ENSEA — ANNÉE ACADÉMIQUE 2021-2022
Espaces vectoriels

FICHE DE T D N° 4 : ESPACES VECTORIELS

Exercice 1.
Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sev de $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$ *ou* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *:*

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}$
3. $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 2y > 0\}$
4. $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 \leq 0\}$
5. $E_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f(0) = 1\}$
6. $E_6 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f(1) = 0\}$

Exercice 2.

1. *Dans* $\mathbb{R}^2$*, montrer que* $(1,2)$ *;* $(2,3)$ *;* $(2,2)$ *forme un système générateur.*
2. *Montrer que* $\mathbb{R}^2 = Vect\{(1,1);(2,3)\}$
3. *Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ?* $\mathcal{A}_1 = \{(1,2,3);(4,5,6);(-1,2,3)\}$ *;* $\mathcal{A}_2 = \{1, 1+x, x^2\}$ *;* $\mathcal{A}_3 = \{(1,0,3);(2,1,-1);(3,1,2)\}$

Exercice 3.
Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ *sont linéairement dépendants et préciser leur relation de dépendance :*

1. $u = (1,2,-1)$ *;* $v = (1,0,1)$ *;* $w = (-1,2,-3)$
2. $u = (-1,2,5)$ *;* $v = (2,3,4)$ *;* $w = (7,0,-7)$.

Exercice 4.
Préciser si les familles constituées des vecteurs suivants sont liés ou libres.

1. $u = (7,12)$ *;* $v = (18,-13)$ *;* $w = (-4,17)$
2. $u = (-1,0,2)$ *;* $v = (1,3,1)$ *;* $w = (0,1,-1)$
3. $u = (15,-27,-6,12)$ *;* $v = (\frac{-5}{2}, \frac{9}{2}, 1, -2)$.

Exercice 5.
$\mathbb{R}^3$ *est muni de sa base canonique* (e_1, e_2, e_3).
Soient les vecteurs $u_1 = (1,1,1)$ *;* $u_2 = (-1,1,0)$ *;* $u_3 = (1,0,-1)$.

1. *Montrer que* $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Calculer les coordonnées respectives des vecteurs* $(1,0,0)$ *;* $(1,0,1)$ *et* $(0,0,1)$ *dans* B_1.
3. *Soit* $B_2 = \{v_1 = (0,1,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (1,1,0)\}$.
   a) *Montrer que* B_2 *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

b) *Trouver dans B_1 et B_2 les composantes du vecteur* $(1,2,1)$.

Exercice 6.
$\mathbb{R}^4$ *est muni de sa base canonique* (t_1,t_2,t_3,t_4). *On considère les vecteurs :*
$e_1=(1,2,3,4)$; $e_2=(1,1,1,3)$; $e_3=(2,1,1,1)$; $e_4=(-1,0,-1,2)$; $e_5=(2,3,0,1)$
Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F par e_4 et e_5.
Calculer les dimensions respectives de E, F, $E\cap F$ et $E+F$.

Exercice 7.
Soit $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4; x+y-z+2t=0 \quad \textit{et} \quad x+y+z=0\}$.

1. ***a)*** *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*
   b) *Donner une base et la dimension de E.*
2. *Déterminer les équations caractérisant les éléments du sous-espaces vectoriels $F\subset\mathbb{R}^4$ défini par :*
   $F=vect((-1,2,1,-1);(3,1,0,-1))=<(-1,2,1,-1);(3,1,0,-1)>$.

Exercice 8.
Soient $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$ *et*
$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x-y=0 \quad \textit{et} \quad z=0\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.
Soient E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1,2,0,1)$ *et* $(0,1,1,3)$ *et E_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par* $(1,1,1,0)$.

1. *Déterminer $E_1\cap E_2$.*
2. *Donner une base de E_1+E_2.*