

# Problema esterno di Dirichlet

## Metodo degli Elementi di Contorno

Alice Daldossi, # Matricola 510972  
Università di Pavia

*Relazione del corso*  
*Metodi Numerici Avanzati per le Equazioni alle Derivate Parziali*

### Introduzione

Tanto in campo medico quanto in campo industriale risulta importante saper creare modelli della propagazione delle onde acustiche, ad esempio per terapie non invasive oppure comunicazione subacquea, imaging a ultrasuoni oppure contenimento acustico. Sia la pressione acustica  $p_{\approx}$ , la densità  $\rho_{\approx}$ , la velocità potenziale  $\phi$  che le componenti della velocità  $v_{\approx,j}$  soddisfano la stessa equazione delle onde, che allora si può generalizzare per un qualsiasi campo scalare  $U$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0.$$

In questa relazione sono interessata a cercare le soluzioni armoniche in tempo, quindi quelle del tipo

$$U(\mathbf{x}, t) = \Re\{u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\},$$

con  $\omega > 0$  frequenza temporale e  $u$  campo a valori complessi dipendente dalla posizione in spazio  $\mathbf{x}$  ma non dalla variabile temporale  $t$ . Per la risoluzione di questo problema ci si riconduce all'equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Infatti vale che, se  $U(\mathbf{x}, t)$  è una soluzione armonica in tempo dell'equazione delle onde, allora  $u(\mathbf{x})$  è una soluzione dell'equazione di Helmholtz con numero d'onda  $k := \frac{\omega}{c} > 0$ . Questo significa che l'equazione di Helmholtz descrive tutte le soluzioni armoniche in tempo dell'equazione delle onde.

L'equazione di Helmholtz viene risolta introducendo un'equazione integrale al contorno, ovvero *boundary integral equation* (BIE), a cui viene applicato il Metodo degli Elementi di Contorno, ovvero *Boundary Element Method* (BEM). La peculiarità di questo metodo numerico sta nel fatto che richiede la discretizzazione del dominio della soluzione solo ai bordi, ciò riduce le dimensioni del problema e semplifica i dati richiesti in ingresso. In particolare mi concentrerò sulla seguente classe di problemi al valore al bordo.

**Definizione 1. Problema di Dirichlet esterno - EDP.** Sia  $\Omega_-$  un dominio aperto, Lipschitz e limitato,  $\Gamma$  il suo bordo e  $\Omega_+$  il suo complementare aperto. Siano poi  $k > 0$  un parametro e  $g_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Diciamo che  $u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+})$  soddisfa il problema Dirichlet-Helmholtz esterno se

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \Omega_+, \\ \gamma^+ u = g_D & \text{su } \Gamma \\ u \text{ è radiativa.} \end{cases} \quad (1)$$

Nelle prima sezione è spiegata la mia implementazione in Matlab del Metodo degli Elementi di Contorno nel caso di dominio liscio (triangolare, quadrato, a "U" rovesciata, ad angolo retto, a doppio triangolo) e funzioni base dello spazio  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  prese lineari a tratti. Inizio trattando alcuni possibili metodi di discretizzazione del bordo: uniforme e adattivo. Successivamente individuo una soluzione approssimata dell'equazione integrale al contorno considerata, usando il metodo di Galerkin e quello di collocazione, e poi entrambi i metodi vengono adattati nel caso in cui si vuole operare una *singularity extraction*. Ho concluso con uno studio degli errori in base alla scelta del metodo di discretizzazione oppure alla presenza o meno della *singularity extraction*.

## Indice

<b>1 BEM per BIE</b>	<b>2</b>
1.1 Definizione di $V_N$ e partizionamento di $\Gamma$	3
1.2 Approssimazione della soluzione $\psi$ di (BIE)	4
1.2.1 Collocazione-BEM	5
1.2.2 Galerkin-BEM	6
1.2.3 Singularity extraction	7
1.3 Risoluzione della formula di rappresentazione	8
1.4 Convergenza	9

## 1 BEM per BIE

Per risolvere il problema ai valori al bordo (BVP) nel caso del problema esterno di Dirichlet (EDP), lo riformulerò con un'equazione al bordo integrale (BIE) che mi permetterà di trovare un'approssimazione della soluzione tramite il metodo numerico degli elementi di contorno (BEM).

Siano  $u^{\text{Inc}}$  l'onda incidente,  $u^{\text{Scat}}$  l'onda riflessa e  $u^{\text{Tot}} = u^{\text{Inc}} + u^{\text{Scat}}$  l'onda totale. Siano  $\Omega_- \subset \mathbb{R}^2$  un dominio Lipschitz limitato,  $\Omega_+ := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_-}$  e  $\Gamma := \partial\Omega_-$  (su questo bordo considererò solo condizioni sound-soft). Nel mio problema l'onda incidente  $u^{\text{Inc}}$  su  $\Omega_-$  rappresenta il dato, mentre l'onda riflessa  $u^{\text{Scat}}$  è l'incognita che deve soddisfare l'equazione di Helmholtz sul dominio di propagazione  $\Omega_+$  e le condizioni sound-soft  $\gamma(u^{\text{Tot}}) = 0$  su  $\Gamma$ . Inoltre, chiedo che  $u^{\text{Scat}}$  sia radiativa, cioè che soddisfi la condizione radiativa di Sommerfeld:

$$|\partial_r u^{\text{Scat}} - ik u^{\text{Scat}}| = o(r^{-\frac{1}{2}}) \quad r \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Allora il problema si può riscrivere:

$$\text{trovare } u^{\text{Scat}} \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+}) \text{ tale che} \begin{cases} \Delta u^{\text{Scat}} + k^2 u^{\text{Scat}} = 0 & \text{in } \Omega_+, \\ \gamma^+(u^{\text{Scat}} + u^{\text{Inc}}) = 0 & \text{su } \Gamma, \\ u^{\text{Scat}} \text{ è radiativa.} \end{cases} \quad (3)$$

Nel caso 2-dimensionale, per un valore  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  fissato, una soluzione radiativa fondamentale dell'equazione di Helmholtz è:

$$\Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

dove  $H_0^{(1)}$  è la funzione di Hankel di ordine 0. Dal momento che ogni combinazione lineare delle componenti di  $\Phi_k$ ,  $\Phi_k(\cdot, \mathbf{y}_j)$ , soddisfa ancora l'equazione di Helmholtz in  $\Omega_+$  ed è radiativa, allora posso anche considerare la seguente combinazione lineare continua delle soluzioni fondamentali

$$(\mathcal{S}\psi)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \Omega_+, \quad (5)$$

che chiamerò *single-leayer potential*. Inoltre definisco il *single-layer operator*

$$(S\psi)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \Psi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (6)$$

Osservo poi che vale la relazione

$$S\psi = \gamma^+(\mathcal{S}\psi). \quad (7)$$

L'idea del metodo degli elementi di contorno (BEM) consiste nello svolgimento dei seguenti passaggi:

1. scegliere uno spazio  $V_N \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$   $N$ -dimensionale, le sue funzioni base e partizionare la curva  $\Gamma$  in una mesh  $\mathcal{T}_N(\Gamma)$  di  $N$  segmenti  $K_1, \dots, K_N \subset \Gamma$ ;
2. trovare  $\psi_N \in V_N$  definita su  $\Gamma$  tale che approssima la soluzione dell'equazione integrale al contorno (BIE)

$$\mathcal{S}\psi = g_D \quad \text{su } \Gamma, \quad (8)$$

dove  $g_D$  è il dato di Dirichlet per il (EDP) e  $\psi$  è detta densità;

3. ricavare  $u$  tramite la formula di rappresentazione

$$u = \mathcal{S}\psi \quad \text{in } \Omega_+. \quad (9)$$

Si può affermare che la  $u$  così identificata risulta essere una soluzione radiativa di Helmholtz in  $\Omega_+$  con  $\gamma^+ u = \gamma^+ \mathcal{S}\psi = S\psi = g_D$ , quindi  $u$  è la soluzione del problema di Dirichlet esterno (EDP) che si cercava.

### 1.1 Definizione di $V_N$ e partizionamento di $\Gamma$

Scelgo  $V_N$  come lo spazio delle funzioni costanti a tratti su  $\mathcal{T}_N(\Gamma)$ . Prendo come base di  $V_N$   $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ , dove, per ogni  $j$ , la funzione di base  $\varphi_j$  è definita nel seguente modo

$$\varphi_j(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in K_j \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \Gamma \setminus K_j \end{cases}.$$

Per partizionare  $\Gamma$  implemento i seguenti due metodi.

1. **Uniforme.** Nella funzione funzione `BE_u.m` (*BoundaryElements\_uniform*) sono dati in input: `ver` vettore in cui ogni riga rappresenta un vertice (come valore complesso) del poligono che si sta studiando (in senso antiorario), `h` ampiezza massima di ogni elemento della discretizzazione e `i_pol` matrice a due colonne in cui la riga  $j$ -esima indica la posizione (indice) nel vettore `ver` del vertice di inizio e quella del vertice di fine del poligono corrispondente alla riga. Ci sono due output: `PT` è il vettore contenente tutte le coordinate dei punti della discretizzazione, `i_POL` invece è una matrice a due colonne in cui ogni riga indica il vertice di inizio e quello di fine di ogni elemento creato. L'algoritmo consiste nel trattare un lato  $l_i$  del poligono alla volta e decidere il suo numero di elementi  $n_i$  come l'approssimazione per eccesso di  $\text{length}(l_i)/h$ . Si veda `BEu.m`.
2. **Adattivo.** La funzione `BE_a` (*BoundaryElements\_adaptive*) ha output è analogo a quello del metodo precedente; l'input richiede ancora `ver` e `i_pol` che mantengono il ruolo di prima, `h` è l'ampiezza che determinerà il numero di elementi  $n$  per lato e `z` è il parametro che rappresenta la velocità con cui i punti da individuare verranno addensati verso un'estremità (più  $z$  è grande, più la discretizzazione concentrerà gli elementi verso zero). L'idea dell'algoritmo è la seguente: si considera un lato  $l_i$  alla volta, si prende  $n_i := \text{length}(l_i)/h$  e sull'intervallo  $[0, 1]$  si scelgono  $n_i$  punti con la formula  $\{\frac{i}{n_i+1}\}_{i=1}^{n_i}$ ; questi poi si trasferiscono sugli intervalli che definiscono le due metà del lato  $l_i$ . Si vedano `BEa.m` e `adaptive.m`.

Osservo che, nel caso in cui  $\Gamma$  non sia poligonale ma abbia una forma circolare, allora l'informazione geometrica necessaria per descriverlo deve comprendere il centro e il raggio del cerchio (o eventualmente dei cerchi), non ci saranno più vertici. Per questo motivo è stata creata la funzione `BE_u_c` (*BoundaryElements\_uniform\_circular*) in cui il vettore `ver` in input contiene appunto le informazioni del centro e del raggio che descrive  $\Gamma$ , mentre `h` e `i_pol` mantengono i loro significati di prima. Si veda [BEuc.m](#).

Di seguito riporto 5 diversi esempi di dominio con la loro rispettiva discretizzazione.

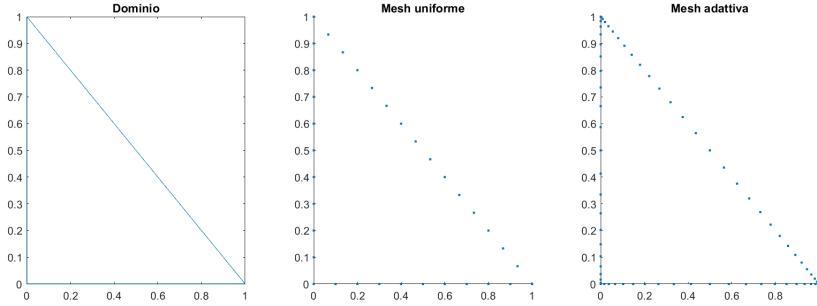


Figura 1: Confronto tra i metodi di discretizzazione per  $h = 0.1$  e  $z = 2$  sul triangolo di vertici  $(0;0)$ ,  $(1;0)$  e  $(0;1)$ .

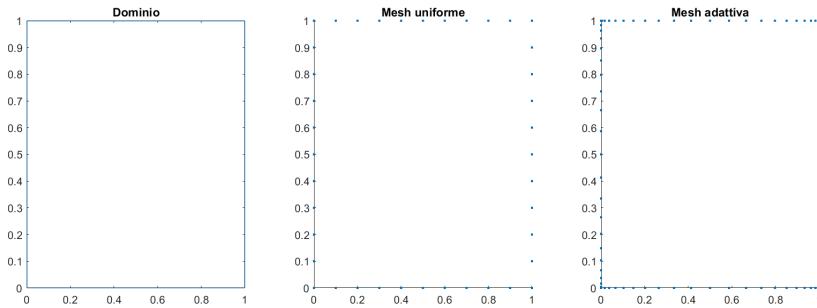


Figura 2: Confronto tra i metodi di discretizzazione per  $h = 0.1$  e  $z = 2$  sul quadrato di centro  $(0.5;0.5)$  e lato 1.

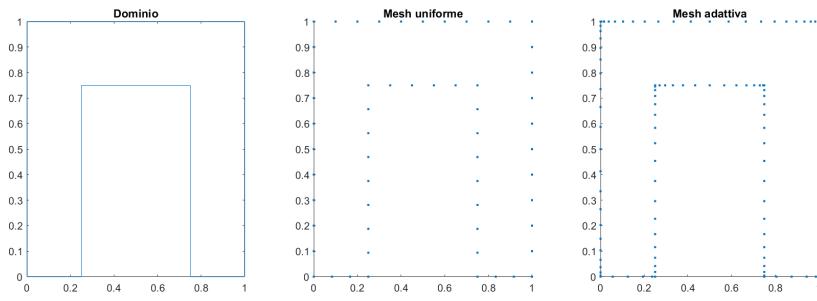


Figura 3: Confronto tra i metodi di discretizzazione per  $h = 0.1$  e  $z = 2$  sulla "U rovesciata".

## 1.2 Approssimazione della soluzione $\psi$ di (BIE)

Per risolvere (8), quindi trovare  $\psi_N \in V_N$ , si possono implementare due diversi metodi:

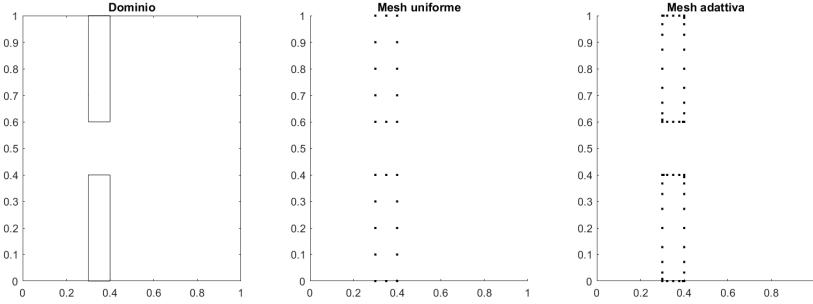


Figura 4: Confronto tra i metodi di discretizzazione per  $h = 0.1$  e  $z = 2$  sulla fenditura ampia 0.2 e muro spesso 0.1.

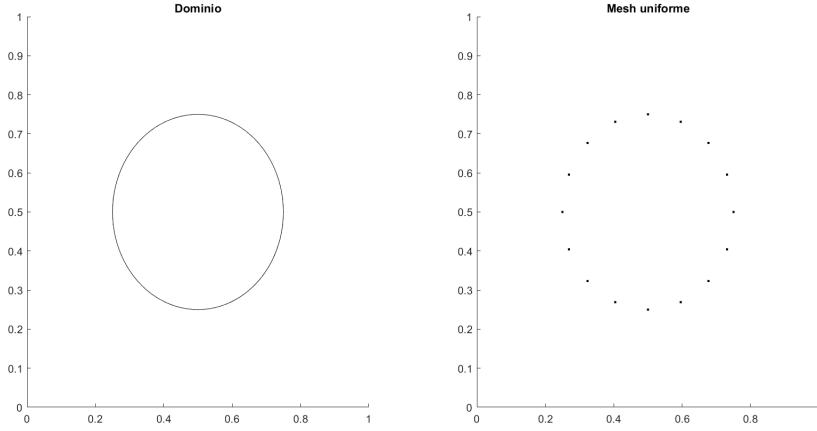


Figura 5: Confronto tra i metodi di discretizzazione per  $h = 0.1$  sul cerchio di centro  $(0.5; 0.5)$  e raggio 0.25.

- **Collocazione-BEM:** si scelgono  $N$  punti  $x_1, \dots, x_N \in \Gamma$  e si cerca

$$\psi_N \in V_N \text{ tale che } (S\psi_N)(\mathbf{x}_j) = g_D(\mathbf{x}_j), \quad j = 1, \dots, N; \quad (10)$$

- **Galerkin-BEM:** si cerca

$\psi_N \in V_N$  tale che

$$\mathcal{A}(\psi_N, \xi_N) = \int_{\Gamma} (S\psi_N) \overline{\xi_N} ds = \int_{\Gamma} g_D \overline{\xi_N} ds = \mathcal{F}(\xi_N), \quad \forall \xi_N \in V_N. \quad (11)$$

Osservo che espandendo la soluzione approssimata  $\psi_N$  in coordinate

$$\psi_N = \sum_{j=1}^N \Psi_j \varphi_j,$$

dove  $\Psi_j = (\Psi)_j$  è il  $j$ -esimo elemento del vettore  $\Psi \in \mathbb{C}^n$ ; cioè,

$$\psi_N(\mathbf{x}) = \Psi_j \text{ se } \mathbf{x} \in K_j.$$

### 1.2.1 Collocazione-BEM

Presi lo spazio  $N$ -dimensionale  $V_N$  e la sua base  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  definiti come sopra, il metodo di collocazione prevede la definizione di  $N$  nodi  $\mathbf{x}_j$  tali che  $\mathbf{x}_j \in K_j \forall j = 1, \dots, N$  in

cui collochiamo l'equazione differenziale. In questo modo si risolve il sistema lineare  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\text{col}} \Psi = \mathbf{F}^{\text{col}}$ , dove

$$A_{j,m}^{\text{col}} := (S\varphi_m)(\mathbf{x}_j) = \int_{\Gamma} \Phi_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \varphi_m(\mathbf{y}) d\mathbf{s}(\mathbf{y}) = \int_{K_m} \Phi_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\mathbf{s}(\mathbf{y}), \quad (12)$$

$$F_j^{\text{col}} := g_D(\mathbf{x}_j). \quad (13)$$

Ora si supponga che  $\Omega_-$  sia un poligono convesso e che ogni elemento della mesh sia un segmento dritto. Per  $j = 1, \dots, N$ , l'elemento  $K_j$  ha estremità  $\mathbf{p}_j$  e  $\mathbf{p}_{j+1}$ , lunghezza  $h_j := |\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j|$  ed è parametrizzato da  $\mathbf{X}_j : (0, h_j) \rightarrow K_j$ ,  $\mathbf{X}_j(s) := \mathbf{p}_j + s\boldsymbol{\tau}_j$ , dove  $\boldsymbol{\tau}_j := \frac{\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j}{|\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j|}$  è il vettore tangente unitario a  $K_j$ . Le equazioni (12) e (13) che definiscono il sistema sono svolte con formule di quadratura:

$$A_{j,m}^{\text{col}} = \frac{i}{4} \int_0^{h_m} H_0^{(1)}(k|\mathbf{p}_m + s\boldsymbol{\tau}_m - \mathbf{x}_j|) ds(\mathbf{y}) = \frac{i}{4} h_m \int_0^1 H_0^{(1)}(k|\mathbf{p}_m + h_m \boldsymbol{\tau}_m t - \mathbf{x}_j|) dt, \quad (14)$$

$$F_j^{\text{col}} = g_D(\mathbf{x}_j). \quad (15)$$

Dal momento che l'integrale che si ottiene per  $m = j$  è singolare, allora:

$$A_{j,j}^{\text{col}} = \int_{K_j} \Phi_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) d\mathbf{s}(\mathbf{y}) = \frac{i}{2} \int_0^{\frac{h_j}{2}} H_0^{(1)}(ks) ds = \frac{ih_j}{4} \int_0^1 H_0^{(1)}\left(k \frac{h_j}{2} t\right) dt. \quad (16)$$

Si veda il codice [BEMcol.m](#). Qui ho preso in input: **PT** è il vettore in cui ogni entrata è un valore complesso che indica le coordinate di un punto della mesh, **POL** è una matrice a due colonne tale che ogni riga indica gli indici sul vettore **PT** del vertice di inizio e di quello di fine del poligono corrispondente a quella riga, **k** è il parametro dell'equazione di Helmholtz, **g\_D** è la funzione dato sul bordo  $\Gamma$  e prende in input un valore complesso (in questa relazione useremo sempre le onde piane, ma, con piccoli adattamenti ai codici, si potrebbe sostituire con una funzione di Herglotz ad esempio), **x\_val** è il dominio riportato in numeri complessi sui cui si valuta l'approssimazione dell'onda scatterata (si veda §1.3), **flag** è una stringa che indica se svolgere ('se') o no ('no') la *singularity extraction* (si veda §1.2.3). L'output: **u\_scat** è l'approssimazione dell'onda scatterata calcolata tramite il metodo di collocazione.

### 1.2.2 Galerkin-BEM

Il metodo di Galerkin si presenta come la “restrizione” del problema variazionale

$$\mathcal{A}(\psi, \xi) := \langle S\psi, \xi \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle g_D, \xi \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} =: \mathcal{F}(\xi) \quad \forall \xi \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (17)$$

a un sottospazio finito dimensionale  $V_N$  con base  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ , dove  $V_N$  e  $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$  sono presi come sopra. Quindi, l'equazione (11) che chiedo per ogni elemento di  $V_N$  si riduce a N equazioni lineari che creano il sistema lineare  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\text{Gal}} \Psi = \mathbf{F}^{\text{Gal}}$  in cui

$$A_{j,m}^{\text{Gal}} := \mathcal{A}(\varphi_m, \varphi_j) = \langle S\varphi_m, \varphi_j \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi_m(\mathbf{y}) \overline{\varphi_j}(\mathbf{x}) d\mathbf{s}(\mathbf{x}), \quad (18)$$

$$F_j^{\text{Gal}} := \mathcal{F}(\varphi_j) = \langle g_D, \varphi_j \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} g_D(\mathbf{x}) \overline{\varphi_j}(\mathbf{x}) d\mathbf{s}(\mathbf{x}). \quad (19)$$

Similmente a quanto svolto per il metodo di collocazione si ricavano le formule

$$F_j^{\text{Gal}} = \int_{K_j} g_D(x) ds(x) = h_j \int_0^1 g_D(\mathbf{p}_j + h_j \boldsymbol{\tau}_j t) dt; \quad (20)$$

$$A_{j,m}^{\text{Gal}} = \int_{K_j} \int_{K_m} \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(x) ds(y) = \frac{i}{4} h_j h_m \int_0^1 \int_0^1 H_0^{(1)}(k|\mathbf{p}_j + h_j \boldsymbol{\tau}_m \eta|) d\xi d\eta. \quad (21)$$

In questo caso ci sono più situazioni che portano a singolarità: oltre che lungo la diagonale principale  $j = m$ , anche lungo quella secondaria. Infatti i problemi sono generati anche dal fatto che due elementi possono condividere un estremo. Quindi gli integrali diventano:

$$A_{j,j}^{\text{Gal}} = i \int_0^{\frac{h_j}{\sqrt{2}}} \left( \frac{h_j}{\sqrt{2}} - \xi \right) H_0^{(1)}(\sqrt{2}k\xi) d\xi = i \left( \frac{h_j}{\sqrt{2}} \right)^2 \int_0^1 (1-\eta) H_0^{(1)}(k \frac{h_j}{\sqrt{2}} \eta) d\eta \\ \text{con } \xi = \frac{s-t}{\sqrt{2}} \text{ e } \eta = \frac{s+t}{\sqrt{2}}, \quad (22)$$

$$A_{j,j+1}^{\text{Gal}} = \int_0^{h_j} \left( \int_0^{h_{j+1}} \frac{1}{4} H_0^{(1)}(k|h_j - s + t|) dt \right) ds, \quad (23)$$

da risolvere ancora una volta con la regola di Gauss.

Si veda il codice **BEMgal.m**. In questo caso i valori richiesti in input sono gli stessi della funzione **BEM\_gal.m**. L'output **u\_scat** è l'approssimazione dell'onda scatterata calcolata tramite il metodo di Galerkin.

### 1.2.3 Singularity extraction

Un metodo alternativo per risolvere il problema della singolarità negli integrali è la tecnica chiamata *singularity extraction* che sfrutta la seguente formula asintotica per  $z \searrow 0$

$$H_0^{(1)}(z) = i \frac{2}{\pi} \ln z + 1 + i \frac{2}{\pi} (\gamma - 2) + O(z^2), \quad (24)$$

con  $\gamma \approx 0.57721$  costante di Eulero. Infatti, dato che per gli elementi sulla diagonale si ha  $|x - y| \rightarrow 0$ , allora lì si può usare che

$$\Phi_k(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2\pi} + O(|x - y|^2 \ln |x - y|). \quad (25)$$

Quindi, le formule per ottenere  $A_{j,j}^{\text{Col}}$  e  $A_{j,j}^{\text{Gal}}$  si possono scrivere anche sfruttando la *singularity extraction*, ottenendo:

$$A_{j,j}^{\text{Col}} = \int_{K_j} \phi_k(x_j, y) ds(y) = 2 \int_0^{\frac{h_j}{2}} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(ks) ds = \\ \approx 2 \int_0^{\frac{h_j}{2}} \left( -\frac{1}{2\pi} \ln s + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2\pi} \right) ds = \\ = 2 \left[ \left( \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2\pi} \right) \frac{h_j}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{h_j}{2}} \ln s ds \right] = \\ = 2 \frac{h_j}{2} \left( \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{h_j}{2} + \frac{1}{2\pi} \right) = \\ = \frac{h_j}{2\pi} \left( \frac{\pi i}{2} - \ln \frac{k}{2} - \gamma - \ln \frac{h_j}{2} + 1 \right);$$

$$\begin{aligned}
A_{j,j}^{\text{Gal}} &= i \int_0^{\frac{h_j}{\sqrt{2}}} \left( \frac{h_j}{\sqrt{2}} - \xi \right) H_0^{(1)}(\sqrt{2}k\xi) d\xi = \\
&\approx 4 \int_0^{\frac{h_j}{\sqrt{2}}} \left( \frac{h_j}{\sqrt{2}} - \xi \right) \left( -\frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{2}\xi) + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2\pi} \right) d\xi = \\
&= 4 \left( \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2\pi} \right) \int_0^{\frac{h_j}{\sqrt{2}}} \left( \frac{h_j}{\sqrt{2}} - \xi \right) d\xi - \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{h_j}{\sqrt{2}}} \left( \frac{h_j}{\sqrt{2}} - \xi \right) \ln(\sqrt{2}\xi) d\xi = \\
&= \frac{h_j^2}{4} 4 \left( \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{k}{2} \right) - \frac{\gamma}{2\pi} \right) - \frac{4}{2\pi} \frac{h_j}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{h_j}{\sqrt{2}}} \ln(\sqrt{2}\xi) d\xi + \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{h_j}{\sqrt{2}}} \xi \ln(\sqrt{2}\xi) d\xi = \\
&= h_j^2 \left[ \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{\gamma}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left( 2 \ln \frac{h_j}{\sqrt{2}} - 2 + \ln 2 \right) + \frac{1}{4\pi} \left( 2 \ln \frac{h_j}{\sqrt{2}} - 1 + \ln 2 \right) \right] = \\
&= \frac{h_j^2}{2\pi} \left( \frac{i\pi}{2} - \ln \frac{k}{2} - \gamma - 2 \ln \frac{h_j}{\sqrt{2}} + 2 - \ln 2 + \ln \frac{h_j}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \\
&= \frac{h_j^2}{2\pi} \left( \frac{i\pi}{2} - \ln \frac{k}{2} - \gamma - \ln \frac{h_j}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3}{2} \right) = \\
&= \frac{h_j^2}{2\pi} \left( \frac{i\pi}{2} - \ln \frac{k}{2} - \gamma - \ln h_j + \frac{3}{2} \right).
\end{aligned}$$

Ho usato la regola generale  $\int_0^a \ln x = a(\ln a - 1)$  per  $A_{j,j}^{\text{Col}}$  e le due regole  $\int_0^a \ln(\sqrt{2}\xi) d\xi = \frac{a}{2}(2 \ln a - 2 + \ln 2)$  e  $\int_0^a \xi \ln(\sqrt{2}\xi) d\xi = \frac{a^2}{4}(2 \ln a - 1 + \ln 2)$  per  $A_{j,j}^{\text{Gal}}$ .

Si vedano ancora i codici `BEM_gal.m` e `BEM_col.m`, guardando il caso di `flag = 'se'`.

### 1.3 Risoluzione della formula di rappresentazione

Dopo aver ottenuto il valore di  $\Psi$  si ricava l'approssimazione della soluzione  $u$

$$u_N(\mathbf{x}) := (\mathcal{S}\psi_N)(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_N(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N \Psi_j \int_{K_j} \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_+. \quad (26)$$

Tramite le formule di quadratura si giunge all'espressione seguente

$$\begin{aligned}
u^{\text{Scat}}(x) &= (\mathcal{S}\psi)(x) = \left( \mathcal{S} \sum_{j=1}^n \psi_j \varphi_j \right) (x) = \int_{\Gamma} \left( \sum_{j=1}^n \psi_j \varphi_j(y) \right) \phi_k(x, y) ds(y) = \\
&= \sum_{j=1}^n \psi_j \int_{K_j} \phi_k(x, y) ds(y) = \\
&= \frac{i}{4} \sum_{j=1}^n \psi_j \int_0^{h_j} H_0^{(1)}(k|p_j + h_j \tau_j t - x|) dt = \\
&= \frac{i}{4} \sum_{j=1}^n \psi_j h_j \int_0^1 H_0^{(1)}(k|p_j + h_j \tau_j t - x|) dt = \\
&= \frac{i}{4} \int_0^1 \sum_{j=1}^n \psi_j h_j H_0^{(1)}(k|p_j + h_j \tau_j t - x|) dt.
\end{aligned}$$

Si veda il codice `ScatteredWave.m`. L'input: `PT` è il vettore in cui ogni entrata è un valore complesso che indica le coordinate di un punto della mesh, `POL` è una matrice a due colonne tale che ogni riga indica gli indici sul vettore `PT` del vertice di inizio e di quello di fine del poligono corrispondente a quella riga, `x_val` è il dominio riportato in numeri complessi sui cui si valuta l'approssimazione dell'onda scatterata, `psi` è il vettore dei coefficienti che rappresenta la densità, `k` è il coefficiente dell'equazione di Helmholtz. L'output: `u_scat` è l'approssimazione dell'onda scatterata.

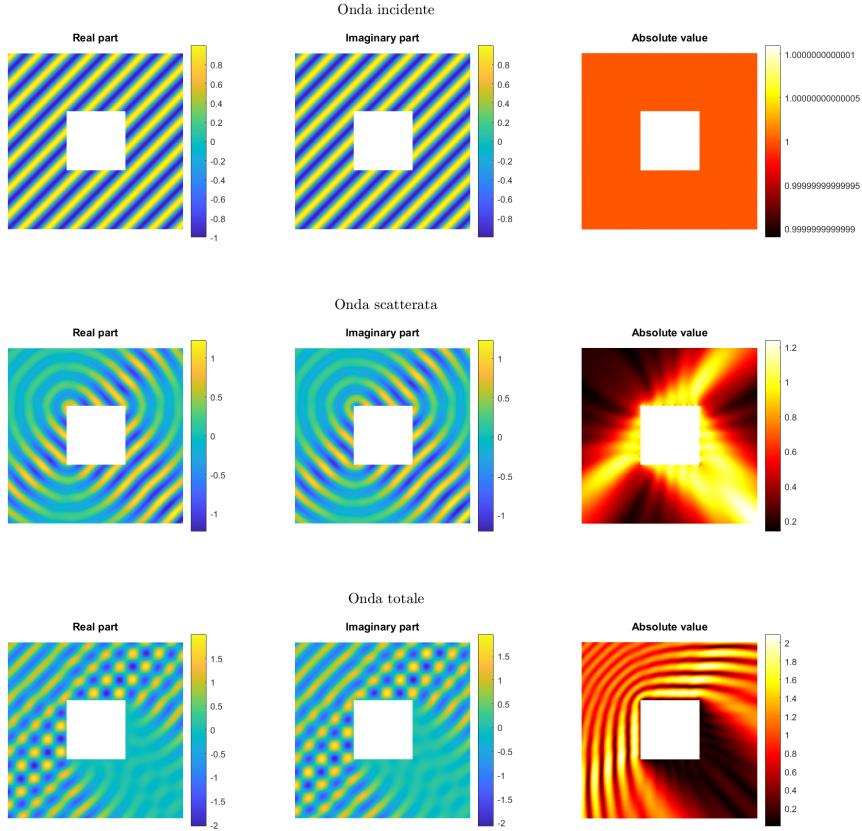


Figura 6: [script: [solution.m](#).] Plot su  $[-1.5, 1.5]^2$  di un’onda piana con direzione  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$  e parametro  $k = 20$  su una mesh di 150 punti con un vincolo quadrato. Ho usato il metodo di collocazione senza *singularity extraction* con discretizzazione uniforme e prendendo l’ampiezza  $h = 0.1$ .

## 1.4 Convergenza

La relazione si conclude con lo studio della convergenza. Al variare dell’ampiezza della mesh  $h = 2^{-i}$  con  $i = 4, \dots, 11$  ho stimato l’errore in norma  $L^2$  prendendo come soluzione di riferimento dell’onda totale quella descritta da `MPSpackBenchmarkSquareScatt.m` e ho considerato solo la parte fuori dal cerchio unitario. Lo studio è stato svolto sia utilizzando collocazione che Galerkin, confrontando la mesh adattiva con quella uniforme, con e senza *singularity extraction*.

Il codice `Error.m` prende in input: `flag1` è una stringa che indica se approssimare l’onda scatterata con il metodo di collocazione ('`col`') oppure con Galerkin ('`gal`'), `flag2` è un’altra stringa che dice se usare la *singularity extraction* ('`se`') oppure no ('`no`'), `PT` è il vettore in cui ogni entrata è un valore complesso che indica le coordinate di un punto della mesh, `POL` è una matrice a due colonne tale che ogni riga indica gli indici sul vettore `PT` del vertice di inizio e di quello di fine del poligono corrispondente a quella riga, `k` è il coefficiente dell’equazione di Helmholtz, `PWave` è una funzione a una variabile complessa che descrive il dato sul bordo  $\Gamma$ , `Omega` sono i punti (descritti come numeri complessi) su cui si valuta l’approssimazione dell’onda scatterata, `u` è l’onda scatterata e totale di riferimento, `ui` è l’onda incidente di riferimento, `X` l’ascissa della griglia di valutazione, `Y` l’ordinata della griglia di valutazione, `R` è il raggio del cerchio al cui esterno si calcola l’errore. L’output è il valore `E` dell’errore in  $L^2$  tra l’onda approssimata e quella di riferimento.

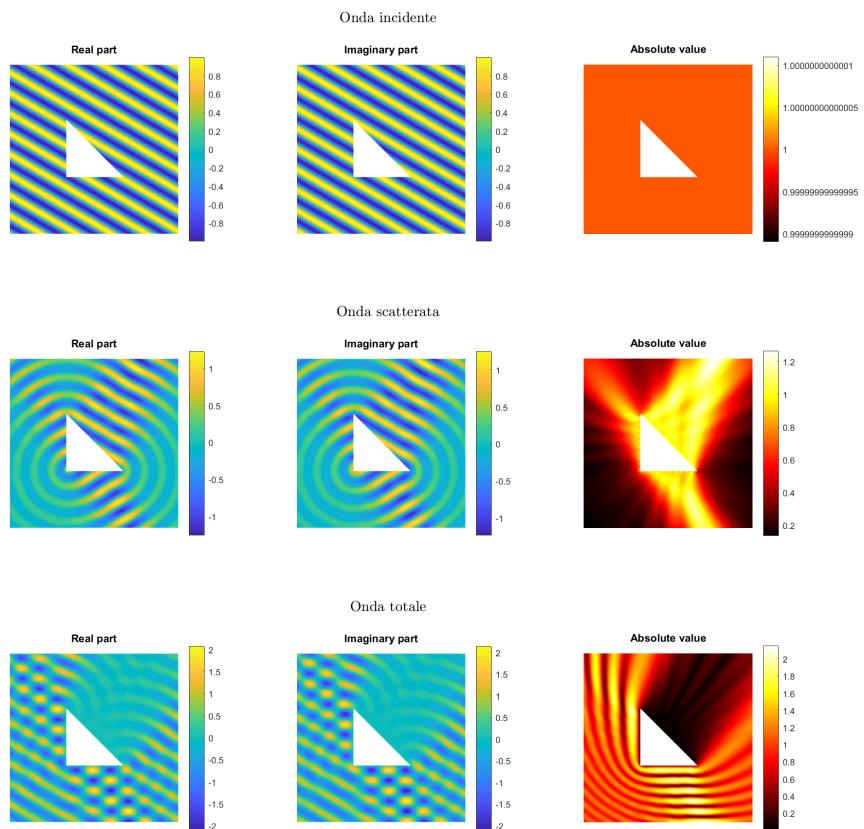


Figura 7: [script: [solution.m](#).] Plot su  $[-1, 2]^2$  di un'onda piana con direzione  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  e parametro  $k = 20$  su una mesh di 150 punti con un vincolo triangolare. Ho usato il metodo di collocazione senza *singularity extraction* con discretizzazione uniforme e prendendo l'ampiezza  $h = 0.1$ .

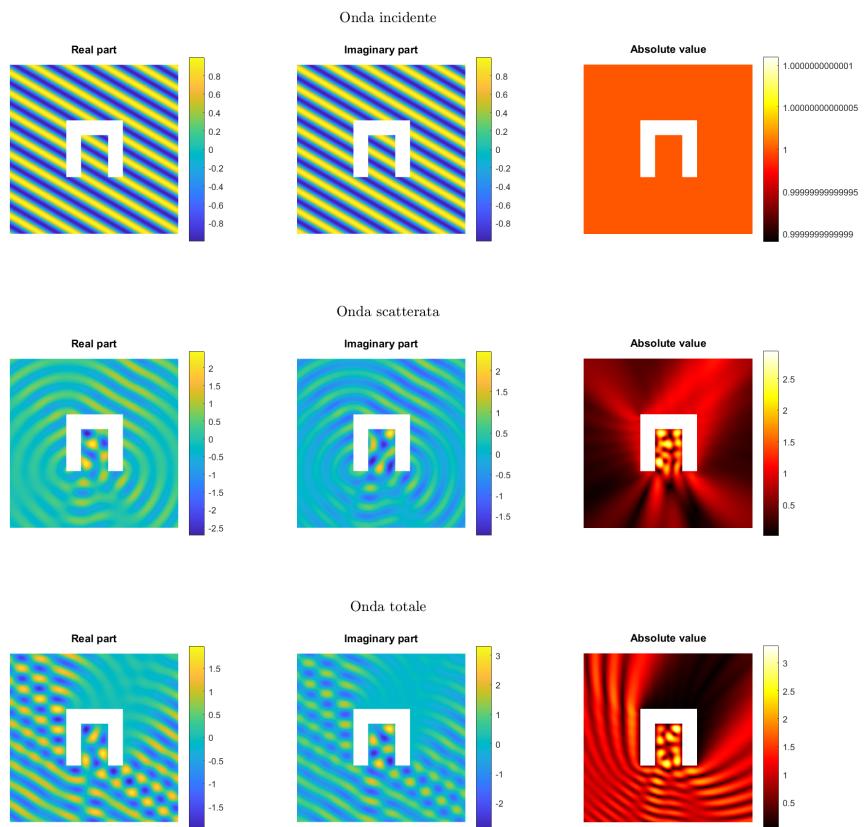


Figura 8: [script: [solution.m](#).] Plot su  $[-1, 2]^2$  di un'onda piana con direzione  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  e parametro  $k = 20$  su una mesh di 150 punti con un vincolo a "U" rovesciata. Ho usato il metodo di collocazione senza *singularity extraction* con discretizzazione uniforme e prendendo l'ampiezza  $h = 0.1$ .

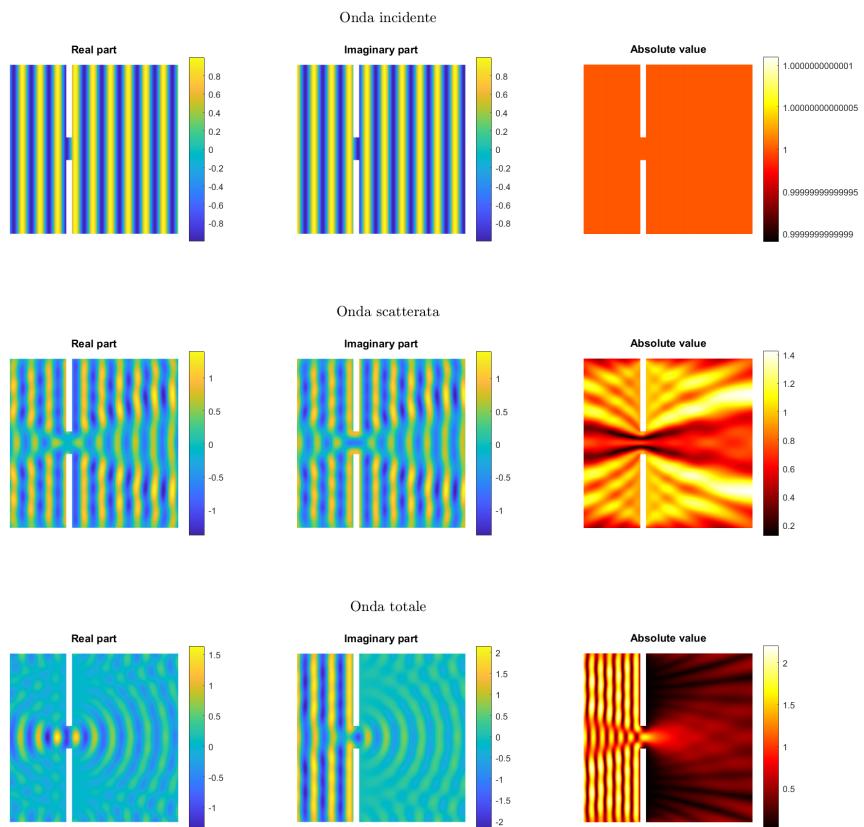


Figura 9: [script: [solution.m](#).] Plot su  $[-1, 2]^2$  di un'onda piana con direzione  $\alpha = 0$  e parametro  $k = 20$  su una mesh di 150 punti con un vincolo con una fenditura. Ho usato il metodo di collocazione senza *singularity extraction* con discretizzazione uniforme e prendendo l'ampiezza  $h = 0.1$ .

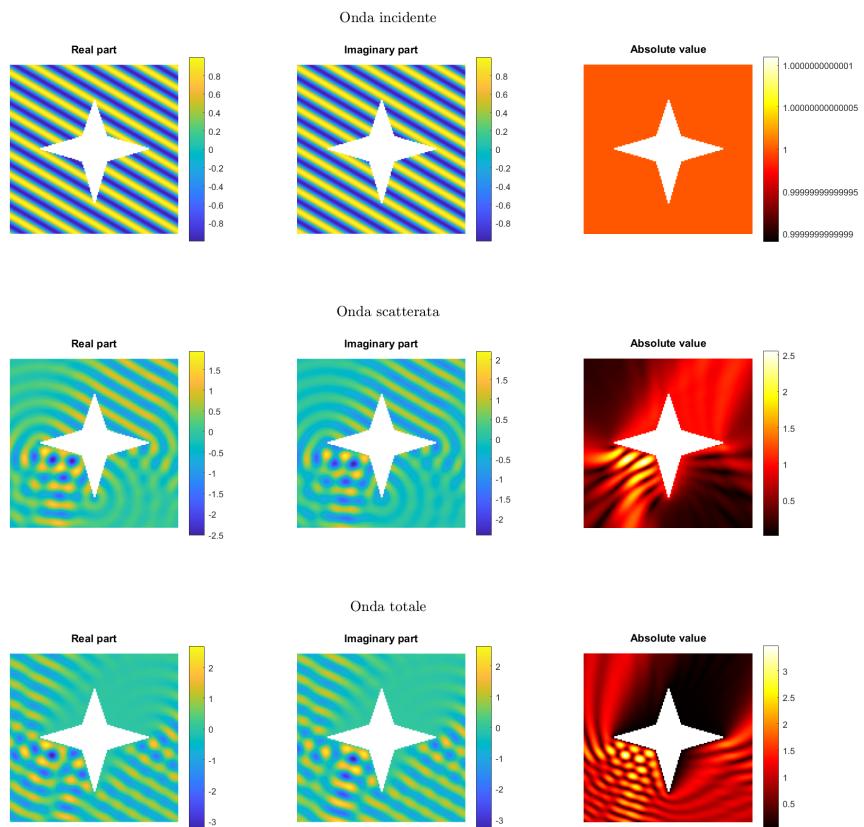


Figura 10: [script: [solution.m](#).] Plot su  $[-1, 2]^2$  di un'onda piana con direzione  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  e parametro  $k = 20$  su una mesh di 150 punti con un vincolo a forma di stella a quattro punte. Ho usato il metodo di collocazione senza *singularity extraction* con discretizzazione uniforme e prendendo l'ampiezza  $h = 0.001$ .

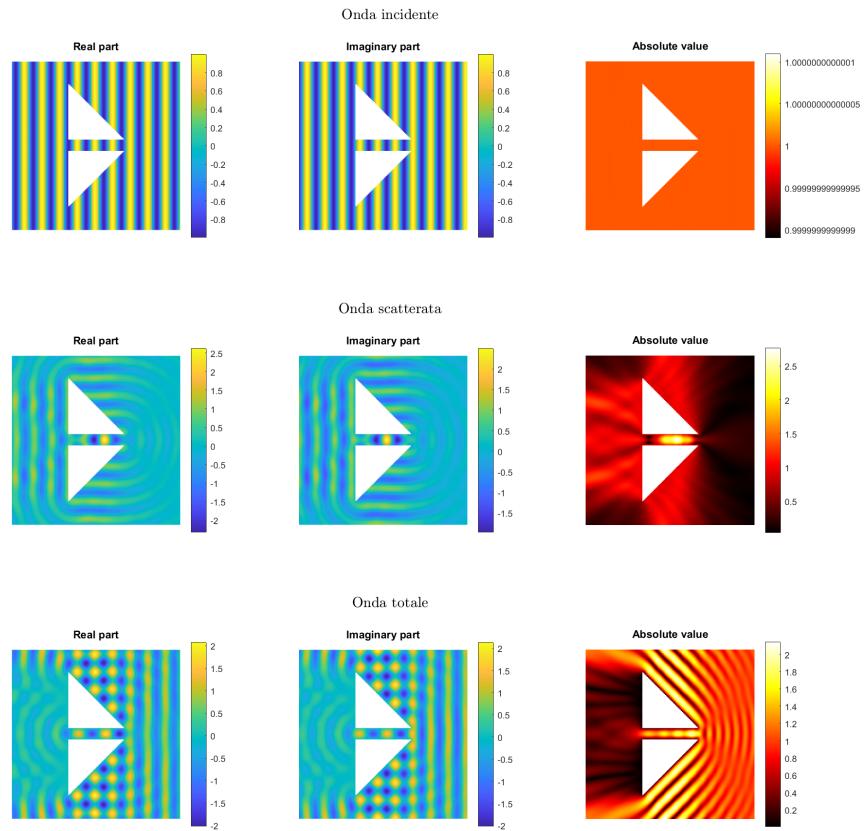


Figura 11: [script: [solution.m](#).] Plot su  $[-1, 2]^2$  di un'onda piana con direzione  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  e parametro  $k = 20$  su una mesh di 150 punti con un vincolo a forma di due triangoli. Ho usato il metodo di collocazione senza *singularity extraction* con discretizzazione uniforme e prendendo l'ampiezza  $h = 0.1$ .

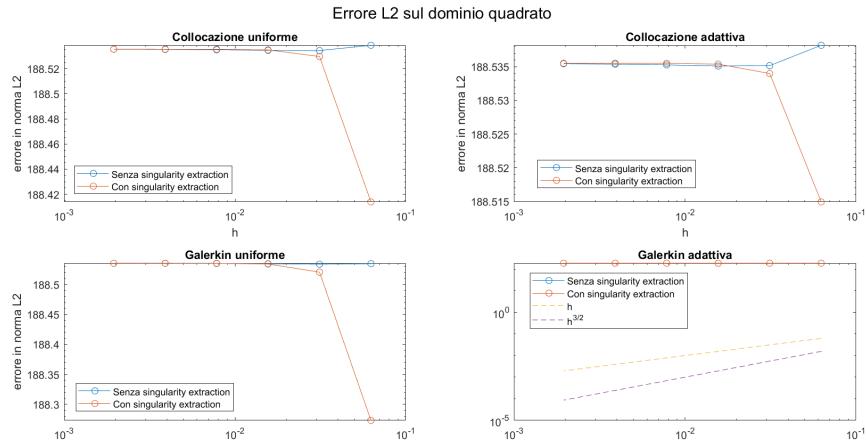


Figura 12: [script: [ERRORtest.m](#)]