Espais Vectorials.

EXAMEN FINAL. GRAU ENGINYERIA DE DADES — CURS 2018-2019

1. Espais Vectorials(4 punts).

   (a) Considera l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$. Escrivim $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:

   $$F =< (1,1,1,1), (2,3,4,5), (3,4,5,6), (4,5,6,7) >$$
   $$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+z+t = 0\}$$
   $$H =< (1,-1,1,-1) >$$

      i. Calculeu la forma normal de Gauss-Jordan GJ associada a A i $\overline{P}$ invertible on $\overline{P}A = GJ$. Doneu el rang de A. Escriviu les files de A com a combinació lineal de les files de la matriu GJ.
      ii. Decideix si H és us subespai vectorial de G o no.
      iii. Trobeu una base de G i escriviu les coordenades del vector de G: $(2,-2,2,-2)$ en la base de G.
      iv. Calculeu la dimensió de $F+G$ i $F \cap G$ i doneu una base de $F+G$.

   (b) Considera l'espai vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ dels polinomis de grau ≤ 3 a coefficients a $\mathbb{R}$ i consida l'espai vectorial

   $$\tilde{G} = \{p(x) = a1 + bx + cx^2 + dx^3 | p(1) = 0\}$$

      i. Calculeu una base i la dimensió de $\tilde{G}$.
      ii. Estudieu si $(x-2)$ és de $\tilde{G}$ o no.
      iii. Justifica que $1-x, 1-x^2$ són vectors linealment independent de $\mathbb{R}_3[x]$ que pertanyen a $\tilde{G}$ i amplia'ls a una base de $\tilde{G}$.

2. Diagonalització(3 punts). Considera la matriu $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ amb polinomi característic $p_C(x) = -x^3 + 12x^2 = -x^2(x-12)$.

   (a) Per cada valor propi de C, calculeu els vectors propis de C.
   (b) Justifica que C diagonalitza a $\mathbb{R}$.
   (c) Trobeu P invertible i D diagonal on $A = PDP^{-1}$.
   (d) Pot existir Q invertible on $Q^{-1}CQ$ sigui igual a la matriu $\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

3. Aplicacions Lineals entre espais normats (3 punts).
   Considerem les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per

   $$f(x,y,z) = (x+y-2z, -x-y+2z)$$
   $$g(x,y) = (x+y, x-y, -2x+2y)$$

   (a) Doneu $\overline{A}$ on $f = T_{\overline{A}}$, B on $f = T_B$ i $C \in M_3(\mathbb{R})$ on $g \circ f = T_C$.
   (b) Decidiu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.
   (c) Considera la base de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{C} = ((1,2),(1,3))$. Calculeu la matriu associada a f de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{C}$ i calculeu $f(1,1,1)$ en coordenades en la base $\mathcal{C}$.
   (d) Calculeu un base ortonormal pel $Ker(g \circ f)$.
   (e) Trobeu la projecció ortogonal del vector $(1,1,2)$ en la base ortonormal de $Ker(g \circ f)$.
   (f) Trobeu els valors singulars de $f = T_{\overline{A}}$.
   (g) Trobeu la descomposició SVD per la matriu $\overline{A}$.
   (h) Trobeu una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (v_1, v_2, v_3) on $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ són vectors ortogonals dos a dos.

4. Teoria (1 punt)

   (a) Demostreu que si $u*$ és una solució de minims-quadrats pel sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ llavors $u*$ és una solució del sistema lineal compatible $A^tA\vec{x} = A^t\vec{b}$.
   (b) Definiu que vol dir el concepte de base d'un subespai vectorial.
   (c) Definiu el concepte d'espai de Hilbert.