Espais Vectorials.

Examen Final.

Grau Enginyeria de Dades — Curs 2019-2020

EN TOT L'EXAMEN: u=unitat teu NIU, d=decena teu NIU, c=centena teu NIU.

1. Espais Vectorials(3 punts).

   Considera l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$. Escrivim $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & u \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Considerem els subespais vectorials de $\mathbb{R}^4$:

$$F =< (1,1,1,1), (2,3,4,5), (3,4,5,6), (4,5,6,u) >$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + c * t = 0\}$$
$$H =< (c,-1,1,-1) >$$

   (a) Calculeu la forma normal de Gauss-Jordan GJ associada a A i $\overline{P}$ invertible on $\overline{P}A = GJ$. Doneu el rang de A. Escriviu les files de A com a combinació lineal de les files de la matriu GJ.

   (b) Decideix si H és us subespai vectorial de G o no.

   (c) Trobeu una base de G i escriviu les coordenades del vector de G: $(2c,-2,2,-2)$ en la base de G.

   (d) Calculeu la dimensió de $F + G$ i $F \cap G$ i doneu una base de $F + G$.

2. Aplicacions Lineals entre espais normats (3 punts).

   Considerem les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per

$$f(x,y,z) = (x + y - 2z, -d * x - y + 2z)$$

$$g(x,y) = (x - d * y, x - y, -2x + 2y)$$

   (a) Doneu $\overline{A}$ on $f = T_{\overline{A}}$, B on $f = T_B$ i $C \in M_3(\mathbb{R})$ on $g \circ f = T_C$.

   (b) Considera la base de $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{C} = ((1,2),(1,3))$. Calculeu la matriu associada a f de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{C}$ i calculeu $f(1,1,1)$ en coordenades en la base $\mathcal{C}$.

   (c) Calculeu un base ortonormal per a $Ker(g \circ f)$.

   (d) Trobeu la projecció ortogonal del vector $(1,1,2)$ en la base ortonormal de $Ker(g \circ f)$.

3. (4 punts) Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\tilde{u} \\ -1 & -2 & \tilde{u} \end{pmatrix}$ i $A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2\tilde{u} \\ 4 & 8 & -4\tilde{u} \\ -2\tilde{u} & -4\tilde{u} & 2\tilde{u}^2 \end{pmatrix}$, on $\tilde{u} = \begin{cases} 1 & , si\ d = 1,2,3; \\ -1 & , si\ d = 4,5,6; \\ 2 & , si\ d = 7,8,9,0. \end{cases}$

   (a) Explica què significa que un vector $v \in \mathbb{R}^3$ és un vector propi de $M \in M_3(\mathbb{R})$ de valor propi d i si té alguna relació amb el nucli de l'aplicació lineal T_{M-dI_3} tot justificant-ho.

   (b) Justifica que l'apliació lineal $T_{A^tA} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalitza tot trobant una matriu $P \in M_3(\mathbb{R})$ invertible i $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonal on
$$PDP^{-1} = A^tA.$$
   Podem trobar P ortogonal? en cas afirmatiu, trobeu P ortogonal i calculeu P^{-1}.

   (c) Trobeu els valors singulars per a A i una descomposició en valors singulars (SVD) per a la matriu A, (és a dir una descomposició $A = U\Sigma V^t$) explicitant U, Σ i V.

   (d) Considera el sistema lineal incompatible

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\tilde{u} \\ -1 & -2 & \tilde{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Trobeu una solució de mínims quadrats u^* per a aquest sistema lineal, i el valor de la distància que minimitza u^* (aquesta distància és zero quan el sistema té solució).