrightarrow z = C'e^x - 2$

$$2x + y = C'e^x - 2 \Leftrightarrow y = C'e^x - 2(x+1)$$

2.1 Phương trình biến số phân ly



Đường cong tích phân trong một số trường hợp

2.1 Phương trình biến số phân ly

- ***<u>Ví dụ</u>***: Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x-y} + 1$

Đặt $z = x - y$

Nghiệm $(x-y)^2 = -2x + C$

2.2. Phương trình vi phân thuần nhất

- Dạng: $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\quad f(x,y)=f(kx,ky)$

Đặt: $$z=\frac{y}{x}\Rightarrow\begin{cases} y=xz \\ \dfrac{dy}{dx}=z+x\dfrac{dz}{dx}\end{cases}$$

Suy ra: $$z+x\frac{dz}{dx}=\varphi(z),\ \varphi(z)=f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\frac{dx}{x}$$ Phương trình tách biến

2.2. Phương trình vi phân thuần nhất

- ***Ví dụ***. Giải phương trình

$$(x+y)dx+(x-y)dy=0$$

Đặt $y=zx \Rightarrow dy=zdx+xdz$

$$\Rightarrow (x+zx)dx+(x-zx)(xdz+zdx)=0$$

$$\Leftrightarrow (1+2z-z^2)dx+x(1-z)dz=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x}+\frac{(1-z)dz}{1+2z-z^2}=0$$

2.2. Phương trình vi phân thuần nhất

- ***<u>Ví dụ</u>***. Giải phương trình

$$\left(x+y\right)dx+\left(x-y\right)dy=0$$

Tích phân: $$\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+2z-z^2\right)}{1+2z-z^2}=C_1$$

$$\Rightarrow 2\ln\left|x\right|+\ln\left(1+2z-z^2\right)=C$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1+2z-z^2\right)=C$$

Nghiệm: $$x^2\left(1+2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)=C\Leftrightarrow x^2+2xy-y^2=C$$

2.2. Phương trình thuần nhất

- Dạng: $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Nếu $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left[\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right]$$

$$= g(a_2x + b_2y + c)$$

2.2. Phương trình thuần nhất

- Dạng: $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Nếu: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ Giải hệ: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0)$

Đặt: $\begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases}$ ➡ Đưa về phương trình thuần nhất: v = zu

2.2. Phương trình thuần nhất

- ***Ví dụ***. Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}$

Giải hệ: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 2 + v \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{du} = \dfrac{u - v}{u + v}$

$$v = zu \Rightarrow \frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du} = \frac{1 - z}{1 + z}$$

$$\Leftrightarrow u\frac{dz}{du} = \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}$$

2.2. Phương trình thuần nhất

- ***Ví dụ***. Giải phương trình $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y+1}{x+y-3}$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{u} = \frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2}$$ Phương trình biến số phân ly

Nghiệm $u^2\left(1-2z-z^2\right) = C_1$

$$\Rightarrow u^2 - 2uv - v^2 = C_1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) - (y-2)^2 = C_1$$

Nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C$$

2.2. Phương trình thuần nhất

- ***<u>Ví dụ</u>***: Giải phương trình:

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Ptvp viết lại dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}$$

Hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm $x = 1, y = 2$.

Đặt: $\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$

2.2. Phương trình thuần nhất

- Khi đó:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2u - 4v}{u + v}$$

Đây là pt đẳng cấp theo u và v. Đặt $v = zu$, khi đó:

$$\frac{dv}{du} = z + u\frac{dz}{du} = -\frac{2 - 4z}{1 + z}$$

Hay:

$$u\frac{dz}{du} = \frac{-z^2 + 3z - 2}{1 + z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + z)dz}{-z^2 + 3z - 2} = \frac{du}{u}$$

2.2. Phương trình thuần nhất

Tích phân hai vế

$$\int \frac{(1+z)dz}{-z^2+3z-2} = \int \frac{du}{u} + C_1$$

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1}\right) dz + \int \frac{du}{u} = C_1$$

Hay:

$$ln\frac{|z-2|^3}{(z-1)^2} + \ln|u| = C_1 \rightarrow u\frac{(z-2)^3}{(z-1)^2} = C, C = const$$

Trở lại biến *x*, *y* ban đầu:

$$(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$$

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

- Dạng tổng quát của phương trình tuyến tính cấp 1:

$$y' + p(x).y = q(x) \qquad (1)$$

trong đó: $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục cho trước.

- Nếu $q(x) \neq 0$ thì (1) là PTVP tuyến tính cấp 1 không thuần nhất.
- Nếu $q(x) = 0, \forall x$ thì (1) là PTVP tuyến tính cấp 1 thuần nhất (tương ứng).
- Nếu $p(x), q(x) = const$, thì (1) là PTVP tuyến tính cấp 1 hệ số hằng số (otonom).

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

❖ ***Cách giải phương trình***:

$$y' + p(x).y = q(x) \qquad (1)$$

Nhân hai vế phương trình (1) với: $e^{\int p(x)dx}$

$$y' \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot y \cdot e^{\int p(x)dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \left(y \cdot e^{\int p(x)dx} \right)' = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow y \cdot e^{\int p(x)dx} = C + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \right]}$$ Nghiệm tổng quát

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

Chú ý: Một số PTVP cấp 1 nếu xem $y = y(x)$ là nghiệm phải tìm thì không phải là pt tuyến tính.

Nhưng nếu xem $x = x(y)$ thì ta sẽ có pt tuyến tính:

$$x' + p(y).x = q(y).$$

Khi đó nghiệm tổng quát có dạng:

$$x(y) = e^{-\int p(y)dy}\left[C + \int q(y).e^{\int p(y)dy}dy\right],$$

$C = const.$

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

- ***<u>Ví dụ</u>***. Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

Có: $$y' - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow p(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\int p(x)dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln|x|$$

$$y = C_1 e^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow y = C_1 e^{\ln|x|} \Leftrightarrow y = C_1|x|$$

Hay $$y = Cx$$

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

- ***<u>Ví dụ</u>***. Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx}+y=2e^{x}$$

$$y'+y=2e^{x}\Rightarrow p(x)=1\Rightarrow\int p(x)dx=x$$

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$y=e^{-x}\left[C+\int 2e^{x}e^{x}dx\right]=e^{-x}\left[C+\int e^{2x}d(2x)\right]$$

$$y=e^{-x}\left(C+e^{2x}\right)\Leftrightarrow y=e^{x}+Ce^{-x}$$

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

- ***<u>Ví dụ1</u>***. Giải phương trình

$$e^y dx + \left(xe^y - 1\right)dy = 0$$

- Nếu xem y là hàm phải tìm theo biến số x thì pt:

$$(xe^y - 1)y' + e^y = 0$$

➢ Đây không phải là phương trình tuyến tính cấp 1.

- Nếu xem x là hàm phải tìm theo biến y thì phương trình:

$$x' + x = \frac{1}{e^y}$$

➢ Đây là một phương trình tuyến tính cấp 1 đối với hàm x(y)

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

- ***<u>Ví dụ1</u>***. Giải phương trình

$$e^y dx + \left(xe^y - 1\right)dy = 0$$

Giải phương trình:

$$x' + x = \frac{1}{e^y}$$

Nghiệm của phương trình:

$$x = e^{-\int dy}\left[C + \int \frac{1}{e^y} e^{\int dy} dy\right]$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-y}\left[C + y\right] \Leftrightarrow x = Ce^{-y} + ye^{-y}$$

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

- ***Ví dụ2***: Tìm nghiệm của phương trình vi phân sau đi qua điểm (0, 4):

$$y' + 3xy = x$$

Ta có $p(x) = 3x$ nên $\int p(x)dx = \frac{3x^2}{2}$.

Nghiệm tổng quát có dạng:

$$y(x) = e^{-3x^2/2}\left[C + \int xe^{3x^2/2}dx\right]$$

$$= e^{-3x^2/2}\left(\frac{1}{3}e^{3x^2/2} + C\right) = \frac{1}{3} + Ce^{-3x^2/2}$$

2.3. Phương trình tuyến tính cấp 1

- ***Ví dụ2***: Tìm nghiệm của phương trình vi phân sau đi qua điểm (0, 4):
$$y' + 3xy = x$$

Thay: $x = 0, y = 4$ vào đẳng thức trên ta có $C = 11/3$.

Do đó nghiệm riêng cần tìm là:
$$y(x) = \frac{1}{3} + \frac{11}{3}e^{-3x^2/2}$$

2.4 Phương trình Bernoulli

- Dạng tổng quát của phương trình:

$$y' + p(x).y = q(x).y^{\alpha} \qquad (2)$$

trong đó:

$p(x), q(x)$ là các hàm liên tục cho trước, $\alpha \in R$.

- Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì (2) là PTVP tuyến tính cấp 1.
- Nếu $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$:

Ta thấy $y(x) = 0$ là 1 nghiệm của (2).

$y(x) \neq 0$: chia cả 2 vế của (2) cho y^{α} ta có:

$$y'.y^{-\alpha} + p(x).y^{1-\alpha} = q(x)$$

2.4 Phương trình Bernoulli

Đặt :

$$z = y^{1-\alpha} \to z' = (1-\alpha).y^{-\alpha}.y'$$

Khi đó ta có PTVP tuyến tính cấp 1 đối với biến z:

$$z' + (1-\alpha).p(x).z = (1-\alpha).q(x)$$

2.4 Phương trình Bernoulli

- ***<u>Ví dụ</u>***. Giải phương trình:

$$y' - 9x^2 y = 3(x^5 + x^2)y^{2/3}, \quad y(0) = 1$$

Phương trình Bernoulli với α = 2/3

$$z = y^{1-2/3} = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow z' = \frac{1}{3} y^{-2/3} y'$$

Chia 2 vế phương trình cho $y^{2/3}$ ta được phương trình:

$$y^{-2/3} y' - 9x^2 y^{\frac{1}{3}} = 3(x^5 + x^2)$$

Hay:

$$3z' - 9x^2 z = 3(x^5 + x^2)$$
$$z' - 3x^2 z = x^5 + x^2$$

2.4 Phương trình Bernoulli

- ***Ví dụ***. Giải phương trình:

$$y' - 9x^2 y = 3(x^5 + x^2)y^{2/3}, \quad y(0) = 1$$

$$p(x) = -3x^2 \Rightarrow -3\int x^2 dx = -x^3$$

$$z = e^{-\int(-3x^2)dx}\left[C + \int\left(x^5 + x^2\right)e^{-x^3}dx\right]$$

$$z = e^{x^3}\left[C - \frac{1}{3}\int\left(x^3 + 1\right)d\left(e^{-x^3}\right)\right]$$

$$z = e^{x^3}\left[C - \frac{1}{3}\left(x^3 + 1\right)e^{-x^3} - \frac{1}{3}e^{-x^3}\right] = Ce^{x^3} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}$$

2.4 Phương trình Bernoulli

$$\Rightarrow y^{1/3} = Ce^{x^3} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}$$

Điều kiện đầu: y(0) = 1, suy ra C = 5/3.

Nghiệm bài toán Cauchy:

$$y^{1/3} = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}$$

2.4 Phương trình Bernoulli

- Ví dụ. Giải phương trình: $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Đây là pt Bernoulli với $\alpha = 1/2$ và $y = 0$ là 1 nghiệm riêng của pt đã cho.

Giả sử $y \neq 0$, chia cả 2 vế cho $xy^{1/2}$ ta được:

$$y^{-1/2}y' - \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} = x.$$

Đặt: $z = y^{1/2} \to z' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$.

Pt đã cho trở thành ptvp tuyến tính cấp 1 đối với biến z:

2.4 Phương trình Bernoulli

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}.$$

Giải phương trình này ta tìm được nghiệm:

$$z = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right).$$

Do đó pt đã cho có nghiệm tổng quát:

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$$

và nghiệm $y = 0$.

2.4 Phương trình Bernoulli

- ***<u>Ví dụ</u>***. Giải phương trình: $y' + xy = x^3y^3$.

Đây là pt Bernoulli với $\alpha = 3$ và $y = 0$ là 1 nghiệm riêng của pt đã cho. Giả sử $y \neq 0$, chia cả 2 vế cho y^3 ta được:

$$y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3.$$

Đặt: $z = y^{-2} \to z' = -2y^{-3}y'$. Khi đó pt đã cho trở thành ptvp tuyến tính cấp 1 đối với biến z:

$$z' - 2xz = -2x^3.$$

Do đó nghiệm tổng quát có dạng: $z = Ce^{x^2} + x^2 + 1$.

Đổi lại biến ta có tích phân tổng quát:

$$y^2\left(Ce^{x^2} + x^2 + 1\right) = 1, C = const.$$

2.5. Phương trình VP toàn phần (hoàn chỉnh)

❖ Dạng tổng quát của phương trình:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (3)$$

trong đó $P(x,y), Q(x,y)$ là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1, và

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

2.5. Phương trình VP toàn phần (hoàn chỉnh)

❖ ***Định lý.***

PTVP hoàn chỉnh luôn $\exists\ F(x,y)$ sao cho:

$$dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Hay:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

Khi đó tích phân tổng quát của PTVP hoàn chỉnh có dạng:

$$F(x,y) = C.$$

2.5. Phương trình VP toàn phần (hoàn chỉnh)

- Nghiệm có thể xác định theo công thức:

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$$

$$(x_0,y_0)\in \mathbf{D}$$

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$$

2.5. Phương trình VP toàn phần (hoàn chỉnh)

- ***Ví dụ***. Giải phương trình:

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$$

Ta có: $P(x, y) = x^3 + xy^2$ và $Q(x, y) = x^2y + y^3$ nên:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$$

Do đó đây là ptvp hoàn chỉnh, nên tồn tại hàm $F(x, y)$ sao cho:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y).$$

Từ phương trình: $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) = x^3 + xy^2$.

2.5. Phương trình VP toàn phần (hoàn chỉnh)

Suy ra:

$$F(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y) \to \frac{\partial F}{\partial y} = x^2y + C'(y)$$

mà:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) = x^2y + y^3$$

do đó: $C'(y) = y^3 \to C(y) = \frac{1}{4}y^4.$

Vậy ta có:

$$F(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4.$$

2.5. Phương trình VP toàn phần (hoàn chỉnh)

Do đó tích phân tổng quát của phương trình đã cho là:

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 = C_1.$$

Hay

$$(x^2 + y^2)^2 = C, C \geq 0.$$

2.5. Phương trình VP toàn phần (hoàn chỉnh)

- ***<u>Ví dụ</u>***. Giải phương trình:

$$3x^2(1 + lny)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0$$

Ta có: $P(x, y) = 3x^2(1 + lny)$ và $Q(x, y) = -(2y - \frac{x^3}{y})$.

Nên

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}.$$

2.5. Phương trình VP toàn phần (hoàn chỉnh)

Do đó đây là ptvp hoàn chỉnh với hàm $F(x,y)$ có dạng:

$$F(x,y) = \int_0^x 3x^2dx + \int_1^y -(2y - \frac{x^3}{y})dy$$

$$= x^3 - y^2 + 1 + x^3 lny.$$

Vậy tích phân tổng quát của pt là:

$$x^3 - y^2 + 1 + x^3 lny = C$$

Bài tập

- Bài 1. Giải các phương trình sau

  1. $xydx + (x+1)dy = 0$
  2. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$
  3. $2x^2yy' + y^2 = 2$
  4. $y' - xy^2 = 2xy$
  5. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1$
  6. $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0,\ y(1) = 1$
  7. $y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$

Bài tập

- Bài 1. Giải các phương trình sau

8. $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$

9. $\left(x + 2y\right)dx - xdy = 0$

10. $x\left(x + 2y\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$

11. $\left(2x - 2y - 1\right)dx + \left(x - y + 1\right)dy = 0$

12. $\left(1 + x + y\right)dy = \left(1 - 3x - 3y\right)dx$

13. $y' + 2xy = 2x^3y^3$

14. $y' - y = xy^2$

Bài tập

- Bài 1. Giải các phương trình sau

15. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-xy^2$

16. $2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0$

17. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$

18. $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$

19. $(x^3-2xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)dy=0$

20. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$