闵可夫斯基不等式的证明

陈轶钊

2025 年 5 月 3 日

目录

所谓的闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式是指：对任意的区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$，可积函数 $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 以及 $p \geqslant 1$，有

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \, \mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

如果记 $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}V\right)^{1/p}$（它被称作 f 的 $\mathcal{L}^p$-范数），那么上面的不等式可以重写为

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

这就是范数的三角不等式

这篇笔记给出了两种证明闵可夫斯基不等式的办法。一种办法是使用最基本的微积分工具证明闵可夫斯基不等式；另一种方式是使用一串（带名字的）不等式推出闵可夫斯基不等式：

$$\text{Young 不等式} \Longrightarrow \text{Hölder 不等式} \Longrightarrow \text{Minkowski 不等式}$$

后者是大部分实分析教材中使用的证明办法（因为这样可以一次性介绍三个在估计函数“大小”时很方便的不等式）。

这两个证明相互独立，选择一种阅读即可。

1　第一个证明

首先可以验证，在 $p \geqslant 1$ 时，函数 $F(u) = |u|^p$ 是一个凸函数，所以对任意的 $0 < t < 1$，有

$$|u+v|^p = F(u+v) \leqslant t\cdot F(\frac{u}{t}) + (1-t)\cdot F(\frac{v}{1-t}) = t^{1-p}\,|u|^p + (1-t)^{1-p}\,|v|^p$$

在上面的不等式里，取 $u = f(x), v = g(x), x \in \Omega$ 得：

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant t^{1-p}\,|f(x)|^p + (1-t)^{1-p}\,|g(x)|^p$$

两边在 Ω 上积分，得到：

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}V \\
&\leqslant t^{1-p}\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}V + (1-t)^{1-p}\int_\Omega |g(x)|^p \,\mathrm{d}V \\
&\leqslant t^{1-p}\,\|f\|_p^p + (1-t)^{1-p}\,\|g\|_p^p
\end{aligned}$$

将待定常数 t 取为 $\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p+\|g\|_p}$，得[1]：

$$\begin{aligned}
\lfloor f+g \rceil_p &\leqslant \frac{\|f\|_p^{1-p}}{\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^{1-p}}\cdot \|f\|_p^p + \frac{\|g\|_p^{1-p}}{\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^{1-p}}\cdot \|g\|_p^p \\
&= \frac{\|f\|_p+\|g\|_p}{\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^{1-p}} = \left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)^p
\end{aligned}$$

两边开 p 次根号，就得到了闵可夫斯基不等式 (1).

2　第二个证明

2.1　Young 不等式

所谓的 Young 不等式是指：

定理 2.1 (Young 不等式) 对 $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，有

$$uv \leqslant \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q, \quad \forall u, v \geqslant 0. \tag{2}$$

[1]在 $\|f\|_p, \|g\|_p$ 中某个为 0 时，t 的取值为 0 或 1. 此时需要单独讨论：例如：如果 $\|f\|_p$，那么 f 几乎处处为 0（在 f 连续时，可知 f 恒为 0），所以 $|f+g|^p$ 和 $|g|^p$ 具有相同的积分，这时原不等式一定成立。

这一不等式有许多证明办法，如利用不等式 $ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x$，或借助 Legendre 变换[2]的性质。这里我们使用对数函数的凹性给出证明。

因为对数函数 $\ln x$ 是凹的，所以有

$$\ln(uv) = \frac{1}{p}\ln u^p + \frac{1}{q}\ln v^q \leqslant \ln(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q).$$

其中最后一个不等号用到了 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 结合对数函数的单调性，就知道 Young 不等式 (2) 成立。

2.2 Hölder 不等式

我们接下来使用 Young 不等式证明 Hölder 不等式：

定理 2.2 (Hölder 不等式) 对 $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，及 $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$，有：

$$\int_\Omega |f \cdot g| \ \mathrm{d}V \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p \ \mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \ \mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \,. \tag{3}$$

因为对 f, g 分别乘上一个非零常数后不改变不等式,所以我们可以假定 $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$（如果它们中某个为 0，可以证明不等式的两侧都是 0），这样只需证明

$$\int_\Omega |fg| \ \mathrm{d}V \leqslant 1$$

而根据 Young 不等式 (2) 有

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

两边在 Ω 上积分得：

$$\int_\Omega |fg| \ \mathrm{d}V \leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega |f|^p \ \mathrm{d}V + \frac{1}{q}\int_\Omega |g|^q \ \mathrm{d}V = \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

这样就证明了 Hölder 不等式 (3).

[2]可以参考这篇笔记的命题 1.4 及推论 1.1

2.3 Minkowski 不等式

最后，我们给出 Minkowski 不等式的证明。取 q 使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则：

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_\Omega |f+g|\cdot|f+g|^{p-1}\ \mathrm{d}V \\
&\leqslant \int_\Omega |f|\cdot|f+g|^{p-1}\ \mathrm{d}V + \int_\Omega |g|\cdot|f+g|^{p-1}\ \mathrm{d}V \quad (\text{由}|a+b|\leqslant|a|+|b|) \\
&\leqslant \|f\|_p\cdot\left\||f+g|^{p-1}\right\|_q + \|g\|_p\cdot\left\||f+g|^{p-1}\right\|_q \qquad (\text{由 Hölder 不等式}) \\
&= \left\||f+g|^{p-1}\right\|_q(\|f\|_p+\|g\|_p)
\end{aligned}$$

注意到 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Rightarrow q=\frac{p}{p-1}$，所以可以算出：

$$\begin{aligned}
\left\||f+g|^{p-1}\right\|_q &= \left(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)\cdot q}\ \mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega |f+g|^p\ \mathrm{d}V\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \left(\|f+g\|_p^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

所以上面的不等式就变成了：

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p-1}\cdot\Big(\|f\|_p+\|g\|_p\Big)$$

两边除以 $\|f+g\|_p^{p-1}$ 之后就得到了 Minkowski 不等式 (1).