题目：设函数 $f:(a-C,a+C)\to\mathbb{R}$ 在 a 处连续，且存在 $k\neq 0,\pm 1$ 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+kh)-f(a+h)}{k}=L$$

证明：f 在 a 处可微，且 $f'(a)=\frac{1}{k-1}L.$

证明: 为了书写的方便，我们对函数做平移，使得 $a=0$. 不妨设 $|k|>1$，那么由条件可得：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\mathrm{s.t.}\forall|h|\leq\delta,|\frac{f(kh)-f(h)}{k}-L|<\varepsilon.$$

这样，对任意的 $|h|<\delta$，以及任意正整数 n，我们有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(h)-f(a)}{h}-\frac{1}{k-1}L\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{f(\frac{1}{k^{i-1}}h)-f(\frac{1}{k^i}h)}{h}-\frac{1}{k-1}L+\frac{f(\frac{1}{k^n}h)-f(0)}{h}\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k^i}(\frac{f(\frac{1}{k^{i-1}}h)-f(\frac{1}{k^i}h)}{\frac{1}{k^i}h}-L)+\sum_{i=1}^{n}\frac{L}{k^i}-\frac{1}{k-1}L\right| \\ &\quad+\frac{1}{|h|}\left|f(\frac{1}{k^n}h)-f(0)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|k|^i}\left|\frac{f(\frac{1}{k^{i-1}}h)-f(\frac{1}{k^i}h)}{\frac{1}{k^i}h}-L\right| \\ &\quad+\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k^i}L-\frac{1}{k-1}L\right|+\frac{1}{|h|}\left|f(\frac{1}{k^n}h)-f(0)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|k|^i}\left|\frac{f(\frac{1}{k^{i-1}}h)-f(\frac{1}{k^i}h)}{\frac{1}{k^i}h}-L\right| \\ &\quad+\frac{1}{|k|^n}\cdot\left|\frac{L}{k-1}\right|+\frac{1}{|h|}\left|f(\frac{1}{k^n}h)-f(0)\right|\end{aligned}\tag{1}$$

根据 $|k|>1$ 可知 $|\frac{1}{k^i}h|<\delta$，这样上式右边的求和中的每一项都不超过 $\frac{1}{|k|^i}\varepsilon$，所以有：

$$\begin{aligned}(1)\text{ 右边} &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|k|^i}\varepsilon+\frac{1}{|k|^n}\cdot\left|\frac{L}{k-1}\right|+\frac{1}{|h|}\left|f(\frac{1}{k^n}h)-f(0)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|k|-1}\varepsilon+\frac{1}{|k|^n}\cdot\left|\frac{L}{k-1}\right|+\frac{1}{|h|}\left|f(\frac{1}{k^n}h)-f(0)\right|\end{aligned}\tag{2}$$

注意到 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{k^n}h)=0$，由 f 在 a 处连续可知

$$\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{k^n}h)=f\big(\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{k^n}h)\big)=f(0)$$

故可以取 $n>N_1$，使得（注意到这里 h 暂时是不变的）

$$\left|f(\frac{1}{k^i}h)-f(0)\right|\leqslant|h|\varepsilon$$

又可以取 $n > N_2$ 使得 $\frac{1}{|k|^n} < \varepsilon$，将它和上面的不等式代入到 (2) 知：

$$(1)\ \text{右边} \leqslant \frac{1}{|k|-1}\varepsilon + \left|\frac{L}{k-1}\right|\varepsilon + \varepsilon = C_{k,L}\varepsilon.$$

其中 $C_{k,L}$ 是一个仅依赖于 k 和 L 的常数。所以我们最终得到了；

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h} - \frac{1}{k-1}L\right| \leqslant C_{k,L}\varepsilon, \forall |h| < \delta. \tag{3}$$

根据 ε 的任意性知：

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{L}{k-1}. \tag{4}$$