The Price of Fairness

Alice Daldossi

Università degli Studi di Pavia

Indice

Formulazione del problema

Problema

Si consideri un problema di allocazione di risorse con n giocatori e un decisore centrale (CDM) che conosce tutte le preferenze e ha completo controllo nell'assegnazione dell'allocazione.

Notazione

- Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme delle allocazioni delle risorse $x \in X$ che comprende tutti i vincoli per le allocazioni.
- Ogni giocatore ha una preferenza tra le allocazioni che è espressa dalla propria funzione di utilità $f_j : X \to \mathbb{R}_+$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Quindi, scelta l'allocazione $x \in X$, l'utilità del j-esimo giocatore è $f_j(x)$.
- Sia U l'insieme delle utilità:
$$U = \{u \in \mathbb{R}_+^n | \exists x \in X : f_j(x) = u_j, \ \forall j = 1, \ldots, n\}.$$
- Sia $u_j^\star$ la massima utilità raggiungibile dal j-esimo giocatore, cioè $u_j^\star = \sup\{u_j | u \in U\}$.

Soluzione utilitaria

Secondo il classico principio utilitaristico, il CDM sceglie l'allocazione risolvendo il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max_{y} \quad & e^T u, \\ \text{t.c.} \quad & u \in U. \end{aligned} \tag{1}$$

Il valore ottimo di questo problema è:

$$\text{SYSTEM}(U) = \sup\{e^T u | u \in U\}, \tag{2}$$

e l'allocazione risultante è la **soluzione utilitaria**.

Pro e contro

Pro: la soluzione utilitaria è adatta nelle situazioni in cui la somma delle utilità corrisponde a una misura dell'efficienza del sistema.
Contro: la somma delle utilità non considera potenziali disuguaglianze nella distribuzione di utilità tra i giocatori.

L'allocazione deve essere scelta tale che rispetti uno schema di equità definito a partire dalla natura del problema e all'idea di *equità* del CDM.

Notazione

- Uno **schema di equità** è un insieme di regole e una corrispettiva funzione $\mathcal{S} : 2^{\mathbb{R}^n_+} \to \mathbb{R}^n_+$. Quindi, dato un insieme di utilità U, $\mathcal{S}(U) \in U$ è un'allocazione che rispetta l'insieme di regole scelto.
- Definiamo $\mathrm{FAIR}(U; \mathcal{S})$:

$$\mathrm{FAIR}(U; \mathcal{S}) = e^T \mathcal{S}(U). \tag{3}$$

- Definiamo il **prezzo dell'equità** (**POF**), $\mathrm{POF}(U; \mathcal{S})$, per il problema con l'insieme delle utilità U e lo schema di equità $\mathcal{S}$, come segue:

$$\mathrm{POF}(U; \mathcal{S}(U)) = \frac{\mathrm{SYSTEM}(U) - \mathrm{FAIR}(U; \mathcal{S})}{\mathrm{SYSTEM}(U)}. \tag{4}$$

Assioma 1: Pareto ottimalità

La soluzione equa $\mathcal{S}(U)$ è Pareto ottima.

Assioma 2: Simmetria

Se $\mathcal{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un operatore di permutazione definito da $\mathcal{I}((u_1, u_2)) = (u_1, u_2)$, allora

$$\mathcal{S}(\mathcal{I}(U)) = \mathcal{I}(\mathcal{S}(U)). \tag{5}$$

Assioma 3: Invarianza affine

Se $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un operatore affine definito da $A(u_1, u_2) = (A_1(u_1), A_2(u_2))$, con $A_i(u) = c_i u + d_i$ e $c_i > 0$, allora

$$\mathcal{S}(A(U)) = A(\mathcal{S}(U)). \tag{6}$$

Assioma 4: Indipendenza da alternative irrilevanti

Se U e W sono due insiemi di utilità tali che $U \subset W$, e $\mathcal{S}(W) \in U$, allora

$$\mathcal{S}(U) = \mathcal{S}(W). \tag{7}$$

Assioma 5: Monotonia

Siano U e W due insiemi di utilità, tali che la massima utilità possibile per il giocatore 1 è uguale, i.e., $u_1^\star = w_1^\star$. Se per ogni livello di utilità che il giocatore 1 può richiedere, la massima utilità possibile che il giocatore 2 può avere simultaneamente è maggiore o uguale in W, allora il livello di utilità del giocatore 2 nell'allocazione equa deve essere maggiore o uguale in W, i.e., $\mathcal{S}(U)_2 \leq \mathcal{S}(W)_2$.

$$u_1^\star = w_1^\star,\ u_2^\star \leq w_2^\star \implies \mathcal{S}(U)_2 \leq \mathcal{S}(W)_2 \tag{8}$$

Non esiste uno schema di equità che soddisfa tutti e 5 gli assiomi.

Equità proporzionale (PF)

Soluzione di Nash (Assiomi 1-4)

Un trasferimento di risorse tra 2 giocatori è favorevole ed equo se la percentuale di incremento dell'utilità di un giocatore è maggiore della percentuale di decremento dell'utilità dell'altro giocatore.

Generalizzazione a più giocatori: *equità proporzionale*

L'allocazione equa proporzionale è tale che, se paragonata a ogni altra possibile allocazione di utilità, la variazione proporzionale aggregata è minore o uguale a 0:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{u_j - \mathcal{S}^{PF}(U)_j}{\mathcal{S}^{PF}(U)_j} \leq 0, \quad \forall u \in U. \tag{9}$$

Se U è convesso, l'allocazione equa secondo l'equità proporzionale $\mathcal{S}^{PF}(U)$ si può ottenere come la (unica) soluzione ottima dei seguenti problemi equivalenti.

Matematicamente

$$\begin{aligned} \max_{u} \quad & \sum_{j=1}^{n} \log u_j \\ \text{t.c.} \quad & u \in U; \end{aligned} \tag{10}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \max_{u} \quad & \prod_{j=1}^{n} u_j \\ \text{t.c.} \quad & u \in U. \end{aligned} \tag{11}$$

Equità max-min (MMF)

Kalai-Smorodinsky(Assiomi 1-3,5) e Giustizia di Rawls

(KS): La soluzione KS intende assegnare a ogni giocatore la più grande frazione possibile della loro massima utilità.
(RJ): L'idea della giustizia di Rawls intende assegnare priorità a coloro che stanno meno bene per garantire il più alto livello minimo di utilità ottenuto.

Generalizzazione della giustizia di Rawls e della soluzione KS nel problema a due giocatori: *equità max-min*

L'equità max-min intende massimizzare la minima utilità ottenuta da tutti i giocatori.

Assunzione 0

I problemi sono tutti normalizzati, cioè i giocatori hanno la stessa massima utilità possibile.

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operatore di riordino

$$T(y) = (y_{(1)}, \dots, y_{(n)}), \quad y_{(1)} \leq \cdots \leq y_{(n)},$$

dove $y_{(i)}$ è l'i-esimo elemento più piccolo di y.

Matematicamente

Trovare un'allocazione $u^{\text{MMF}} \in U$ tale che la sua risultante distribuzione di utilità riordinata è lessicograficamente più grande rispetto a tutte le altre distribuzioni di utilità riordinate:

$$T(u^{\text{MMF}}) \succeq T(u), \quad \forall u \in U. \tag{12}$$

The Price of Fairness

Assunzione 1

L'insieme delle utilità U è compatto e convesso.

Proposizione: Famiglia di problemi

Sia l'insieme delle risorse $X \subset \mathbb{R}_+^m$ compatto, convesso e monotono. Si supponga che la funzione di utilità applicata al j-esimo giocatore sia tale che $f_j(x) = \overline{f}_j(x_j)$, per ogni $x \in X$, con $\overline{f}_j : \mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}$, e $x^T = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_n^T]$, dove $m_1 + \cdots + m_n = m$. Inoltre, $\overline{f}_j$ è non decrescente in ogni argomento, concava, limitata e continua su X, e $\overline{f}_j(0) = 0$. Allora, l'insieme delle utilità U risultante è compatto, convesso, e monotono.

Teorema: Uguali massime utilità possibili

Si consideri un problema di allocazione delle risorse con n giocatori, $n \geq 2$. Sia $U \subset \mathbb{R}^n_+$ l'insieme delle utilità tale che soddisfa A.1. Se tutti i giocatori hanno la stessa utilità massima raggiungibile, che è maggiore di 0, allora

1. il prezzo dell'equità proporzionale è limitato da
$$\mathrm{POF}(U; \mathcal{S}^{\mathrm{PF}}) \leq 1 - \frac{2\sqrt{n} - 1}{n}, \tag{13}$$
2. il prezzo dell'equità max-min è limitato da
$$\mathrm{POF}(U; \mathcal{S}^{\mathrm{MMF}}) \leq 1 - \frac{4n}{(n+1)^2}. \tag{14}$$

Inoltre, il limite dell'equità proporzionale è stretto se $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, mentre quello dell'equità proporzionale lo è per ogni n.

Teorema: Diverse massime utilità possibili

Si consideri un problema di allocazione delle risorse con n giocatori, $n \geq 2$. Sia $U \subset \mathbb{R}_+^n$ l'insieme delle utilità tale che soddisfa A.1. Se tutti i giocatori hanno utilità massima raggiungibile maggiore di 0, allora

1. il prezzo dell'equità proporzionale è limitato da

$$\mathrm{POF}(U;\mathcal{S}^{\mathrm{PF}}) \leq 1 - \frac{2\sqrt{n}-1}{n}\frac{\min_{j\in\{1,\dots,n\}} u_j^\star}{\max_{j\in\{1,\dots,n\}} u_j^\star} - \frac{1}{n} + \frac{\min_{j\in\{1,\dots,n\}} u_j^\star}{\sum_{j=1}^n u_j^\star}; \quad (15)$$

2. il prezzo dell'equità max-min è limitato da

$$\mathrm{POF}(U;\mathcal{S}^{\mathrm{MMF}}) \leq 1 - \frac{4n}{(n+1)^2}\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u_j^\star}{\max_{j\in\{1,\dots,n\}} u_j^\star}. \quad (16)$$

Conclusione

L'analisi svolta è precisa e applicabile a una vasta varietà di problemi di allocazione delle risorse.

Osservazione 1

Il "prezzo" di una soluzione equa è presumibilmente piccolo quando il numero di giocatori è basso.

Osservazione 2

L'equità proporzionale è una teoria che comporta un prezzo ben più basso rispetto a quello dell'equità max-min.