Cours d'Analyse

Table des matières

Chapitre 1

Les nombres réels

Chapitre 2

Limites et fonctions continues

2.1 Notion de fonction

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1. *Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : D \to \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$. En général, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle D le domaine de définition de la fonction f.*

Exemple 2.1.1.

$$f : [\, 0, +\infty \,[\to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto ax$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto |x|$$

Le graphe d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$

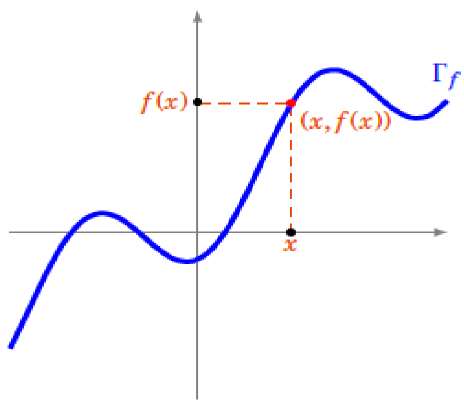

Figure 2.1 –

On note $\mathbb{R}^D$, l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$.

2.1.2 Opérations sur les fonctions

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie D de $\to \mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la somme de f et g est la fonction $f + g : D \to \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in D$;
- la produit de f et g est la fonction $f \times g : D \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in D$;
- la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda.f : D \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$ pour tout $x \in D$.

2.1.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 2.1.2. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que*

- *f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in D,\ f(x) \leq M$;*
- *f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R}\, \forall x \in D,\ f(x) \geq m$;*
- *f est bornée sur D si est à la fois majorée et minorée sur D, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in D,\ |f(x)| \leq M$.*

Remarques

1. On note $f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D,\ y = f(x)\}$ ou $\{f(x) \in \mathbb{R}/x \in D\}$ l'image directe de D par f.
   f est majorée(respectivement minorée, respectivement bornée) sur D si et seulement si $f(D)$ est majorée(respectivement minorée, respectivement bornée) dans $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction constante est bornée.
3. f est bornée sur D si et seulement si $|f|$ est majorée.

Proposition 2.1.1. *Si $f : D \to \mathbb{R}$ est majorée alors $f(D)$ est majorée dans $\mathbb{R}$ et posséde donc une borne supérieure notée et définie par*

$$Sup_D f = Sup f(D) = Sup\{f(x);\ x \in D\}.$$

De même si f est minorée ont définit

$$Inf_D f = Inf(f(D)) = Inf\{f(x);\ x \in D\}.$$

Démonstration : Résulte du théorème de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Théorème 2.1.1. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors*

1. *Si f et g sont majorées sur D alors $f + g$ est majorée sur D et on a*

$$Sup_D(f + g) \leq Sup_D f + Sup_D g.$$

2. *Si f et g sont majorées sur D et $f \geq 0$, $g \geq 0$, sur D alors fg est majorée sur D et on a*

$$Sup_D(fg) \leq (Sup_D f)(Sup_D g)$$

3. *Si f est majorée sur D alors λf est majorée sur D et on a*

$$Sup_D(\lambda f) = \lambda Sup_D f.$$

4. *f est minorée si et seulement si $-f$ est majorée. Et on a*

$$Inf_D f = Sup_D(-f).$$

Démonstration
1. $\forall x \in D$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq \mathrm{Sup}_D f + \mathrm{Sup}_D g$ donc $f+g$ est majorée et comme $\mathrm{Sup}_D(f+g)$ est le plus petit des majorants de $f+g$ alors

$$\mathrm{Sup}_D(f+g) \leq \mathrm{Sup}_D f + \mathrm{Sup}_D g.$$

2. $\forall x \in D$, $(fg)(x) = f(x)g(x) \leq (\mathrm{Sup}_D f)(\mathrm{Sup}_D g)$ donc fg est majorée et comme $\mathrm{Sup}_D(fg)$ est le plus petit des majorants de fg alors

$$\mathrm{Sup}_D(fg) \leq (\mathrm{Sup}_D f)(\mathrm{Sup}_D g).$$

3. Appliquons 2) à f et $g = \lambda$, on a

$$\mathrm{Sup}_D(\lambda f) \leq \lambda \mathrm{Sup}_D f \quad (i)$$

Si $\lambda = 0$ alors l'inégalité est vraie.
Si $\lambda \neq 0$ appliquons 2) à λf et à $g = \frac{1}{\lambda}$. Alors $\mathrm{Sup}_D(f) = \mathrm{Sup}_D(\frac{1}{\lambda})(\lambda f) \leq \frac{1}{\lambda}\mathrm{Sup}_D \lambda f$.
Ainsi

$$\lambda \mathrm{Sup}_D(f) \leq \mathrm{Sup}_D(\lambda f) \quad (ii)$$

(i) et (ii) impliquent $\mathrm{Sup}_D(\lambda f) = \lambda \mathrm{Sup}_D f$.
4. Si f est minorée alors $\mathrm{Inf}_D f$ existe et $-f$ est majorée donc $\mathrm{Sup}_{x\in D}(-f(x))$ existe. De plus pour tout $x \in D$ $-f(x) \leq \mathrm{Sup}_{x\in D}(-f(x))$ alors $-\mathrm{Sup}_{x\in D}(-f(x)) \leq f(x)$. D'où

$$-\mathrm{Sup}_{x\in D}(-f(x)) \leq \mathrm{Inf}_{x\in D}(f(x)) \quad (i).$$

Pour tout $x \in D$, $\mathrm{Inf}_{x\in D}(f(x)) \leq f(x)$ ce qui implique $-f(x) \leq -\mathrm{Inf}_{x\in D}(f(x))$. Donc $\mathrm{Sup}_{x\in D}(-f(x)) \leq -\mathrm{Inf}_{x\in D}(f(x))$ Ainsi

$$\mathrm{Inf}_{x\in D}(f(x)) \leq -\mathrm{Sup}_{x\in D}(-f(x)) \quad (ii)$$

Par suite de (i) et (ii) on on obtient $\mathrm{Inf}_{x\in D}(f(x)) = -\mathrm{Sup}_{x\in D}(-f(x))$

Remarque 2.1.1. *La proprieté 4) permet souvent de ramener l'etude d'une borne inférieure à celle d'une borne supérieure.*
Les inégalités dans 1) et 2) peuvent être strictes.
On note $\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées sur D. On appelle norme infinie et note $\| \|_\infty$ l'application $f \mapsto \|f\|_\infty = Sup_{x\in D}|f(x)|$.

2.1.4 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 2.1.3. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$. une fonction. On dit que :*
- *f est croissante sur D si $\forall x,\ y \in D,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.*
- *f est strictement croissante sur D si $\forall x,\ y \in D,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*
- *f est décroissante sur D si $\forall x,\ y \in D,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.*
- *f est strictement décroissante sur D si $\forall x,\ y \in D,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*
- *f est monotone (resp. strictement monotone) sur D si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D.*
- *f est dite constante sur sur D si $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall x \in D,\ f(x) = a$.*

Exemple 2.1.2.
1. *La fonction carrée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty, 0\,]$ et croissante sur $[\,0, +\infty\,[$.*
2. *$\ln\ :\ ]\,0, +\infty\,[\ \to \mathbb{R}$ est strictement croissante. La fonction valeur absolue n'est ni croissante, ni décroissante sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.1.2. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors*
1. *Si f et g sont croissantes sur D alors $f + g$ est croissante sur D.*
2. *Si f est croissantes sur D alors $-f$ est décroissante sur D.*
3. *Si f est croissantes (respectivement décroissante) sur D alors λf est décroissante (respectivement décroissante) sur D.*
4.
5. *Si f et g sont croissantes et positives sur D alors fg est croissante sur D.*
6. *Si f est croissantes sur D alors l'application $\tilde{f}$ définie psur D par $\tilde{f}(x) = f(-x)$ est décroissante sur D.*

2.1.5 Parité et périodicité

Définition 2.1.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a\,[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :*
- *f est paire si $x \in I,\ f(-x) = f(x)$*
- *f est impaire si $x \in I,\ f(-x) = -f(x)$*

Interprétation graphique
- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 2.1.3.
1. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ est paire.*
2. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ est impaire.*
3. *La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.*

Remarque 2.1.2.
- *Toute fonction constante est paire.*
- *Si $O \in D$ et f impaire alors $f(0) = 0$.*

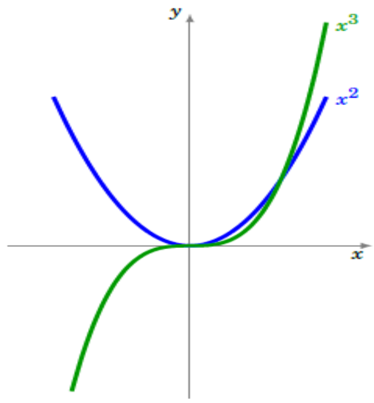

FIGURE 2.2 –

– *f peut être ni impaire ni paire.*

Proposition 2.1.3. *On note $\mathbb{P}$, l'ensemble des fonctions paires et $\mathbb{I}$ l'ensemble des fonctions impaires definies sur D. Alors*

$$\forall f \in \mathbb{R}^D;\ \exists!(p,i) \in \mathbb{P}\times\mathbb{I};\ f = p + i.$$

On dit que $\mathbb{R}^D$ est la somme directe de sous espaces vectoriels $\mathbb{P}$ et $\mathbb{I}$ et on note : $\mathbb{R}^D = \mathbb{P}\oplus\mathbb{I}$

Preuve : Soit $f \in \mathbb{R}^D$ cherchons $p \in \mathbb{P}$ et $i \in \mathbb{I}$ telles que $f = p + i$. Alors : $\forall x \in D$ $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$. Par conséquent on a

$$p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \text{ et } i(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \square$$

Exemple : $f(x) = e^x$ alors $p(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $i(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Définition 2.1.5. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T (ou T périodique) si T est le plus petit réel strictement positif tels que $x \in \mathbb{D},\ \ x + T \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.*

Interprétation graphique : f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.

Remarque 2.1.3. *Si $g \circ f$ est définie et si f est T-périodique, alors $g \circ f$ est T-périodique. En effet $g \circ f(x + T) = g(f(x + T)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.*

Exemple 2.1.4. *1. La f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - E(x)$ est 1-périodique*
Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. La fonction tangente est π-périodique sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$.

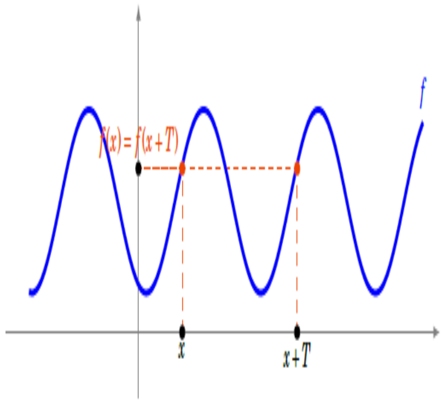

FIGURE 2.3 –

2.1.6 Fonction en escalier

Définition 2.1.6. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.*
f est dit en escalier, si et seulement si il existe une subdivion $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in [a, b]^{n+1}$, $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\begin{cases} a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b \\ \forall i \in 0, 1, \cdots, n-1, \ \forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \ f(x) = \lambda_i. \end{cases}$$

Exemple 2.1.5. *$f(x) = E(x)$ est en escalier.*

Proposition 2.1.4. *L'ensemble $E(a, b)$ des fonction en escalier sur $[a, b]$ vérifie :*

1. $1 \in E(a, b)$
2. $\forall f, g \in E(a, b)$ $f + g \in E(a, b)$
3. $\forall f \in E(a, b)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in E(a, b)$.
4. $\forall f, g \in E(a, b)$, $fg \in E(a, b)$.

Preuve

- (1). Il suffit de poser $(a_0 = a, a_1 = b)$ et $\lambda_0 = 1$.
- (3) evident.
- (2) et (4). Il existe $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in [a, b]^{n+1}$, $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in]a_i, a_{i+1}[$ $f(x) = \lambda_i$, $0 \leq i \leq n-1$. Et il existe $(b_0, b_1, \cdots, b_n) \in [a, b]^{n+1}$, $(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in]b_i, b_{i+1}[$ $f(x) = \mu_i$, $0 \leq i \leq n-1$.
  Considérons la subdivision $(c_0, c_1, \cdots, c_n) = (a_0, a_1, \cdots, a_n) \cup (b_0, b_1, \cdots, b_n)$ avec $c_0 = a < c_1 < \cdots < c_n = b$, alors
  pour tout $x \in [c_i, c_{i+1}]$; $0 \leq i \leq n-1$: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \alpha_i$ et $(fg)(x) = f(x)g(x) = \gamma_i$ car f et g sont constante sur $[c_i, c_{i+1}]$.

2.1.7 Fonctions polynomiales, fonction rationnelles

Définition 2.1.7. 1. *Une application $P : D \to \mathbb{R}$ est dite polynomiale si et seulement si il existe $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :*

$\forall x \in D,\ P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *n est appelé le dégré de P, note* $n = deg(P)$.

2. *Une application* $P : D \to \mathbb{R}$ *est dite rationnelle si et seulement si il existe deux polynômes P et Q tels que :*
   $\forall x \in D, Q(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Exemple 2.1.6. 1. $f(x) = 1,\ g(x) = 2x^{10} - 5x^3 + \frac{2}{3}x + 3$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *sont des fonctions polynomiales.*

2. $h(x) = \frac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^*,\ i(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ *sont des fonctions rationnelles.*

On note $\mathbb{R}[x]$ (respectivement, $\mathbb{R}_n[x]$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficient dans $\mathbb{R}$ (respectivement l'espace vectoriel des polynômes à coefficient dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n).
Les fonctions polynomiales sont des fonctions rationnelles.

2.2 Limites

2.2.1 Définitions

Limite en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 2.2.1. *Soit* $l \in \mathbb{R}$. *On dit que f a pour limite l en* x_0 *si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On dit aussi que $f(x)$ *tend vers l lorsque x tend vers* x_0. *On note alors* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ *ou bien* $\lim\limits_{x_0} f = l$.

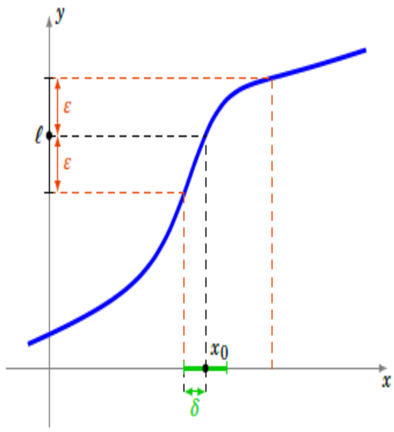

FIGURE 2.4 –

Remarque 2.2.1. *L'inégalité* $|x - x_0| < \delta$ *équivaut à* $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. *L'inégalité* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *équivaut à* $f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.
On peut remplacer certaines inégalités strictes $"' <"'$ *par des inégalités larges* $"' \leq "'$ *dans la définition :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Dans la définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

le quantificateur $\forall x \in I$ *n'est là que pour être sûr que l'on puisse parler de* $f(x)$. *Il est souvent omis et l'existence de la limite s'écrit alors juste :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

N'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs est important, on ne peut échanger le $\forall \varepsilon$ *avec le* $\exists \delta$ *: le* δ *dépend en général du* ε. *Pour marquer cette dépendance on peut écrire :* $\forall \varepsilon$, $\exists \delta(\varepsilon)$.
La définition précédente peut être donnée avec la notion de voisinage : On dit que f *admet* l *pour limite quand* x *tend vers* x_0 *si et seulement si :*

$$\forall W \in \mathcal{V}(l)\ \exists V \in \mathcal{V}(a) / \forall x \in I, \quad (x \in I \cap V \Rightarrow f(x) \in W)$$

Exemple 2.2.1.
1. $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ *pour tout* $x \geq 0$.
2. *la fonction partie entière* E *n'a pas de limite aux points* $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Définition 2.2.2. *-On dit que* f *a pour limite* $+\infty$ *en* x_0 *si*

$$\forall A > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
-On dit que f *a pour limite* $-\infty$ *en* x_0 *si*

$$\forall A > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de la forme $I =]\, a + \infty\, [$

Définition 2.2.3. *-On dit que* f *a pour limite* l *en* $+\infty$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B > 0\ \forall x \in I\ x > B \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
-On dit que f *a pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$ *si*

$$\forall A > 0\ \exists B > 0\ \forall x \in I\ x > B \Longrightarrow f(x) > A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

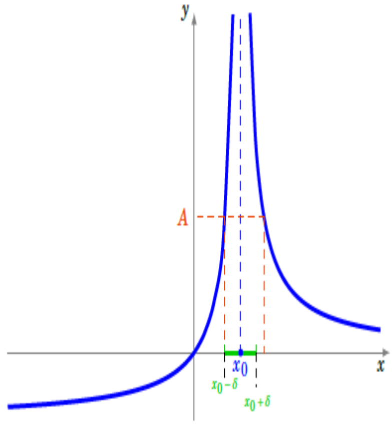

FIGURE 2.5 –

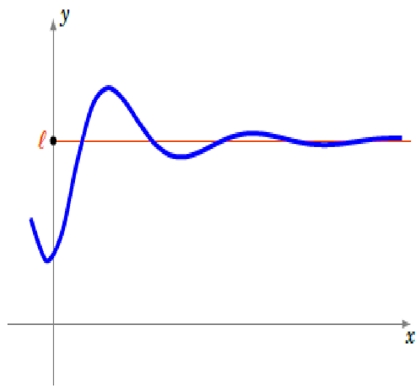

FIGURE 2.6 –

On définit de la même manière la limite en $-\infty$ des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$

On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:
$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_n > 0$ et
$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ avec $b_m > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } m > n \end{cases}$$

Définition 2.2.4 (Limite à gauche et à droite). *On f dit que f a pour limite à* *gauche(respectivement à droite) de x_0 si et seulement si :*

$$\forall W \in \mathcal{V}(l)\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad (-\eta < x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) \in W)$$

(respectivement $\forall\forall W \in \mathcal{V}(l)\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad (0 < x - x_0 < \eta \Rightarrow f(x) \in W)$*)*

Si la fonction f a une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite en x_0 coïncident et valent $\lim_{x_0} f$.
Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites valent $f(x_0)$ (si f est bien définie en x_0) alors f admet une limite en x_0.

Proposition 2.2.1 (Condition nécessaire et suffisante(CNS) de Cauchy)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ $a \in \bar{D}$: f admet une limite finie l en a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists V \in v(a)\ \forall x, y \in D \cap V,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Preuve : Supposons que $\lim_a f = l$; alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in v(a); \forall x, y \in D \cap V,\ |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc $\forall x, y \in D \cap V$, $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ d'où par l'inégalité triangulaire il vient que

$$|f(x) - f(y)| = |(f(x) - l) - (f(y) - l)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Réciproquement supposons que $\forall \varepsilon > 0\ \exists V \in v(a)\ \forall x, y \in D \cap V,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Comme $a \in \bar{D}$ il existe une suite $(u_n) \subset D$ convergeant vers a. Ainsi

$$\exists N \in \mathbb{N};\ n \in \mathbb{N}\ (n > N \Longrightarrow u_n \in V)$$

D'où $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $p > N$ et $q > N$ $|f(u_p) - f(u_q)| < \varepsilon$ c'est à dire $(f(u_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc $(f(u_n) \to l$. Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists V' \in v(a)\ \forall x, y \in D \cap V',\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Comme $a = \lim_n u_n$ et $l = \lim_n f(u_n)$ alors $\exists \in n_0 \in \mathbb{N}$; $u_{n_0} \in V'$ et $|f(u_{n_0}) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi $\forall x \in D \cap V'$ on a $|f(u_{n_0}) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|f(x) - f(u_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui implique $|f(x) - l| < \varepsilon$.

2.2.2 Propriétés

Proposition 2.2.2. *Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.*

Démonstration Pour démontrer que f ne peut pas admettre deux limites en x_0, nous allons supposer que f admet deux limites différentes en x_0 et monter que cela mène à une conséquence absurde. Ce type de démonstration s'appelle démonstration par l'absurde.
Supposons donc que f a deux limites $l \neq l'$. Choisissons arbitrairement $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{4}$.
Si l est la limite de f quand x tend vers x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_l > 0\ \forall x \in I\ \ |x - x_0| < \delta_l \Longrightarrow |f\ (x) - l| < \varepsilon.$$

Si l' est la limite de f quand x tend vers x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_{l'} > 0\ \forall x \in I\ \ |x - x_0| < \delta_{l'} \Longrightarrow |f\ (x) - l'| < \varepsilon.$$

Choisissons un x suffisamment proche de x_0 c'est-à-dire à une distance plus petite que δ_l et $\delta_{l'}$ de x_0. Donc $|f(x) - l| < \varepsilon$ et $|f(x) - l'| < \varepsilon$. On peut écrire l'inégalité suivante :

$$4\varepsilon = |l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| = 2\varepsilon.$$

$\Rightarrow 4\varepsilon < 2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon < 0$. Cela est absurde par hypothèse. Il est donc impossible d'avoir deux limites différentes en x_0□

Proposition 2.2.3. *Soient deux fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$ On suppose que $a \in \bar{D}$; $l, l' \in \mathbb{R}$, on a Si* $\lim_a f = l$ *et* $\lim_a g = l'$ *alors :*

- $\lim_a f = l \Rightarrow \lim_a |f| = l$
- $\lim_a f = l \Rightarrow \lim_a (\lambda.f) = \lambda.l$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_a f = l$ *et* $\lim_a g = l' \Rightarrow \lim_a (f + g) = l + l'$ *et* $\lim_a (f \times g) = l \times l'$
- $\lim_a f = 0$ *et g bornée au voisinage de a alors* $\lim_a fg = 0$
- $\lim_a g = l'$ $l' \neq 0$, *alors* $\lim_a \frac{1}{g} = \frac{1}{l'}$
- $\lim_a f = l$, $\lim_a g = l'$ *et* $l' \neq 0$, *alors* $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$

Preuve Montrons par exemple que si g tend en a vers une limite non nulle, alors $\frac{1}{g}$ est bien définie dans un voisinage de a et tend vers $\frac{1}{l'}$.
Supposons $l' > 0$ le cas $l' < 0$ se montrerait de la même manière. Montrons tout d'abord que $\frac{1}{g}$ est bien définie et est bornée dans un voisinage de a contenu dans I. Par hypothèse

$$\forall \varepsilon' > 0 \; \exists \delta_{l'} > 0 \; \forall x \in I \; a - \delta_{l'} < x < \delta_{l'} + a \Longrightarrow l' - \varepsilon' < g(x) < l' + \varepsilon'.$$

Si on choisit ε' tel que $0 < \varepsilon' < \frac{l'}{2}$, alors on voit qu'il existe un intervalle $J = I \cap]x_0 - \delta, \delta_{l'} + x_0[$ tel que pour tout x dans J, $g(x) > l'/2 > 0$, c'est-à-dire, en posant $M = l'/2$:

$$\forall x \in J, \;\; 0 < \frac{1}{g(x)} < M.$$

Fixons à présent $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in J$, on a

$$|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l'}| = \frac{|l' - g(x)|}{l' g(x)} < \frac{M}{l'} |l' - g(x)|.$$

Donc, si dans la définition précédente de la limite de f en a on choisit $\varepsilon' = \frac{l' \varepsilon}{M}$, alors on trouve qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in J, \; x_0 - \delta_{l'} < x < \delta_{l'} + x_0 \Rightarrow |\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l'}| = \frac{|l' - g(x)|}{l' g(x)} < \frac{M}{l'} |l' - g(x)| < \frac{M}{l'} \varepsilon' = \varepsilon.$$

Proposition 2.2.4 (cas de limites infinies). *Soient deux fonctions $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{D}$*

1. *Si* $\lim_a f = +\infty$ *et g minorée au voisinage de a alors* $\lim_a (f + g) = +\infty$. *En particulier si* $\lim_a g = +\infty$ *alors* $\lim_a (f + g) = +\infty$ *et si* $\lim_a g = l' \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim_a (f + g) = +\infty$.
2. *Si* $\lim_a f = +\infty$ *et g minorée au voisinage de a alors* $\lim_a (fg) = +\infty$. *En particulier si* $\lim_a g = +\infty$ *alors* $\lim_a (fg) = +\infty$ *et si* $\lim_a g = l' > 0$ *alors* $\lim_a (fg) = +\infty$.

On donne maintenant un résultat (malheureusement un peu compliqué à énoncer) sur la composition de limites.

Proposition 2.2.5. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$, deux applications telles que $f(D) \subset U$ et $a \in \bar{D}$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$ $b \in \bar{U}$. On suppose que $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = l$, Alors, $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = l$*

Preuve On commence par utiliser le fait que $\lim_{y\to b} g(y) = l$. Ceci donne l'existence de $\eta > 0$ t.q

$$\forall \varepsilon > 0,\ y \in U, |y - b| \leq \eta \Rightarrow |g(y) - l| \leq \varepsilon \tag{2.2.1}$$

Puis, comme $\lim_a f(x) = b$, il existe $\alpha > 0$ t.q

$$\forall x \in D,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - b| \leq \eta$$

Comme $f(x) \in U$ et $|f(x) - b| \leq \eta$, on a donc avec (2.2.1)

$$\forall x \in D,\quad |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - l| \leq \eta$$

On a bien montré que $\lim_a g \circ f = l\square$

Remarque 2.2.2. *Dans la proposition* 2.2.5, *nous avons pris (pour simplifier l'enoncé) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais, cette proposition reste vraie si f est définie que $D \subset \mathbb{R}$ et g définie sur $E \subset \mathbb{R}$ en supposant qu'il existe $\gamma > 0$ $D \supset]a - \gamma, a[\cup]a, a + \gamma[$ et $E \supset]b - \gamma, b[\cup]b, b + \gamma[$. Il faut alors commencer par remarquer que $g \circ f$ est définie sur ensemble qui contient $]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[$ pour un certain $\delta > 0$.*

Enfin voici une proposition très importante qui lie le comportement d'une limite avec les inégalités.

Proposition 2.2.6 (Théorème d'encadrement)**.** *Soient f, g, h trois applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \bar{D}$ et $l \in \mathbb{R}$ si $\lim_a f = l \lim_a h = l$ et*

$$\exists V \in v(a); \forall x \in V \cap D\ \ ; g(x) \leq f(x) \leq h(x)\ \textit{pour tout}\, x \in D$$

alors $\lim\limits_a f = l$.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$, il existe $V_1, V_2 \in v(a)$ t.q $\forall x \in V_1 \cap D$ $|g(x) - l| < \varepsilon$ et $\forall x \in V_2 \cap D$ $|h(x) - l| < \varepsilon$.
Posons $U = V_1 \cap V_2 \cap V \in v(a)$ alors $\forall x \in U \cap D$

$$|g(x) - l| < \varepsilon, |h(x) - l| < \varepsilon \text{ et } g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

d'où

$$-\varepsilon < g(x) - l \leq f(x) - l \leq h(x) - l < \varepsilon$$

c'est à dire $|f(x) - l| < \varepsilon$ autrement dit $\lim_a f = l$.

Proposition 2.2.7. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{D}$*

1. *Si $\exists V \in v(a)$ $\forall x \in D \cap V$; $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_a f = +\infty$ alors : $\lim_a g = +\infty$*
2. *Si $\exists V \in v(a)$ $\forall x \in D \cap V$; $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_a g = -\infty$ alors : $\lim_a f = -\infty$*

Preuve :

$$1. \lim_a f = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0,\ \exists U \in V(a) / \ \forall x \in D \cap U, f(x) \geq A.$$

Posons alors $\mathcal{U} = U \cap V$ alors $\forall x \in D \cap \mathcal{U}$ on a $g(x) \geq f(x) \geq A$.

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors on ne peut a priori rien dire sur la limite de $f + g$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée.

Voici une liste de formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$; 1^{∞}; ∞^0.

Pour lever l'indetermination on a souvent recourt à l'expression conjuguée ou à des equivalence ou aux limites remarquables.
Rappelons que f est équivalent g en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

2.2.3 Cas des fonctions monotones

Proposition 2.2.8. *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a < b$ $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante. Alors*

1. *Si f est majorée, alors elle admet une limite finie en b et on a :* $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
2. *Si f n'est pas majorée, alors on a :* $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$.

Preuve :Exercice

Proposition 2.2.9. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application croissante. Alors en tout poin $a \in I$, f admet une limite à gauche et une limite à droite de a finies et on a :*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Preuve : f croissante se majorée par $f(a)$ sur $I \cap] - \infty, a[$ donc $f(a^-) \leq f(a)$.
f croissante se minorée par $f(a)$ sur $I \cap]a, +\infty[$ donc $f(a) \leq f(a^+)$.

Définition 2.2.5. *Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux applications, $a \in \bar{\mathcal{D}}$.*

1. *On dit que f est négligéable devant φ en a ou φ l'emporte sur f ou φ est preponderant sur f au voisinage de a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathcal{D} \cap V;\ f(x) \leq \varepsilon\varphi(x)\ \textit{i.e}\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

On note $f = o(\varphi)$ (Landau)

On dit que f est dominée par φ en a

$$\exists A \in \mathbb{R}, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in \mathcal{D} \cap V;\ f(x) \leq A\varphi(x)\ \textit{i.e}\ \frac{f}{\varphi}.\ \textit{est bornée au voisinage de } a$$

On note $f = O(\varphi)$ (Landau) ($f \prec \varphi$ Hardy.)

f est equivalent à φ en a si et seulement si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$.
On note $f\widetilde{a}\varphi$

Exemple

1. $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\ \widetilde{+\infty}\ a_nx^n,\quad P(x)\ \widetilde{0}\ a_0.$
2. $F(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\cdots b_1x+b_0}\ \widetilde{+\infty}\ \frac{a_nx^n}{b_px^p}\quad F(x)\ \widetilde{0}\ \frac{a_0}{b_0}.$

2.3 Continuité en un point

2.3.1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction.

Définition 2.3.1.
- *On dit que f est continue en un point $x_0\in I$ si*
  $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in I\ |x-x_0|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
  c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$.
- *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

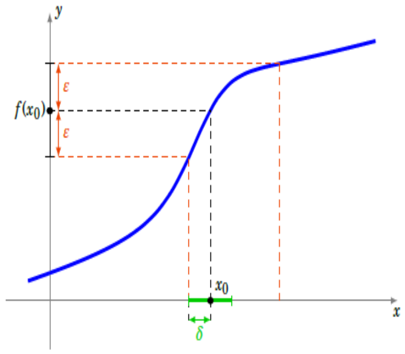

FIGURE 2.7 –

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe «sans lever le crayon», c'est-à-dire si elle n'a pas de saut.

Exemple 2.3.1. *Les fonctions suivantes sont continues :*
- *une fonction constante sur un intervalle,*
- *la fonction racine carrée $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $[\,0,+\infty\,[$*
- *les fonctions* sin *et* cos *sur* $\mathbb{R}$,

On note $C(\mathcal{D},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.3.2. *On dit que $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ admet une discontinuité de première espèce en x_0 si*
- *f n'est pas continue en a*
- $f(a^-)=\lim_{x\to a^-}f(x)\in\mathbb{R}$.
- $f(a^+)=\lim_{x\to a^+}f(x)\in\mathbb{R}$.

Remarque 2.3.1. *Si $f(a^+)$ et $f(a^-)$ existent dans $\mathbb{R}$, le réel $\sigma_{f(a)} = f(a^+) - f(a^-)$ est appelé saut de f en a.*
Si f n'est pas continue en a et n'admet pas des discontinuités de premières espèces ont dit f admet une discontinuité de second espèce en a.

Proposition 2.3.1. *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *f continue sur $\mathcal{D}$*
2. *L'image reciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ par f est un ouvert de $\mathcal{D}$.*
3. *L'image reciproque de tout fermé de $\mathbb{R}$ par f est un fermé de $\mathcal{D}$.*

Définition 2.3.3. *On dit que f est continue par morçeaux sur $[a, b]$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et une subdivision $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in [a, b]^{n+1}$ tel que*
- $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$
- *f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$*
- *$f(a_i^+)$ et $f(a_{i+1}^-)$ existent dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 2.3.2. *$f(x) = E(x)$ est continue par morceaux et admet des discontinuité de première espèce en $a_n = n \in \mathbb{Z}$, $\sigma_{f(n^+)} - \sigma_{f(n^-)} = 1$.*

2.3.2 Propriétés

La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point (qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale). Voici l'énoncé :

Lemme 2.3.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\; f(x) \neq 0.$$

Preuve
Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$, le cas $f(x_0) < 0$ se montrerait de la même manière. Écrivons ainsi la définition de la continuité de f en x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; \forall x \in I, \; \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir tel que $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Il existe alors bien un intervalle $J = I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J, on a $f(x) > 0$□

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires. Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 2.3.2. *Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors*
- *f est continue sur $\mathcal{D} \Rightarrow |f|$ est continue sur $\mathcal{D}$*
- *f, g continues sur $\mathcal{D} \Rightarrow f + \lambda g$ est continue sur $\mathcal{D}$*
- *f, g continues sur $\mathcal{D} \Rightarrow f \times g$ est continues sur $\mathcal{D}$*

– *f, g continues sur $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ et $\forall x \in \mathcal{D} g(x) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ est continues sur $\mathcal{D}$.*

Exemple 2.3.3. *La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :*

– *les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ (comme produit $x \times x \times \cdots$),*
– *les polynômes sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes),*
– *les fractions rationnelles $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.*

La composition conserve la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent).

Proposition 2.3.3. *Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{U}$. On note $g \circ f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$*

Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Définition 2.3.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors : f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0 la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.*

On retiendra surtout l'implication : si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite l, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$. On l'utilisera intensivement pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue et $u_n \to l$, alors $f(l) = l$.

Définition 2.3.5. *Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.*
-On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $l = \lim\limits_{x_0} f$.
- On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0 \\ l & si\ x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité *de f en x_0.*

Dans la pratique, on continuera souvent à noter f à la place de $\tilde{f}$.

Exemple 2.3.4. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0?*
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leq |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

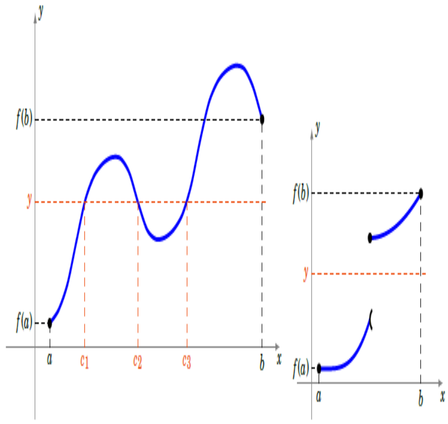

FIGURE 2.8 –

2.3.3 Continuité sur un intervalle

Théorème 2.3.1 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$*

Preuve : On suppose que $f(a) < f(b)$. On considère alors un réel y tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$ et on veut montrer qu'il a un antécédent par f

1. On introduit l'ensemble suivant
$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}.$$
Tout d'abord l'ensemble A est non vide (car $a \in A$) et il est majorée (car il est contenu dans [a, b]) ;il admet donc une borne supérieure, que l'on note $c = \sup A$. Montrons que $f(c) = y$.
2. Montrons tout d'abord que $f(c) \leq y$. Comme $c = \sup A$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$contenue dans A telle que (u_n) converge vers c. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \in A$, on a $f(u_n) \leq y$.
D'autre part, comme f est continue en c, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(c)$. On en déduit donc, par passage à la limite, que $f(c) \leq y$.
3. Montrons à présent que $f(c) \geq y$. Remarquons tout d'abord que si $c = b$, alors on a fini, puisque $f(b) \geq y$. Sinon, pour tout $x \in]c, b]$, comme $x \notin A$, on a $f(x) > y$. Or, étant donné que f est continue en c, f admet une limite à droite en c, qui vaut $f(c)$ et on obtient $f(c) \geq y$.

Comme conséquence de ce théorème, nous avons le résultats suivant qui est la version la plus utilisée

Corollaire 2.3.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; $a, b \in I$ tels que $f(a).f(b) < 0$; alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$*

Preuve Il s'agit d'une application directe du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$. L'hypothèse $f(a).f(b) < 0$ signifiant que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

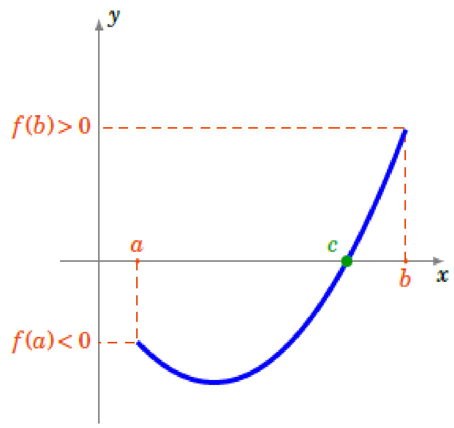

FIGURE 2.9 –

2.3.4 continuité sur compact

Théorème 2.3.2. *Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. ALors $f(K)$ est compact.*

Preuve : Soit (y_n) une suite de $f(K)$ alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in K$ telle que $y_n = f(x_n)$. La suite $(x_n) \subset K$ est K compact donc il existe sous suite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge vers $x \in K$. Comme f est continue alors $f(x_{n_k})$ converge vers $f(x) \in K$ lorsque k tend vers $+\infty$. Donc $f(K)$ est compact.

Corollaire 2.3.2. *Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur K et atteint ses bornes i.e $\inf_{x\in K} f(x)$ et $\sup_{x\in K} f(x)$ existent et il existe*

$$\exists (a,b) \in K^2; \quad f(a) = \inf_{x\in K} f(x); \; f(b) = \sup_{x\in K} f(x)$$

Corollaire 2.3.3. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, alors $f([a,b])$ est un intervalle fermé et borné i.e : $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2 / f([a,b]) = [m,M]$.*

Preuve : Par le théorème des valeur intermédiaire, il vient que $f([a,b])$ est un intervalle.

$$[a,b] \text{ compact } \Longrightarrow f([a,b]) \text{ compact.}$$

$$f \text{ continue } \Longrightarrow f \text{ atteint ses bornes sur } [a,b]$$

i.e $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m = inf_{x\in[a,b]} f(x) f(\alpha)$; $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta)$. et donc $f([a,b]) = [m,M]$.

Remarque 2.3.2. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue alors*

1. *Si f est croissante alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$*
2. *Si f est décroissante alors $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$*
3. *Si f est strictement monotone et $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation différentielle $f(x) = 0$ admet une unique solution.*

2.3.5 Application réciproque

Proposition 2.3.4. *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une application continue alors*

1. *Si f est strictement monotone alors f est injective.*
2. *Si f est strictement monotone alors l'application*

$$\tilde{f} : \mathcal{D} \to f(\mathcal{D}) \; x\tilde{f}(x) = f(x) \text{ est bijective.}$$

Preuve :

1. *Soit $(x, y) \in \mathcal{D}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. f etant strictement monotone alors si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$ ce qui est absurde. De même si $y < x$ alors $f(y) < f(x)$ ou $f(x) < f(y)$ ce qui est absurde. Donc nécéssairement $x = y$ i.e f est injective.*
2. *Immediat car 1. implique que $\tilde{f}$ est injective et par définition $\tilde{f}$ est surjective. Ainsi f est bijective.*

Théorème 2.3.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On note $h : I \to f(I)$ $x \mapsto h(x) = f(x)$. Si f est strictement monotone alors*

1. *h est une bijection*
2. *h^{-1} la bijection réciproque de h est stritement monotone et de même sens de variation que h*
3. *h^{-1} est continue sur $f(I)$.*

Remarque 2.3.3. *Le theorème affirme implicitement que f est continue.*

Preuve du théorème On suppose f strictement croissante.

1. Immediat d'après la proposition précédente
2. Soit $(u, v) \in f(I) \times f(I)/\ u < v$

$$\exists (x, y) \in I \times I/\ x = h^{-1}(u) \text{ et } y = h^{-1}(v).$$

   Si $x \geq y$ alors puisque h est croissante alors $h(x) = u \geq v = h(y)$ ce qui est absurde. Donc $x = h^{-1}(u) \leq= h^{-1}(v) = y$ i.e h^{-1} est croissante.
3. Admis.

Définition 2.3.6. *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$. On dit que f est homéomorphisme de $\mathcal{D}$ dans Y si et seulement si :*

1. *f est continue sur $\mathcal{D}$*
2. *f est bijective de $\mathcal{D}$ sur Y*
3. *f^{-1} est continue sur Y.*

Proposition 2.3.5. *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$: f un homéomorphisme de I dans J si et seulement si f est strictement monotone et f surjective.*

2.3.6 Continuité uniforme

Définition 2.3.7. *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, un application. On dit que f est uniformement continue sur $\mathcal{D}$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall (x;y) \in \mathcal{D}^2\ \ (|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Remarque 2.3.4. *η ne depend pas de x et y.*

Proposition 2.3.6. *Si f est uniforment continue sur $\mathcal{D}$ alors f est continue sur $\mathcal{D}$.*

La réciproque est fausse en générale. En effet considérons $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$; f est continue sur $\mathbb{R}$. Prenons : $\varepsilon = 1$, $x = \frac{1}{\eta}$, $y = x + \frac{\eta}{2}$ où $\eta > 0$ On a :
$|x-y| < \frac{\eta}{2} < \eta$ mais $|f(x) - f(y)| = 1 + \frac{\eta^2}{4} > 1 = \varepsilon$. Donc f n'est pas uniformement continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3.7 (Théorème de Heine). *Si K est un compact de $\mathbb{R}$ et si $f : K \to \mathbb{R}$ est une fonction continue alors f est uniformement continue sur K.*

2.3.7 Application Lipschitzienne

Définition 2.3.8. *On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une application*

1. *On dit que f est lipschitzienne, s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$. On dit aussi que f est k-lipschitzienne.*
2. *On dit que f est contractante s'il existe $k \in [0,1[$ tel que f soit lipschitzienne.*

Exemple $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ est 1-lipschitzienne.

Proposition 2.3.8. *f lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformement continue $\Rightarrow$ f continue.*

Preuve : f k-lipschitzienne $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathcal{D}, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.
Soit $\varepsilon > 0$, prenons $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ alors $\left(|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x-y| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon\right)$. Donc f est uniformenent continue.

Propriéte 2.3.1. *Soit $f\, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux applications, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *f uniformement continu(u.c) $\Rightarrow |f|$ u.c*
2. *f, g u.c $\Rightarrow f + \lambda g$ u.c*
3. *g u.c et il existe $C > 0$ $\forall x \in \mathcal{D}$, $g(x) \geq c > 0$ alors $\frac{1}{g}$ u.c*
4. *$f\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ u.c, $gY \to \mathbb{R}$ et $f(\mathcal{D}) \subset Y \Rightarrow g \circ f$ u.c sur $\mathcal{D}$*

Propriéte 2.3.2. *Soit $f\, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux applications, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *$f\ k - lip \Rightarrow |f|\ k - lip$*
2. *$f\ k - lip \Rightarrow \lambda f\ |\lambda| k - lip$*
3. *$f\ k - lip$ et $g\ k' - lip \Rightarrow f + g\ (k + k') - lip$*
4. *$f\mathcal{D} \to \mathbb{R}\ k - lip$, $gY \to \mathbb{R}\ k' - lip$ et $f(\mathcal{D}) \subset Y \Rightarrow g \circ f\ kk' - lip$ sur $\mathcal{D}$*

Chapitre 3

Dérivée d'une fonction

3.1 Dérivée

3.1.1 Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

Définition 3.1.1. *f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Définition 3.1.2. *f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x_0)$ est la fonction dérivée de f, elle se note f' ou $\dfrac{df}{dx}$.*

Autres Notations

1. En posant $h = x - x_0$, on a $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
2. Posons $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ alors $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
3. f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ avec
   $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, l + (x - x_0)\, \varepsilon(x)$.

Définition 3.1.3. *Soit f une fonction definie à gauche de x_0, si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite réelle quand x tend vers x_0 à gauche ((i.e) par valeur inférieures à x_0), on dit que f est derivable à gauche en x_0 ; on note alors*

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Définition 3.1.4. *Soit f une fonction definie à gauche de x_0, si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite réelle quand x tend vers x_0 à droite ((i.e) par valeur superieures à x_0), on dit que f est derivable à droite en x_0 ; on note alors*

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque 3.1.1. *f est derivable en x_0 si et seulement si f est derivable à gauche et à droite de x_0 et on a $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$*

Exemple 3.1.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction constante ; $f(x) = c$ pour tout $x \in I$ où $x \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

donc $f'(x) = 0$pour tout $x \in I$.

La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0.$$

Ainsi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0$$

i.e $f'(x) = 2x$.

Soit $f = \sin$, pour tout $x \neq x_0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x - x_0}{2}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cos \frac{x - x_0}{2} \\ &= \cos(x_0). \end{aligned}$$

3.1.2 Interpretation géométrique du nombre derivé

La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. À la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$. Une équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)$$

Proposition 3.1.1. *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

– *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

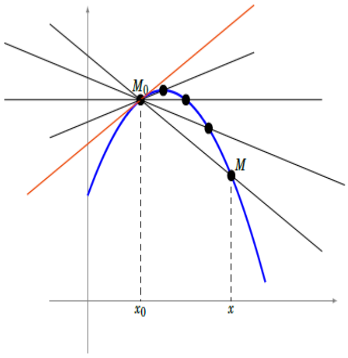

FIGURE 3.1 –

– *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Démonstration Pour $x \neq x_0$, on a $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}(x - x_0)$.

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}(x - x_0)\right] \\
&= \left[\lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}\right]\left[\lim_{x \to x_0}(x - x_0)\right] \\
&= f'(x_0) \times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a ainsi $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$, i.e, f est continue en x_0.

Remarque 3.1.2. *La réciproque est fausse : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en* 0 *mais n'est pas dérivable en* 0.
En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & si\, x > 0 \\ -1 & si\, x < 0 \end{cases}$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut ± 1), une limite à gauche (qui vaut ± 1) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$.

3.2 Calcul des dérivées

3.2.1 Somme, produit,...

Proposition 3.2.1. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:*

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

2. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $(f \times g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$,
4. $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *si* $(f(x) \neq 0)$,
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{f(x)^2}$ *si* $(g(x) \neq 0)$.

Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :

$$(f+g)' f' + g',\ (\lambda f) = \lambda f',\ (fg)' f'g + g'f,\ \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f},\ \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Démonstration Prouvons par exemple $(f \times g)' = f'g + fg'$.
Fixons $x_0 \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $f(x) \times g(x)$:

$$\frac{f(x) g(x) - f(x_0) g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0).$$

D'où

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) g(x) - f(x_0) g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$ la fonction $f \times g$ est dérivable sur I de dérivée $f'g + fg'$.

3.2.2 Dérivées de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant), u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

3.2.3 Composition

Proposition 3.2.2. *Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Démonstration
La preuve est similaire à celle ci-dessus pour le produit en écrivant cette fois :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ x \overrightarrow{\rightarrow} x_0\ g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

Exemple 3.2.1. *Calculons la dérivée de $\sqrt{1 - x^2}$. Nous avons $g(x) = \sqrt{x}$ avec $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; et $f(x) = 1 - x^2$ avec $f'(x) = 1 - x^2$. Alors la dérivée de $\sqrt{1 - x^2} = g \circ f(x)$ est*

$$(g \circ f(x))' = g'(f(x)) f'(x) = g'\left(1 - x^2\right).(-2x).= \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Fonction	Dérivée
x^n	nx^{n-1} $(n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

FIGURE 3.2 –

Corollaire 3.2.1. *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f' : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Démonstration

Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Le taux d'accroissement de g en y_0 est :

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - x_0}{f(g(y)) - y_0}.$$

Lorsque $y \to y_0$ alors $g(y) \to g(y_0) = x_0$ et donc ce taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{f'(x_0)}$. Ainsi $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Exemple 3.2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $0f(x) = x + exp(x)$. Étudions f en détail. Tout d'abord :*

1. *f étant la sommes de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier f est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Il n'est pas difficile de voir que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par conséquent f est réalise une bijection.*
3. *$f'(x) = 1 + exp(x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.*

Même si on ne sait pas a priori exprimer f^{-1}, on peut malgré tout connaître des informations sur cette fonction : par le corollaire ci-dessus g est dérivable et l'on calcule g' en dérivant l'égalité $f(f^{-1}(x)) = x$. Ce qui donne $(f^{-1}(x))'.f'(f^{-1}(x)) = 1$ et donc ici

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + exp(x)}.$$

3.2.4 Dérivée successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note f'' $((f')')$ la dérivée seconde de f . Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'', \cdots, f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Théorème 3.2.1 (Formule de Leibniz).

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Preuve : Il suffit de procéder par recurrence.

Exemple 3.2.3. *Calculons les dérivées n-ième de $exp(x).(x^2+1)$ pour tout $n \geq 0$. Notons $f(x) = exp(x)$ alors $f'(x) = exp(x)$, $f''(x) = exp(x), \cdots, f^{(k)}(x)exp(x)$. Notons $g(x) = x^2+1$ alors $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$. et pour $k \geq 3$, $g^(k)(x) = 0$. Appliquons la formule de Leibniz :*

$$(f.g)^{(n)}(x) = f^n(x).g(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x).g^{(1)}(x) + C_n^2 f^{(n-2)}(x).g^{(2)}(x) + \cdots +$$

On remplace $f^{(k)}(x) = exp(x)$ et on sait que $g^{(3)}(x)$, $g^{(4)}(x) = 0, \cdots$ Donc cette somme ne contient que les trois premiers termes :

$$(f.g)^{(n)}(x) = exp(x).(x^2+1) + C_n^1 exp(x).2x + C_n^2 exp(x).2$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$(f.g)^{(n)}(x) = exp(x).\left(x^2 + 2nx + \frac{n(n-1)}{2} + 1\right).$$

3.3 Extremum local, théorème de Rolle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

3.3.1 Extremun local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 3.3.1. - *On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.*
- On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp. un minimum local en x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\textit{pour tout } x \in I \cap J\ f(x) \leq f(x_0)$$

(resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

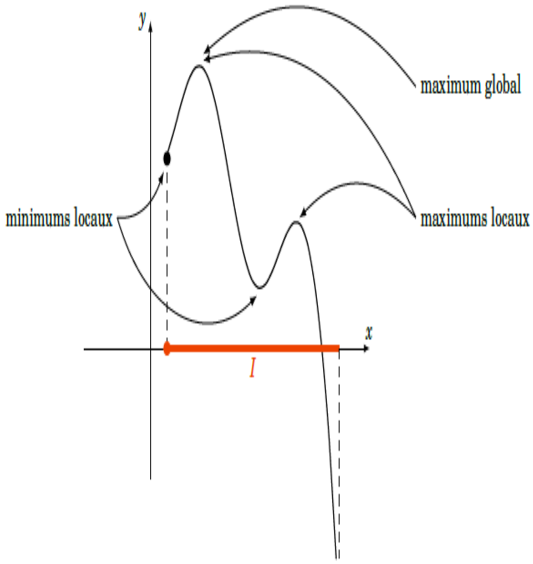

FIGURE 3.3 –

Dire que f a un maximum local en x_0 signifie que $f(x_0)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de x_0. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un maximum global en x_0 si pour toutes les autres valeurs $f(x)$, $x \in I$, on a $f(x) \leq f(x_0)$ (on ne regarde donc pas seulement les $f(x)$ pour x proche de x_0). Bien sûr un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

Théorème 3.3.1 (Théorème de Fermat sur l'extremum local)**.** *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local(ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) x_0 est toujours un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$ la tangente au graphe est horizontale.

Démonstration Preuve du théorème Supposons que x_0 soit un maximum local de f, soit donc J l'intervalle ouvert de la définition contenant x_0 tel que pour tout $x \in I \cap J$ on a $f(x) \leq f(x_0)$.

- Pour tout $x \in I \cap J$ tel que $x < x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 < 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.
- Pour tout $x \in I \cap J$ tel que $x > x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et $x - x_0 > 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

Or f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

La première limite est positive, la seconde est négative, la seule possibilité est que $f'(x_0)$.

Théorème 3.3.2 (Théorème de Rolle). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que*

– *f est continue sur* $[a, b]$ *,*
– *f est dérivable sur]a,b[,*
– $f(a) = f(b)$ *.*

Alors il existe $c \in \,]\,a, b\,[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Démonstration
Tout d'abord, si f est constante sur $[a, b]$ alors n'importe quel $c \in]a, b[$ convient. Sinon il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$. Alors f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, donc elle admet un maximum en un point $c \in [a, b]$. Mais $f(c) \geq f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De même comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a, b[$. En c, f est donc dérivable et admet un maximum (local) donc $f'(c) = 0$.

3.4 Théorème des accroissements finis

Théorème 3.4.1 (Théorème des accroissements finis de Lagrange). *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $f : [a, b]$ *et dérivable sur* $]\,a, b\,[$ *. Il existe* $c \in \,]\,a, b\,[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Démonstration Posons $l = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - l(x-a)$. Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - l$. Ce qui donne $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Corollaire 3.4.1 (Fonction croissante et dérivée). *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]\,a, b\,[$ *.*

1. $x \in \,]\,a, b\,[\;\; f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow$ *f est croissante ;*
2. $x \in \,]\,a, b\,[\;\; f'(x) > 0 \Longleftrightarrow$ *f est strictement croissante ;*
3. $x \in \,]\,a, b\,[\;\; f'(x) = 0 \Longleftrightarrow$ *f est constante ;*
4. $x \in \,]\,a, b\,[\;\; f'(x) \leq 0 \Longleftrightarrow$ *f est décroissante ;*
5. $x \in \,]\,a, b\,[\;\; f'(x) < 0 \Longleftrightarrow$ *f est strictement décroissante ;*

Remarque 3.4.1. *La réciproque au point* (4) *(et aussi au* (5)*) est fausse. Par exemple la fonction* $x \mapsto x^3$*est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en* 0.

Prouvons

1 Sens $\Rightarrow$. Supposons d'abord la dérivée positive. Soient $x, y \in]a, b[$ avec $x \leq y$. Alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Mais $f'(c) \geq 0$ et $x - y \leq 0$ donc $f(x) - f(y) \leq 0$. Cela implique que $f(x) \leq f(y)$. Ceci étant vrai pour tout x, y alors f est croissante.
Sens $\Leftarrow$. Réciproquement, supposons que f est croissante. Fixons $x \in]a, b[$. Pour tout

$y > x$ nous avons $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geq 0$, ainsi le taux d'accroissement vérifie $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. À la limite, quand $y \to x$, ce taux d'accroissement tend vers la dérivée de f en x et donc $f'(x) \geq 0$.

3 Soit f une fonction constante sur $]a, b[$, on a directement $f'(x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in]a, b[$ donc $f' = 0$ sur $]a, b[$. Réciproquement supposons que que $f' = 0$ sur $]a, b[$ alors $f' \geq 0$ et $f' \leq 0$ sur $]a, b[$. Ainsi f est croissante et decroissante sur $]a, b[$ donc f est constante sur $]a, b[$.

Corollaire 3.4.2 (Inégalité des accroissements finis). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M tel que pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq M$ alors*

$$\forall x, y \in I \ \ |f(x) - f(y)| \leq M |x - y| .$$

Démonstration Fixons x, $y \in I$ il existe alors $c \in \,]x, y[$ ou $]y, x[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ et comme $|f'(c)| \leq M$ alors $|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$.

Exemple 3.4.1. *Soit $f(x) = sin(x)$. Comme $f'(x) = cos(x)$ alors $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :*

$$\textit{Pour tout } x, y \in \mathbb{R} \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient

$$|\sin x| \leq |x|$$

ce qui est particulièrement intéressant pour x proche de 0.

Proposition 3.4.1 (Théorème des accroissement finis de Cauchy)**.** *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Si f et g sont deux fonction continues sur le segment $[a, b]$, derivables sur $]a, b[$ et si $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve Comme $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $g(b) - g(a) \neq 0$(voir théorème de Rolle). Considérons la fonction F definie par

$$\forall x \in [a, b] \ F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

Comme f et g sont continues sur $[a, b]$ alors F est continue sur $[a, b]$.
Comme f et g sont derivables sur $]a, b[$ alors F est derivable sur $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[\ F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$ et on a $F(a) = 0 = F(b)$.
F verifie les condition du théorème de Rolle, il existe donc un réel $c \in]a, b[$ telle que $F'(c) = 0$.
Ce qui donne

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) :$$

d'où $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$ et donc $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Proposition 3.4.2 (Régle de l'Hospital). *1. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables dans un voisinage du réel $x_0 \in I$ sauf eventuellement en x_0. On suppose que*
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe dans* $\mathbb{R}$

alors $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. =$$

2. L'assertion si dessus reste vraie si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

3. Les deux assertions ci dessus restent vraies si x_0 est remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$.

4. Les deux assertions ci dessus restent vraies si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ *avec* $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$.

Preuve 1. On prolonge f et g par continuité en x_0. On a :

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \neq x_0 \quad \tilde{f}(x) = 0 \text{ si } x = x_0$$

$$\tilde{g}(x) = g(x) \text{ si } x \neq x_0 \quad \tilde{g}(x) = 0 \text{ si } x = x_0$$

pour tout $x \in V$.
Soient x et x' deux réels dans V tels que $x' < x_0 < x$ On applique le théorème des accroissements finis de Cauchy à $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sur $[x', a]$ et $[a, x]$:

$$\exists \alpha \in]a, x[\text{ tel que } \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(\alpha)}{\tilde{g}'(\alpha)}$$

$$\exists \alpha \in]x', a[\text{ tel que } \frac{\tilde{f}(x') - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}'(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(\alpha')}{\tilde{g}'(\alpha')}.$$

Ce qui revient à dire

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{\tilde{f}'(\alpha)}{\tilde{g}'(\alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{f}(x')}{\tilde{g}(x')} = \frac{\tilde{f}'(\alpha')}{\tilde{g}'(\alpha')}.$$

Lorsque x tend vers x_0 par valeurs superieures, α tend vers x_0 par valeurs superieures.
Lorsque x tend vers x_0 par valeurs inferieures, α tend vers x_0 par valeurs inferieures.
On a :

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{\alpha\to x_0^+} \frac{\tilde{f}'(\alpha)}{\tilde{g}'(\alpha)} = \lim_{\alpha\to x_0^+} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

et

$$\lim_{x'\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x'\to x_0^-} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{\alpha'\to x_0^-} \frac{\tilde{f}'(\alpha')}{\tilde{g}'(\alpha')} = \lim_{\alpha'\to x_0^-} \frac{f'(\alpha')}{g'(\alpha')} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

On en tire

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

et donc

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Il suffit de montrer que $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nous allons montrer que $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Il existe un réel x_1 tel que $g(x)\neq 0$ pour $x_1<x<a$. Prenos x et y tel que $x_1<x<y<a$. Le théorème des accroissement finis de Cauchy appliqué à f et g sur $[x,y]$ donne

$$\exists\alpha\in]x,y[\text{ tel que }\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Comme $g(y)\neq 0$, on peut écrire

$$=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\frac{\frac{f(y)}{g(y)}-\frac{f(x)}{g(y)}}{1-\frac{g(x)}{g(y)}}$$

quand tends vers $x\to x_0^-$, $\alpha\to x_0^-$. Posons $l=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$.
Pour $\varepsilon>0$; il existe x_2 tel que

$$l-\varepsilon<\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}<l+\varepsilon$$

donc

$$l-\varepsilon<\frac{\frac{f(y)}{g(y)}-\frac{f(x)}{g(y)}}{1-\frac{g(x)}{g(y)}}<l+\varepsilon.$$

Pour x fixé ; $\frac{g(x)}{g(y)}$ tend vers 0 quand y tends vers x_0^-. Il existe donc y_1 tel que $1-\frac{g(x)}{g(y)}>0$ dès que $y>y_1$. On a alors pour $\max(x_1,x_2)<x<y_1<y<a$

$$(l-\varepsilon)\left[1-\frac{g(x)}{g(y)}\right]<\frac{f(y)}{g(y)}-\frac{f(x)}{g(y)}<(l+\varepsilon)\left[1-\frac{g(x)}{g(y)}\right].$$

Ce qui donne

$$(l-\varepsilon)-(l-\varepsilon)\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{f(x)}{g(y)}<\frac{f(y)}{g(y)}<(l+\varepsilon)-(l+\varepsilon)\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{f(x)}{g(y)}*.$$

Pour x fixé et y tendant vers x_0^- $A=-(l-\varepsilon)\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{f(x)}{g(y)}$ et $B=-(l+\varepsilon)\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{f(x)}{g(y)}$ tendent vers 0.
Il existe y_2 tel que $y_2<y<a$ alors $-\varepsilon<A<\varepsilon$ et $-\varepsilon<B<\varepsilon$. Si $\max(y_1,y_2)<y<a$ * devient $(l-\varepsilon)-\varepsilon<\frac{f(y)}{g(y)}<(l+\varepsilon)+\varepsilon$ i.e $l-2\varepsilon<\frac{f(y)}{g(y)}<l+2\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on :

$$\lim_{y\to x_0^-}\frac{f(y)}{g(y)}=l=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

La demonstration de $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ est semblable.

3. $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=0$ et $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\in\mathbb{R}$.
On fait le changement $x=\frac{1}{t}$ i.e $t=\frac{1}{x}$ quand x tend vers $\pm\infty$ t tend vers .0 Prenons x tend

vers $+\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}\\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{(f(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'}\\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}$$

4. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, et $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, le résultat découle de 1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, on remplace dans la demonstration de 2. $l-\varepsilon$ par A si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ et par $l+\varepsilon$ par A si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$
Si $x_0 = \pm\infty$, on se ramène au cas $x_0 = 0$ avec le changement de variable du 3.

Exemple 3.4.2. *Calculer la limite en* 1 *de* $\dfrac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. *On vérifie que :*

- $f(x) = \ln\left(x^2+x+1\right),\ f(1) = 0,\ \dfrac{2x+1}{x^2+x-1},$
- $g(x) = \ln(x),\ g(1) = 0,\ g'x = \dfrac{1}{x},$
- *Prenons* $I = \left]0,1\right]$ $x_0 = 1$, *alors* g' *ne s'annule pas sur* $I\left\{x_0\right\}$.

$$\lim_1 \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_1 \frac{2x+1}{x^2+x-1}\times x = \lim_1 \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} = 3.$$

Donc

$$\lim_1 \frac{f(x)}{g(x)} = 3.$$

Chapitre 4

Fonctions usuelles

4.1 Logarithme et exponentielle

4.1.1 Logarithme

Proposition 4.1.1. *Il existe une unique fonction, notée* $\ln :]0, +\infty[$ *telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \textit{ pour tout } x > 0 \ \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$*) :*

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b,$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$ *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *)*
4. $\ln$ *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0, +\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$.
5. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$
6. *la fonction* $\ln$ *est concave et* $\ln x \leq x - 1$ *(pour tout* $x > 0$*).*
7. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

Démonstration L'existence et l'unicité viennent de la théorie de l'intégrale : $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Passons aux propriétés

1. Posons $f(x) = \ln(xy) - \ln(x)$ avec $y > 0$ est fixé. Alors $f'(x) = y \ln'(xy) - \ln'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$. Donc la fonction $x \mapsto f(x)$ a une dérivée constante et vaut $f(1) = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y)$. Donc $\ln(xy) - \ln(x) = \ln(y)$.
2. On a $0 = \ln(1) = \ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a})$, c'est à dire $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.
3. Similaire ou récurrence.
4. ln est dérivable donc continue, $ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc la fonction est strictement croissante. Comme $ln(2) > ln(1) = 0$ alors $ln(2^n) = nln(2) \to +\infty$ (lorsque $n \to +\infty$). Donc $lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. De $ln(x) = -\ln(\frac{1}{x})$ on déduit $lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$. Par le théorème sur les fonctions continues et strictement croissantes, $ln :]0, +\infty[\to +\infty$ est une bijection.

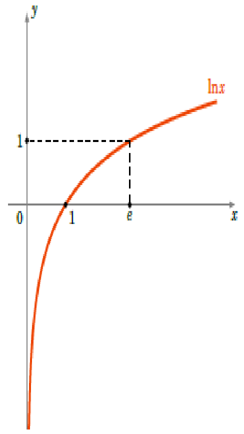

FIGURE 4.1 –

5. $\frac{\ln(1+x)}{x}$ est la dérivée de ln au point $x_0 = 1$, donc cette limite existe et vaut $\ln'(1) = 1$.
6. $\ln'$ est décroissante, donc la fonction ln concave. Posons $f(x) = x-1-\ln(x)$; $f'(x) = 1-\frac{1}{x}$. Par une étude de fonction f atteint son maximun en $x_0 = 1$. Donc $f(x) \geq f(1) = 0$. Donc $\ln x \leq x - 1$.
7. Puis que $\ln x \leq x - 1$ (pour tout x>0). Donc $\ln x \leq \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leq 1$. Cela donne $0 \leq \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(\sqrt{x}^2)}{x} = 2\frac{\ln \sqrt{x}}{x} = 2\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.
Cette inégalité double entraine $\lim_{x\to+} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Remarque 4.1.1. *La fonction* ln *s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme néperien. Il est caractérisé par* $\ln(e) = 1$. *On définit le logarithme en base* a, $a > 0$ *et* $a \neq 0$ *par*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

De sorte que $\log_a(a) = 1$.

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$$

Le cas le plus utilisé est le logarithme decimal de base $a = 10$ $\log_{10}$ *noté simplement* log . *qui vérifie* $\log_{10}(10^n) = n$.. *Dans la pratique on utilise l'équivalence :*

$$x = 10^y \iff y = \log_{10}(x).$$

En informatique intervient aussi le logarithme en base 2 *:* $\log_2(2^n) = n$.

4.1.2 Exponentielle

Définition 4.1.1. *La bijection réciproque de* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *s'appelle la fonction exponentielle, notée* $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp(x)$.

Proposition 4.1.2. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

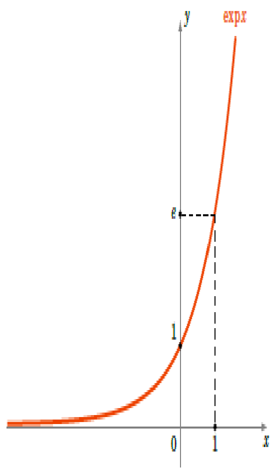

FIGURE 4.2 –

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$
3. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
4. $\exp(a^n) = (\exp a)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$
5. $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$
6. *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$. *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Elle est convexe et* $\exp x \geq 1 + x$.

Démonstration Ce sont les propriétés du logarithme retranscrites pour sa bijection réciproque. Par exemple pour la dérivée : on part de l'égalité $\ln(\exp x) = x$ que l'on dérive. Cela donne $\exp'(x) \ln'(\exp x) = 1$ donc $\exp x' \times \dfrac{1}{\exp x} = 1$ et ainsi $\exp' x = \exp x$.

Autres propriétés

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{exp(x)}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xexp(x) = 0 \tag{4.1.1}$$

$$\tag{4.1.2}$$

La fonction $\log_a$ est continue et strictement monotone donc elle admet une fonction réciproque appélé exponentielle de base a, $a^x = e^{x\ln(a)}$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $a > 0$ et $a \neq 0$ $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$,

4.1.3 Puissance et comparaison

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on appelle puissance d'exposant α la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^\alpha \end{array}$$

on a $f(x) = e^{\alpha \ln x}$. C'est une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} = +\infty \text{ si } \alpha > 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} = 0 \text{ si } \alpha < 0$$

$$\lim_{x\to 0} = +\infty \text{ si } \alpha < 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} = 0 \text{ si } \alpha > 0.$$

La réciproque de x^α est $x^{\frac{1}{\alpha}}$.
Croissance comparée des fonctions $exp; \ln, x^\alpha$

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln(x))^\beta = +\infty \;\; \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_+^*$

Proposition 4.1.3.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.$$

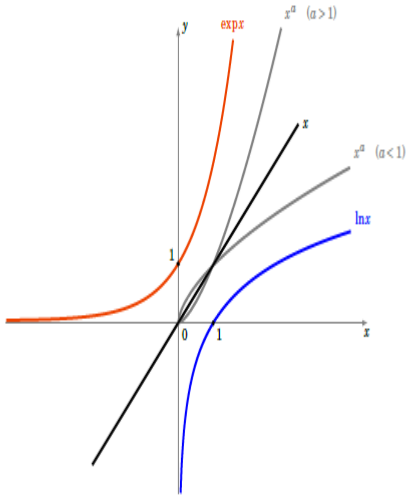

FIGURE 4.3 –

4.2 Fonctions circulaire inverses

4.2.1 Arccosinus

Considérons la fonction cosinus $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos_{|} : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus**

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

On a donc, par définition de la bijection réciproque

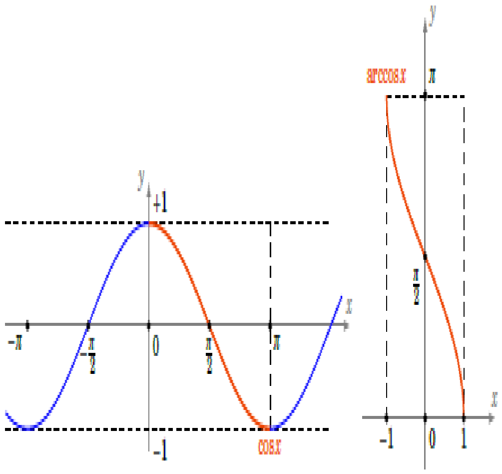

FIGURE 4.4 –

$$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

Autrement dit :

$$\text{Si} \quad x \in [0, \pi] \quad \cos x = y \Longleftrightarrow x = \arccos y$$

Terminons avec la dérivée de arccos :

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Démonstration On démarre de l'égalité $\cos(\arccos x) = x$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) &= x \\ \Rightarrow -\arccos'(x) \times \sin(\arccos x) &= 1 \\ \Rightarrow \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \end{aligned}$$

Or on a $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ donc $x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$. On en déduit : $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-x^2}$ (avec le signe + car $\arccos(x)$ étant dans $\in [0,\pi]$ alors $\sin(\arccos x) \geq 0$).

4.2.2 Arcsinus

La restriction

$$\sin_| : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arcsinus :

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

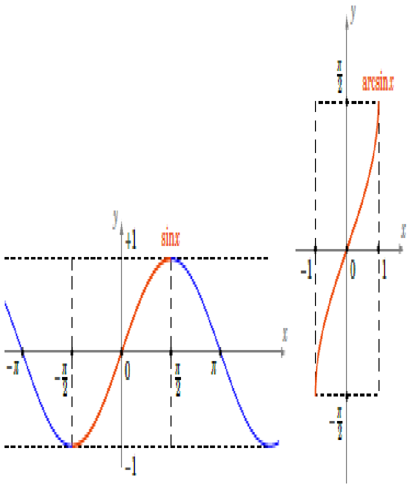

FIGURE 4.5 –

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Si} \quad x\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin x = y \Longleftrightarrow x = \arcsin y$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$$

4.2.3 Arctangente

La restriction

$$\tan_| :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arctangente :

$$\arctan_{|} : \mathbb{R} \to \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

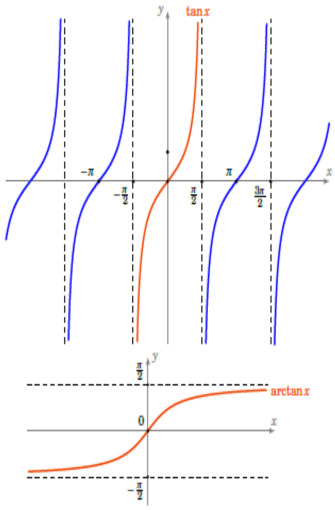

FIGURE 4.6 –

$$\tan(\arctan x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\text{Si} \quad x \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \tan x = y \Longleftrightarrow x = \arctan y$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

4.3.1 Cosinus hyperbolique et son inverse

Pour $x\mathbb{R}$ le cosinus hyperbolique est :

$$\mathrm{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

La restriction $\mathrm{ch}_{|} : [\,0, +\infty\,[\;\to\; [\,1, +\infty\,[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\mathrm{argch} : [\,1, +\infty\,[\;\to [\,0, +\infty\,[$

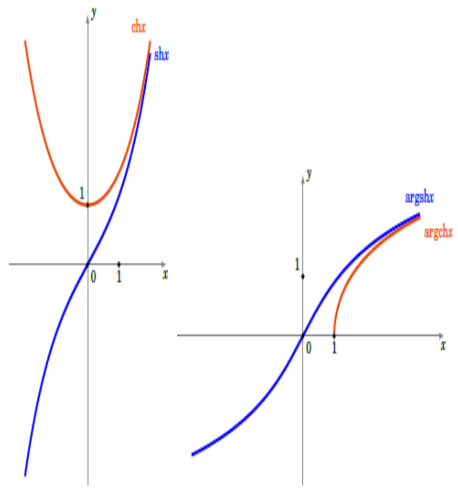

FIGURE 4.7 –

4.3.2 Sinus hyperbolique et son inverse

Pour $x \in \mathbb{R}$, le sinus hyperbolique est :

$$\mathrm{sh} x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}\,(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{sh}\,(x) = +\infty$c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 4.3.1. *1.* $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.

2. $ch'(x) = sh(x)\,,\ sh'(x) = ch(x)$

3. *argsh* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue.*

4. *argsh est dérivable et* $argsh'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

5. $argsh\,(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Démonstration 3. et 4. Comme la fonction $x \mapsto shx$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $sh(argshx) = x$:

$$argsh'x = \frac{1}{ch(argshx)} = \frac{1}{\sqrt{sh^2(argshx)+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

5. Notons $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ alors

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = argsh'(x).$$

Alors $f(x) = argshx + c$ avec une constante. Comme de plus $0 = ln(1) = f(0) = argsh(0) + c = c$ et $argsh(0) = 0$ (car $sh(0) = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f(x) = argsh(x)$.

4.3.3 Tangente hyperbolique et son inverse

Par définition la tangente hyperbolique est :

$$\mathrm{th}\,(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}.$$

La fonction th : $\mathbb{R} \to \,]-1,1]$ est une bijection, on note $]-1,1] \to \mathbb{R}$sa bijection réciproque

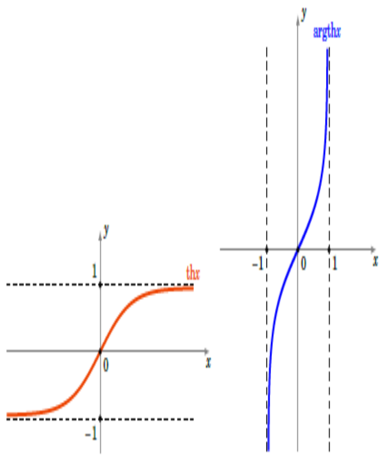

FIGURE 4.8 –

4.3.4 Trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{sh}\,(b)$$
$$\mathrm{ch}\,(2a) = \mathrm{ch}^2\,(a) + \mathrm{sh}^2\,(a) = 2\mathrm{ch}^2\,(a) - 1 = 2\mathrm{sh}^2\,(a) + 1$$

$$\mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(b) + \mathrm{sh}\,(b)\,\mathrm{ch}\,(a)$$
$$\mathrm{sh}\,(2a) = 2\mathrm{sh}\,(a)\,\mathrm{ch}\,(a)$$

$$\mathrm{th}\,(a+b) = \frac{\mathrm{th}\,(a) + \mathrm{th}\,(b)}{1 + \mathrm{th}\,(a)\,\mathrm{th}\,(b)}$$