Optimització de Grafs i Algoritmes de Camí Més Curt

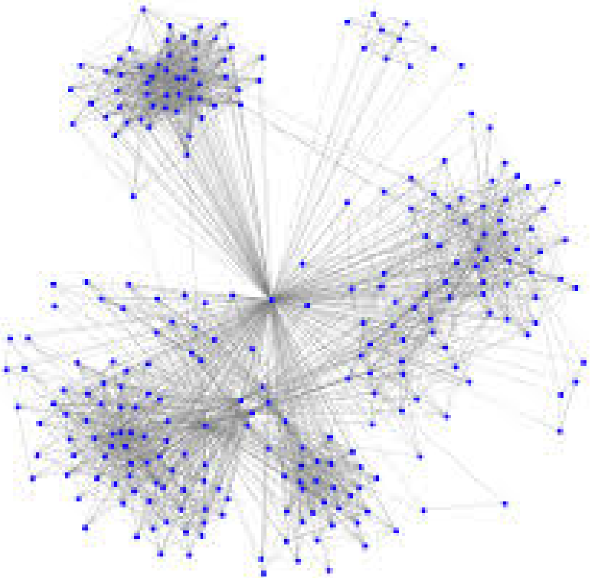
Dra Sundus Zafar

Introducció a l'Optimització de Grafs

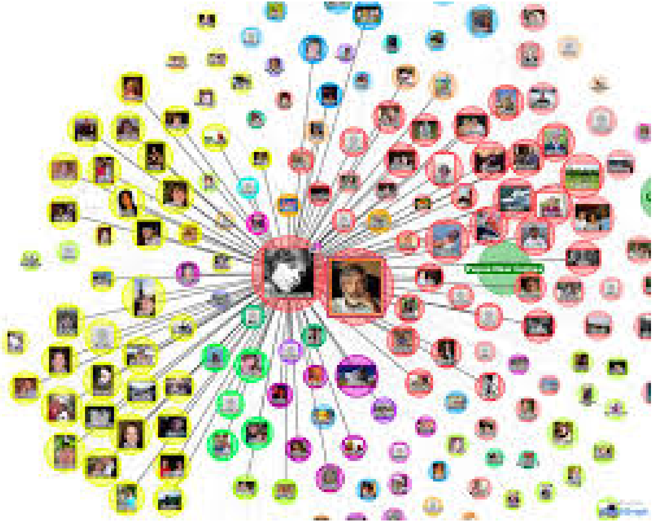
L'optimització de grafs és un camp fonamental en matemàtiques aplicades i informàtica, que es centra a trobar camins, fluxos i configuracions òptimes en estructures de graf.

- Ús en enginyeria de dades, xarxes socials, logística i rutes de xarxes.

Enginyeria de Dades



Xarxes Sociales



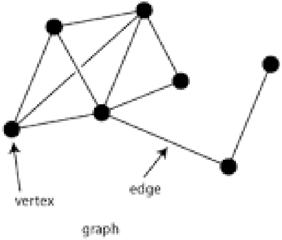
Conceptes Bàsics de Teoria de Grafs

Un graf $G = (V, E)$ consisteix en:

- Un conjunt de nodes o vèrtexs V.
- Un conjunt d'arestes E, on cada aresta (u, v) connecta el node u amb el node v.

En grafs ponderats, cada aresta (u, v) té un pes $w(u, v)$ associat, que representa un cost, distància o temps per recórrer l'aresta.

Teoria de Grafs



Camins en Grafs

Un camí en un graf és una seqüència de nodes $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que cada parella consecutiva (v_i, v_{i+1}) és una aresta en E.

- La longitud del camí és la suma dels pesos de les arestes en el camí.

El Problema del Camí Més Curt

El problema del camí més curt busca trobar el camí amb el pes total mínim entre un node origen s i un node destí t.

- En un graf ponderat amb pesos no negatius, l'Algoritme de Dijkstra és un mètode eficient per trobar els camins més curts.

Formulació Matemàtica

Donat un graf $G = (V, E)$ amb pesos $w(u, v) \geq 0$ per a cada $(u, v) \in E$, el problema del camí més curt es formula com:

$$\text{minimitzar} \quad \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

subjecte a:

- $v_1 = s$: el camí comença a s,
- $v_k = t$: el camí acaba a t,
- $(v_i, v_{i+1}) \in E$ per a cada i.

Algoritme de Dijkstra

L'algoritme de Dijkstra troba el camí més curt en un graf amb pesos no negatius mantenint una cua de prioritat per expandir nodes amb la distància provisional més petita.

1. Inicialitzar $d(s) = 0$ i $d(v) = \infty$ per a $v \neq s$.
2. Repetidament, extreure el node u amb la distància més petita de la cua.
3. Per a cada veí v de u, actualitzar $d(v)$ si es troba un camí més curt a través de u.

Exemple: Graf de Xarxa Social

Considereu una xarxa social on els nodes representen usuaris i les arestes representen connexions entre ells. Els pesos de les arestes podrien representar la força de les connexions basades en la freqüència d'interacció.

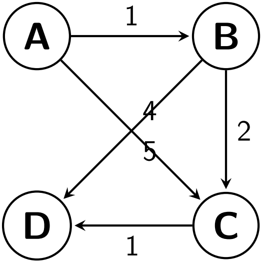


Figure: Exemple de Graf de Xarxa Social

Anàlisi de l'Exemple

En aquest exemple, volem trobar el camí més curt de l'usuari A a l'usuari D.

- $A \to B \to C \to D$ té un pes total de 4 $(1 + 2 + 1)$.
- Altres camins, com $A \to C \to D$, tenen pesos més alts, i per tant no són els més curts.

Aplicant l'algoritme de Dijkstra, trobem que el camí més curt de A a D és $A \to B \to C \to D$ amb una distància total de 4.

Aplicacions en Enginyeria de Dades

Els algoritmes de camí més curt són essencials en enginyeria de dades, amb aplicacions com:

- **Rutes de Xarxa**: Determinar la ruta de transferència de dades més ràpida entre servidors.
- **Sistemes de Recomendació**: Trobar connexions més properes en una xarxa social.
- **Optimització de la Cadena de Subministrament**: Identificar els camins més curts en xarxes de logística.

Conclusió

Comprendre els algoritmes de camí més curt i l'optimització de grafs és essencial per resoldre problemes de connectivitat i optimització complexos en enginyeria de dades. Mitjançant la modelització d'estructures del món real com a grafs, podem aplicar aquests algoritmes a una àmplia gamma d'aplicacions, des de l'anàlisi de xarxes socials fins al transport i la logística.