

# 利用向量场的流给出散度和旋度的几何解释

陈轶钊

2025 年 3 月 28 日

## 目录

1 引入	1
2 第一步：线性化	2
3 第二步：极分解	3
4 最后一步：一些计算	4
A 课后补充题的陈述	5
B 其他线性化的例子	7

## 1 引入

这篇笔记的目的是使用另一种想法将本周课后补充题的最后两道串起来（题目的陈述可以见附录 A）。

习题中给出了向量场的流（或流映射）的定义<sup>1</sup>：

设  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  是定义在  $\mathbb{R}^3$  中的一个不随时间变化的  $C^1$  向量场，通常可以将它理解为一个稳态的流速场。考虑空间中一个初始位置为  $x$  的粒

---

<sup>1</sup>在上面的定义里，“积分曲线”的概念大约是很好理解的，但由积分曲线定义的流相对没有那么直观。如果读者对流的定义感到困惑或者不适应，那是完全正常的。这样的读者可以不妨慢一点，先建立起对流的几何直观。另外借助后面的讨论慢慢熟悉流的概念也是一种选择

子，假设它随着流速场  $F$  运动。我们将它在  $t$  时刻的位置记为  $\Phi(x, t)$ ， $\Phi(x, t)$  满足以下常微分方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi(x, t) = F(\Phi(x, t)), \\ \Phi(x, 0) = x. \end{cases} \quad (1)$$

有关常微分方程的理论告诉我们，当  $F$  具有  $C^1$  正则性以及满足其他一些条件时， $\Phi(x, t)$  可以（在短时间内）唯一地良好定义，且它是  $\mathbb{R}^3$  到自身的一个同胚（即连续双射且逆映射也连续）。 $\{\Phi(x, t)\}_t$  被称为由  $F$  所定义的流映射（flow map）。每一个  $\Phi(\cdot, t)$  都给出了从粒子初始位置到其  $t$  时刻位置的映射。此外  $\Phi(x, \cdot)$  则给出了向量场  $F$  的一条积分曲线（integral curve），也称流线（streamline）或者向量线，见教材第 8.7.2 节或《数学分析》第三册第 16.8.2 节。

这两道习题的一种理解方式是，它们给出了下面的问题的部分结果：

如何直观地描述一个向量场定义的流的运动趋势？

这篇笔记作为补充，会展示上面问题的一种回答方式。笔记的最后会得到两个矩阵，它们分别反映了流  $\Phi(x, t)$  伸缩和旋转的趋势。同时，这两个矩阵还分别会和  $F$  的散度和旋度关联起来。这个意义上，这两道题也给出了  $F$  的散度和旋度的几何意义：它们反映了  $F$  定义的流  $\Phi(x, t)$  的性质。

这里为了方便，我们仅仅描述在时间  $T = 0$  处  $\Phi(x, t)$  的运动趋势。一般情况实际上可以化归为  $T = 0$  时的情况。另外在不加说明的时候，笔记中的向量  $v \in \mathbb{R}^3$  都是指列向量。

## 2 第一步：线性化

直接描述  $\Phi$  的性质是有些麻烦的，所以我们的第一步是将  $\Phi$  “线性化”<sup>2</sup>，寻找一个可以反映  $\Phi$  性质的线性映射  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 。在这里我们将  $A$  取为

$$\begin{aligned} D_x \Phi|_{(x_0, t)}: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto \nabla_x \Phi(x_0, t)v \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>事实上，我们有不止一种线性化的方式，例如我们也可以选择先将演化方程线性化，然后求解线性化后的方程。这样的例子可以参考附录 B。

其中  $\nabla_x \Phi(x_0, t)$  为  $\Phi(x, t)$  在  $(x_0, t)$  处 (关于变量  $x$ ) 的雅可比矩阵, 亦即<sup>3</sup>

$$\nabla_x \Phi(x, t) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x, t), \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x, t), \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(x, t) \right)$$

映射  $D_x \Phi|_{(x_0, t)}$  常被叫做  $\Phi(x, t)$  在  $x_0$  处的切映射<sup>4</sup>。

我们实际上有许多理由相信  $\Phi$  的切映射  $D_x \Phi$  的确能反应  $\Phi$  本身的性质。一个理由是, 我们已经知道一些定理, 如逆映射定理和隐函数定理, 它们说明了从切映射的性质能反推出  $\Phi$  的性质 (比如逆映射定理说, 如果切映射可逆, 那么  $\Phi$  局部上也有逆映射)。另一个更容易接受的理由是泰勒展开

$$\Phi(x_0 + \Delta x, t) = \Phi(x_0, t) + \nabla_x \Phi(x_0, t) \Delta x + o(|\Delta x|).$$

它说明  $\Phi(x, t)$  和切映射几乎只差一个平移 (注意平移不改变伸缩和旋转的趋势, 在后面的讨论里可以忽略)。

这样我们只需要考虑如何描述切映射  $D_x \Phi$  的性质, 这将是下一节的内容。我们在这节最后指出这样一件事: 切映射  $D_x \Phi|_{(x_0, t)}$  的信息可以由向量场  $F$  的信息得到, 事实上利用  $F$  可以给出切映射的演化方程

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} D_x \Phi|_{(x_0, t)} = DF|_{\Phi(x, t)} \circ D_x \Phi|_{(x_0, t)}, \\ \nabla_x \Phi(x, 0) = \text{Id}. \end{cases} \quad (2)$$

它可以靠对方程 (1) 两边关于  $x$  求导, 然后交换求导次序得到。并且它实际上就是习题中的等式 (4)。

### 3 第二步: 极分解

在线性代数中证明了矩阵的极分解 (polar decomposition), 我们先给出它的陈述并解释它的几何意义。

**定理 3.1 (极分解)** 对任意一个  $n \times n$  矩阵  $A$ , 存在正交阵  $U \in O(n)$  和唯一的半正定对称阵  $P$ , 使得

$$A = UP$$

更进一步, 在  $A$  可逆时,  $U$  和  $P$  均是唯一的, 它们可以表示为

$$P = \sqrt{A^T A}, \quad U = AP^{-1}.$$

<sup>3</sup>注意  $\Phi$  和它的各个偏导数都是列向量, 所以式子的右边为一个 3 阶方阵。

<sup>4</sup>切映射具有不错的性质, 例如复合函数求导的链式法则可以被写成:  $D(f \circ g)|_x = Df|_{g(x)} \circ Dg|_x$ 。

极分解的证明可以在许多地方找到。

注意到任何一个对称阵都能正交对角化，也就是存在正交阵  $V$  使得  $VPV^{-1}$  为对角阵。这时  $VA V^{-1} = (VUV^{-1}) \cdot (VPV^{-1})$  是一个正交阵和一个对角阵的乘积。从线性映射的视角来看，这相当于说，对任意一个线性映射，都能找到一组单位正交基  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ，使得这个线性映射在每个  $e_i$  上的作用效果是先伸缩，再旋转。

所以粗略地讲，极分解告诉我们，任何一个线性映射都可以靠先伸缩后旋转得到。此外对于极分解  $A = UP$ ，矩阵  $U$  和  $P$  分别描述了应该如何伸缩和如何旋转。

在上一节中，我们得到了线性映射  $D_x \Phi|_{(x_0, t)}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 。这时可以对它做极分解

$$D_x \Phi|_{(x_0, t)} = U(t)P(t) \quad (3)$$

其中对每个  $t$ ，矩阵（或，线性映射） $U(t)$  是个正交阵（正交变换）， $P(t)$  是个对称阵（自伴变换）。此外从  $D_x \Phi|_{(x_0, 0)} = \text{Id}$  还可以知道， $U(0) = P(0) = \text{Id}$ 。

到此为止，我们知道了该怎么描述流  $\Phi(x, t)$  的伸缩和旋转。剩下的工作就是一些计算了。

## 4 最后一步：一些计算

我们对切映射的极分解 (3) 求导，可以得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D_x \Phi|_{(x_0, 0)} &= \frac{dU}{dt}(0) \cdot P(0) + U(0) \cdot \frac{dP}{dt}(0) \\ &= \underbrace{\frac{dU}{dt}(0)}_{\text{反对称阵, “无穷小旋转”}} + \underbrace{\frac{dP}{dt}(0)}_{\text{对称阵, “无穷小伸缩”}} \end{aligned}$$

这一等式相当于说，如果将切映射关于时间的导数  $\frac{d}{dt} D_x \Phi|_{(x_0, 0)}$  写成一个对称阵和一个反对称阵<sup>5</sup>的和，那么这两个矩阵分别描述了流映射  $\Phi(x, t)$  的伸缩趋势和旋转趋势。

注意到，将一个矩阵写成对称阵和反对称阵的方法是唯一的，所以即使我们不知道切映射的极分解 (3)，也可以写出“无穷小伸缩”和“无穷小旋转”

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt}(0) &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} D_x \Phi|_{(x_0, 0)} + \left( \frac{d}{dt} D_x \Phi|_{(x_0, 0)} \right)^T \right), \\ \frac{dU}{dt}(0) &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} D_x \Phi|_{(x_0, 0)} - \left( \frac{d}{dt} D_x \Phi|_{(x_0, 0)} \right)^T \right). \end{aligned}$$

<sup>5</sup>在等式  $U(t) \cdot U(t)^T = \text{Id}$  两边求导，可以证明  $\frac{dU}{dt}(0)$  是一个反对称阵。

再把切映射的演化方程 (2) 代入上面的式子, 就得到了

$$\begin{aligned}\text{流映射在 } x \text{ 处的“无穷小伸缩” } \frac{dP}{dt}(0) &= \frac{1}{2} \left( DF|_{x_0} + (DF|_{x_0})^T \right) \\ \text{流映射在 } x \text{ 处的“无穷小旋转” } \frac{dU}{dt}(0) &= \frac{1}{2} \left( DF|_{x_0} - (DF|_{x_0})^T \right)\end{aligned}$$

这解释了在习题中, 为何需要把  $\nabla F$  分解成对称的部分和反对称的部分。

此外, 从上面的等式还可以很快算出:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F(x_0) &= \operatorname{tr} \left( \frac{dP}{dt}(0) \right), \\ \frac{dU}{dt}(0) \cdot v &= \frac{1}{2} (\operatorname{curl} F) \times v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

这部分地给出了散度和旋度的几何意义。

## A 课后补充题的陈述

**习题 5.15:** 设向量场  $F(x)$  定义的流为  $\Phi(x, t)$ .

1. 映射  $\Phi(x, t)$  的 Jacobi 矩阵  $\nabla_x \Phi(x, t)$  刻画了它导致的局部空间形变, 被称为形变张量 (deformation tensor)。证明其演化方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \nabla_x \Phi(x, t) = \nabla F(\Phi(x, t)) \nabla_x \Phi(x, t), \\ \nabla_x \Phi(x, 0) = \operatorname{Id}. \end{cases} \quad (4)$$

这里的  $\operatorname{Id}$  表示  $3 \times 3$  单位阵。

2. 进一步地, Jacobi 行列式  $\det(\nabla_x \Phi)$  表示了局部的体积变化率。证明其演化方程为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \det(\nabla_x \Phi(x, t)) = \operatorname{div} F(\Phi(x, t)) \det(\nabla_x \Phi(x, t)), \\ \det(\nabla_x \Phi(x, 0)) = 1. \end{cases}$$

注意, 由此可以看出  $\operatorname{div} F$  刻画了由  $F$  定义的流映射导致空间膨胀/收缩的趋势大小, 因此它对应了向量场  $F$  在局部上的发散/收拢的程度。

**习题 5.16:** 本题中我们来进一步理解三维中旋度的含义。设  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  是定义在  $\mathbb{R}^3$  中的一个  $C^1$  向量场, 其分量形式为

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T.$$

其旋度定义为

$$\operatorname{curl} F := \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)^T.$$

上一题的讨论，特别是等式 (4)，提示我们矩阵  $\nabla F$  可能具有重要的意义，这一点也可以通过下面的形式推导出。取定  $x_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ 。对于充分小的  $\Delta x := (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ，利用 Taylor 展开，

$$F(x_0 + \Delta x) = F(x_0) + \nabla F(x_0)\Delta x + o(|\Delta x|).$$

如果忽略上述最后的高阶项，那么  $x_0 + \Delta x$  和  $x_0$  处的相对流速就基本由  $\nabla F(x_0)\Delta x$  给出。之所以关注相对流速，是因为它能告诉我们，除开整体平移，空间局部在这个流速场中的运动包含什么样的拉伸和旋转。

令  $A := \nabla F(x_0)$ 。定义

$$D := \frac{1}{2}(A + A^T), \quad W := \frac{1}{2}(A - A^T).$$

$D$  被称为  $A$  的对称部分，而  $W$  则是  $A$  的反对称部分。故相对流速可以写成

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = D\Delta x + W\Delta x + o(|\Delta x|).$$

1. 证明

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |\Phi(x_0 + \Delta x, t) - \Phi(x_0, t)|^2 = 2\Delta x^T D \Delta x + o(|\Delta x|^2).$$

$\Phi$  的定义见上一题。

注意： $D$  为对称矩阵，可以做实对角化，有 3 个实特征值（计量数）和 3 个对应的相互正交的特征向量。从以上证明的结论中不难看出， $D$  刻画了局部流场拉伸（特征值为正）和压缩（特征值为负）空间的方式，它的特征方向即为局部流场拉伸和压缩的主方向。特别地， $D$  的最大和最小特征值对应的特征方向给出了相对距离变化率（即上式左边）最正和最负的方向。因此，右端的  $D\Delta x$  是向量场  $F$  定义的空间运动中纯拉伸/压缩而无旋转的部分。此外，由于散度  $\operatorname{div} F = \operatorname{tr} D$  恰为  $D$  特征值的和，这再一次映证了“散度刻画了向量场在局部上汇聚或者发散，并诱导空间局部收缩或膨胀的程度大小”这一表述。

2. 记  $\omega := \operatorname{curl} F(x_0)$ 。证明对任意的  $\Delta x \in \mathbb{R}^3$ ， $W\Delta x = \frac{1}{2}\omega \times \Delta x$ 。

注意，由这一结论可以推出下列事实：

- $W = 0$  当且仅当  $\omega = 0$ ;
- $W\omega = 0$ 。如果  $\omega \neq 0$ , 那么  $\omega$  就是  $W$  的一个零特征向量。
- 如果  $\omega \neq 0$ , 记  $\mathbb{R}^3$  中和  $\omega$  正交的线性子空间为  $S$ 。那么对任意的  $\Delta x \in S$ ,

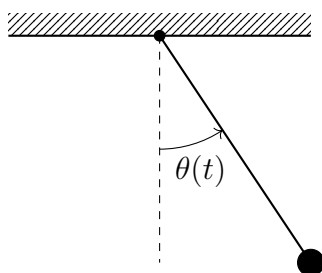
$$W\Delta x \in S, \quad W\Delta x \perp \Delta x, \quad |W\Delta x| = \frac{1}{2}|\omega||\Delta x|.$$

$S$  是  $W$  的一个二维不变子空间。

这些刻画说明右端第二项  $W\Delta x$  是相对流速中纯刚体旋转的部分, 其旋转轴为  $\omega$ , 这一流速场导致的运动是使得空间中的粒子绕着该轴逆时针绕行, 角速度正比于  $|\omega|$ 。

## B 其他线性化的例子

我们在这里给出使用线性化这一技术的另一个例子, 在这个例子里, 我们取的是常微分方程的线性化。我们考虑一个在平面内做往复运动的单摆, 如下图所示, 摆线的长度为  $\ell$ , 摆的质量为  $m$  (摆线质量忽略不计)。设单摆在  $t$  时刻和垂直方向的夹角为  $\theta(t)$  (取逆时针方向为正), 角速度为  $\omega(t)$ 。



利用牛顿第二定律做一些计算, 会知道相平面上的点  $(\theta, \omega)$  满足下面的常微分方程

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ -k \cdot \sin \theta(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中  $k = g/\ell$  是一个正的常数。

这时我们可以利用线性化的技术来研究单摆在  $\theta = 0$  处的小振动<sup>6</sup>。我们将函

---

<sup>6</sup>使用线性化的技术也可以研究一般的拉格朗日系统中稳定点附近的小振动 (见《经典力学的数学方法》(阿诺德著) 第五章)。

数  $F(\theta, \omega) = (\omega, -k \sin \theta)^T$  展开:

$$\begin{pmatrix} \omega \\ -k \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} + o(|\theta^2 + \omega^2|^{1/2})$$

这时候原本的方程可以近似为<sup>7</sup>

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega(t) \\ -k \sin \theta(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}.$$

求解上面的方程, 可以得到原本方程 (5) 的近似解

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} \theta(0) \\ \omega(0) \end{pmatrix}$$

其中  $e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ . (我们不难验证上面的表达式给出了一组解, 根据常微分方程初值问题的解的唯一性, 这个表达式就是唯一解。)

我们可以算出,  $A$  有两个不等的特征值  $\pm i\sqrt{k}$ , 因此  $A$  可以对角化, 进而有

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \left( P \begin{pmatrix} i\sqrt{k} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{k} \end{pmatrix} P^{-1} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P \begin{pmatrix} (it\sqrt{k})^n & 0 \\ 0 & (-it\sqrt{k})^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} e^{it\sqrt{k}} & 0 \\ 0 & e^{-it\sqrt{k}} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

注意到  $e^{\pm it\sqrt{k}} = \cos(\pm t\sqrt{k}) + i \sin(\pm t\sqrt{k})$  是周期为  $2\pi/\sqrt{k} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  的周期函数, 这样  $e^{tA}$  和我们给出的近似解也有同样的周期。所以我们最终知道, 在最低点附近做小摆动时, 单摆的周期约为  $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ 。

---

<sup>7</sup>这个近似的方程实际上是相平面上点  $(0, 0)$  处的切空间上的常微分方程。不过这里切空间和原本的空间可以自然地等同起来。