

Modelització Matemàtica per Problemes d'Optimització

Dra Sundus Zafar

September 26, 2024

Passos de la Modelització Matemàtica

La modelització matemàtica d'un problema d'optimització segueix una sèrie de passos:

1. **Definir l'objectiu:** Identificar el criteri que s'ha de maximitzar o minimitzar, com el benefici, el cost o el temps.
2. **Identificar les variables de decisió:** Determinar les quantitats que poden ser controlades o ajustades.
3. **Formular la funció objectiu:** Expressar matemàticament l'objectiu en funció de les variables de decisió.

Passos de la Modelització Matemàtica

1. **Establir les restriccions:** Definir les limitacions o condicions que les variables han de complir.
2. **Determinar els límits de les variables:** Identificar qualsevol condició especial, com la no-negativitat o la binarietat de les variables.
3. **Selecció del mètode de solució:** Triar una tècnica per resoldre el model, com programació lineal, programació enter o mètodes heurístics.

Tipus de Problemes d'Optimització

Els problemes d'optimització es poden classificar en diverses categories segons la naturalesa de la funció objectiu, les variables de decisió i les restriccions:

- ▶ **Programació Lineal:** Quan tant la funció objectiu com les restriccions són lineals. Exemple: optimització de producció.
- ▶ **Programació No Lineal:** Quan la funció objectiu o alguna restricció és no lineal. Exemple: optimització de la cartera financera.
- ▶ **Programació Entera:** Quan algunes o totes les variables de decisió són enters. Exemple: assignació de recursos amb quantitats discretes.

Tipus de Problemes d'Optimització

- ▶ **Optimització Quadràtica:** Quan la funció objectiu conté termes quadràtics. Exemple: selecció de característiques en aprenentatge automàtic.
- ▶ **Optimització Combinatòria:** Quan el problema implica seleccionar el millor subconjunt de combinacions possibles. Exemple: programació de torns de treballadors.

Formulació d'un Problema d'Optimització

Un problema d'optimització matemàtica general es pot formular de la següent manera:

$$\text{Minimitzar o Maximitzar } Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

subjecte a:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i \quad (\text{restriccions})$$

$$x_j \geq 0 \quad (\text{no-negativitat})$$

on:

- ▶ Z és la funció objectiu que es vol optimitzar.
- ▶ x_1, x_2, \dots, x_n són les variables de decisió.
- ▶ $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ són les funcions que defineixen les restriccions.
- ▶ b_i són els límits de les restriccions.

Problema de Transport (Enviament de Mercaderies)

Escenari: Una empresa ha d'enviar productes des de dos magatzems a tres botigues. L'objectiu és minimitzar el cost total de transport.

Dades:

- ▶ Magatzem A: 100 unitats disponibles.
- ▶ Magatzem B: 150 unitats disponibles.
- ▶ Demandes: Botiga 1: 80, Botiga 2: 120, Botiga 3: 50.

Taula de Costos de Transport

Costos de Transport (per unitat):

	Botiga 1	Botiga 2	Botiga 3
Magatzem A	4	6	8
Magatzem B	5	3	7

Model Matemàtic per Problema de Transport

Model Matemàtic:

$$\text{Minimitzar } Z = 4x_{A1} + 6x_{A2} + 8x_{A3} + 5x_{B1} + 3x_{B2} + 7x_{B3}$$

Restriccions:

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 100 \quad (\text{capacitat del magatzem A})$$

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 150 \quad (\text{capacitat del magatzem B})$$

$$x_{A1} + x_{B1} \geq 80 \quad (\text{demanda de la botiga 1})$$

$$x_{A2} + x_{B2} \geq 120 \quad (\text{demanda de la botiga 2})$$

$$x_{A3} + x_{B3} \geq 50 \quad (\text{demanda de la botiga 3})$$

$$x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3} \geq 0$$

Assignació de Recursos en la Manufactura

Escenari: Una fàbrica produeix dos productes (P1 i P2).
L'objectiu és maximitzar el benefici utilitzant 100 hores de treball i 180 unitats de matèries primeres.

Dades:

- ▶ P1: Requereix 2 hores i 3 unitats de matèries primeres, benefici = 40 euro.
- ▶ P2: Requereix 1 hora i 2 unitats de matèries primeres, benefici = 30 euro.

Model Matemàtic per Assignació de Recursos

Model Matemàtic:

$$\text{Maximitzar } Z = 40x_1 + 30x_2$$

Restriccions:

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \quad (\text{hores de treball disponibles})$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 180 \quad (\text{unitats de matèries primeres disponibles})$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{no-negativitat})$$

Optimització de Consultes en Bases de Dades (3 Consultes)

Escenari: Optimitzar l'execució de tres consultes SQL per minimitzar el temps de resposta en funció de la selecció d'índexs i mètodes d'accés.

Dades:

- ▶ Consulta 1: Accés a una taula amb 1 milió de registres.
- ▶ Consulta 2: Agregació de dades amb múltiples condicions.
- ▶ Consulta 3: Join entre dues taules grans.
- ▶ Cada consulta pot utilitzar diferents índexs o mètodes d'accés.

Taula de Temps de Resposta per a Cada Consulta

Temps de Resposta (en segons) segons mètode d'accés:

	Sense Índex	Índex Simple	Índex Compost
Consulta 1	10	4	2
Consulta 2	15	7	5
Consulta 3	20	8	6

Model Matemàtic per Optimització de 3 Consultes

Model Matemàtic:

Minimitzar $Z = 10x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 15x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} + 20x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33}$

Restriccions:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \quad (\text{mètode d'accés per a la Consulta 1})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \quad (\text{mètode d'accés per a la Consulta 2})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \quad (\text{mètode d'accés per a la Consulta 3})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (\text{variables binàries})$$

Optimització Global del Temps de Resposta

L'objectiu és seleccionar el mètode d'accés òptim per a cadascuna de les tres consultes amb la finalitat de minimitzar el temps total de resposta:

$$\text{Minimitzar } Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 t_{ij} x_{ij}$$

on:

- ▶ t_{ij} és el temps de resposta per a la consulta i utilitzant el mètode j .
- ▶ x_{ij} indica si el mètode j és seleccionat per a la consulta i (1 si és seleccionat, 0 en cas contrari).

Solució del Model d'Optimització

La solució òptima selecciona un mètode d'accés per a cada consulta que minimitzi el temps total de resposta:

Resultat òptim (exemple):

- ▶ Consulta 1: Índex compost (temps = 2 segons).
- ▶ Consulta 2: Índex simple (temps = 7 segons).
- ▶ Consulta 3: Índex compost (temps = 6 segons).

Temps total òptim: $2 + 7 + 6 = 15$ segons.

Optimització de Consultes en Bases de Dades

Escenari: Optimitzar l'execució d'una consulta SQL per minimitzar el temps de resposta en funció de la selecció d'índexs i mètodes d'accés.

Dades:

- ▶ Taula amb 1 milió de registres.
- ▶ Temps de resposta de la consulta depenent de l'índex utilitzat:
 - ▶ Sense índex: 10 segons.
 - ▶ Índex simple: 4 segons.
 - ▶ Índex compost: 2 segons.

Model Matemàtic per Optimització de Consultes

Model Matemàtic:

$$\text{Minimitzar } Z = 10x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

Restriccions:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (\text{seleccionar un únic mètode})$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\} \quad (\text{variables binàries})$$

Selecció de Característiques en Aprenentatge Automàtic

Escenari: Seleccionar un subconjunt de característiques per entrenar un model de classificació amb 10 característiques candidates. L'objectiu és minimitzar el nombre de característiques seleccionades mantenint una precisió mínima del 90%.

Dades:

- ▶ 10 característiques candidates: x_1, x_2, \dots, x_{10} .
- ▶ Precisió mínima desitjada: 90%.

Model Matemàtic per Selecció de Característiques

Model Matemàtic:

$$\text{Minimitzar } Z = \sum_{i=1}^{10} x_i$$

Restriccions:

Precisió $\geq 90\%$

$x_i \in \{0, 1\}$ (si la característica i està seleccionada)

Optimització de Cartera Financera

Escenari: Una cartera amb tres actius d'inversió amb rendibilitats esperades de 5%, 8%, i 12%. L'objectiu és maximitzar la rendibilitat total mantenint el risc per sota d'un cert nivell.

Dades:

- ▶ Riscos dels actius: 3%, 6%, 9%.
- ▶ Rendibilitats esperades: 5%, 8%, 12%.
- ▶ Límit de risc total: 7%.

Model Matemàtic per Optimització de Cartera

Model Matemàtic:

$$\text{Maximitzar } Z = 0.05x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3$$

Restriccions:

$$0.03x_1 + 0.06x_2 + 0.09x_3 \leq 0.07 \quad (\text{límits de risc})$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (\text{total inversió})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (\text{no-negativitat})$$

Programació de Torn de Treballadors

Escenari: Assignar treballadors a torns per cobrir 8 hores diàries amb un mínim de 4 treballadors per hora.

Model Matemàtic:

$$\text{Minimitzar } Z = \sum_{i=1}^8 c_i x_i$$

Restriccions de Torn de Treballadors

Restriccions:

$$\sum_{i=1}^8 x_i \geq 4 \quad \text{per a cada hora}$$

$x_i \in \{0, 1\}$ (si un treballador cobreix la franja)