期中考试简要答案

2025 年 4 月 13 日

试题内容：

1.（20 分）计算积分

(1) $\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是矩形区域 $[-1,1]\times[0,2]$；

(2) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

2.（10 分）计算曲线积分

$$I=\int_\Gamma \frac{(x-\frac{1}{2}-y)\mathrm{d}x+(x-\frac{1}{2}+y)\mathrm{d}y}{(x-\frac{1}{2})^2+y^2},$$

其中 Γ 为从 $(0,-1)$ 沿着抛物线 $y^2=1-x$ 到 $(0,1)$ 曲线段。

3.（10 分）计算曲面积分 $I=\int_\Sigma 2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是抛物面 $x^2+y^2=z$ 位于 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分取外侧。

4.（10 分）求曲线 $x^3+y^3=xy$ 所围成的区域面积。

5.（10 分）求旋转抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围的立体的体积。

6.（20 分）求以下方程的通解：(1) $y'-y=xy^5$；(2) $y''+y'=4\sin x+6\cos 2x$.

7.（10 分）设 Γ 是取逆时针方向的圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$f(x)$ 是正的连续函数。证明：

$$\oint_\Gamma xf(y)\,\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geq 2\pi$$

8.（10 分）假设 $f(t)$ 为连续的正函数。证明：$t>0$ 时，

$$F(t)=\frac{\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq t^2}f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{x^2+y^2\leq t^2(x^2+y^2)}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

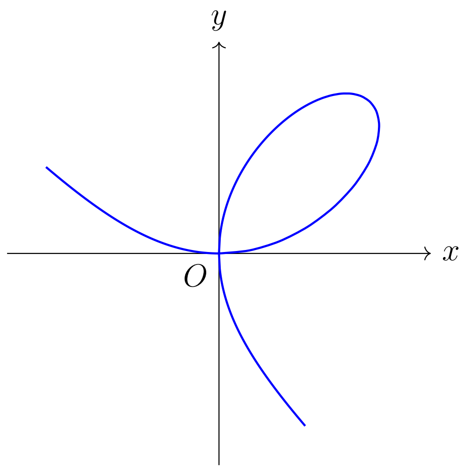
是严格单调递减函数。

题 1：(1)$\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$, (2) $\frac{7-4\sqrt{2}}{6}\pi$(可以使用柱坐标计算)

题 2：$2\pi-2\arctan 2$ (使用 Green 公式，注意定义域)

题 3：$\frac{\pi}{4}$ (使用 Gauss 公式或直接计算并利用对称性)

题 4：$\frac{1}{6}$ (曲线 $x^3+y^3=xy$ 的图像如下：)



题 5：$\frac{32}{3}\pi$ (可以使用柱坐标计算)

题 6：（计算量炸掉了）

(1) $\dfrac{1}{y^4}=Ce^{-4x}-x+\dfrac{1}{4}.$

(2) $y=C_1+C_2e^{-x}$

$$+\frac{x\sin(2x)}{10}-\frac{x\cos(2x)}{5}-2\sin(x)+\frac{4\sin(2x)}{25}-2\cos(x)+\frac{13\cos(2x)}{100}$$

题 7：利用 x,y 的对称性凑出形如 $f(x)+\frac{1}{f(x)}$ 的式子。

题 8：将积分转化为定积分之后求导。