

The Price of Fairness

Alice Daldossi

Università degli Studi di Pavia

Indice

1 Formulazione del problema

2 Schemi di equità

- Equità proporzionale
- Equità max-min

3 Limiti

4 Conclusione

Formulazione del problema

Si consideri un problema di allocazione di risorse con n giocatori e un decisore centrale (CDM) che conosce tutte le preferenze e ha completo controllo nell'assegnazione dell'allocazione.

Notazione

- Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme delle allocazioni delle risorse $x \in X$ che comprende tutti i vincoli per le allocazioni.
- Ogni giocatore ha una preferenza tra le allocazioni che è espressa dalla propria funzione di utilità
 $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}_+, \forall j = 1, \dots, n$. Quindi, scelta l'allocazione $x \in X$, l'utilità del j -esimo giocatore è $f_j(x)$.
- Sia U l'insieme delle utilità:

$$U = \{u \in \mathbb{R}_+^n \mid \exists x \in X : f_j(x) = u_j, \forall j = 1, \dots, n\}.$$



Soluzione utilitaria

Secondo il classico principio utilitaristico, il CDM sceglie l'allocazione risolvendo il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \max_y & e^T u, \\ \text{t.c.} & u \in U. \end{array} \quad (1)$$

Il valore ottimo di questo problema è:

$$\text{SYSTEM}(U) = \sup\{e^T u | u \in U\}, \quad (2)$$

e l'allocazione risultante è la **soluzione utilitaria**.

Pro e contro

Pro: la soluzione utilitaria è adatta nelle situazioni in cui la somma delle utilità corrisponde a una misura dell'efficienza del sistema.

Contro: la somma delle utilità non considera potenziali disuguaglianze nella distribuzione di utilità tra i giocatori.

L'allocazione deve essere scelta tale che rispetti uno schema di equità definito a partire dalla natura del problema e all'idea di *equità* del CDM.

Notazione

- Uno **schema di equità** è un insieme di regole e una corrispondente funzione $\mathcal{S} : 2^{\mathbb{R}_+^n} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$. Quindi, dato un insieme di utilità U , $\mathcal{S}(U) \in U$ è un insieme di allocazioni che rispetta le regole scelto.
- Definiamo $\text{FAIR}(U; \mathcal{S})$:

$$\text{FAIR}(U; \mathcal{S}) = e^T \mathcal{S}(U). \quad (3)$$

- Definiamo il **prezzo dell'equità (POF)**, $\text{POF}(U; \mathcal{S})$, per il problema con l'insieme delle utilità U e lo schema di equità \mathcal{S} , come segue:

$$\text{POF}(U; \mathcal{S}(U)) = \frac{\text{SYSTEM}(U) - \text{FAIR}(U; \mathcal{S})}{\text{SYSTEM}(U)}. \quad (4)$$

Rappresentazioni di equità

Di seguito sono presentati gli assiomi più studiati che una rappresentazione equa deve idealmente soddisfare nel caso di un problema a due giocatori, $n = 2$.

Notazione

Si denota con:

- U l'insieme delle utilità;
- u_j^* la massima utilità raggiungibile dal j -esimo giocatore, cioè $u_j^* = \sup\{u_j | u \in U\}$.

Assioma 1: Pareto ottimalità

La soluzione equa $\mathcal{S}(U)$ è Pareto ottima.

Assioma 2: Simmetria

Se $\mathcal{I} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un operatore di permutazione definito da $\mathcal{I}((u_1, u_2)) = (u_2, u_1)$, allora

$$\mathcal{S}(\mathcal{I}(U)) = \mathcal{I}(\mathcal{S}(U)). \quad (5)$$

Assioma 3: Invarianza affine

Se $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un operatore affine definito da $A(u_1, u_2) = (A_1(u_1), A_2(u_2))$, con $A_i(u) = c_i u + d_i$ e $c_i > 0$, allora

$$\mathcal{S}(A(U)) = A(\mathcal{S}(U)). \quad (6)$$

Assioma 4: Indipendenza da alternative irrilevanti

Se U e W sono due insiemi di utilità tali che $U \subset W$, e $\mathcal{S}(W) \in U$, allora

$$\mathcal{S}(U) = \mathcal{S}(W). \quad (7)$$

Assioma 5: Monotonia

Siano U e W due insiemi di utilità, tali che la massima utilità possibile per il giocatore 1 è uguale, i.e., $u_1^* = w_1^*$. Se per ogni livello di utilità che il giocatore 1 può richiedere, la massima utilità possibile che il giocatore 2 può avere simultaneamente è maggiore o uguale in W , allora il livello di utilità del giocatore 2 nell'allocazione equa deve essere maggiore o uguale in W , i.e., $\mathcal{S}(U)_2 \leq \mathcal{S}(W)_2$.

$$u_1^* = w_1^*, \quad u_2^* \leq w_2^* \implies \mathcal{S}(U)_2 \leq \mathcal{S}(W)_2 \quad (8)$$

Il risultato più importante afferma che non esiste uno schema di equità che soddisfa tutti e 5 gli assiomi.

Equità proporzionale (PF)

Soluzione di Nash (Assiomi 8-9)

Un trasferimento di risorse tra 2 giocatori è favorevole ed equo se la percentuale di incremento dell'utilità di un giocatore è maggiore della percentuale di decremento dell'utilità dell'altro giocatore.

Generalizzazione a più giocatori: *equità proporzionale*

L'allocazione equa proporzionale è tale che, se paragonata a ogni altra possibile allocazione di utilità, la variazione proporzionale aggregata è minore o uguale a 0:

$$\sum_{j=1}^n \frac{u_j - \mathcal{S}^{PF}(U)_j}{\mathcal{S}^{PF}(U)_j} \leq 0, \quad \forall u \in U. \quad (9)$$

Se U è convesso, l'allocazione equa secondo l'equità proporzionale $\mathcal{S}^{PF}(U)$ si può ottenere come la (unica) soluzione ottima dei seguenti problemi equivalenti.

Matematicamente

$$\begin{aligned} \max_y \quad & \sum_{j=1}^n \log u_j \\ \text{t.c.} \quad & u \in U; \end{aligned} \tag{10}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \max_y \quad & \prod_{j=1}^n u_j \\ \text{t.c.} \quad & u \in U. \end{aligned} \tag{11}$$

Equità max-min (MMF)

Kalai-Smorodinsky (KS) (Assiomi 8-8,9)

La soluzione KS intende assegnare a ogni giocatore la più grande frazione possibile della loro massima utilità.

Criticità: in una situazione in cui ci sono più di 2 giocatori, questa allocazione potrebbe non essere Pareto-ottima, quindi ci potrebbe essere uno spreco di risorse.

Generalizzazione della giustizia di Rawls e della soluzione KS nel problema a due giocatori: *equità max-min*

L'equità max-min intende risolvere la criticità sopra esposta restituendo sempre una soluzione Pareto-ottima massimizzando l'utilità minima che tutti i giocatori ottengono.

Assunzione 0

I problemi sono tutti normalizzati, cioè i giocatori hanno la stessa massima utilità possibile.

Equità max-min

- *Iterazioni:*
 - 1 central decision maker (CDM) massimizza il livello di utilità più basso tra tutti i giocatori;
 - 2 assegnato a ogni giocatore il livello minimo, si massimizza il secondo livello minimo tra i giocatori;
 - 3 e così via.
- *Risultato:* la distribuzione dei livelli di utilità per ogni altra allocazione che assegna un'utilità strettamente maggiore per uno specifico livello è tale che esiste un'utilità più bassa che è stata strettamente diminuita.

Sia $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operatore di riordino

$$T(y) = (y_{(1)}, \dots, y_{(n)}), \quad y_{(1)} \leq \dots \leq y_{(n)},$$

dove $y_{(i)}$ è l' i -esimo elemento più piccolo di y .

Matematicamente

Trovare un'allocazione $u^{\text{MMF}} \in U$ tale che la sua risultante distribuzione di utilità riordinata è lessicograficamente più grande rispetto a tutte le altre distribuzioni di utilità riordinate:

$$T(u^{\text{MMF}}) \succeq T(u), \quad \forall u \in U. \quad (12)$$

The Price of Fairness

Assunzione 1

L'insieme delle utilità U è compatto e convesso.

Proposizione: Famiglia di problemi

Sia l'insieme delle risorse $X \subset \mathbb{R}_+^m$ compatto, convesso e monotono. Si supponga che la funzione di utilità applicata al j -esimo giocatore sia tale che $f_j(x) = \bar{f}_j(x_j)$, per ogni $x \in X$, con $\bar{f}_j : \mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}$, e $x^T = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_n^T]$, dove $m_1 + \dots + m_n = m$. Inoltre, \bar{f}_j è non decrescente in ogni argomento, concava, limitata e continua su X , e $\bar{f}_j(0) = 0$. Allora, l'insieme delle utilità U risultante è compatto, convesso, e monotono.

Teorema: Uguali massime utilità possibili

Si consideri un problema di allocazione delle risorse con n giocatori, $n \geq 2$. Sia $U \subset \mathbb{R}_+^n$ l'insieme delle utilità tale che soddisfa A.1. Se tutti i giocatori hanno la stessa utilità massima raggiungibile, che è maggiore di 0, allora

- 1 il prezzo dell'equità proporzionale è limitato da

$$\text{POF}(U; \mathcal{S}^{\text{PF}}) \leq 1 - \frac{2\sqrt{n} - 1}{n}, \quad (13)$$

- 2 il prezzo dell'equità max-min è limitato da

$$\text{POF}(U; \mathcal{S}^{\text{MMF}}) \leq 1 - \frac{4n}{(n+1)^2}. \quad (14)$$

Inoltre, il limite dell'equità proporzionale è stretto se $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, mentre quello dell'equità proporzionale lo è per ogni n .

Teorema: Diverse massime utilità possibili

Si consideri un problema di allocazione delle risorse con n giocatori, $n \geq 2$. Sia $U \subset \mathbb{R}_+^n$ l'insieme delle utilità tale che soddisfa A.16. Se tutti i giocatori hanno utilità massima raggiungibile maggiore di 0, allora

1 il prezzo dell'equità proporzionale è limitato da

$$\text{POF}(U; \mathcal{S}^{\text{PF}}) \leq 1 - \frac{2\sqrt{n} - 1}{n} \frac{\min_{j \in \{1, \dots, n\}} u_j^*}{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} u_j^*} - \frac{1}{n} + \frac{\min_{j \in \{1, \dots, n\}} u_j^*}{\sum_{j=1}^n u_j^*}; \quad (15)$$

2 il prezzo dell'equità max-min è limitato da

$$\text{POF}(U; \mathcal{S}^{\text{MMF}}) \leq 1 - \frac{4n}{(n+1)^2} \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j^*}{\max_{j \in \{1, \dots, n\}} u_j^*}. \quad (16)$$

Conclusione

L'analisi svolta è precisa e applicabile a una vasta varietà di problemi di allocazione delle risorse.

Osservazione 1

Il "prezzo" di una soluzione equa è presumibilmente piccolo quando il numero di giocatori è basso.

Osservazione 2

L'equità proporzionale è una teoria che comporta un prezzo ben più basso rispetto a quello dell'equità max-min.

Formulazione del problema
○○○○

Schemi di equità
○○○○○
○○○
○○○

Limiti
○○○

Conclusione
○●