关于 n 维空间上的拓扑的补充话题

陈铁钊

2024 年 12 月 12 日

说明

这篇笔记旨在补充一些有关 n 维空间上拓扑的一些结论，并且给出一些课后练习的解答和课上没有详细证明的解答。大家可以挑选自己感兴趣的内容阅读。

有关 $\mathbb{R}^n$ 中拓扑的一个比较奇怪的地方是，一些结论在直观上是相当显然的，但是它的证明却和直观相差甚远，或者有些结论在直观上是非常自然的，但实际上并不成立。我自己没有找到一个方便地跨越直观和证明的差异的办法。这或许只能依靠阅读并记忆各种证明，以达到“背会”的效果。

另外我个人认为有关连续函数原像这一部分可能会比较有用，或许大家可以稍微留意一下。

目录

1 空集是开集还是闭集？

在讨论开集和闭集的时候，一个简单但又容易被忽略的例外就是空集。

验证空集是闭集的容易的。注意到对任意的 $x \notin \emptyset$，x 的开邻域 $U_1(x)$ 和空集的交集为空，所以任何一点都是空集的外点，这样有

$$\overline{\emptyset} = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset.$$

这就说明了空集是个闭集。

我们按照定义来验证空集是否为开集时，会有一些小麻烦。我们要验证下面的陈述：

对任意的 $x \in \emptyset$，存在开球 $U_\delta(x)$，使得 $U_\delta(x) \in \emptyset$.

我们碰到一个麻烦是：验证的第一步需要取 $\emptyset$ 中的一个元素 x，但我们找不到这样的 x. 这使得问题有些棘手。为了处理这个问题，我们做出这样的规定：

如果一个命题形如“对任意 $x \in \emptyset$，有……”或者“如果 $x \in \emptyset$，则……”，那么我们始终认为这是个真命题。

一般来说，对一个形如“若 A 成立，则 B”的命题，如果 A 恒不成立（比如 A 是 $x \in \emptyset$），那么我们始终认为这样的命题是真命题。这样的命题被称为“虚真的 (vacuously true)”。

有了上面的解释之后，我们可以知道：

命题 1.1 空集 $\emptyset$ 是开集。

所以空集是一个既开又闭的集合。在 $\mathbb{R}^n$ 上，这样的集合只有 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}^n$ 这两个。

2 连续函数的原像

我们在这一节里仅使用开集的语言给出连续函数的一个等价描述。对于高等数学来说，这一等价描述的一个作用是证明一些集合是开集（或者闭集）[1]。

不过究其根本，这种办法还是依赖于课上给出的集合为开（闭）集的充分必要条件。因此即使没能完全理解这一节的内容，只要熟练使用课上给出的充要条件，也能解决大部分开（闭）集相关的问题。

[1]感谢龚致宾助教提醒我还有这种证明集合是开（闭）集的办法。

我们首先给出“原像”的定义：

定义 2.1 (原像) 对一个映射 $f: X \to Y$，我们称 $y \in Y$ 的原像是集合：

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

也就是找到所有的 x，使得 x 被映为了 y.

对一个集合 $Y_0 \subseteq Y$，称 Y_0 的原像为：

$$f^{-1}(Y_0) = \{x \in X \mid f(x) \in Y_0\}.$$

注意定义里的 y 和 Y_0 的选取是任意的，因此在 f 不是满射的时候，$f^{-1}(y), f^{-1}(Y_0)$ 有可能是空集。另外这里的记号和反函数的记号有相同，大家在其他文本里注意区分 f^{-1} 到底表示原像还是表示反函数。

例 2.1 对 $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$，有

$$f^{-1}([-2,-1]) = \emptyset, \quad f^{-1}([-1,0]) = \{0\}, \quad f^{-1}([-1,2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

例 2.2 对一个函数 $f: D \to \mathbb{R}$，这里 D 是 $\mathbb{R}$(或 $\mathbb{R}^n$ 中区域)，f 的图像

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

可以写成 0 关于函数

$$F(x,y) = y - f(x), \quad (x,y) \in D \times \mathbb{R}$$

的原像 $F^{-1}(0)$.

我们下面陈述最主要的定理，这一定理可以被简记为“对连续函数，开集的原像还是开集，闭集的原像还是闭集”。

定理 2.1 设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域，$f\colon D \to \mathbb{R}^m$ 为一个映射，那么以下三个条件彼此等价：

(1) f 处处连续。

(2) 对 $\mathbb{R}^m$ 中任意的开集 U，它的原像 $f^{-1}(U)$ 形如 $U' \cap D$，其中 U' 为 $\mathbb{R}^n$ 中某个开集。

(3) 对 $\mathbb{R}^m$ 中任意的闭集 K，它的原像 $f^{-1}(K)$ 形如 $K' \cap D$，其中 K' 为 $\mathbb{R}^n$ 中某个闭集。

证明 1 我们先证明 (1)$\Leftrightarrow$(2).

先设 (2) 成立。给定 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$. 这时，集合

$$f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$$

形如 $U' \cap D$，其中 U' 是 $\mathbb{R}^n$ 的含有 x 的开集（因为 $U_\varepsilon(f(x))$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中开集），从而 U' 包含某一个以 x 为中心的、以 δ 为半径的球 $U_\delta(x)$. 对这个球中任意一点 x'，有 $f(y)$ 在以 $f(x)$ 为中心、以 ε 为半径的球中，也就是：

$$\forall x' \in D, |x - x'| < \delta, \text{有 } |f(x') - y| < \epsilon.$$

故 f 连续。

反之，设 $\varepsilon - \delta$ 条件满足，令 V 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个开集，我们证明 $f^{-1}(V)$ 在 D 中是形如 $U' \cap D$. 设 x 是 $f^{-1}(V)$ 的一个点。因为 $f(x) \in V$，所以存在一个以 $f(x)$ 为中心的、以 ε 为半径的球 $U_\varepsilon(f(x))$ 包含于开集 V。根据 $\varepsilon - \delta$ 条件，存在以 x 为中心、以 δ 为半径的球 $U_\delta(x)$，使得 $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\epsilon(f(x))$. 于是 $U_\delta(x) \cap D$ 是包含于 $f^{-1}(V)$ 的点 x 的一个邻域，因此 $f^{-1}(V)$ 是形如 $U' \cap D$，其中 $U' = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_{\delta_x}(x)$.

我们再说明 (2)$\Leftrightarrow$(3). 这只需要注意到下面这件事：

$$f^{-1}(E^c) = \left(f^{-1}(E)\right)^c \cap D, \forall E \subseteq \mathbb{R}^m.$$

这样，如果假定 (3) 成立，那么对任意开集 $U \subseteq \mathbb{R}^m$，U^c 为闭集，因此有：

$$\begin{aligned} f^{-1}(U^c) = K' \cap D &\Longleftrightarrow \left(f^{-1}(U)\right)^c = (K')^c \cap D \\ &\Longleftrightarrow f^{-1}(U) = (K')^c \cap D. \end{aligned}$$

取 $U' = (K')^c$ 就得到了 (3).

反之，如果假定 (2) 成立，那么对任意闭集 $K \subseteq \mathbb{R}^m$，K^c 为开集，因此有：

$$\begin{aligned} f^{-1}(K^c) = U' \cap D &\Longleftrightarrow \left(f^{-1}(K)\right)^c = (U')^c \cap D \\ &\Longleftrightarrow f^{-1}(K) = (U')^c \cap D. \end{aligned}$$

取 $K' = (U')^c$ 就得到了 (2).

注意到在 $\mathbb{R}^m$ 中，单点集一定是闭集，所以从上面的定理可以得到下面的推论，它在证明集合为闭集的时候是相当有用的。上面的定理和下面的推论都可以不加证明地使用。

推论 2.1 设 $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ 是连续函数，那么 f 的零点集：

$$\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \overrightarrow{0}\}$$

一定形如 $K \cap D$，其中 K 是闭集。

和我们前面的例子结合，我们会得到：

例 2.3 对定义在闭集 D 上的连续函数 $f\colon D \to \mathbb{R}$，函数

$$F(x, y) = y - f(x), \quad (x, y) \in D \times \mathbb{R}$$

定义在闭集 $D \times \mathbb{R}$ 上。这时根据上面的推论：它的零点集——也就是函数 f 的图像 Γ_f 是两个闭集的交，因此也是闭集。[2]

例 2.4 我们取函数 $F(x, y) = xy - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$. 那么 $F(x, y)$ 的零点恰好为反比例函数的图像：

$$\{(x, 1/x) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$$

这样根据上面的推论可以知道：反比例函数的图像是闭集[3]。

2.1 多讲几句

从数学上讲，这一节的定理2.1说明了，我们在叙述连续性时可以摆脱掉“极限”这一语言，而仅仅依赖于“开集”这一语言。这对数学家来说是相当有用的消息，因为这样他们可以将连续性推广到更一般的情形——假如我们知道了一个空间 X 上哪些集合是开集，那我们就可以定义这个空间上的连续函数。

这里仍然会有一个问题：对于 $\mathbb{R}^n$，我们的开集是用距离和极限来定义的，但对一般的空间，我们不知道能不能定义两个点的距离，更遑论极限了。解决这个问题会借助于所谓的开集公理（即补充题 11.16）：

[2]这一例子正是课上证明的一个结论。

[3]这正好是课上最后一题构造反例时需要用到的。

定理 2.2 $\mathbb{R}^n$ *中的开集满足下列性质：*

1) $\emptyset, \mathbb{R}^n$ *是开集。*

2) 任意多个开集的并集是开集。

3) 有限多个开集的交集是开集。

于是数学家们眼睛一闭，说：只要一个集合 X 的一些子集 $\tau = \{U_\alpha | U_\alpha \subseteq X\}$ 满足上面定理的三条性质，那么就把每个 U_α 叫做一个开集。这样从逻辑上来讲，我们对任何每个 (X, τ)，都可以讨论上的连续函数和连续映射。而研究一般的集合 (X, τ) 上的连续函数的学问就被叫做拓扑学（更严格来说叫点集拓扑学）。

我们要想指出的是：尽管开集这一套语言给连续函数做了非常好的推广（并且“点集拓扑学”这个词听起来也很“深奥”），但我们大部分时候碰到的空间只有两种——标准欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集、定义了距离的空间，哪怕对很多数学工作者来说也是这样。所以从“有用性”的角度来看，（点集）拓扑学究竟有多大的用处，是需要打上一个问号的。

另外也有部分数学家认为极限比开集更加重要（在高等数学里可以很明显地看出这一点），因此选择推广极限的概念，使得没有定义距离时也可以定义极限[4]。他们由此说明了极限是比拓扑更加“精细”的一种结构。不过对高等数学来说，这一套理论是和点集拓扑一样的“抽象废话”。

3 集合的内部的闭包

我们在这一节构造集合 $E \subseteq \mathbb{R}$，使得

$$\overline{E^\circ} \cup \overline{(E^c)^\circ} \neq \mathbb{R}.$$

在给出构造前，我们先对符号 $\overline{E^\circ}$ 做出简单说明。这个符号的含义是指：先取 E 的内点集（我们暂时用另一个字母 F 来表示它），然后取 F 的闭包。直接想出描述 $\overline{E^\circ}$ 里的点的方式是比较困难的，我们这里只能做字面意义上的理解：把这个集合视为“取内点”和“取闭包”这两种操作的“复合”。

回到上面的反例，我们取 E 为有理数集 $\mathbb{Q}$. 这时候 $\mathbb{Q}$ 和它的补集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 都没内点。这是因为，对任何一点 x，包含它的任意一个开区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 里既包含

[4]这样的空间被称为收敛空间 (convergence space).

一个无理数（这样 x 不是 $\mathbb{Q}$ 的内点），也包含一个有理数（这样 x 不是 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 的内点）。

这样上面式子的左边就变成了 $\overline{\emptyset}\cup\overline{\emptyset}$. 我们在第一节里验证了空集的闭包还是空集，所以有：

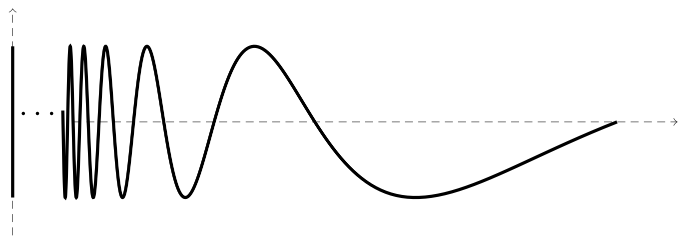
$$\overline{\mathbb{Q}^\circ}\cup\overline{(\mathbb{Q}^c)^\circ}=\emptyset\neq\mathbb{R}.$$

这说明 $\mathbb{Q}$ 确为一个反例。

4 sin(1/x) 的图像的闭包不连通

我们在这一节严格证明为何集合

$$E=\{(x,\sin\frac{1}{x})\mid 0<x<\frac{1}{\pi}\}\cup\{(0,y)\mid -2\leq y\leq 1\}$$



不是连通的。

我们采取反证法，假设它是连通的，那么我们可以找到一条曲线（也就是一个连续映射）：

$$c(t)=(x(t),y(t)),\quad t\in[0,1]$$

使得它连接 y 轴上的一个点 $(0,\eta)(|\eta|\leqslant 1)$ 和图像上的点 $(\frac{1}{\pi},0)$，也就是 $c(0)=(0,\eta),c(1)=(\frac{1}{\pi},0)$. 另外为了排除掉一些“奇异”情形，我们假设在任何一个以 0 为起点的区间 $[0,t_0)$ 上 $x(t)$ 都不恒为 0（否则我们可以把这一段曲线去掉）。

那么根据 γ 的连续性，对 $\epsilon=\frac{\max\{|\eta-1|,|\eta+1|\}}{2}$，可以找到一个 δ，使得：

$$|x(t)|<\epsilon,|y(t)-\eta|\leqslant\epsilon,\quad\forall t\leqslant\delta. \tag{1}$$

因为 $x(t)$ 在 $[0,\delta)$ 上不恒为 0，我们可以取 $t_0<\delta$，使得 $x(t_0)>0$. 这时，对函数 $x(t)$ 在区间 $[0,t_0]$ 上使用介值定理，我们可以找到一个 $0\leqslant t_1\leqslant t_0$ 使得：

$$x(t_1)=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\text{或}\frac{1}{2k\pi-\frac{\pi}{2}},\quad\text{（其中}k\text{是一个充分大的正整数）}.$$

这样 $y(t_1)=1$或-1，我们可以适当选择一个 t_1 的值，使得

$$|y(t_1)-\eta| \geqslant \max\{|\eta-1|,|\eta+1|\} > \epsilon.$$

注意到 t_1 也满足 $t_1\in[0,\delta)$，这就和条件 (1) 矛盾了。

5 点列的极限与点列坐标分量的极限

我们在这一节给下面的定理的另一种看法。

定理 5.1 设 $\{a_n=(x_n,y_n)\}_{n\geq 1}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中收敛点列，那么 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 收敛到某个点 $a=(l_x,l_y)$ 的充分必要条件是它的每个坐标分量 $\{x_n\}_{n\geq 1},\{y_n\}_{n\geq 1}$（作为实数集中的点列）收敛到极限点的对应的坐标分量。

注 5.1 与上面定理类似，我们对函数极限、向量值函数连续性等（不包括可微性，可微性有反例）可以写出类似的定理，这些定理也可以用同样的方式看待。

我们在这里只做一个很小的转变：我们不将定理中的 x_n 看作 a_n 的坐标分量，而是看成关于 a_n 的一个函数。具体来说，我们取 $\mathbb{R}^2$ 到两条坐标轴的投影：

$$\begin{aligned} p_1\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

那么 x_n 就是 $p_1(a_n)$，y_n 就是 $p_2(a_n)$. 这样上面的定理就变成了：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} p_i(a_n) = p_i(a), i=1,2$$

$$\lim_{n\to\infty} p_i(a_n) = p_i(a), i=1,2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

在改写之后，我们可以很容易看出“$\Rightarrow$”方向是成立，因为投影映射 p_1,p_2 是连续的。不过要解释“$\Leftarrow$”方向为何成立仍然有些麻烦——粗略来说，是因为 $\mathbb{R}^2$ 上的收敛序列足够多[5]。

[5]技术上讲，是因为 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的标准拓扑正好是（或者不细于）由 $\mathbb{R}$ 上拓扑给出的乘积拓扑，不过这种说法太过专业了。

在这里我们不进入对这一定理的更加深入的解释，而是回到我们做出的转变上。我们对这一定理看法的转变可以被简要概括为这样一件事：在处理连续性相关的问题式，将一些依靠语言描述的操作重写为映射，然后利用映射的连续性证明结论。这种说法或许有些抽象，我们下面再给出一个例子，考虑下面的命题：

命题 5.1 设 $f, g\colon D \to R$ 是两个连续函数，其中 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个区域。那么它们的和 $f+g$ 也是连续的。

教材上的证明办法是，直接计算 $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}(f(\vec{x})+g(\vec{x}))$，利用“和的极限等于极限的和”来说明它为 $f(\vec{x}_0)+g(\vec{x}_0)$. 不过我们这里采取另一种看法[6]。

我们将两个数的加法看成一个映射：

$$\begin{aligned} A\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned}$$

并且选取映射 $F(\vec{x}) = (f(\vec{x}), g(\vec{x}))$. 这时候 $f+g$ 可以写成 $A\circ F$. 因为 F 和 A 都是连续的（注意，我们证明 A 连续时还是需要用到极限的和等于和的极限），所以它们的复合也是连续的，这样就完成了证明。

6 附注

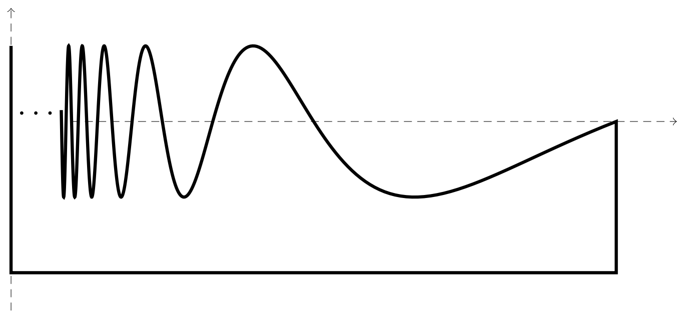
一般来说，n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 上集合的内点、外点和边界点是相当复杂的事情[7]。光是 $\mathbb{R}^2$ 上就可以定义一许多怪异的集合：

- “拓扑学家的正弦曲线”：

$$\begin{aligned} E_1 = &\{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x < \frac{1}{\pi}\} \cup \{(x,-2) \mid 0 \le x \le \frac{1}{\pi}\} \\ &\cup \{(0,y) \mid -2 \le y \le 1\} \cup \{(\frac{1}{\pi}, y) \mid -2 \le y \le 0\} \end{aligned} \tag{2}$$

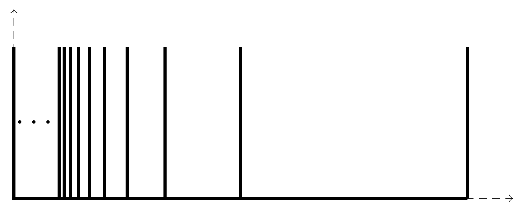
[6] 单从技术上讲，这种看法和教材的证明没有差别，它们都需要用到极限的和等于和的极限，这种看法只有在极限的语言“失效”的时候才会显出它的好处。

[7] 好消息是，在后面关于连续性、可微性的讨论里，我们只会涉及到性质最好的一类集合：$\mathbb{R}^n$ 中的区域。



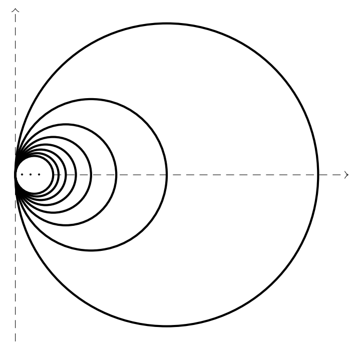
- “拓扑学家的梳子”:

$$
\begin{aligned}
E_2 = & \{(0,y) \mid 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,0) \mid 0 \le x \le 1\} \\
& \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{(\frac{1}{n}, y) \mid 0 \le y \le 1\}
\end{aligned}
$$



- “无限耳环”:

$$E_3 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{(x,y) \mid (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}.$$



这些集合在一些特殊点处的“形状”和我们通常想象中空间的形状并不一致，因此常常被用于构造各种反例。这些图形也提醒我们，许多依靠直观给出的结论对于 $\mathbb{R}^n$ 中一般的集合并不一定成立。