Adrià Fraile Marín

Problema online

No lineal amb restriccions

$\min f(x,y) = x^2+y^2+xy$

$x+y=1 \rightarrow h(x,y)=x+y-1$

$x^2+y^2\le 1 \rightarrow g(x,y)=x^2+y^2-1$

$L(x,y,\mu,\lambda)= f(x,y)+\mu\cdot h(x,y)+\lambda\cdot g(x,y) = x^2+y^2+xy+\mu(x+y-1)+\lambda(x^2+y^2-1)$

1) $\frac{dL}{dx} = 2x+y+\mu+2\lambda x$

$\frac{dL}{dx} = 2y+x+\mu+2\lambda y$

2) $x+y-1=0$ ⓐ $\quad x^2+y^2\le 0 \rightarrow$ ⓑ

3) $\lambda\ge 0,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

4) $\lambda(x^2+y^2-1)=0$

Cas $\lambda = 0$

$2x+y+\mu=0 \rightarrow \mu=-2x-y$

$2y+x+\mu=0 \rightarrow \mu=-2y-x$

$\Big\}\ -2x-y=-2y-x$

$x=y$

ⓐ $\rightarrow x+y-1=0 \rightarrow x+x-1=0 \rightarrow x=1/2 \ge 0$ $\quad$ 3) ✓

$y=1/2\ge 0$ $\quad$ Punt vàlid

$1/2^2+1/2^2\ge 0$ $\quad$ 2) ✓

Cas $\lambda\ne 0$

$\begin{cases} 2x+y+\mu+2\lambda x=0 \\ 2y+x+\mu+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$

4) $\rightarrow x^2+y^2-1=0 \rightarrow x^2+(1-x)^2-1=0 \rightarrow x=1,\ x=0$

ⓐ $\rightarrow x+y-1=0 \rightarrow y=1-x \rightarrow y=1,\ y=0$

$x=1$, $x=0\ge 0$, $y=1\ge 0$, $y=0$ $\quad$ 2) ✓ $\quad$ Punt vàlid

1 $\quad$ 2 $\quad$ 3

Punts candidats $= (1/2, 1/2), (1,0), (0,1)$

$1\rightarrow 1/2^2+1/2^2+1/2\cdot 1/2 = 3/4 \longrightarrow$ Punt mínim

$2\rightarrow 1^2+0^2+1\cdot 0 = 1$

$3\rightarrow 0^2+1^2+0\cdot 1 = 1$

Problema 2

$f(x,y)=x^2-4x+y^2-6y \qquad L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=x^2-4x+y^2-6y+\lambda_1(x+y-3)+\lambda_2(-2x+y-2)$

$x+y\le 3 \rightarrow g_1(x,y)$

$-2x+y\le 2\rightarrow g_2(x,y)$

1) $\frac{dL}{dx} = 2x-4+\lambda_1-2\lambda_2=0 \rightarrow$ ⓐ

$\frac{dL}{dy} = 2y-6+\lambda_1+\lambda = 0 \rightarrow$ ⓑ

2) $x+y\le 3\rightarrow$ ⓒ

$-2x+y\le 2\rightarrow$ ⓓ

3) $\lambda_1\ge 0,\ \lambda_2\ge 0$

4) $\lambda_1(x+y-3)=0\rightarrow$ ⓔ

$\lambda_2(-2x+y-2)=0\rightarrow$ ⓕ

Cas $\lambda_1=0, \lambda_2=0$

ⓐ $\rightarrow 2x-4=0\rightarrow x=2$ $\quad$ ⓒ $\rightarrow 2+3=5>3$ $\quad$ 2) ✗ $\rightarrow$ Punt no vàlid

ⓑ $\rightarrow 2y-6=0\rightarrow y=3$

Cas $\lambda_1\ne 0, \lambda_2=0$

ⓐ $\rightarrow 2x+\lambda_1=4\rightarrow x=(4-\lambda_1)/2=1$ $\quad$ ⓒ $1+2=3$ $\quad$ 2) ✓ $\rightarrow$ Punt vàlid

ⓑ $\rightarrow 2y+\lambda_1=6\rightarrow y=(6-\lambda_1)/2=2$ $\quad$ ⓓ $-2\cdot(1)+2=0$

ⓔ $\rightarrow x+y-3=0\rightarrow \frac{4-\lambda_1}{2}+\frac{6-\lambda_1}{2}-3=0\rightarrow\lambda_1=2$

Cas $\lambda_1=0, \lambda_2\ne 0$

ⓐ $\rightarrow 2x-2\lambda_2=4\rightarrow x=(4+2\lambda_2)/2\rightarrow x=4/5$

ⓑ $\rightarrow 2y+\lambda_2=6\rightarrow y=(6-\lambda_2)/2\rightarrow y=18/5$

ⓕ $\rightarrow -2x+y-2=0\rightarrow -2\left(\frac{4+2\lambda_2}{2}\right)+\frac{6-\lambda_2}{2}-2=0\rightarrow\lambda_2=-6/5\rightarrow \lambda_2<0\rightarrow$ 2) ✗ Punt no vàlid

Cas $\lambda_1\ne 0, \lambda_2\ne 0$

ⓔ $\rightarrow x+y-3=0$
ⓕ $\rightarrow -2x+y-2=0$ $\quad\Big]\ x=1/3,\ y=8/3$

ⓐ $\rightarrow 2x-4+\lambda_1-2\lambda_2=0\rightarrow 2(1/3)-4+\lambda_1-2\lambda_2=0$
ⓑ $\rightarrow 2y-6+\lambda_1+\lambda_2=0\rightarrow 2(8/3)-6+\lambda_1+\lambda_2=0$ $\quad\Big]\ \lambda_2=-8/9\rightarrow\lambda_2<0\rightarrow$ 2) ✗ Punt no vàlid

Punts candidats

$f(x,y)\rightarrow f(1,2)=1^2-4\cdot(2)+2^2-6(2)$

$=1-8+4-12=-15$

Condicions KKT (Kuhn-Tucker)

Condició necessària d'optimalitat

Si tenim una funció $f(x)$ (no lineal) com funció objectiu i restriccions d'igualtat $h_i(x) = 0$; de desigualtat $g(x) \le 0$ per a on $i \in 1,\dots,n$ i $j \in 1,\dots,n$. Suposem que x^* és un punt factible. Si x^* satisfà les condicions KKT i de regularitat (independència de restriccions), en aquest cas x^* és òptim local del problema.

Condicions

1) Estacionarietat : $\nabla f(x^*) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_j \mu_i \nabla h_j(x^*)$

2) Factibilitat primal : $g_i(x^*) \le 0$, $h_j(x^*) = 0$

3) Factibilitat dual : $\lambda_i \ge 0$ $\quad x \ge 0$

4) Complementary Slack : $\lambda_i g_i(x^*) = 0$

Problema 1

$\min f(x) = x^2$

rest $\rightarrow$ $x - 1 \le 0$

Solució $\rightarrow$ $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g_i(x)$ on $g_i(x) = x - 1$, $f(x) = x^2$

$= x^2 + \lambda(x-1)$

Condicions a complir:

1) $\frac{dL}{dx} = 2x + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -2x$

2) $x - 1 \le 0$

3) $\lambda \ge 0, x \ge 0$

4) $\lambda(x-1) = 0$

$1) + 4) \rightarrow -2x(x-1) = 0$

- $x = 0$: 2) $x - 1 \le 0 \rightarrow 0 - 1 \le 0$ ✓ ; 3) $\lambda = -2x \ge 0 \rightarrow \lambda = 0 \ge 0$ ✓ $\Big\}$ Punt valid
- $x = 1$: 2) $x - 1 \le 0 \rightarrow 1 - 1 \le 0$ ✓ ; 3) $\lambda = -2x \ge 0 \rightarrow -2(1) \ge 0 \rightarrow -2 \ge 0$ ✗ $\Big\}$ Punt no vàlid

Problema 2

$\min f(x) = x^2 + y^2$

rest $x + y - 1 = 0 \longrightarrow h(x,y) = x + y - 1$

$\quad x - y - 1 \le 0 \longrightarrow g(x,y) = x - y - 1$

$L(x,y,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + \mu(x+y-1) + \lambda(x-y-1)$

1) $\frac{dL}{dx} = 2x + \mu + \lambda = 0 \rightarrow \mu = -2x - \lambda$

$\quad \frac{dL}{dy} = 2y + \mu + \lambda = 0 \rightarrow \mu = -2y - \lambda$ $\Big\}$ $-2x - \lambda = -2y - \lambda \rightarrow \lambda = y - x$

2) $x - y - 1 \le 0$

3) $\lambda \ge 0$, $x, y \ge 0$

4) $\lambda(x - y - 1) = 0$

1) i 4) $\quad \lambda(x-y-1) = 0 \rightarrow (y-x)(x-y-1) = 0$
- $y - x = 0 \rightarrow x = y$
- $x - y - 1 = 0 \rightarrow x = y + 1$

Cas $x = y$

$x + y - 1 = 0 \longrightarrow 2y - 1 = 0 \rightarrow y = 1/2$, $x = 1/2$ $\Big\}$ $\lambda = y - x = 1/2 - 1/2 = 0 \longrightarrow$ Compleix 3 ✓

Cas $x = y + 1$

$x + y - 1 = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0$, $x = 1$ $\Big\}$ $\lambda = y - x = 0 - 1 = -1 \rightarrow$ No compleix 3 ✗

Problema 3

$\max z = 2x_1^2 - 7x_2^2 + 12x_1x_2$

rest $2x_1 + 5x_2 \le 98$, $x_1, x_2 \ge 0$

$g(x_1,x_2) = 2x_1 + 5x_2 - 98$

$L(x_1,x_2,\lambda) = f - \lambda g = 2x_1^2 - 7x_2^2 + 12x_1x_2 - \lambda(2x_1 + 5x_2 - 98)$

1) $\frac{dL}{dx_1} = 4x_1 + 12x_2 - 2\lambda = 0 \rightarrow$ ⓐ

$\quad \frac{dL}{dx_2} = -14x_2 + 12x_1 - 5\lambda = 0 \rightarrow$ ⓑ

2) $2x_1 + 5x_2 - 98 \le 0 \rightarrow$ ⓒ

3) $\lambda \ge 0$ $x_1, x_2 \ge 0 \rightarrow$ ⓓ

4) $\lambda(2x_1 + 5x_2 - 98) = 0 \rightarrow$ ⓔ

Cas $\lambda = 0$

ⓐ $4x_1 + 12x_2 = 0$

ⓑ $-14x_2 + 12x_1 = 0$ $\Big\}$ $x = 0$, $y = 0$

2) $2x_1 + 5x_2 - 98 \le 0 \rightarrow 0 + 0 - 98 \le 0$ ✓

3) $\lambda \ge 0$ $x_1, x_2 \ge 0 \longrightarrow x_1 = 0 \ge 0$ $x_2 = 0 \ge 0$ ✓

4) $\lambda(2x_1 + 5x_2 - 98) = 0$

Cas $\lambda \ne 0$

ⓔ $\rightarrow 2x_1 + 5x_2 - 98 = 0$

ⓐ $\rightarrow 4x_1 + 12x_2 - 2\lambda = 0$

ⓑ $\rightarrow -14x_2 + 12x_1 - 5\lambda = 0$ $\Big\}$ $x_1 = 44$, $x_2 = 2$, $\lambda = 100$

2) $2x_1 + 5x_2 - 98 \le 0$

3) $\lambda \ge 0$ $x_1, x_2 \ge 0$

4) $\lambda(2x_1 + 5x_2 - 98) = 0$

Problema 1

Minimitza $f(x,y) = (x-3)^2 + (y+4)^2$

Els valors de $x \in \{1,2,3,4,5\}$

i $y \in \{-6,-5,-4,-3,-2\}$

Solucionem amb el mètode de recerca de grid

Valors particulars (discrets)

x\y	-2	-3	-4	-5	-6
1	8	5	4	5	8
2	5	2	1	2	5
3	4	1	0	1	4
4	5	2	1	2	5
5	8	5	4	5	8

$\min = f(3,-4) = 0$

Problema 2

Ajusta el valor de pèrdua (loss) pels paràmetres w, b utilitzant grid search per optimitzar el resultat pels valors $\alpha \{0.1, 0.01, 0.001\}$. Per trobar valors de w, b utilitzar gradient descent.

$$L(w,b) = -[y \cdot \log(\hat{y}) + (1-y) \cdot \log(1-\hat{y})]$$

$$\hat{y} = \frac{1}{1+e^{-(wx+b)}}$$

x	y
1	0
2	1

$\} \ x_1, x_2, y_1, y_2$

$$X_{i+1} = X_i - \alpha \nabla L$$

$$w_{i+1} = w_i - \alpha \nabla L = w_i - \alpha \frac{dL}{dw}$$

$$b_{i+1} = b_i - \alpha \nabla L = b_i - \alpha \frac{dL}{db}$$

$$\frac{dL}{dw} = (\hat{y} - y)x$$

$$\frac{dL}{db} = (\hat{y} - y)$$

$\alpha = 0.1$

$w_0 = 0$

$b_0 = 0$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\hat{y} = \frac{1}{1+e^{-(w \cdot 1 + b)}} = \frac{1}{1+e^{-(0 \cdot 1 + 0)}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$w_1 = 0 - 0.1(0.5-0) \cdot 1 = -0.05$$

$$b_1 = 0 - 0.1(0.5-0) = -0.05$$

$L_1 = 0.3$

$\alpha = 0.1$

$w_0 = 0$

$b_0 = 0$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$$\hat{y} = \frac{1}{1+e^{-(w \cdot 1 + b)}} = \frac{1}{1+e^{-(0 \cdot 2 + 0)}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$w_1 = 0 - 0.1(0.5-1) \cdot 2 = 0.1$$

$$b_1 = 0 - 0.1(0.5-1) = 0.05$$

$L_2 = 0.3$

$\sum L = 0.6$

Busquem o creem un text que es pugui convertir a un embedding de matriu de 4×4 dimensions. Agafem aquest embedding per generar espai vectorial $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i utilitzem aquests com població inicial per maximitzar la funció $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ per $x \in [0, 2\pi]$ utilitzant genètica amb paràmetres

- Generacions → 2
- Població mida 4
- Representació → Binari 4 bits
- Crossover → 4 punts
- Mutació → 1 num aleatori
- Selection → Roulete → $\dfrac{f_i}{\sum f_i}$

Transformar P_2 a text i fer comparació P_0 i P_2

P. Mida 4

El cel és blau

El problema és interessant

Avui estic molt blau

Blau és un cel

4 frases × 4 primeres paraules

	El	cel	és	blau	problema	interessant	Avui	estic	molt	Blau	un
V_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
V_2	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
V_3	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
V_4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

$V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4$ → Les paraules

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow P_0 = \{1100, 1001, 1101, 1010\}$$

1) Població inicial → $\underset{12}{1100}, \underset{9}{1001}, \underset{13}{1101}, \underset{10}{1010}$ → $x \in [0, 2\pi]$

2) Evaluació funció fitness

$[a,b] \leftarrow x = a + \dfrac{\text{binari}}{2^m - 1}(b-a) \rightarrow x = 0 + \dfrac{\text{binari}}{2^4-1}(2\pi - 0) \rightarrow$ $V_1 = \frac{8}{5}\pi \quad V_3 = \frac{26}{15}\pi \quad V_2 = \frac{6}{5}\pi \quad V_4 = \frac{4}{3}\pi$ — $f(V_i) = \cos(V_i) + \sin(V_i)$

m: digits binari

$V_1 = -0.642$, $V_2 = -1.309$, $V_3 = -0.074$, $V_4 = -1.366$

Normalitzar → + |min| → + 1.366

$V_1 = 0.724$, $V_2 = 0.057$, $V_3 = 1.292$, $V_4 = 0$

3) Selecció → $\dfrac{f(v_i)}{\sum f(v_i)} \rightarrow \dfrac{f(v_i)}{2.091} \rightarrow$ $V_1 = 0.351 \quad V_3 = 0.618 \quad V_2 = 0.031 \quad V_4 = 0$

$R_1 \rightarrow [0, 0.351]$

$[0.351, 0.382]$

$[0.382, 1] \leftarrow R_2, R_3, R_4$

Roulete → $\{0.2, 0.4, 0.5, 0.9\}$

4) Crossover → P_1 ?

5) Mutació

6) Evaluació fitness → P_2 ?

Problemes → Algoritme genètica

Passos

- Seleccionar població
- Crossover
- Mutacions
- Nova població
- max!

Problema 1

Minimitzar funció $f(x) = x^2$ per $x \in [0, 31]$ utilitzant algoritme genètic. Usem 5 dígits per la població i $\boxed{n = 4}$ ← candidats

Població inicial → 01100, 11001, 00101, 10011

$P(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sum f(x_i)}$

$\text{Expectació} = \frac{f(x_i)}{\text{Avg}(\sum f(x_i))}$

Num	P. inicial	X	f(x)	Prob	% Prob	Expectació	Valor actual	
1	01100	12	144	0.1247	12.47	0.5 → 1 0.4987	1	✓
2	11001	25	625	0.5411	54.47	2.1645	2	✓
3	00101	5	25	0.0216	2.16	0.0866	0	✗
4	10011	19	361	0.3126	31.26	1.2502	1	✓
Sum			1155					
Avg			288,75					
Max			625					

Ignorem el més baix

Crossover

Repetim el més alt → Dels valids d'abans

Major a max anterior ↓ ens quedem amb la següent gen

Num	Pare 1	Pare 2	Vora	Crossover	X	f(x)
1	01100	11001	4	01101	13	169
2	11001	01100	4	11000	24	576
3	11001	10011	2	11011	27	729
4	10011	11001	2	10001	17	289
						1763 440,75 729

Max major

Num	2a gen	Mutació	2a gen mut	X	f(x)
1	01101	10000	11101	29	841
2	11000	00000	11000	24	576
3	11011	00000	11011	27	729
4	10001	00101	10101	21	441
					2587

Problema 2

Maximitzar $f(x) = -x^2 + 2x$ entre $[0, 2]$

$P_{inicial}$: 11010, 00111, 10110, 0010

11010 → 16 → 1.677 $\qquad m$: bits = 5

$\uparrow$

$\text{inf} + \frac{max - min}{max^m - 1} = 0 + \frac{2-0}{2^5 - 1} (26)$

Num	P. inicial	X	f(x)	Prob	Acumulativa	Intervals	Num aleatori
1	11010	1,677	0.541	0.21	0.21	0 → 0.21	0.15
2	00111	0.451	0.699	0.27	0.48	0.22 → 0.48	0.4
3	10110	1,419	0.824	0.32	0.8	0.49 → 0.8	0.7
4	00101	0.322	0.541	0.2	1	0.8 → 1	0.9
Sum							
Avg							
Max							