

Traitement du signal par transformation en ondelettes : application au contrôle non destructif par ultrasons

Philippe Lasaygues

► To cite this version:

Philippe Lasaygues. Traitement du signal par transformation en ondelettes : application au contrôle non destructif par ultrasons. [Rapport de recherche] Publications du LMA, numéro 137, LMA. 1991, 67 p. hal-01365736

HAL Id: hal-01365736

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01365736>

Submitted on 13 Sep 2016

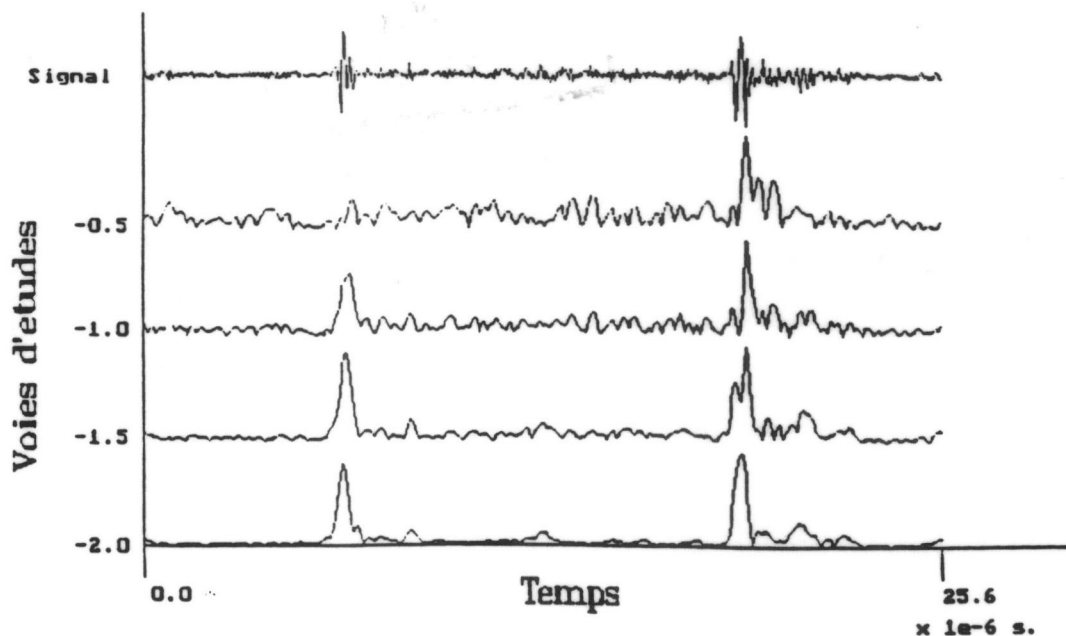
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NOTES SCIENTIFIQUES

**TRAITEMENT DU SIGNAL
PAR TRANSFORMATION EN ONDELETTES :
APPLICATION AU CONTROLE
NON DESTRUCTIF PAR ULTRASONS**

Philippe LASAYGUES



Légende de la figure de couverture :

Détection de fissure entre deux aciers par analyse en ondelettes

à droite : interface sain

à gauche : interface fissuré

(sur la voie -0,5 le premier signal a disparu et le second non; sur la voie -1,5 le second signal est dédoublé et le premier non)

PUBLICATIONS DU L.M.A.
Répertoriées dans la base Pascal de l'I.N.I.S.T.
n° 137 (novembre 1991)

ISSN 0750 - 7356

NOTES SCIENTIFIQUES

PHYS
MEC

**TRAITEMENT DU SIGNAL
PAR TRANSFORMATION EN ONDELETTES :
APPLICATION AU CONTROLE
NON DESTRUCTIF PAR ULTRASONS**

Philippe LASAYGUES



CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

G 82119

PHYS
MEC

TABLE DES MATIERES

I. Analyse temps-fréquence.....	9
II. Transformation en ondelettes.....	11
II.1 Construction de l'ondelette analysante.....	11
II.2 Construction d'une base orthonormale d'ondelettes.....	13
II.3 Etude du spectre des ondelettes.....	13
II.4 Coefficients d'ondelettes.....	15
II.5 Interprétation de la quantité $X_j(t)$	17
III. Analyse d'un signal échantillonné à la fréquence F_e et comportant N échantillons.....	19
III.1 Etude fréquentielle.....	19
III.2 Etude temporelle.....	21
III.3 Domaine de variation de k et j	22
III.4 Algorithme de décomposition.....	24
IV. Problèmes liés à la resynthèse.....	27
IV.1 Propriétés de la décomposition en ondelettes.....	27
IV.2 'Signaux de détails' du signal $S(t)$	28
IV.3 Algorithme de resynthèse.....	29
V. Analyse surabondante.....	31
V.1 Analogie avec la transformation continue de J.MORLET.....	31
V.2 Analyse surabondante d'une fonction.....	31
V.3 Analyse surabondante d'un signal.....	32
VI Illustrations.....	33
VII. Réjection d'un signal parasite localisé de type signal de saturation.....	49
VII.1 Notion de cône d'influence.....	49
VII.1.a Analyse d'un Dirac.....	49
VII.1.b Analyse d'un signal localisé en temps.....	49
VII.2 Elimination d'un signal de saturation.....	51
VII.2.a Point de vue adopté.....	51
VII.2.b Etude pratique sur un échantillon. (Expérimentation).....	51
VIII. Discrimination de signaux d'origines diverses par transformation en ondelettes.....	53
VIII.1 Application à une fissure sous revêtement.....	53
VIII.2 Modélisation d'un signal de fissure et d'interface fissuré.....	53
Annexe.....	63

Introduction

Le contrôle non destructif des matériaux par ultrasons pose essentiellement un problème de discrimination entre les signaux utiles (ceux qui proviennent par exemple de petits diffuseurs) des signaux parasites (ceux qui proviennent par exemple des interfaces). On espère pouvoir effectuer cette discrimination sur les signatures temps-échelle, c'est à dire grâce à l'analyse en ondelettes utilisée ici comme technique de traitement du signal (Pré-traitement des données avant injection dans les algorithmes de construction d'images) [1].

Nous avons mis au point un algorithme basé sur l'analyse en ondelettes orthogonales de S.Jaffard et Y.Meyer [2] [3] pour élaborer, ensuite, un algorithme d'analyse surabondante en échelles qui présente les avantages de l'analyse continue (présentation des résultats sous forme d'images) tout en conservant ceux de l'analyse discrète. Nous avons développé ensuite des logiciels rapides à base de procédures de transformée de Fourier rapide que nous avons testé sur des exemples simples, avant de traiter un certain nombre de problèmes.

Nous nous sommes d'abord servi de cet algorithme pour mettre au point un réjecteur automatique de certains signaux parasites, comme les signaux d'interfaces à fort contraste (interfaces eau-acier et acier-eau par exemple), en utilisant l'apparition de sous-harmoniques et la notion de cône d'influence.

Le second problème que nous avons étudié, a été la détection de défaut dans une pièce en acier massive munie d'un revêtement épais d'acier inoxydable, une fissure pouvant prendre naissance à l'interface entre les deux aciers. Les analyses en ondelettes comparées d'échogrammes de zones saines et de ceux de zones malsaines laissent apparaître des différences aussi bien sur les analyses surabondantes que sur les analyses discrètes. C'est cette finesse d'analyse que nous avons utilisée ensuite pour vérifier le bien fondé de notre modélisation. L'analyse en ondelettes s'avère être un excellent outil pour ce type de problème.

PREMIERE PARTIE

L'analyse en ondelettes, un outil de traitement du signal

I. Analyse temps-fréquence

L'intérêt principal lorsqu'on fait du traitement de signaux est de dégager le plus d'informations possible sur la structure temporelle ou sur la structure fréquentielle de ces signaux. Il convient donc de décomposer le signal sur des fonctions bien localisées à la fois en temps et en fréquence. Mais cette "double concentration" se heurte au principe d'incertitude de Heisenberg [4] et au fait que si une fonction f est à support borné alors sa transformée de Fourier F ne l'est pas et vice versa. Si l'une des deux fonctions f ou F est bien localisée, l'autre ne l'est plus.

Il existe de nombreuses transformations comme celle de Fourier localisée en fréquence mais pas en temps ou la transformation de Haar qui est mieux localisée en temps qu'en fréquence. La transformation de Wigner-Ville, si elle permet de prendre en compte la non-stationnarité, présente des problèmes majeurs comme par exemple la bilinéarité qui rend son inversion délicate. L'idée est donc de projeter le signal à analyser sur une base de fonctions orthogonales, c'est à dire de distribuer l'énergie de ce signal sur des composantes décorrélées entre elles. Si le problème apparaît comme théoriquement insoluble, la transformation en ondelettes telle qu'elle est proposée par S. Jaffard et Y. Meyer [5] permet de choisir des fonctions numériquement bien localisées, admettant la non-stationnarité.

Du fait de ses propriétés, nous avons retenu cette dernière décomposition que nous décrivons maintenant.

NOTA: Nous ne parlerons de transformée en ondelettes que sur des fonctions f qui appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, c'est à dire mesurable et à énergie finie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

II. Transformation en ondelettes

A partir de ces fonctions bien localisées, appelées ondelettes analysantes, on obtient en considérant leurs dilatations et leurs translations une famille de fonctions "suffisamment riches" pour décomposer un signal sans perdre de l'information.

Soit S une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. On souhaite donc que toute l'information de la fonction S apparaisse dans une suite de coefficients du type :

$$\xi_{a,b} = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi[a(t-b)] S(t) dt$$

où, dans le cas le plus général, $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

- $\Psi[a(t-b)]$ représente la famille de fonctions issue de l'ondelette analysante Ψ ;
- " a " exprime la compression (on parlera de dilatation pour $a < 1$) et " b " exprime la translation.
- \sqrt{a} est un coefficient de normalisation.

Dans le cas de la décomposition sur une base d'ondelettes orthonormales, le choix des couples (a,b) est réduit au réseau dyadique $(2^j, \frac{k}{2^j})$ où $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$.

Lorsque $j < 0$, on a dilatation et lorsque $j > 0$, on a compression.

II.1 Construction de l'ondelette analysante

On veut représenter la fonction S par la série suivante:

$$S(t) = \sum_{j,k} C_{j,k} \Psi_{j,k}(t)$$

où la famille de fonctions $\Psi_{j,k}$ vérifie les propriétés suivantes:

- $\Psi_{j,k}$ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$

$$\hat{\Psi}_{j,k}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j,k}(t) e^{-2i\pi vt} dt, \text{ sa transformée de Fourier est à}$$

support compact;

- $\Psi_{j,k}(t)$ est à support "physiquement compact" c'est à dire:

$$20 \log \left| \frac{\Psi_{j,k}(t)}{\text{MAX}(\Psi_{j,k}(t))} \right| \leq -A \text{ db}$$

en dehors d'un intervalle "pas très grand". A est un coefficient laissé au libre choix de l'utilisateur. La construction de l'ondelette analysante que nous avons retenue est celle proposée par S.Jaffard [5]. Il propose de partir d'un élément quelconque d'une certaine famille de fonctions $\{\theta_n(v)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ qui permet de construire des ondelettes bien localisées et faciles à manier numériquement. Cette famille de fonctions est engendrée par l'égalité suivante:

$$\theta_n(v) = \frac{\int_0^v u^n (1-u)^n du}{\int_0^1 u^n (1-u)^n du} \quad v \in [0, 1]$$

Par la suite on fixera $n=7$ (suivant Jaffard lui-même) et on notera $\theta(v) = \theta_7(v)$.

A partir de cette fonction θ , on construit la fonction paire Γ comme suit (cf planche 1):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma(v) = 0 & \text{si } v \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \Gamma(v) = \theta(3v - 1) & \text{si } v \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \Gamma(v) = \theta(2 - \frac{3v}{2}) & \text{si } v \in \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right] \\ \Gamma(v) = 0 & \text{si } v > \frac{4}{3} \\ \Gamma(v) \text{ construite par parité sur } v < 0 \end{array} \right.$$

et si U_f est l'unité fréquentielle de référence choisie, on pose alors :

$$(*) \quad \hat{\Psi}(v) = \frac{1}{\sqrt{U_f}} e^{-2i\pi \frac{v}{2 U_f}} \sqrt{\Gamma\left(\frac{v}{U_f}\right)}$$

$\hat{\Psi}(\nu)$ a ainsi une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire. Sa bande de fréquences positives est $\left[\frac{U_f}{3}, \frac{4}{3}U_f\right]$. Son module est maximum (et égale à $\frac{1}{\sqrt{U_f}}$) pour $\nu = \frac{2}{3}U_f$. Il est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}U_f}$ pour $\nu = \frac{U_f}{2}$ et $\nu = U_f$, c'est à dire que sa bande positive à -3 dB est $\left[\frac{U_f}{2}, U_f\right]$ (cf planche 2).

$$(**) \quad \Psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$$

Ψ est réelle et inférieure à $5 \cdot 10^{-4}$ en dehors d'un intervalle de longueur $15 U_t$ [$U_t = (U_f)^{-1}$: l'unité temporelle de référence] centré sur $\frac{1}{2} U_t$. En pratique on se contentera par la suite d'un intervalle de longueur $13 U_t$ en dehors duquel l'ondelette est inférieure à 10^{-3} (cf planche 3).

II.2 Construction d'une base orthonormale d'ondelettes

On note:

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \Psi\left(2^j \left(t - \frac{k}{2^j} U_t\right)\right)$$

l'ondelette comprimée d'un facteur 2^j et translatée d'un intervalle $k \cdot 2^{-j} U_t$. Le facteur $2^{j/2}$ est le facteur de normalisation.

Alors les fonctions $\{\Psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}^2}$ forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ (démonstration en annexe), c'est à dire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j,k}(t) \overline{\Psi_{j',k'}(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j,k}(t) \Psi_{j',k'}(t) dt = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}$$

où $\delta_{m,n} = 0$ si $m \neq n$
 $= 1$ sinon

II.3 Etude du spectre des ondelettes

On se propose maintenant d'étudier le spectre des ondelettes $\Psi_{j,k}$. On définit pour cela la transformée de Fourier des fonctions $\Psi_{j,k}$ sous la forme intégrale suivante :

$$\hat{\Psi}_{j,k}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j,k}(t) \{ e^{-2i\pi vt} \} dt$$

$$\Rightarrow \hat{\Psi}_{j,k}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2j} \Psi \left[2j \left(t - \frac{k}{2j} U_t \right) \right] \{ e^{-2i\pi vt} \} dt$$

En effectuant le changement de variables suivants:

$$\tau' = 2jt - kU_t \Rightarrow t = \left(\frac{\tau' + kU_t}{2j} \right) \quad \text{et} \quad dt = \frac{1}{2j} d\tau'$$

on réécrit l'expression du spectre sous une forme simplifiée :

$$\hat{\Psi}_{j,k}(v) = 2^{-j/2} \exp \left(-2i\pi v \frac{kU_t}{2j} \right) \hat{\Psi} \left(\frac{v}{2j} \right)$$

mais l'expression de $\hat{\Psi}(v)$ est donnée par :

$$\hat{\Psi}(u) = \frac{1}{\sqrt{U_f}} e^{-2ip \frac{u}{2U_f}} \sqrt{G \left(\frac{u}{U_f} \right)}$$

si bien que le spectre des ondelettes s'écrit :

$$\hat{\Psi}_{j,k}(v) = (2j U_f)^{-1/2} \exp \left(-2i\pi v \frac{(k + \frac{1}{2}) U_t}{2j} \right) \sqrt{\Gamma \left(\frac{v}{2j} U_t \right)}$$

que l'on transforme simplement en introduisant les ondelettes centrées sur chaque voie j , notée $\hat{\Psi}_{j,0}$

$$\hat{\Psi}_{j,k}(v) = \hat{\Psi}_{j,0}(v) \exp \left(-2i\pi v \frac{kU_t}{2j} \right)$$

La fonction $\Gamma(2^{-j}v)$ aura pour support l'intervalle $\left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right]$ donc:

$$\left\{ \frac{1}{3} \leq \left| 2^{-j} v \right| \leq \frac{4}{3} \right\} \Rightarrow \left\{ \frac{2j}{3} \leq |v| \leq \frac{2j+2}{3} \right\}$$

En conséquence le spectre de $\Psi_{j,k}(t)$ aura un support compact :

$$\text{Supp } \hat{\Psi}_{j,k}(v) = \left\{ \frac{2j U_f}{3} < |v| < \frac{2j+2 U_f}{3} \right\}$$

II.4 Coefficients d'ondelettes

On va donc projeter la fonction S sur la base de fonctions orthogonales $[\Psi_{j,k}]_{j,k \in \mathbb{Z}^2}$. Les projections s'écrivent sous la forme d'un produit scalaire:

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \overline{\Psi}_{j,k}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \Psi_{j,k}(t) dt$$

car $\Psi_{j,k}$ est une fonction réelle.

Par cette décomposition, on obtient une information relativement localisée à la fois en fréquence et en temps puisque l'ondelette $\Psi_{j,k}$ est assez bien localisée dans ces deux espaces. Si on applique l'égalité de Parseval-Plancherel, on peut écrire ce produit scalaire sous la forme:

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(v) \overline{\hat{\Psi}}_{j,k}(v) dv$$

où \hat{S} est la transformée de Fourier de la fonction S .

Mais $\overline{\hat{\Psi}}_{j,k}(v)$ est donnée par:

$$\begin{aligned} \overline{\hat{\Psi}}_{j,k}(v) &= (2^j U_f)^{-1/2} \exp\left[2i\pi \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{v}{2^j U_f}\right)\right] \sqrt{\Gamma\left(\frac{v}{2^j U_f}\right)} \\ &= \overline{\hat{\Psi}}_{j,0}(v) \exp\left[2i\pi \frac{k}{2^j U_f} v\right] \end{aligned}$$

On peut donc écrire que:

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{S}(v) \overline{\hat{\Psi}}_{j,0}(v) \right\} e^{\left\{2i\pi v \frac{k}{2^j U_f}\right\}} dv$$

et si on pose :

$$\hat{X}_j(v) = \hat{S}(v) \overline{\hat{\Psi}}_{j,0}(v)$$

Alors le produit scalaire devient:

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_j(v) \left\{ e^{2i\pi v \frac{k}{2J} U_f} \right\} dv$$

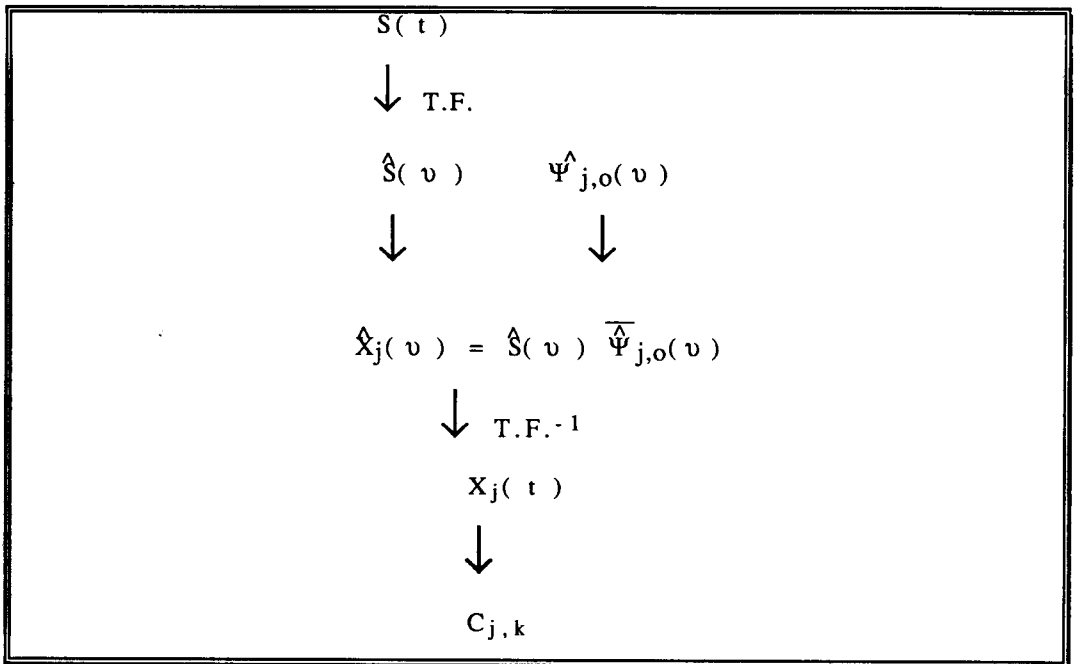
On reconnait là, la transformée de Fourier inverse de $X_j(t)$ prise aux points $t_{j,k} = \frac{k}{2J} U_f$

Si bien que :

$$C_{j,k} = X_j\left(\frac{k}{2J} U_f\right)$$

Notre méthode pratique de calcul des coefficients est basée sur cette relation.

organigramme général:



Remarque: La fonction \hat{S} a une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire puisque S est réel.

La fonction $\overline{\hat{\Psi}}_{j,0}$ a une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire. Donc \hat{X}_j a une structure hermitienne et par conséquent les coefficients $C_{j,k}$ seront réels.

II.5 Interprétation de la quantité $X_j(t)$

$X_j(t)$, dont la valeur aux points $t_{j,k} = \frac{k}{2j} U_t$ est $C_{j,k}$, est en quelque sorte une version lissée de $C_j(k)$.

On a $\hat{X}_j(v) = \hat{S}(v) \overline{\hat{\Psi}}_{j,0}(v)$ c'est à dire que $X_j(t)$ est la filtrée de $S(t)$ par un filtre dont la réponse fréquentielle est $\overline{\hat{\Psi}}_{j,0}$, conjugué du spectre de l'ondelette à la voie j , et que nous nommerons de manière abusive filtre "ondelette" à la voie j .

Par transformée de Fourier inverse de la relation, on peut aussi écrire que :

$$X_j(t) = (S * \hat{\Psi}_{j,0}^\#)(t) = S * \overline{\hat{\Psi}}_{j,0}(-t) = S * \Psi_{j,0}(-t)$$

c'est à dire que $X_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t') \Psi_{-j,0}(t'-t) dt'$ représente l'intercorrélation entre la fonction et l'ondelette à la voie j .

Et si on développe $\Psi_{j,0}(t)$:

$$X_j(t) = \sqrt{2j} \int_{-\infty}^{\infty} S(t') \Psi[2j(t'-t)] dt'$$

on voit qu'alors $X_j(t) = \xi_{2j,t}^j$ selon la terminologie générale du départ, c'est à dire que $X_j(t)$ est la transformée en ondelettes pour une compression $a=2j$ et une translation $b=t$.



III. Analyse d'un signal échantillonné à la fréquence F_e et comportant N échantillons

En pratique, on a toujours affaire à des signaux échantillonnés ayant un spectre à support borné.

Soit donc un signal échantillonné S et \hat{S} sa transformée de Fourier discrète. On supposera vérifiées les conditions de Shannon, c'est à dire:

$$\hat{S}(\nu) = 0 \text{ si } \nu \notin \left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2} \right]$$

F_e est la fréquence d'échantillonnage du signal.

En réalité, on ne dispose que d'un nombre fini N d'échantillons:

$$S_n = S\left(\frac{n}{F_e}\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

III.1 Etude fréquentielle

On a vu que le spectre de fréquences positives de l'ondelette analysante est maximum à la fréquence $\nu^0 = \frac{2}{3} U_f$ et qu'il est non nul sur l'intervalle :

$$\left[\frac{1}{3} U_f, \frac{4}{3} U_f \right]$$

Donc pour $\left[\hat{\Psi}_{j,k} \right]_{j,k \in \mathbb{Z}^2}$ la fréquence prépondérante sera $\nu^0_j = \frac{2j+1}{3} U_f$ et le support sera:

$$\frac{2j}{3} U_f < |\nu| < \frac{2j+2}{3} U_f.$$

Choisissons comme unité de référence fréquentielle $U_f = F_e$, la fréquence d'échantillonnage du signal S ; alors l'unité temporelle sera donnée par $U_t = \frac{1}{F_e}$, période d'échantillonnage.

Le support de l'ondelette analysante devient $\left[\frac{F_e}{3}, \frac{4F_e}{3} \right]$ et elle interagit avec $\hat{S}(\nu)$ sur l'intervalle $\left[\frac{F_e}{3}, \frac{F_e}{2} \right]$.

(*) Si on considère la voie $j=1$:

-la bande positive de l'ondelette $\hat{\Psi}_{1,k}(\nu)$ est:

$$[B^+] \hat{\Psi}_{1,k}(\nu) = \left[\frac{2F_e}{3}, \frac{8F_e}{3} \right]$$

et comme $\frac{2F_e}{3} > \frac{F_e}{2}$; il n'y a pas interaction avec \hat{S} .

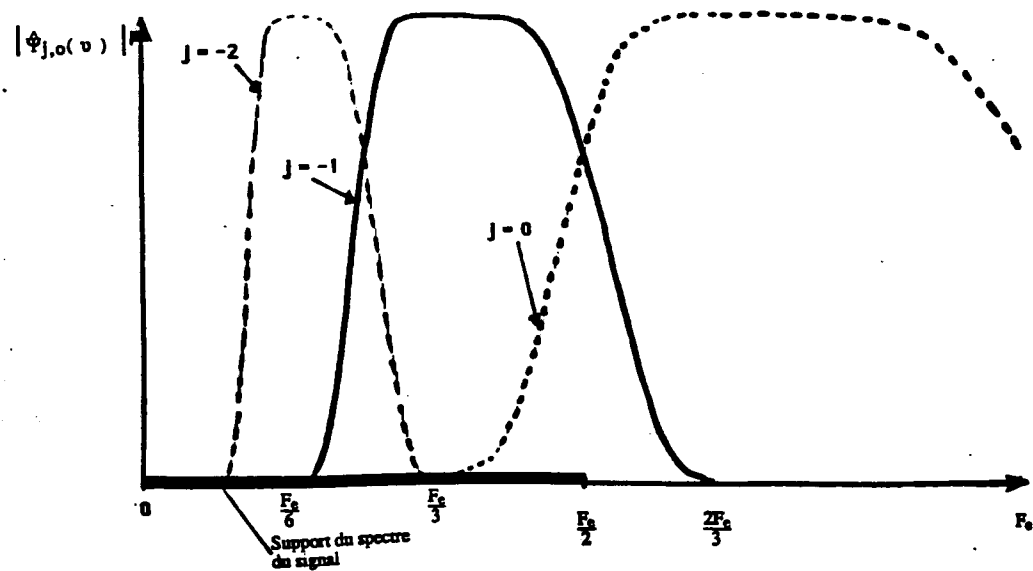
Il n'est donc pas nécessaire de considérer les voies $j > 0$.

(*) Si on considère la voie $j = -1$:

-la bande positive de $\hat{\Psi}_{-1,k}(\nu)$ devient:

$$[B^+] \hat{\Psi}_{-1,k}(\nu) = \left[\frac{F_e}{6}, \frac{2F_e}{3} \right]$$

On constate bien que sur l'intervalle $\left[\frac{F_e}{6}, \frac{F_e}{2} \right]$; $\hat{\Psi}_{-1,k}$ et \hat{S} interagissent.



En conclusion; on ne considère que les voies $j \leq 0$ et donc on ne fait que des dilatations temporelles de l'ondelette analysante.

Remarques :

Il faut prendre quelques précautions pour les voies $j=0$ et $j=-1$ car l'ondelette est alors sous-échantillonnée (une partie de la bande positive est située au-delà de $\frac{F_e}{2}$). Pour éviter le repliement, on considérera séparément les bandes positives et les bandes négatives du signal et de l'ondelette.

Par ailleurs, on a toujours affaire à des signaux suffisamment sur-échantillonnés pour que le spectre du signal soit quasi nul au delà de $\frac{F_e}{3}$. La voie $j=0$ n'est donc généralement pas calculée [6]. Nous ferons de même et "oublierons" par la suite la voie $j=0$.

III.2 Etude temporelle

(*) L'ondelette analysante Ψ est centrée sur $t_{00} = \frac{1}{2} U_t$.

On considère, compte tenu des remarques paragraphe III 1, que son support "pratique" sera:

$$[-6U_t, 7U_t] = \left[\left(\frac{1}{2} - 6,5\right) U_t, \left(\frac{1}{2} + 6,5\right) U_t \right]$$

En posant $\frac{T^0}{2} = 6,5 U_t$ et $t_{00} = \frac{1}{2} U_t$, ce support devient :

$$\left[t_{00} - \frac{T^0}{2}, t_{00} + \frac{T^0}{2} \right]$$

(*) Les ondelettes $\Psi_{j,0}$ sont, elles, centrées sur $t_{j0} = \frac{t_{00}}{2^j}$
 $= \frac{2^{-j}}{2} U_t$

et leur demi-longueur est : $\frac{T^j}{2} = 2^{-j} \left(\frac{T^0}{2} \right)$

Leur support "pratique" est donc :

$$\left[t_{j0} - \frac{T^j}{2}, t_{j0} + \frac{T^j}{2} \right] = \left[2^{-j} \left(t_{00} - \frac{T^0}{2} \right), 2^{-j} \left(t_{00} + \frac{T^0}{2} \right) \right]$$

(*) Les ondelettes $\Psi_{j,k}$ sont centrées sur $t_{j,k}$ tel que :

$$2^j \left(t_{j,k} - \frac{k}{2^j} U_t \right) = 2^j t_{00}$$

C'est à dire sur :

$$t_{jk} = 2^{-j} \left(k + \frac{1}{2} \right) U_t$$

Et leur support "pratique" est alors:

$$\left[t_{jk} - \frac{T_j}{2}, t_{jk} + \frac{T_j}{2} \right]$$

En conclusion :

Les ondelettes $\Psi_{j,k}(t)$:

- sont centrées sur $t_{jk} = 2^{-j} \left(k + \frac{1}{2} \right) U_t$
- ont pour demi-longueur "pratique": $\frac{T_{jk}}{2} = 2^{-j} U_t 6,5$
- ont pour support "pratique" :

$$\left[2^{-j} U_t (k - 6), 2^{-j} U_t (k + 7) \right]$$

III.3 Domaine de variation de k et j

Il est important de bien fixer les limites d'incursion du paramètre k. Il existe deux possibilités:

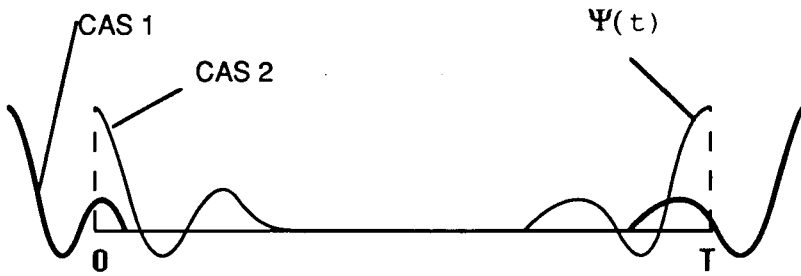
- soit on choisit, comme on l'a vu précédemment, tous les k tels que les ondelettes $\Psi_{j,k}(t)$ interagissent avec le signal (raisonnement intuitif),

- soit on peut estimer qu'il n'est pas nécessaire de considérer ce support "pratique" mais plutôt choisir k tel que $t_{jk} \in [0, T]$, l'intervalle sur lequel est défini le signal ($T = NDt = \frac{N}{F_e}$).

Alors, la "plage" $[k_m, k_M]$ des valeurs qu'on fait prendre à k est telle que:

$$\left(k_m + \frac{1}{2} \right) U_t \geq 0 \Rightarrow k_m = 0 \quad (k \text{ est entier})$$

$$\left(k_M + \frac{1}{2} \right) U_t \leq T \Rightarrow k_M = 2^j \frac{T}{U_t} - \frac{1}{2}$$



Durée du signal

Cas 1: Raisonnement intuitif.

Cas 2: Raisonnement S.Mallat

Le raisonnement intuitif aurait conduit à considérer des ondelettes $\Psi_{j,k}$ dont le centre aurait été à l'extérieur de l'intervalle de définition du signal, mais qui auraient présenté une "queue" non négligeable sur une partie de cet intervalle.

On choisit donc, pour le second raisonnement, les valeurs de k telles que: $0 \leq k \leq 2^j \frac{T}{U_t} - \frac{1}{2}$ et si

$U_f = F_e$, on a alors $U_t = \Delta t$ et $\frac{T}{U_t} = N$.

Ainsi, comme k est un entier, on considérera l'intervalle:

$$k \in [0, 2^j N - 1]$$

qui comporte donc $2^j N$ points.

Ainsi, si $N = 2^p$, on a:

Voie $j=0 \rightarrow N = 2^p$ points

Voie $j=-1 \rightarrow \frac{N}{2} = 2^{p-1}$ points

.

Voie $j \rightarrow 2^j N = 2^{p+j}$ points

.

Voie $j=-p \rightarrow \frac{N}{2^p} = 1$ point

Le choix des voies j de travail se trouve donc imposé. Si on "oublie" la voie $j=0$, alors :

$$j = -1, \dots, -p$$

soit un total de p voies.

On peut remarquer, qu'à la condition d'"oublier" la voie $j=0$, le signal qui était au départ défini par ses $N=2P$ échantillons, est maintenant défini par ses $N-1=2P-1$ coefficients d'ondelettes (somme des points des voies $j=-1$ à $-p$). La transformation discrète ainsi effectuée a donc conservé le nombre de données. C'est là un avantage important de la transformation discrète en ondelettes orthogonales. Le raisonnement intuitif aurait conduit à calculer plus de points k par voie j ; et on n'aurait pas eu conservation du nombre de données, mais une légère augmentation d'environ 13 points par voies, soit 13.P points en tout.

III.4 Algorithme de décomposition

Comme on l'a dit, on a en pratique affaire à des signaux échantillonnés. On rappelle que la réalisation se fait par suite d'impulsions brèves correspondant à une période d'échantillonnage $T_e = \Delta t$ ($T_e F_e = 1$), l'ensemble des N impulsions est considéré comme un "peigne" de Dirac:

$$W\left(\frac{t}{T_e}\right) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - nT_e) = W_{T_e}(t)$$

Donc le signal échantillonné s'écrit:

$$S^e(t) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} S(nT_e) \delta(t - nT_e) = W_{T_e}(t) S(t)$$

c'est à dire sous la forme de la suite discrète $(S(n))$ $0 \leq n \leq N-1$, avec $S(n) = S(nT_e)$.

La transformée de Fourier discrète du signal échantillonné est alors égale à la transformée de Fourier du signal lui-même mais périodisée sur l'axe des fréquences:

$$\hat{S}^e(v) = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{S}\left(v - \frac{m}{T_e}\right) = T_e W(T_e v) * \hat{S}(v)$$

qui définit la forme discrète : $\hat{S}(m) = \hat{S}\left(m \frac{F_e}{N}\right)$ si $m \in \left[0, \frac{N}{2}\right]$

$$\hat{S}(m) = \hat{S}\left(-(N-m) \frac{F_e}{N}\right) \text{ si } m \in \left[\frac{N}{2} - 1, N-1\right]$$

En définitif, l'algorithme numérique de calcul des coefficients est le suivant:

$$[S(n)]_{0 \leq n \leq N-1}$$

↓ FFT (N=2P points)

$$[\hat{S}(m)]_{0 \leq m \leq N-1}$$

↓

Pour l'étape j:
$$[\hat{X}_j(m)]_{0 \leq m \leq N-1} = [\hat{S}(m)]_{0 \leq m \leq N-1} \cdot \overline{\Psi_{j,0}(m)}_{0 \leq m \leq N-1}$$

↓ FFT⁻¹ (N=2P points)

$$[X_j(n)]_{0 \leq n \leq N-1}$$

↓

$$\left\{ \left[X_j\left(\frac{k}{2^j U_f}\right) \right] = [C_{j,k}] \right\}_{0 \leq k \leq 2^j N - 1}$$

IV. Problèmes liés à la resynthèse

IV.1 Propriétés de la décomposition en ondelettes

L'étude, menée jusqu'à présent, a permis de décomposer un signal $S(t)$ sur une base Hilbertienne d'ondelettes.

$$S(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \Psi_{j,k}(t)$$

$$\text{où } C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \Psi_{j,k}(t) dt$$

Le problème de la resynthèse étant celui du calcul de $S(t)$ à partir de ses coefficients en ondelettes, on effectue, dans un premier temps, une resynthèse partielle. On peut poser que:

$$D_j^S(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \Psi_{j,k}(t)$$

$$D_j^S(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} S(t) \Psi_{j,k}(t) dt \right) \Psi_{j,k}(t)$$

(Resynthèse partielle à la voie j)
et alors :

$$S(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} D_j^S(t)$$

Cette égalité revient en quelque sorte, à sommer toutes les différentes fréquences qui interviennent dans la décomposition du signal $S(t)$.

Dans la suite de cet exposé, les signaux $D_j^S(t)$ seront appelés "Signaux de détails" du signal $S(t)$ à la voie j conformément aux intitulés des spécialistes [6][7][8].

IV.2 "Signaux de détails" du signal $S(t)$

$$\begin{aligned}
 \text{En posant } T_j^e = \frac{U_1}{2^j} \text{ on peut écrire que } \Psi_{j,k}(t) &= 2^{j/2} \Psi[2^j(t - k T_j^e)] \\
 &= \Psi_{j,0}(t - k T_j^e) \\
 &= \Psi_{j,0}(t) * \delta(t - k T_j^e) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j,0}(t - t') \delta(t' - k T_j^e) dt'
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 Dj^S(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j,0}(t - t') \delta(t' - k T_j^e) dt' \right) \\
 \Rightarrow Dj^S(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \delta(t' - k T_j^e) \right) \Psi_{j,0}(t - t') dt'
 \end{aligned}$$

Mais on a montré que les coefficients d'ondelettes $C_{j,k}$ étaient donnés par la transformée de Fourier inverse du signal de sortie du filtre "ondelette" $\hat{X}_j(u)$, prise aux points $k T_j^e$:

$$C_{j,k} = X_j(k T_j^e)$$

On peut donc écrire que $C_{j,k} \delta(t - k T_j^e) = X_j(t) \delta(t - k T_j^e)$; si bien qu'on peut mettre les signaux de détails sous la forme suivante :

$$Dj^S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_j(t') \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t' - k T_j^e) \right) \Psi_{j,0}(t - t') dt'$$

Posons maintenant :

$$X_j^e(t) = \frac{1}{T_j^e} X_j(t) W_{T_j^e}(t)$$

le signal échantillonné de $X_j(t)$ à la période T_j^e ($W_{T_j^e}(t) = T_j^e \sum_k \delta(t - k T_j^e)$) est le peigne de Dirac de période T_j^e)

Alors on écrit que la quantité $D_j^S(t)$ est donnée par:

$$D_j^S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_j^e(t') \Psi_{j,o}(t - t') dt'$$

où:

$$D_j^S(t) = X_j^e(t) * \Psi_{j,o}(t)$$

On arrive donc au résultat simple suivant:

$$S(t) = \sum_{j \in Z} D_j^S(t) = \sum_{j \in Z} \{ X_j^e(t) * \Psi_{j,o}(t) \}$$

IV.3 Algorithme de resynthèse

A partir de l'algorithme de décomposition, permettant de calculer rapidement les coefficients d'ondelettes d'un signal $S(t)$, il est possible de déterminer les signaux de détails de ce même signal conformément à la formule déterminée dans le paragraphe précédent et au domaine de variation de k et j .

L'algorithme numérique est le suivant:

$$\text{A la voie } j: \left\{ \left[X_j\left(\frac{k}{2^j U_f}\right) \right] = [C_{j,k}] \right\} \quad 0 \leq k \leq 2^j N - 1$$

↓

$$[X_j^e(n)]_{0 \leq n \leq N-1}$$

↓ FFT ($N=2^p$ points)

$$[\hat{X}_j^e(m)]_{0 \leq m \leq N-1}$$

↓

$$[\hat{D}_j^S(m) = \hat{X}_j^e(m) \cdot \hat{\Psi}_{j,o}(m)]_{0 \leq m \leq N-1}$$

↓ FFT⁻¹ ($N=2^p$ points)

$$[D_j^S(n) = X_j^e(n) * \Psi_{j,o}(n)]_{0 \leq k \leq N-1}$$

On reconstruit alors le signal discret $S(n)$ par une simple sommation des signaux de détails sur chaque voies j :

$$\left[S(n) = \sum_{j=-p}^{-1} D_j^S(n) \right]_{0 \leq n \leq N-1}$$

V. Analyse surabondante.

V.1 Analogie avec la transformation continue de J.MORLET

On a vu que la transformation en ondelettes originelle, explicitée par Jean Morlet [9] [10] pour l'analyse des signaux (sondage géophysique) est une transformation dépendant de deux paramètres continus.

A un signal S on lui associe la suite continue de coefficients:

$$\xi_{a,b} = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi[a (t - b)] S(t) dt$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et Φ est l'ondelette analysante (devant satisfaire à un certain nombre de conditions d'admissibilité).

Ce type d'analyse permet à partir de cette collection de coefficients, de construire une représentation bidimensionnelle, du même type que les représentations temps-fréquence (Wigner-Ville [11]) et qu'on nomme sous le terme générique temps-échelle, l'échelle étant définie comme a^{-1} , c'est à dire 2^{-j} en discret.

La décomposition en ondelettes orthogonales exposée dans les chapitres précédents est une transformation qui conserve le nombre de degrés de liberté mais qui ne permet de représenter le signal que sur un nombre limité d'échelles ($p = \log_2 N$ échelles) et pour d'autant moins de coefficients que l'échelle est grande (j petit), rendant les diagrammes temps-échelles moins explicite que l'analyse en continu [12].

C'est pourquoi, nous nous sommes intéressé à "l'analyse surabondante en échelles". Ce que nous appelons "analyse surabondante" est en réalité plus une extension de notre raisonnement et par la suite de notre algorithme en introduisant des échelles intermédiaires qu'une analyse surabondante au sens stricte telle qu'elle est décrite par exemple dans [13].

V.2 Analyse surabondante d'une fonction

On procède donc à une extension des définitions précédentes à l'étude des voies non entières. En particulier, on étend la définition de $X_j(t) = \xi_{2^j,t}$ de $j \in \mathbb{Z}$ à $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$X_\gamma(t) = \xi_{2^\gamma,t} = 2^{\gamma/2} \int_{-\infty}^{\infty} S(t') \Psi(2^\gamma(t'-t)) dt' \quad (\gamma, t') \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{où } X_\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t') \Psi_{\gamma,0}(t'-t) dt'$$

avec $\Psi_{\gamma,0}(t) = 2^{\gamma/2} \Psi(2^\gamma t)$ que nous appelons "ondelettes intermédiaires" à la voie $\gamma \in \mathbb{R}$.

Soit, dans le plan fréquentiel :

$$\hat{X}_\gamma(u) = \hat{S}(u) \cdot \overline{\hat{\Psi}}_{\gamma,0}(u) \text{ avec } \overline{\hat{\Psi}}_{\gamma,0}(u) = 2^{-\gamma/2} \overline{\hat{\Psi}}\left(\frac{u}{2^\gamma}\right)$$

De sorte que, sur la grille dyadique $(2^\gamma, t) = \left(2^j, \frac{k}{2^j} U_t\right)$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$X_\gamma(t) = C_{j,k}$$

précédemment calculés.

L'analyse surabondante consiste à représenter $X_\gamma(t)$.

Les organigrammes généraux et numériques sont les mêmes que précédemment.

V.3 Analyse surabondante d'un signal

Pour un signal S échantillonné sur $N = 2^p$ points, on choisit comme unité temporelle la période d'échantillonnage T_e et on a comme plage de variation :

- en $t : [0, (2^p - 1)T_e]$ avec un incrément de T_e , soit 2^p points.
- en $\gamma :]0; -p[$, avec un incrément de 2^{-q} si on décide d'avoir $2^q - 1$ voies intermédiaires entre chaque voie entière, soit $p \cdot 2^q$ voies en tout.

On est donc passé de 2^p valeurs à $p \cdot 2^{p+q}$ valeurs.

Remarque: Si $q = 0$ alors γ varie régulièrement entre 0 et $-p$ avec un pas de 1 (on n'a plus de voies intermédiaires). On retrouve bien l'évolution du paramètre de dilatation du réseau discret.

VI Illustrations

Planches 1 à 3

Les planches 1,2 et 3 correspondent à la construction de l'ondelette analysante suivant l'algorithme de S.Jaffard.

Planches 4 à 8

Nous présentons ici des exemples de décomposition discrète en ondelettes, de resynthèse et d'analyse surabondante de signaux-test puis de signaux concernant plus notre domaine d'application.

Le signal à analyser est tracé au dessus de sa représentation bidimensionnelle en ondelettes.

En abscisse, on représente les valeurs discrètes du paramètre de position (k pour le discret et t pour le surabondant) et en ordonnée, les voies j ou γ .

La planche 4-a présente l'analyse en ondelettes d'un signal simulant une impulsion de Dirac; les valeurs des coefficients d'ondelettes représentées dans le plan temps-échelle mettent bien en évidence cette singularité. Les coefficients de plus grandes valeurs sont situés à la position même du Dirac. Le Dirac étant placé sur un point de la grille dyadique, non seulement les coefficients discrets sont symétriques mais on remarque que sur chaque voie du réseau de fonctions de détails, on retrouve toutes les ondelettes.

La planche 4-b présente l'analyse surabondante de ce même signal. L'analyse est faite entre les voies -5 et -1 pour un pas de $\frac{1}{31}$ soit donc 33024 coefficients.

La planche 5 présente l'analyse d'une sinusoïde à laquelle on a déplacé un point, simulant la superposition d'une sinusoïde et d'un Dirac. On voit que la singularité est bien mise en évidence. Il faut tout de même préciser que pour les réseaux 1 et 2 de cette planche chaque voie est à sa propre échelle (échelle relative) alors que pour le troisième réseau chaque voie est rapportée à l'échelle du plus grand des coefficients du réseau (échelle absolue). Le Dirac n'apparaissait pas sur les deux premières représentations lorsque l'échelle était absolue ; seule la sinusoïde était mise en évidence pour les basses fréquences.

La planche 6 représente l'analyse surabondante d'un changement de phase sur une sinusoïde.

$$S(x) = \sin(8\pi x) + \sin(44\pi x).$$

L'étude est réalisée entre les voies -5 et 0 (0 exclu) pour $\frac{1}{31}$ voies intermédiaires.

La planche 7-a présente l'analyse en ondelettes de l'ondelette $\Psi_{3,0}$ donc comprimée d'un facteur 2^{-3} par rapport à l'ondelette mère. La fréquence d'échantillonnage est égale à 1 Hertz. On constate alors que l'orthonormalité est respectée puisque le seul coefficient non nul (et égale à 1) est le coefficient $C_{3,0}$ correspondant bien à l'ondelette décomposée. Sur cette même planche est représentée l'ondelette recomposée à partir des signaux de détails ainsi que le module du spectre des deux signaux.

La planche 7-b, on analyse surabondante de cette même ondelette entre les voies -5 et -1 de manière surabondante.



La planche 8-a et 8-b correspondent plus déjà à notre domaine d'intervention. On présente la décomposition, la resynthèse (8-a) et l'analyse surabondante (8-b) de la réponse impulsionnelle en émission-réception d'un transducteur de fréquence centrale égale à 2,25 Mégahertz et ayant une bande d'environ [1,25 - 5] Mégahertz. Cette réponse est obtenue à partir de l'échogramme en incidence normale d'une plaque de laiton immergée dans l'eau (écho d'interface) . L'unité de référence U_f choisie est la fréquence d'échantillonnage du signal soit 20 Mégahertz. Les voies concernées pour l'analyse sont les voies $j=-5$ à $j=-1$, essentiellement la voie $j = -3$ qui couvre la bande [0,83 - 3,3] Mégahertz (Cf Tableau récapitulatif).

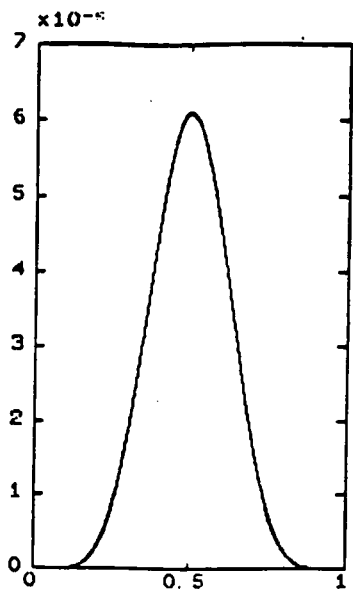
TABLEAU RECAPITULATIF

Le nombre d'échantillons est 2048, c'est à dire $p=11$.
 La fréquence d'échantillonnage est de 20 Mégahertz.
 La période d'échantillonnage est de 50 nanosecondes.
 L'unité de référence choisie est de 20 Mégahertz.

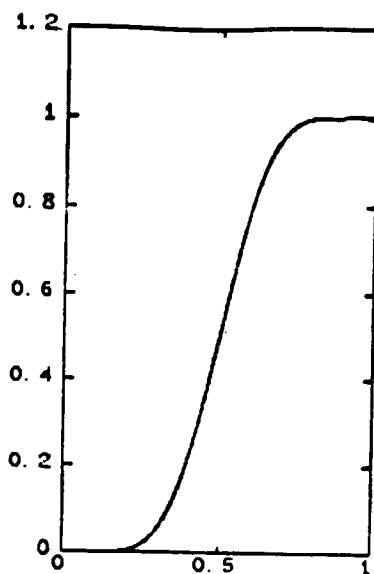
Voie	Bande de l'ondelette $\Psi_{j,k}$	Position du max. de l'ondelette $\Psi_{j,k}$	Nombre de points par voie
j	$\left[\frac{2j}{3}, \frac{2j+2}{3} \right] U_f$	$\left[\frac{2j+1}{3} \right] U_f$	K_M
0	6,7 ; 27 Mhz	13 Mhz	2047
-1	3,3 ; 13 Mhz	6,7 Mhz	1023
-2	1,7 ; 6,7 Mhz	3,3 Mhz	511
-3	0,83 ; 3,3 Mhz	1,7 Mhz	255
-4	0,42 ; 1,7 Mhz	0,83 Mhz	127
-5	0,21 ; 0,83 Mhz	0,42 Mhz	63
-6	0,01 ; 0,42 Mhz	210 Khz	31
-7	52 ; 210 Khz	100 Khz	15
-8	26 ; 100 Khz	52 Khz	7
-9	13 ; 52 Khz	26 Khz	3
-10	6,5 ; 26 Khz	13 Khz	1
-11	3,3 ; 13 Khz	6,5 Khz	0

Donc pour le transducteur de bande :

- * 1,25 Mhz-5 Mhz --> Voies "naturelles": $j = -4, \underline{-3}, \underline{-2}, -1$
- * 2,5 Mhz-7,5 Mhz --> Voies "naturelles": $j = -3, \underline{-2}, \underline{-1}, 0$



FONCTION $P(u) = u^7(1-u)^7$



FONCTION $\theta(v)$

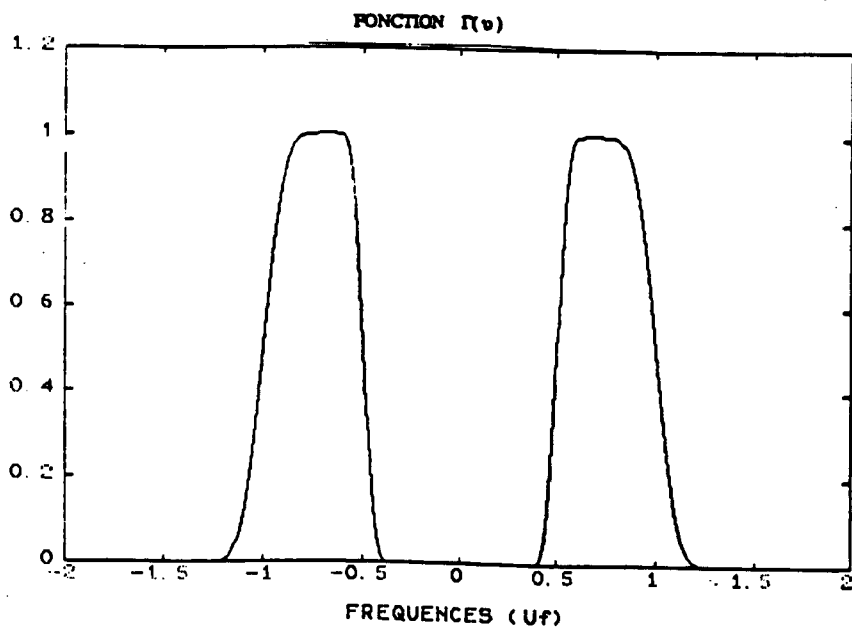


PLANCHE N°1

Construction de $\Gamma(v)$

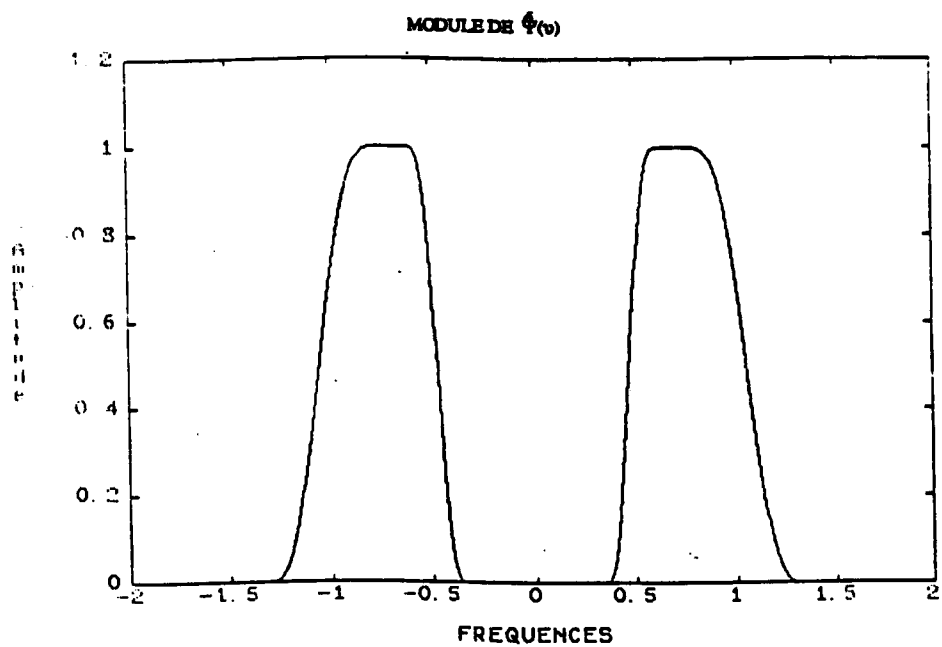
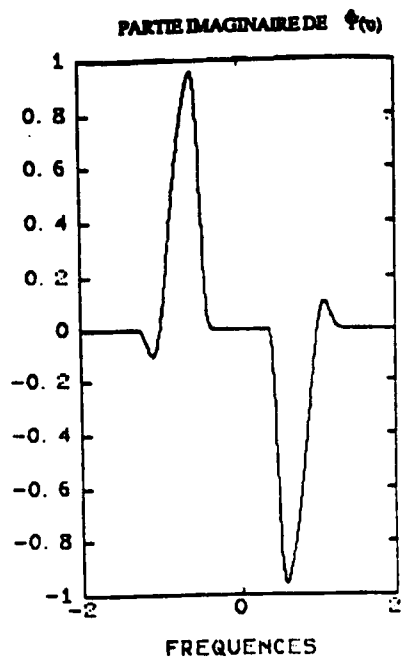
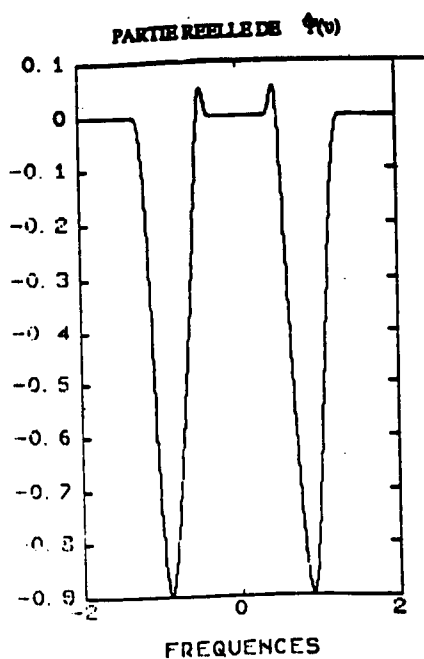


PLANCHE N °2

Construction du spectre de l'ondelette $\hat{\psi}(\nu)$

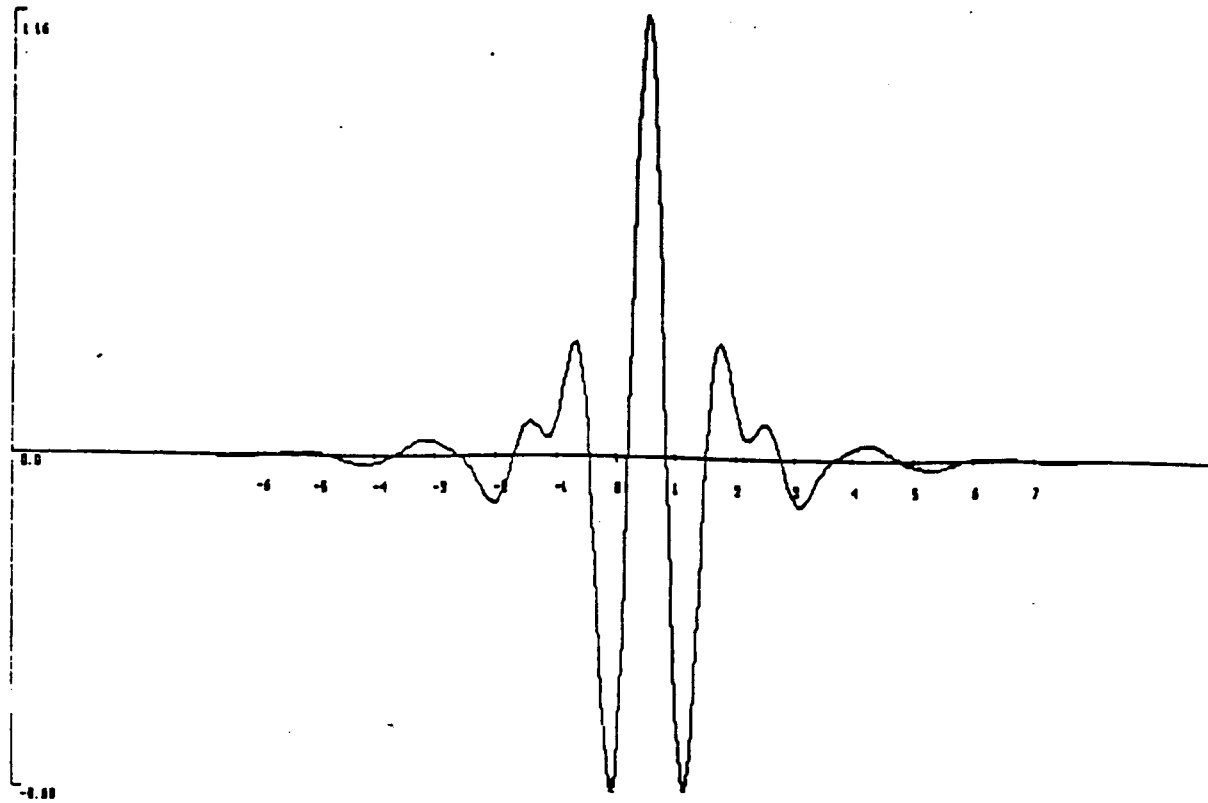
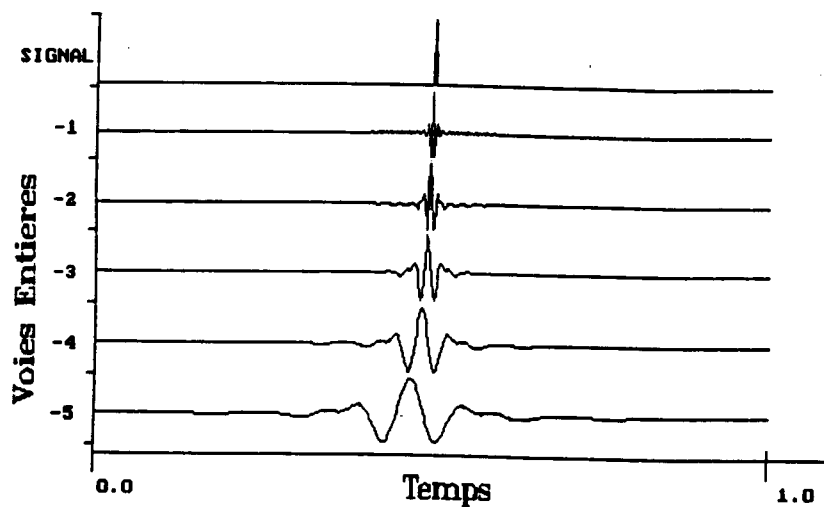
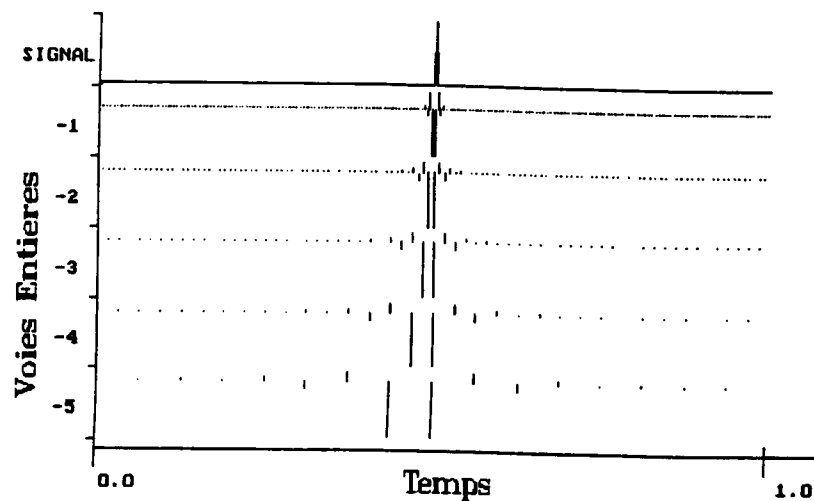


PLANCHE N °3

Ondelette analysante $\Psi(t)$



Réseau de signaux discrets



Réseau de signaux de détails

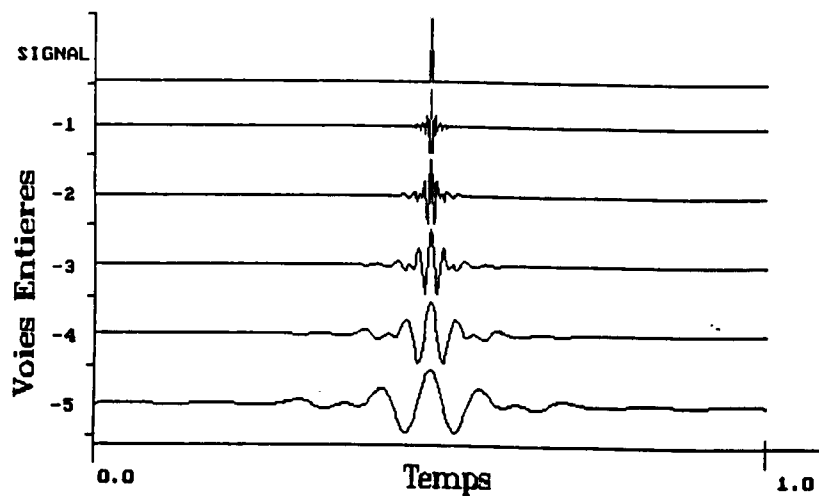


PLANCHE N° 4-a

Analyse discrete de la distribution $\delta(t - t_0)$

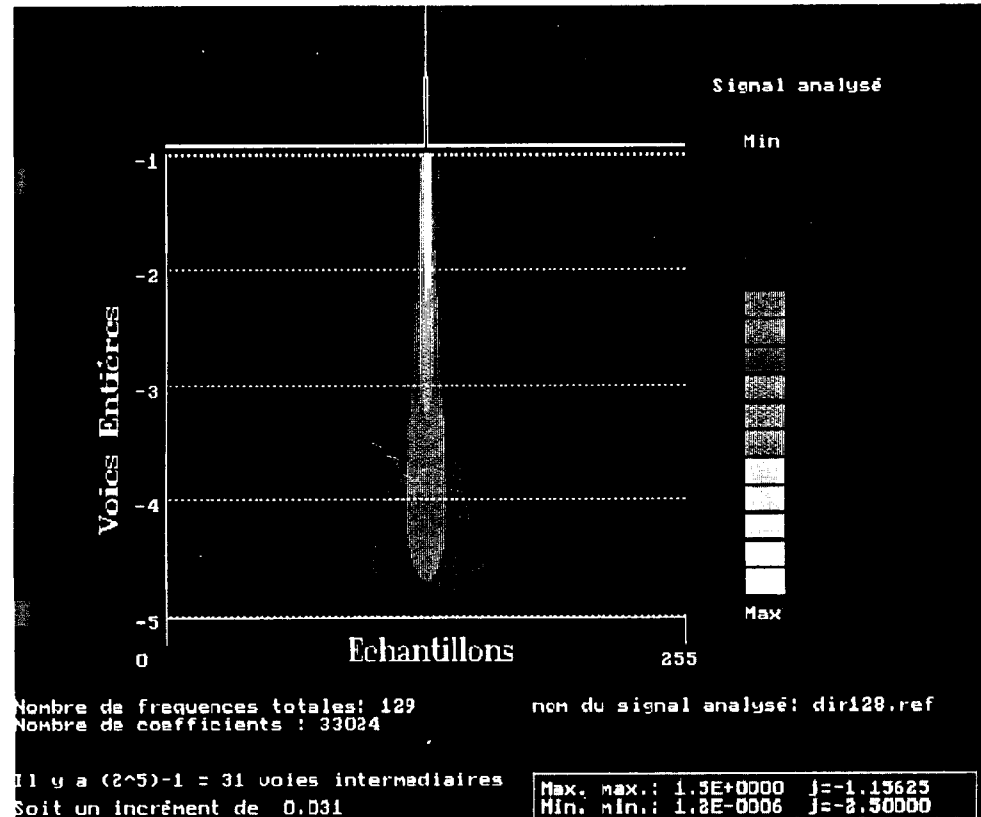


PLANCHE N°4-b

Analyse surabondante de la distribution $\delta(t - t_0)$

Signaux de sortie du "filtre ondelette"

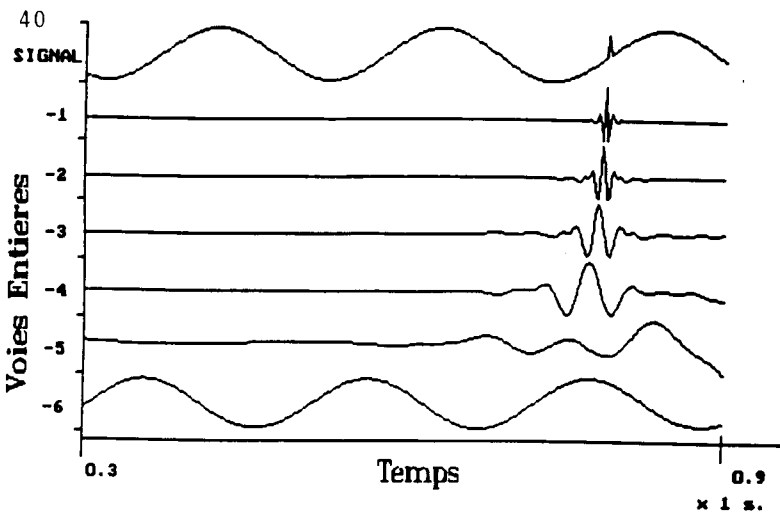
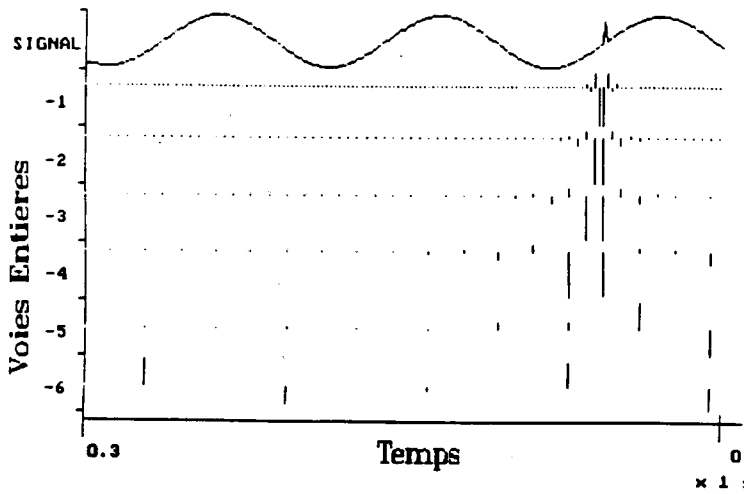
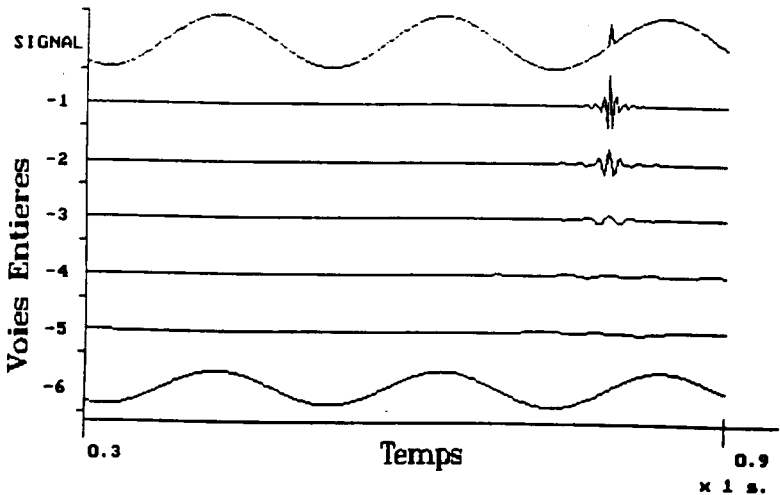


PLANCHE N°5

Réseau de signaux discrets



Réseau de signaux de détails



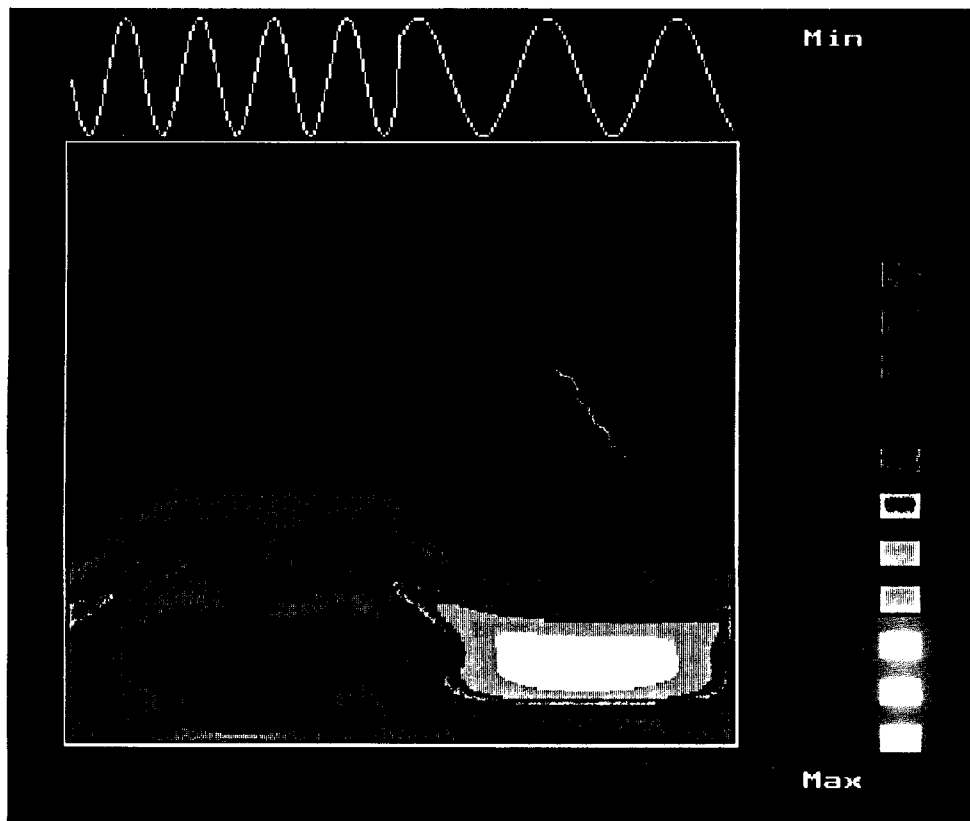


PLANCHE N°6

Analyse surabondante d'un changement de phase sur une sinusoïde

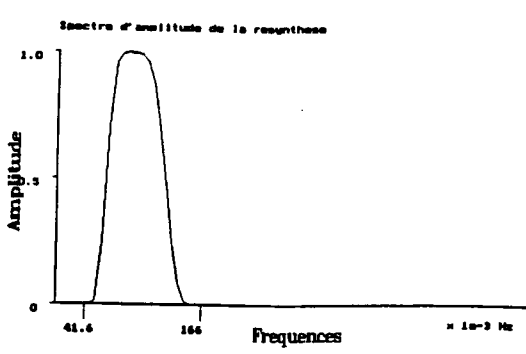
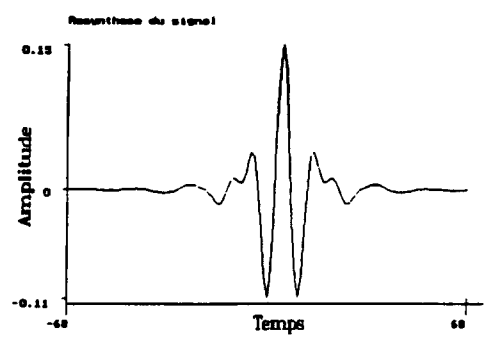
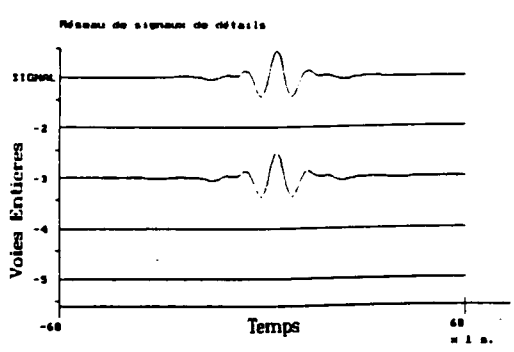
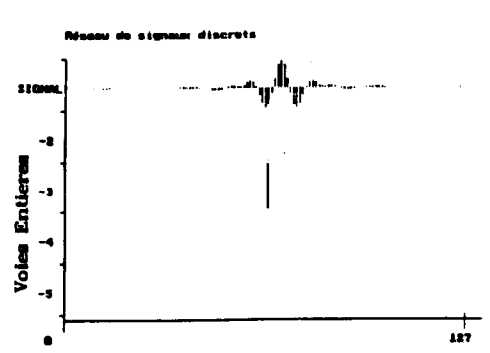
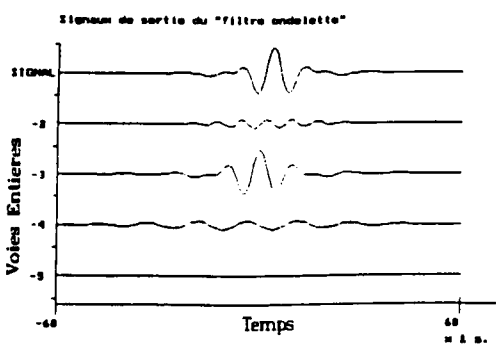
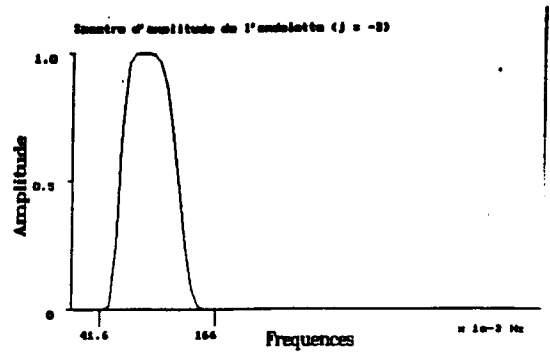
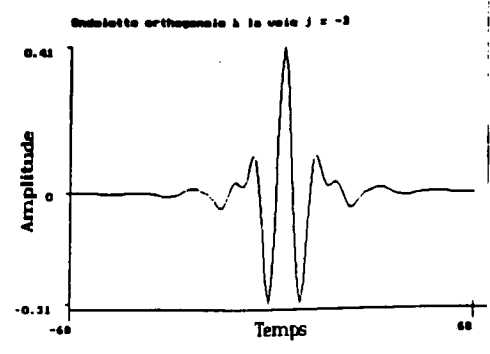


PLANCHE N°7-a
Analyse discrète-resynthèse de l'ondelette à la voie -3

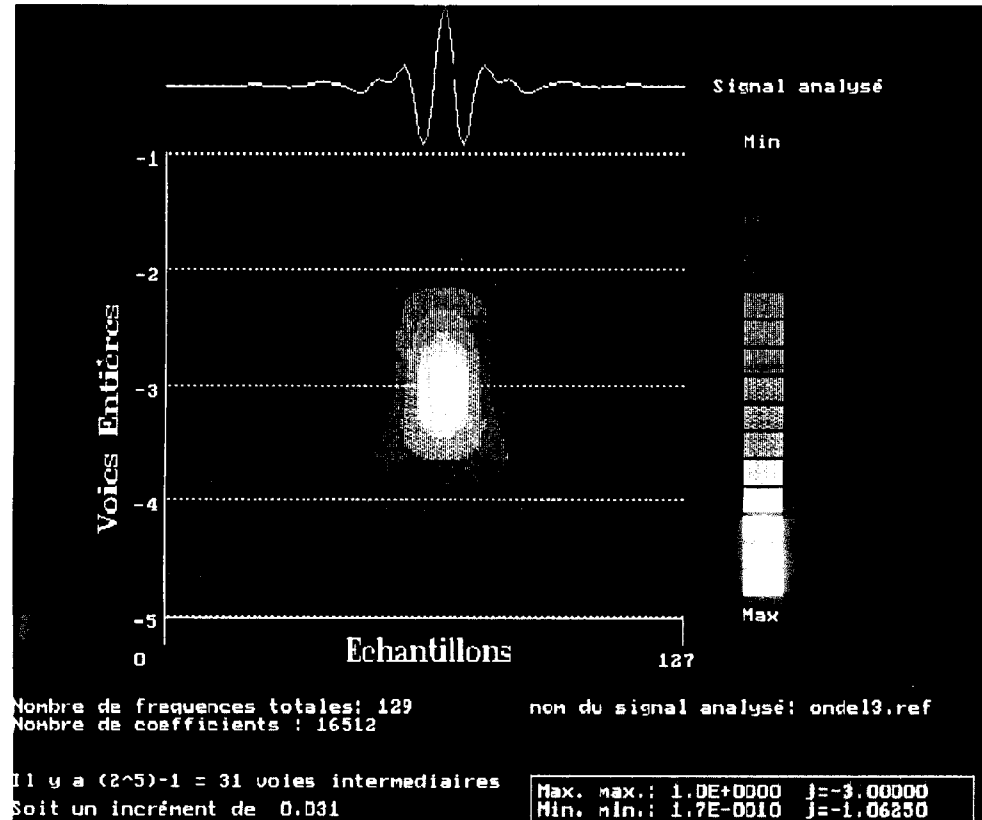


PLANCHE N°7-b
 Analyse surabondante de l'ondelette à la voie -3

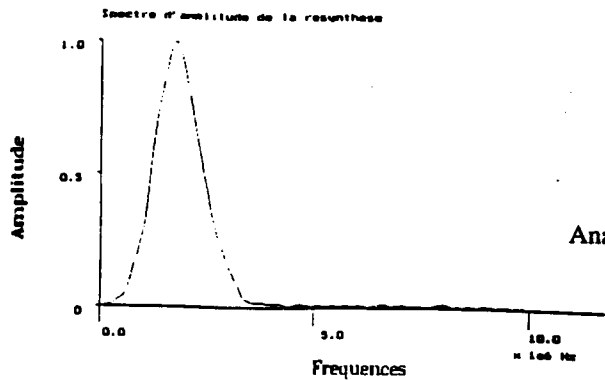
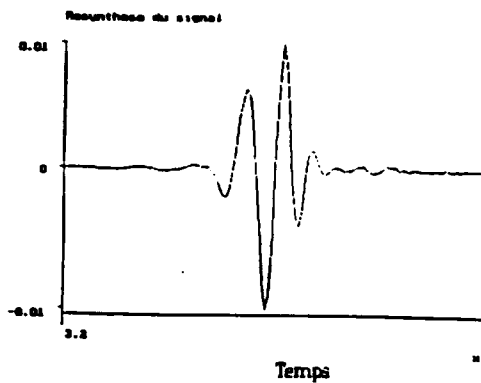
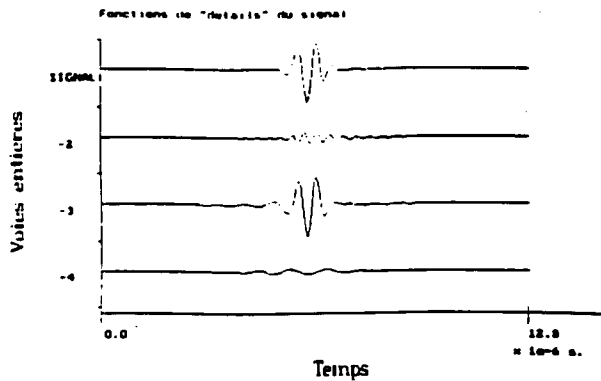
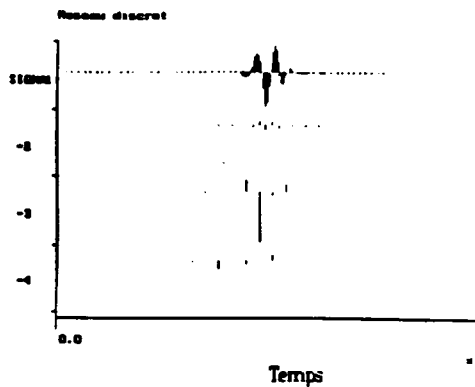
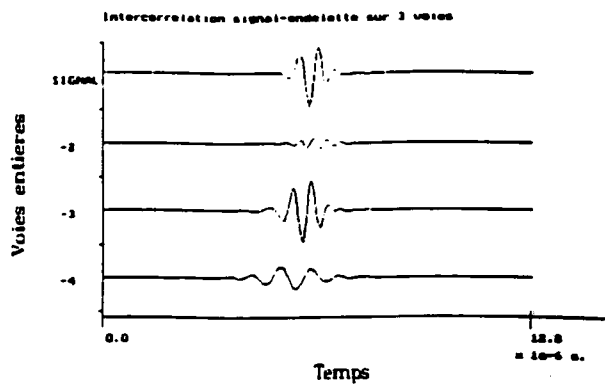
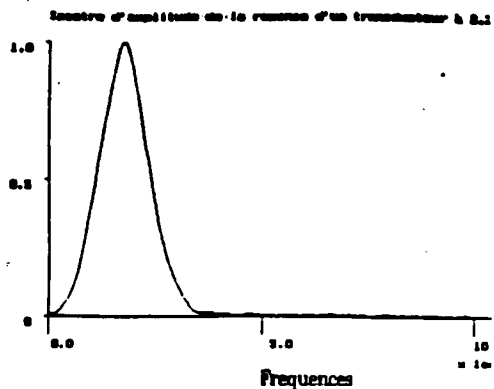
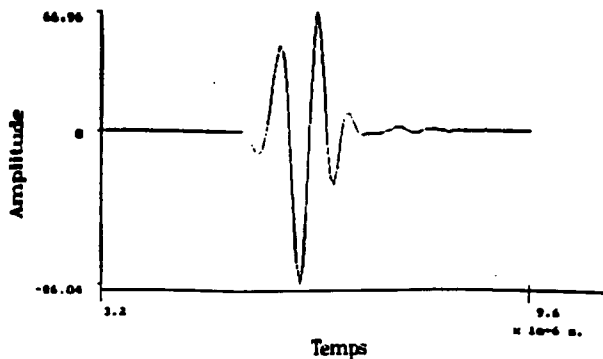


PLANCHE N°8-0
Analyse discrète-resynthèse d'un écho d'interface

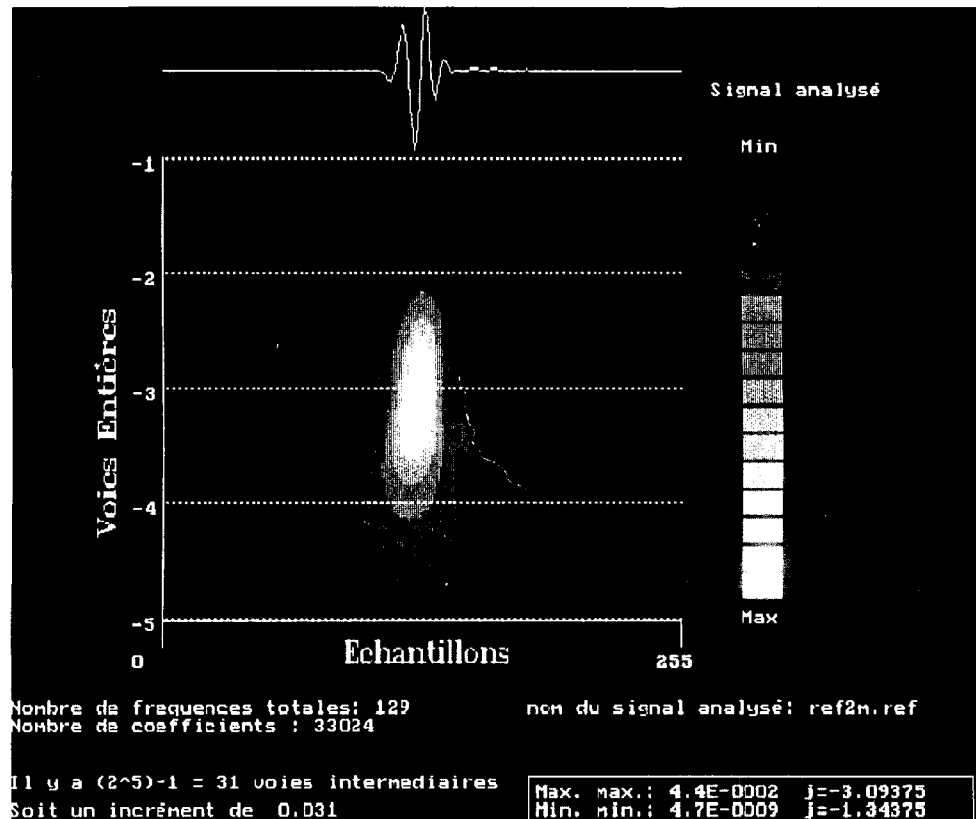


PLANCHE N°8-b
 Analyse surabondante d'un écho d'interface

SECONDE PARTIE

Application de l'analyse en ondelettes au contrôle non destructif des matériaux.

VII. Réjection d'un signal parasite localisé de type signal de saturation

VII.1 Notion de cône d'influence

VII.1.a Analyse d'un Dirac

Soit un signal $S(t) = \delta(t - t_0)$ et sa transformée de Fourier $\hat{S}(\nu) = e^{2i\nu\pi t_0}$
On a vu que le signal de sortie du filtre "ondelette" à la voie j était l'intercorrélation :

$$X_j(t) = (S * \Psi_{j,o}^\#)(t)$$

$$\Leftrightarrow X_j(t) = (\delta_{t_0} * \Psi_{j,o}^\#)(t)$$

$$\Leftrightarrow X_j(t) = \Psi_{j,o}^\#(t - t_0) = \overline{\Psi_{j,o}}(t - t_0) = \Psi_{j,o}(t_0 - t)$$

or les ondelettes $\Psi_{j,o}$ sont centrées sur : $t_{j0} = \frac{t_0}{2^j}$
 $= \frac{2^{-j}}{2} U_t$

et ont pour demi-largeur $2^{-j} \left(\frac{T}{2}\right)$ ou T est la demi largeur de l'ondelette analysante.

Donc les fonctions $X_j(t)$ sont centrées sur $t = t_0 - \frac{2^{-j}}{2} U_t$ et ont pour demi-largeur $2^{-j} \left(\frac{T}{2}\right)$.

On peut alors définir une zone d'influence comme l'intervalle suivant:

$$\left[t_0 - \frac{2^{-j}}{2} U_t - 2^{-j} \left(\frac{T}{2}\right), t_0 - \frac{2^{-j}}{2} U_t + 2^{-j} \left(\frac{T}{2}\right) \right]$$

VII.1.b Analyse d'un signal localisé en temps

Soit $S(t)$ un signal localisé en temps, c'est à dire commençant au temps t_1 et finissant au temps t_2 .

Si on note par $[\tau_j^1, \tau_j^2]$ sa zone d'influence sur la voie j, on peut écrire que:

$$[\tau_j^1, \tau_j^2] = \left[t_1 - \frac{2-j}{2} U_t - 2-j \left(\frac{T}{2} \right), t_2 - \frac{2-j}{2} U_t + 2-j \left(\frac{T}{2} \right) \right]$$

Inversement, un signal sur la voie j localisé sur un intervalle $[\tau_j^1, \tau_j^2]$ peut provenir d'un signal initial localisé sur l'intervalle $[t^1, t^2]$ tel que :

$$\begin{cases} t^1 = \tau_j^1 + \frac{2-j}{2} U_t + 2-j \left(\frac{T}{2} \right) \\ t^2 = \tau_j^2 + \frac{2-j}{2} U_t - 2-j \left(\frac{T}{2} \right) \end{cases}$$

Comme il faut que $t^1 \leq t^2$, il faut que:

$$\tau_j^1 + \frac{2-j}{2} U_t + 2-j \left(\frac{T}{2} \right) \leq \tau_j^2 + \frac{2-j}{2} U_t - 2-j \left(\frac{T}{2} \right)$$

c'est à dire que $\tau_j^2 - \tau_j^1 \geq 2-j T$

Si on veut traduire ces expressions en termes de numéros d'échantillons, il suffit de poser $t = n U_t$, n étant le numéro de l'échantillon correspondant à t et $\frac{T}{2} = M_0 U_t$; on a alors:

$$\begin{cases} n^1 = m_j^1 + 2-j \left(\frac{1}{2} + M_0 \right) \\ n^2 = m_j^2 - 2-j \left(M_0 - \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

où donc n^1 et n^2 (respectivement m_j^1 et m_j^2) sont les numéros d'échantillons correspondant aux temps t^1 et t^2 (respectivement τ_j^1 et τ_j^2).

** Critère de choix de τ_j^1 et τ_j^2 :*

Le critère de choix des temps τ_j^1 et τ_j^2 est un critère de seuil relatif. C'est à dire que sur la voie d'analyse j retenue, on choisit ces temps tels que sur l'intervalle $[\tau_j^1, \tau_j^2]$:

$$|X_j(t)| > \text{Seuil}$$

Ce seuil est donc estimé sur le module du signal de sortie du filtre "ondelette" sur la voie j.

** Valeur de $\frac{T}{2}$:*

Dans l'étude de l'ondelette analysante, on a mis en évidence la longueur de l'intervalle en dehors duquel l'ondelette est inférieure à $5 \cdot 10^{-4}$. Cette longueur, de $13 U_t$ (soit donc une demi largeur d'ondelette $\frac{T}{2} = 6,5 U_t$) n'apparaît pas comme intéressante et après quelques essais, on prendra $\frac{T}{2} = 3 U_t$.

VII.2 Elimination d'un signal de saturation.

VII.2.a Point de vue adopté

La saturation provoque l'apparition d'harmoniques et de sous harmoniques du signal initial. Les signaux de départ étant en pratique échantillonnés à la limite de la fréquence d'échantillonnage, on ne peut pas raisonner sur les harmoniques. Par contre on peut le faire sur les sous harmoniques qui pourront être mis en évidence par une transformation en ondelettes de ces signaux.

Si le signal initial n'a pas de composantes significatives pour $j \leq J$, le signal saturé, lui, aura des composantes pour $j \leq J$; on peut alors utiliser cette propriété pour le rejeter.

- Si son analyse est complète sur la voie J, c'est à dire si on voit bien le début τ_J^1 et la fin τ_J^2 de sa zone d'influence sur cette voie, on rejettera sur le signal de départ tout ce qui passe entre t^1 et t^2 tels que:

$$\begin{cases} t^1 = \tau_J^1 + \frac{2^{-J}}{2} U_t + 2^{-J} \left(\frac{T}{2} \right) \\ t^2 = \tau_J^2 + \frac{2^{-J}}{2} U_t - 2^{-J} \left(\frac{T}{2} \right) \end{cases}$$

(après avoir vérifié le test $t^1 < t^2$)

- Si son analyse déborde vers les $t > 0$ sur la voie J (on voit bien le début mais pas la fin de la zone d'influence), on peut se contenter de rejeter tout ce qui se passe pour $t > t^1$ tel que:

$$\begin{cases} t^1 = \tau_J^1 + \frac{2^{-J}}{2} U_t + 2^{-J} \left(\frac{T}{2} \right) \end{cases}$$

VII.2.b Etude pratique sur un échantillon. (Expérimentation)

La méthode a été implémentée pour une étude menée par P.Recotillet dans le cadre de sa thèse [14]. Il s'agit, pour lui, d'étudier une fissure sous revêtement dans une pièce en acier massive (échantillon fourni par EDF : pièce en acier de 10 cm d'épaisseur, avec un revêtement d'acier austénitique de 1 cm, la fissure débouchant à l'interface entre les deux).

Les images de la zone fissurée, prises du côté ferritique c'est à dire isotrope (Planche N° 11), révèlent la présence de la fissure par un point brillant (diffraction par l'extrémité de la fissure). Alors que celle de la zone saine (Planche N° 10) ne laisse apparaître que l'interface entre les deux aciers.

La difficulté majeure est le fait que les signaux utiles, les signaux d'interface entre les deux aciers qu'il soit fissuré ou non, sont environ 1000 fois plus faibles que les échos d'interface eau-acier, ce qui oblige à saturer ces derniers, avec pour conséquence supplémentaire outre l'intensité de

leur image, un étalement important de cette dernière (phénomène de bavure). Nous avons donc travaillé sur la réjection de ces signaux dans les acquisitions, avant "injection" dans l'algorithme de reconstruction.

Dans un premier temps, nous avons extrait un signal du fichier d'acquisitions afin de l'analyser séparément. L'angle choisi correspond à l'incidence normale où les signaux d'interface entre les deux aciers et de fissure sont superposés. Le signal, son analyse en ondelettes, le cône d'influence de la partie saturée ainsi que le signal après traitement sont visibles sur les planches N° 9.

La voie de discrimination est la voie $j = -4$ et la demi-largeur de l'ondelette analysante est choisie à $\frac{2,5}{F_e}$. Le seuil est proportionnel à l'amplitude du module de la partie du signal utile sur cette voie.

Dans un second temps, on a traité toutes les projections du fichier d'acquisitions en automatisant l'algorithme. Les paramètres restent ceux de l'étude détaillée ce qui permet d'éliminer uniquement les signaux parasites.

Sur les planches N° 10 et 11, on a représenté les images de la zone saine et de la zone fissurée avant et après élimination des échos forts.

VIII. Discrimination de signaux d'origines diverses par transformation en ondelettes

La discrimination entre des signaux provenant d'une réflexion (interfaces, ...) et ceux provenant d'une diffusion (inclusions, ...) est un des problèmes fréquemment rencontrés en CND. On montre que les signaux de réflexion sont en gros des copies du signal émis par le transducteur, et les signaux de diffusion des copies de la dérivée seconde de ce signal [15]. On peut donc s'attendre à ce que les objets de dimension intermédiaire, comme les têtes de fissure, donnent des signatures intermédiaires. C'est effectivement ce qu'on constate expérimentalement: un écho d'inclusion est sensiblement la dérivée d'un écho de tête de fissure, et lui-même donc la dérivée d'un écho d'interface. D'où la méthode de discrimination de signaux de fissures [16] qui consiste à apprécier si un signal échographique est proche d'un écho de diffusion (défaut ponctuel - faible nocivité) ou de son intégrale (bord de fissure - forte nocivité). L'application suivante porte à la fois sur l'aspect traitement du signal et sur l'aspect modélisation .

VIII.1 Application à une fissure sous revêtement

On s'est intéressé à la détection de la fissure dans la pièce fournie par E.D.F. et dont les caractéristiques sont données dans l'étude précédente. La fissure, lorsqu'elle existe, présente la particularité de déboucher le plus souvent à l'interface (c'est alors qu'elle est la plus nocive) perpendiculairement à lui, de sorte qu'en inspection normale l'écho de tête de fissure est confondu avec celui de l'interface et donc complètement masqué. Le problème n'est donc pas simplement de discriminer un écho de fissure d'un écho d'interface, mais un écho d'interface fissuré d'un écho d'interface sain. L'outil "ondelettes" est alors bien adapté à la discrimination de signatures.

La planche N°12 permet de distinguer l'interface sain et l'interface fissuré. Pour des commodités de visualisation, on a juxtaposé les deux signaux sur un même fichier (le signal de l'interface en zone saine est le premier des deux). On remarque que les différences sont notables, surtout dans les voies hautes fréquences. En effet, on remarque que seul l'interface fissuré est apparent à la voie -0,5 et que sur la voie -1,5, l'interface fissuré donne un signal dédoublé alors que l'autre non.

VIII.2 Modélisation d'un signal de fissure et d'interface fissuré

Si on modélise une fissure par un demi-plan réfléchissant (condition de Dirichlet), on peut raisonnablement approcher sa réponse impulsionnelle en rétrodiffusion à grande distance par la dérivée d'un "Dirac" et sa convolution avec la réponse impulsionnelle en réflexion de la chaîne par la dérivée de cette dernière, c'est à dire la dérivée d'un écho d'interface normal [17].

En faisant l'hypothèse apparemment réaliste de monodiffusion (échos très faibles) le problème de diffraction est linéarisé, et on obtient la réponse en diffraction de l'interface fissuré par simple superposition des réponses de l'interface et de la fissure.

On a donc modélisé un signal d'interface fissuré en superposant le signal d'interface entre les deux aciers de la pièce et la dérivée première de la réponse impulsionnelle en émission-réception du transducteur de fréquence centrale égale à 5 Mégahertz. Cette réponse est obtenue à partir de l'échogramme en incidence normale d'une plaque de laiton immergée dans l'eau. Sur la planche N°13 on a représenté l'analyse en ondelettes des modélisations des échogrammes d'interface sain et d'interface fissuré.

Conclusion

Nous avons mis au point un algorithme rapide (utilisation de procédures F.F.T.) et efficace (résultats précis) d'analyse en ondelettes orthogonales. L'ondelette "mère" choisie est du type JAFFARD, c'est à dire construite d'une manière analytique dans le plan fréquentiel. Les expériences sur des signaux-tests illustrent la remarquable faculté de ce type d'analyse à mettre en évidence les singularités des signaux.

Nous avons étendu ensuite notre étude discrète vers une "analyse surabondante en échelles" dans le but d'éclaircir certaines représentations temps-échelles. L'idée étant de se rapprocher des analyses continues tout en gardant la possibilité d'extraire une grille dyadique.

Nous avons appliqué ces techniques au Contrôle Non Destructif des matériaux pour éliminer dans un premier temps des signaux de saturation parasites des images reconstruites et pour discriminer dans un second temps des signaux de type interface de signaux de type "extrémité de fissure".

L'analyse en ondelettes est un excellent outil de comparaison de signaux, adapté aussi bien à la validation de modèles qu'à la discrimination de signatures, et donc dans notre cas concret à la détection de fissures par échographie.

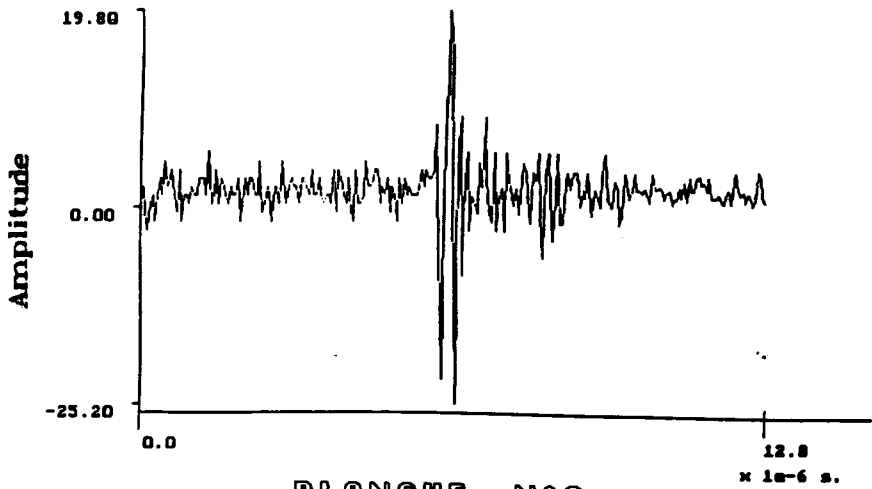
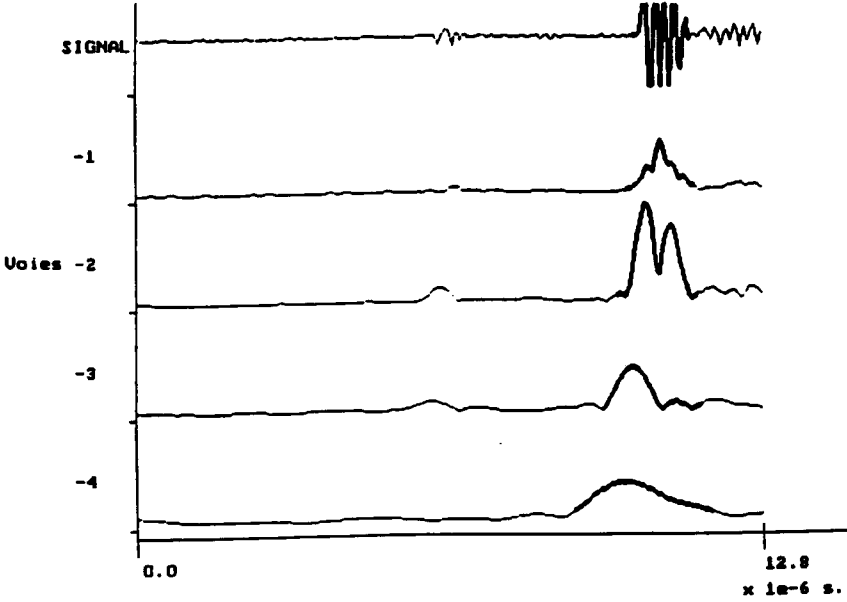
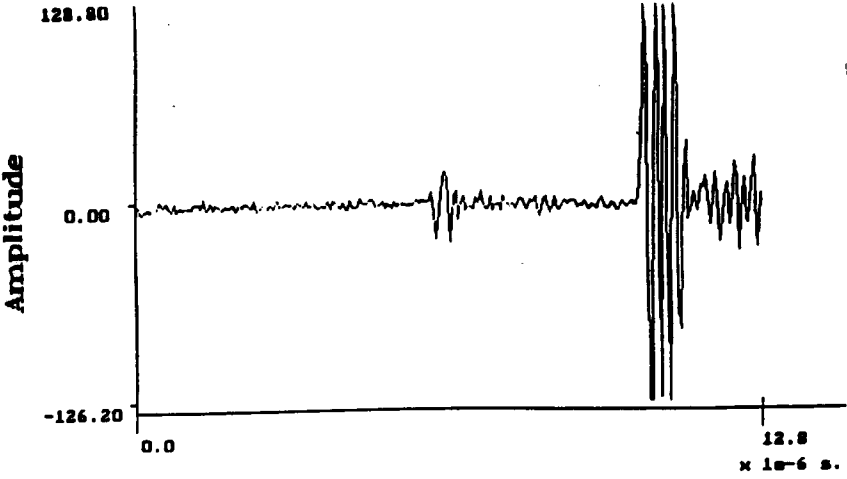


PLANCHE N°9

Elimination d'un signal d'interface fort

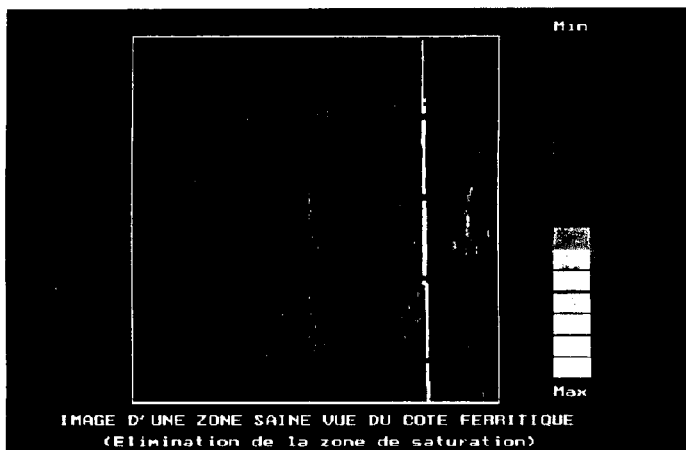
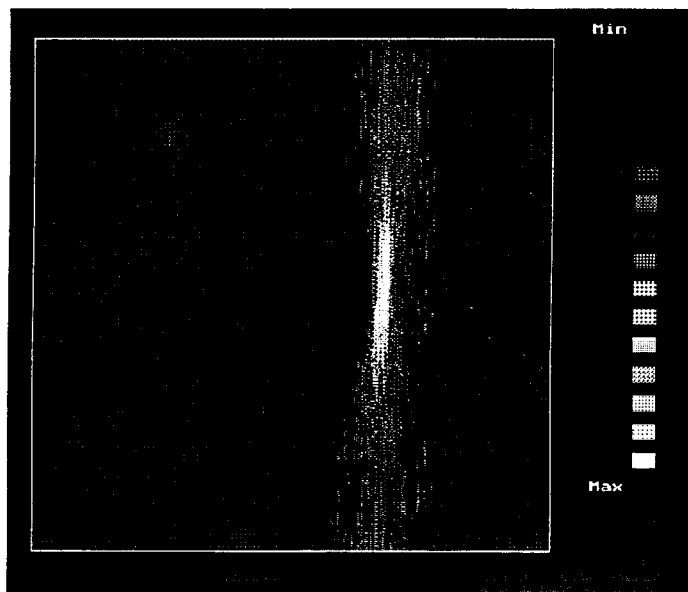


PLANCHE N°10
Images avant et après traitement d'une zone saine

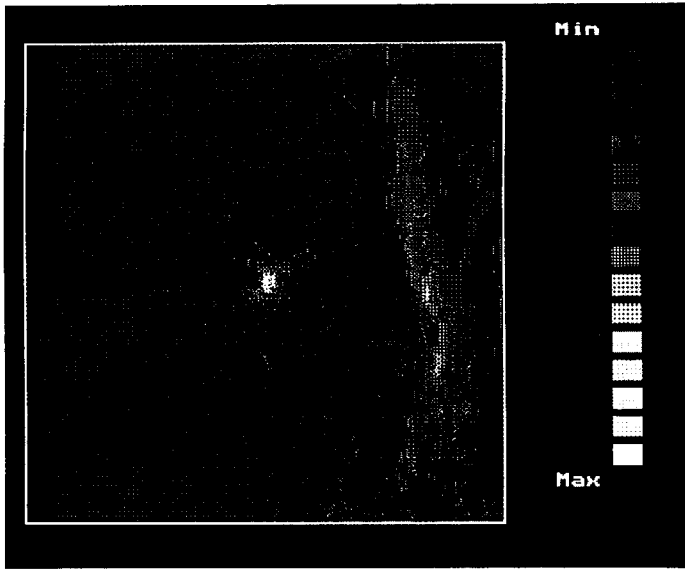
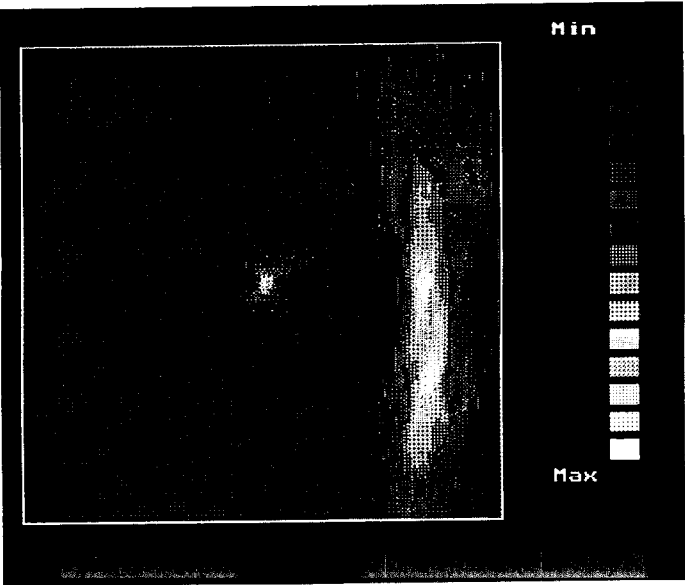


PLANCHE N° 11
Images avant et après traitement d'une zone fissurée

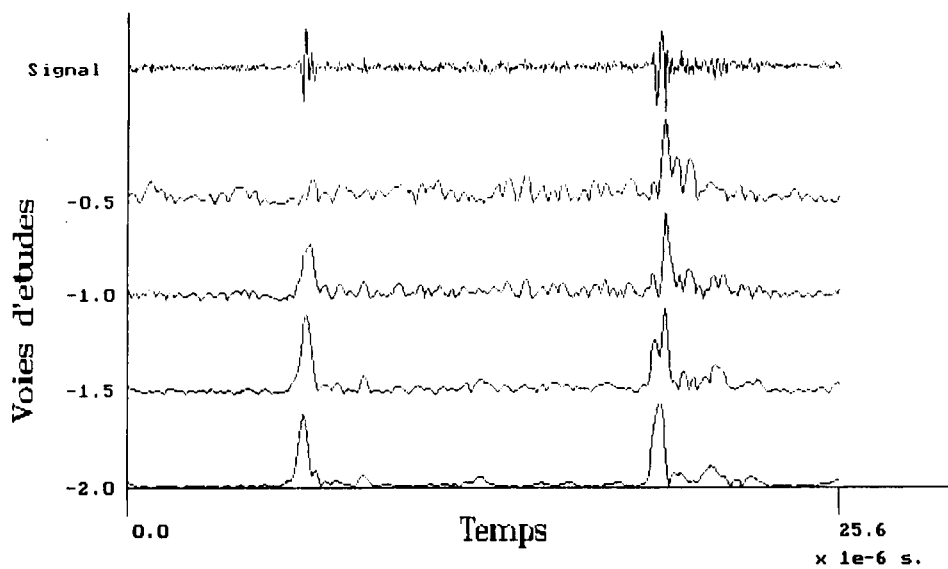
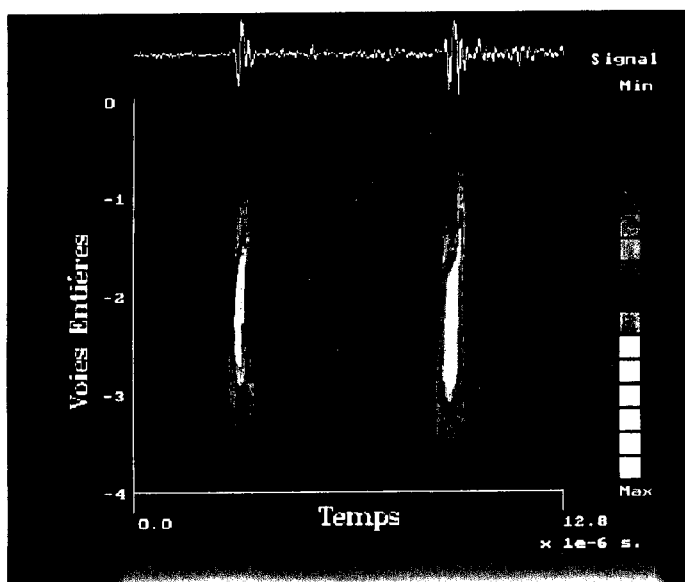


PLANCHE N°12

Detection de fissure par l'analyse en ondelettes
 en haut : analyse surabondante
 en bas : analyse discret (pas 0,5)

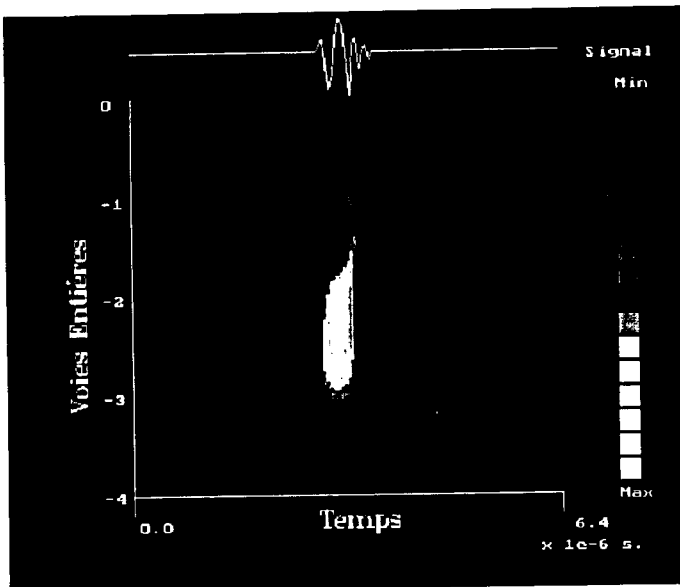
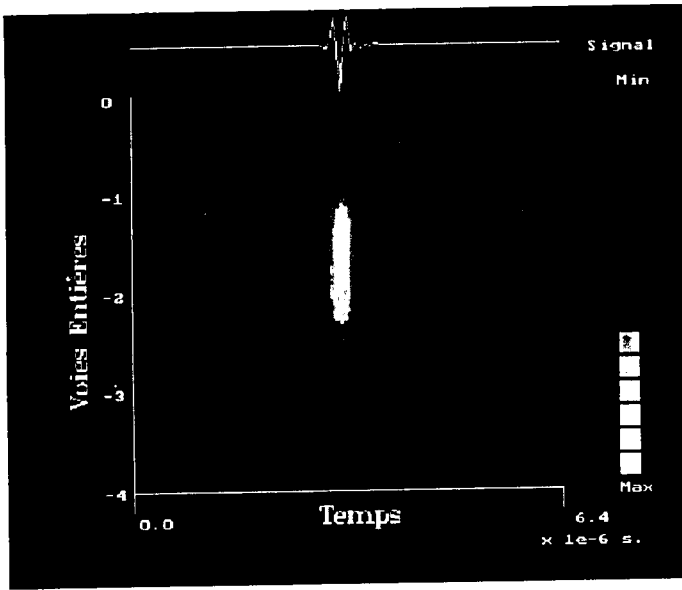


PLANCHE N°13

Modélisation de fissure et d'interface fissuré
en haut : fissure, en bas : interface fissuré

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P.LASAYGUES,Prétraitement des données en échographie ultrasonores-Rapport de stage-DEA d'acoustique et dynamique des vibrations-Université d'Aix-Marseille II Juin 89.
- [2] S.JAFFARD, Construction of Wavelets on open sets, Proceedings Conf. Wavelets, Time-Frequency Method and Phase Space, Marseille, 14-18 Décembre 1987, J.M.COMBES et al. (eds.), Lecture Notes on IPTI, Springer Verlag 1989.
- [3] Y.MEYER, Orthonormal Wavelets, Proceedings Conf. Wavelets, Time-Frequency Method and Phase Space, Marseille, 14-18 Décembre 1987, J.M.COMBES et al. (eds.), Lecture Notes on IPTI, Springer Verlag 1989.
- [4] Y.MEYER,Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs, Séminaire Bourbaki,1985-86,n°662.
- [5] S.JAFFARD, Algorithmes de transformation en ondelettes,NOTE.
- [6] S.MALLAT, A theory for multiresolution signal decomposition:the wavelet representation,IEEE Trans. on PAMI,11,PP.674-693 (1989).
- [7] S.MALLAT,Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models,IEEE Transactions on Acoustics,speech,and signal processing,Vol 37,N°12 December 1989,pp. 2091-2110.
- [8] P.MATHIEU,M.BARLAUD,M.ANTONINI,Compression d'image par transformation en ondelettes,Laboratoire de signaux et systèmes CNRS UA 814-Douzième colloque GRETSI,p.781-783.Juin 89.
- [9] A.GROSSMANN, J.MORLET, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, SIAM J.Maths . Anal. Vol 15, n°4 JULY 1984.
- [10] J.MORLET, Introduction à la représentation Cycle-Octave, Octobre 1984,NOTE.
- [11] P.FLANDRIN, Time-Frequency and Time-Scale, IEEE ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling, Minneapolis, MN, Aug 3-5, 1988.
- [12] G.SARACCO, Propagation acoustique en régime harmonique & transitoire à travers un milieu inhomogène: Méthodes asymptotiques et transformation en ondelettes, Thèse de l'université d'Aix-Marseille II,soutenue le 19-10-89.
- [13] V.PERRIER,C.BASDEVANT,La décomposition en ondelettes périodiques,un outil pour l'analyse des champs inhomogènes.Theorie et Algorithme, La recherche Aérospatiale N°1989-3, p.53-67, Juin 89.
- [14] J.P. LEFEBVRE, P. RECOTILLET, Imagerie de défauts dans des pièces planes par tomographie ultrasonore, CNRS-LMA Marseille.
- [15] P.M. MORSE, K.U. INGARD, Theoretical acoustics, Mc Mraw-Hill Book company, NY 1968.

- [16] D. De VADDER, M. DOSSO, Caractérisation ultrasonore des bords de fissure par traitement numérique du signal, Proc. 3rd. Europ. Conf. Nondestructive Testing, Firenze (I), t.5, pp.362-374, 1984.
- [17] P.LASAYGUES, J.P.LEFEBVRE, Détection de fissure par échographie ultrasonore, une modélisation et un outil de traitement du signal adapté, 10^{ème} Congrès Français de Mécanique, Paris-Septembre 91.

Annexe

Démontrons que les $\Psi_{j,k}(t)$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. (D'après P. FILIPPI)

Rappel : On appelle base Hilbertienne d'un espace de Hilbert toute famille d'éléments e_i de l'espace vérifiant les propriétés suivantes:

- (1) $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \text{ (orthogonalité)} \\ 1 & \text{pour } i = j \text{ (base normée)} \end{cases}$
- (2) L'ensemble des e_i est topologiquement générateur.

Le second point est vérifié puisqu'aucun élément non nul est orthogonal à tous les $\Psi_{j,k}$.

Soit donc à démontrer :

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{j',k'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j,k}(t) \overline{\Psi_{j',k'}(t)} dt = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'} \quad (\text{A.1})$$

où $\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\text{Posons } P_{jk,j'k'} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{j,k}(t) \overline{\Psi_{j',k'}(t)} dt$$

En appliquant l'égalité de Parseval-Plancherel on écrit que:

$$P_{jk,j'k'} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}_{j,k}(v) \overline{\hat{\Psi}_{j',k'}(v)} dv \quad (\text{A.2})$$

1^{er} cas : $|j - j'| \geq 2$

Dans ce cas l'orthogonalité est triviale puisqu'on a alors :

$$\text{Supp}(\hat{\Psi}_{j,k}(v)) \cap \text{Supp}(\overline{\hat{\Psi}_{j',k'}(v)}) = \emptyset$$

2^{ième} cas : $j = j'$; $\forall k \in \mathbb{Z}$

En rassemblant dans l'égalité (A.2), $\hat{\Psi}_{j,k}(v)$ par son expression et en regroupant les termes en j et ceux en k et k' on obtient :

$$P_{jk,j'k'} = \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-j} \exp[-2i\pi v 2^{-j}(k-k')] \Gamma(2^{-j}v) dv \quad (A.3)$$

En posant $v = 2^{-j}v$ et donc $dv = 2^{-j}dv$, on simplifie (A.3) en écrivant:

$$P_{jk,j'k'} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-2i\pi v (k-k')] \Gamma(v) dv \quad (A.4)$$

que l'on peut décomposer en une somme de deux intégrales: $P_{jk,j'k'} = I_1 + i I_2$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \cos[2\pi(k-k')v] \Gamma(v) dv$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sin[2\pi(k-k')v] \Gamma(v) dv$$

or Γ est une fonction paire donc $I_2 = 0$ et I_1 s'écrit:

$$I_1 = 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \cos[2\pi(k-k')v] \Gamma(v) dv$$

Compte tenu de la définition de la fonction $\Gamma(v)$ sur l'intervalle $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$, (A.4) devient

$$P_{jk,j'k'} = 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \theta(3v-1) \cos[2\pi(k-k')v] dv + 2 \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \theta(2 - \frac{3v}{2}) \cos[2\pi(k-k')v] dv \quad (A.5)$$

Considérons une fonction impaire $H(x)$, n fois continuellement dérivable définie par :

$$\begin{cases} H(x) = -\frac{1}{2} & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ H(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ H(x) = \frac{1}{2} & \text{si } x > \frac{1}{2} \\ 0 \leq H(x) \leq \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

avec $H(\frac{1}{2}) = 0$.

Alors on peut associer $H(v)$ à θ par l'égalité suivante : $\theta(x) = \frac{1}{2} + H(x - \frac{1}{2})$.

Auquel cas (A.5) peut être écrit :

$$\begin{aligned} P_{jk,j'k'} &= 2 \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{2} + H\left(3v + \frac{3}{2}\right) \right] \cos[2\pi(k-k')v] dv \\ &\quad + 2 \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \left[\frac{1}{2} + H\left(\frac{3}{2}(1-v)\right) \right] \cos[2\pi(k-k')v] dv \end{aligned} \quad (A.6)$$

si on regarde les termes ne contenant pas H dans chacune des deux intégrales de (A.6) :

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \cos[2\pi(k-k')v] dv + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \cos[4\pi(k-k')v] dv \\ &= \frac{1}{2\pi(k-k')} \left\{ \sin\left[4\pi \frac{k-k'}{3}\right] - \sin\left[2\pi \frac{k-k'}{3}\right] + \sin\left[8\pi \frac{k-k'}{3}\right] - \sin\left[4\pi \frac{k-k'}{3}\right] \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi(k-k')} \left\{ \sin \left[8\pi \frac{k-k'}{3} \right] - \sin \left[2\pi \frac{k-k'}{3} \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi(k-k')} \cos \left\{ \frac{5}{3} \pi(k-k') \right\} \sin \left\{ \pi(k-k') \right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } k-k' \neq 0 \\ 1 & \text{si } k = k' \end{cases}$$

La première intégrale contenant H est ramenée à l'intervalle $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$ par le changement de variables

$w = v - \frac{1}{2}$. Sur cet intervalle H est impaire et comme

$$\cos \left[2\pi(k-k')v \right] = \cos \left[2\pi(k-k')w - \pi(k-k') \right]$$

est paire ; l'intégrale s'annule sur cet intervalle.

Il en est de même pour la seconde intégrale contenant H.

3^{ième} cas : $j'=j+1$ et $k = k'$

Sous cette hypothèse l'intégrale (A.2) se transforme :

$$\begin{aligned} P_{jk,j'k'} &= P_{jk,(j+1)k} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}_{j,k}(v) \overline{\hat{\Psi}}_{j+1,k}(v) dv \quad (A.7) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2^{-j/2} \exp \left[2i\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) 2^{-j} v \right] \sqrt{\Gamma(2^{-j}v)} \right\} \\ &\quad \left\{ 2^{-(j+1)/2} \exp \left[2i\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) 2^{-(j+1)} v \right] \sqrt{\Gamma(2^{-(j+1)}v)} \right\} dv \\ &= 2^{-j} 2^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-2i\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) 2^{-j-1} v \right] \sqrt{\Gamma(2^{-j}v) \Gamma(2^{-j-1}v)} dv \end{aligned}$$

On rappelle que le support de $\Gamma(2^{-j}v) = \left[\frac{2j}{3}, \frac{2j+2}{3} \right] \cup \left[-\frac{2j+2}{3}, -\frac{2j}{3} \right]$, par conséquent le support de $\Gamma(2^{-j-1}v) = \left[\frac{2j+1}{3}, \frac{2j+3}{3} \right] \cup \left[-\frac{2j+3}{3}, -\frac{2j+1}{3} \right]$ et donc le support du produit :

$$\text{Supp } \Gamma(2^{-j}v) \Gamma(2^{-j-1}v) = \left[\frac{2j+1}{3}, \frac{2j+2}{3} \right] \cup \left[-\frac{2j+2}{3}, -\frac{2j+1}{3} \right]$$

En effectuant le changement de variable suivant : $w = 2^{-j}v - 1 \Rightarrow w \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

Alors le produit des deux termes Γ est pair sur cet intervalle. Le terme en cosinus s'écrit par le changement de variables: $\cos\left[2\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)2^{-j-1}v\right] = \cos\left[2\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{w}{2} + k\pi + \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left[\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)w + k\pi\right]$ il est impaire sur l'intervalle et donc l'intégrale est nulle.

4ième cas : $j' = j+1$ et $k \neq k'$

L'égalité (A.2) s'écrit dans ce cas :

$$P_{jk,j'k'} = 2^{-j+1/2} \int_0^{\infty} \cos\left[2\pi\left(2k-k'+\frac{1}{2}\right)2^{-j-1}v\right] \sqrt{\Gamma(2^{-j}v)\Gamma(2^{-j-1}v)} dv$$

Cette intégrale est nulle pour les mêmes raisons que précédemment.

En conclusion $\Psi_{j,k}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.