Algo de matemática y economía

Juan Pérez*

junio, 6 del 2018

Índice

1 Espacios métricos 1
1.1 Nociones básicas . . . 1
1.1.1 Espacios métricos. Definición y ejemplos . . . 1
2 Equilibrio 2
3 Una tabla 4

Mis figuras

1 Bolas en $\mathbb{R}^2$. . . . 2

Las tablas de clase

1 Primera tabla . . . 4

1 Espacios métricos

Ver [1, Capítulo C]

1.1 Nociones básicas

1.1.1 Espacios métricos. Definición y ejemplos

Definición 1. Sea X un conjunto no vacío. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ que satisface las siguientes propiedades es llamada una **función distancia** (o una **métrica**) sobre X: Para cualquier $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
2. (Simetría) $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Si d es una función distancia sobre X, decimos que (X, d) es un **espacio métrico**, y nos referimos a los elementos de X como **puntos** en (X, d). Si d satisface 2. y 3., y $d(x, x) = 0$ para cualquier $x \in X$, entonces decimos que d es una **semimétrica** sobre X, y (X, d) es un **espacio semimétrico**

Ejemplo 1. Sea X un conjunto no vacío. Una manera trivial de hacer X un espacio métrico es usar la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, que es definida por

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Es fácil verificar que (X, d) es de hecho un espacio métrico. Aquí d es llamado **métrica discreta** sobre X, y (X, d) es llamado un **espacio discreto**.

*Gracias a CTIC

Desigualdad de Minkowski 1
Para cualquier $n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ y cualquier $1 \leq p < \infty$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

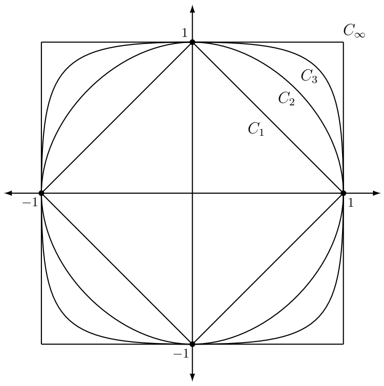

Figura 1: Bolas en $\mathbb{R}^2$.

2 Equilibrio en la economía

Ver [2, Capítulo 5]

Ahora enunciaremos y probaremos el mayor resultado de esta introducción, que bajo las hipótesis introducidas arriba, la Ley de Walras y Continuidad, existe un equilibrio en la economía. Para hacer esto, necesitamos una pieza adicional de estructura matemática, el Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

Teorema 2.1 (Teorema del Punto Fijo de Brouwer)**.** Sean $f(\cdot)$ una función continua, $f : P \to P$. Entonces existe $x^\star \in P$ tal que $f(x^\star) = x^\star$.

Teorema 2.2. Consideremos que se satisface la Ley de Walras y Continuidad. Entonces existe $p^\star \in P$ tal que $p^\star$ es un equilibrio.

Prueba. La prueba del teorema es el análisis matemático de una historia. Supongamos precios asignados por un subastador. Él llama un vector de precios p, y el mercado responde con un vector de exceso de demanda $Z(p)$. Algunos bienes estar en exceso de oferta en p, mientras otros estarán en exceso de demanda. El subastador entonces hace lo obvio. Él alza el precio de los bienes en exceso de demanda y reduce el precio de los bienes en exceso de oferta. Pero no se puede mucho cualquiera de los cambios; los precios deben mantenerse en el simplex. ¿Cómo debe asegurarse de mantener los precios en el simplex? Primero, los precios deben permanecer no negativos. Cuando él reduce un precio, debe asegurarse no reducirlo bajo cero. Cuando el aumenta los precios, debería estar seguro que el nuevo precio resultante permanece en el simplex. ¿Cómo puede hacer esto? Él modifica los nuevos precios tal que sumen uno. Además, queremos usar el Teorema del Punto Fijo de Brouwersobre el proceso de modificación de precios; de ahí que el subastador debe hacer el ajuste de precios una función continua del simplex en sí mismo. Esto nos lleva a la siguiente función de modificación de precios T, que representa como el subastador administra los precios.

Sea $T : P \to P$, donde $T(p) = (T_1(p), T_2(p), \dots, T_k(p), \dots, T_N(p))$. $T_k(p)$ es el precio modificado del bien k, modficado por el subastador tratando de llevar a la oferta y la demanda al balance. Sea $\gamma^k > 0$. El proceso de ajuste del k-ésimo precio puede ser representado como $T_k(p)$, definido como sigue:

$$T_k(p) \equiv \frac{\max\left[0, p_k + \gamma^k Z_k(p)\right]}{\sum_{n=1}^{N} \max\left[0, p_n + \gamma^n Z_n(p)\right]}. \tag{1}$$

La función T es una función de ajuste de precios. Éste aumenta el precio relativo de bienes en exceso de demanda y reduce el precio el precio de bienes en exceso de oferta mientras mantiene el vector de precio en el simplex. La expresión $p_k + \gamma^k Z_k(p)$ representa la idea que los precios de bienes en exceso de demanda deben aumentar y aquellos en exceso de oferta se deben reducir. El operador $\max[0, \cdot]$ representa la idea que precios modificados deben ser no negativos. La forma fraccional de T nos recuerda que después que cada precio es ajustado individualmente, ellos son reajustados proporcionalmente para mantenerse en el simplex. Para que T esté bien definido, debemos mostrar que el denominador no es cero, esto es,

$$\sum_{n=1}^{N} \max\left[0, p_n + \gamma^n Z_n(p)\right] \neq 0. \tag{2}$$

Omitimos la demostración formal de (2), notando solamente que sigue de la Ley de Walras. Para que la suma en el denominador sea cero o negativo, todos los bienes deben estar en exceso de oferta simultáneamente, que es contrario a nuestras nociones de escasez y—apareciendo—a la Ley de Walras. Recordemos que $Z(\cdot)$ es una función continua. Las operaciones de $\max[]$, suma y división por una función distinta de cero mantienen la continuidad. Por lo tanto, $T(p)$ es una función continua del simplex en sí mismo.

Por el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, existe $p^* \in P$ tal que $T(p^*) = p^*$. Como $T(\cdot)$ es la función de ajuste de precio del subastador, esto significa que p^* es un precio en el cual el subastador detiene el ajuste. Su regla de ajuste de precios dice que una vez que ha encontrado p^* el proceso de ajuste se detiene.

Ahora debemos mostrar que la decisión del subastador de parar ajustando el precio es realmente lo correcto a hacer. Esto es, queremos mostrar que p^* no es sólo el punto de parado del proceso de ajuste de precios sino también que actualmente representa equilibrio general de precios para la economía. Por lo tanto debemos mostrar que en p^* todos los mercados están definidos con la posible excepción de unos pocos con bienes libres con sobre oferta.

Como $T(p^*) = p^*$, para cada bien k, $T_k(p^*) = p_k^*$. Esto es, para todo $k = 1, \dots, N$,

$$p_k^* = \frac{\max\left[0, p_k^* + \gamma^k Z_k(p^*)\right]}{\sum_{n=1}^{N} \max\left[0, p_n^* + \gamma^n Z_n(p^*)\right]}. \tag{3}$$

Mirando el numerado en esta expresión, podemos ver que la ecuación se cumplirá cuando

$$p_k^* = 0 \qquad \text{(Caso 1)} \tag{4}$$

o por

$$p_k^* = \frac{\max\left[0, p_k^* + \gamma^k Z_k(p^*)\right]}{\sum_{n=1}^{N} \max\left[0, p_n^* + \gamma^k Z_k(p^*)\right]} > 0 \qquad \text{(Caso 2)} \tag{5}$$

Caso 1 $p_k^* = 0 = \max[0, p_n^* + \gamma^n Z_n(p^*)]$. Por lo tanto, $0 \geq p_k^* + \gamma^k Z_k(p^*) = \gamma^k Z_k(p^*)$ y $Z_k(p^*) \leq 0$. Este es el caso de bienes libres con mercandos transparentes on con exceso de oferta en el equilibrio.

Caso 2 Para evitar una notación complicada, sea

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{n=1}^{N} \max\left[0, p_n^* + \gamma^n Z_n(p^*)\right]}$$

entonces $T_k(p^*) = \lambda(p_k^* + \gamma^k Z_k(p^*))$. Como p^* es el punto fijo de T tenemos $p^* = \lambda\left(p_k^* + \gamma^k Z_k(p^*)\right)$. Esta expresión es verdadera para todo k con $p_k^* > 0$, y λ es el mismo para todo k. Haremos algo de álgebra en esta expresión. Primero combinemos términos en p_k^*,

$$(1 - \lambda)\, p_k^* = \lambda \gamma^k Z_k(p^*);$$

entonces multiplicaremos por $Z_k(p^*)$ para conseguir

$$(1-\lambda)\, p_k^* Z_k(p^*) = \lambda \gamma^k (Z_k(p^*))^2 \tag{6}$$

y ahora sumemos sobre todo k en el **Caso 2**, obteniendo

$$(1-\lambda) \sum_{k \in \textbf{ Caso 2}} p_k^* Z_k(p^*) = \lambda \sum_{k \in \textbf{ Caso 2}} \gamma^k (Z_k(p^*))^2.$$

La Ley de Walras dice que

$$0 = \sum_{k=1}^{N} p_k^* Z_k(p^*) = \sum_{k \in \textbf{ Caso 1}} p_k^* Z_k(p^*) + \sum_{k \in \textbf{ Caso 2}} p_k^* Z_k(p^*).$$

Pero para $k \in$ **Caso 1**, $p_k^* Z_k(p^*) = 0$, y luego

$$0 = \sum_{k \in \textbf{ Caso 1}} p_k^* Z_k(p^*).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k \in \textbf{ Caso 2}} p_k^* Z_k(p^*) = 0$$

Luego, de (6) tenemos

$$0 = (1-\lambda) \cdot \sum_{k \in \textbf{ Caso 2}} p_k^* Z_k(p^*) = \lambda \cdot \sum_{k \in \textbf{ Caso 2}} \gamma^k (Z_k(p^*))^2.$$

Usando la Ley de Walras, establecemos que el lado izquierdo es igual a 0, pero el lado derecho puede ser cero solo si $Z_k(p^*) = 0$ para todo k tal que $p^* > 0$ (k en el). Así, p^* es un equilibrio. Esto concluye la prueba.

□

3 La tabla de la 1$^{\text{ra}}$ clase

<table>
<tr><td colspan="3">Una tabla simple</td></tr>
<tr><td>abab</td><td>cded</td><td rowspan="2">ef</td></tr>
<tr><td colspan="2">ghi</td></tr>
<tr><td>j</td><td>k</td><td>lm</td></tr>
</table>

Tabla 1: Tabla simple.

Referencias que usé

[1] Efe A. Ok. *Real Analysis with Economic Applications.* Princeton University Press, 2007.

[2] Ross M. Starr. *General Equilibrium Theory.* Cambridge University Press, 2011.