雅可比行列式的计算与微分的形式运算

陈铁钊

2025 年 2 月 28 日

我们在这篇笔记里简单回顾一下通常计算雅可比行列式的办法，然后给出一种“形式地”计算雅可比行列式并推导重积分变量替换的办法。请注意，除第一节以外的所有推导都是不严格的（甚至可能是错误的）。

目录

1 通常的办法

正常来说，计算雅可比行列式都绕不开这两个步骤：

- 计算出一个方阵 $\mathscr{D}$.
- 计算 $\mathscr{D}$ 的行列式。

比如课上采用的办法是：

(1) 对换元 $x = x(u, v), y = y(u, v)$，写出全微分

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = A(u,v)\mathrm{d}u + B(u,v)\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y = C(u,v)\mathrm{d}u + D(u,v)\mathrm{d}v \end{cases} \tag{1}$$

注意这里 A,B,C,D 实际上是 x,y 中的某一个关于 x,y 中某一个的偏导。

(2) 等式右侧 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 的系数会给出一个矩阵

$$\mathscr{D}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$

(3) 计算矩阵 $\mathscr{D}$ 的行列式 $\det\mathscr{D}=AD-BC$，它就是雅可比行列式 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

不过如果定义了适当的“运算”，我们有另一种计算雅可比行列式的办法。

2 微分的形式运算

在微积分的记号里，$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}f$ 往往被理解为形式记号，函数的全微分给出了两个形式记号相加等于第三个的例子，即

$$\mathrm{d}f=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

现在我们允许它们相乘[1]，也就是 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的乘积会是一个（2 阶的）形式记号 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中“$\wedge$”表示乘法运算（对这个记号感到不适的读者可以把它替换为通常的“$\cdot$”或“$\times$”）。此外，我们要求这两个形式记号的乘积满足下面三个性质：

- 乘法分配律和乘法结合律。
- “反交换律”，即交换乘积的顺序会改变符号，例如：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y&=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x&=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x\quad(\Leftrightarrow\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=0)\\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y&=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y\quad(\Leftrightarrow\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y=0)\end{aligned}\tag{2}$$

- 函数可以拿到乘积的外面，例如 $\mathrm{d}x\wedge(f\cdot\mathrm{d}y)=f\cdot(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$.

[1]或许部分读者会在这里感到迷惑：原本 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 就是两个形式记号，它们相乘到底有什么意义？事实上，我们有一种把 $\mathrm{d}f$ 定义成具体的数学对象的办法（这种对象被称为“微分形式”），并且在这样的定义下，后面的所有形式计算都会变成严格成立的等式。考虑到篇幅有限以及相关内容比较专业，我们不会具体介绍，感兴趣或者学有余力的读者可以自行去查阅有关微分形式的内容，例如《数学分析》(卓里奇著)、《经典力学的数学方法》(阿诺德著) 等书中给出了相对完整的介绍，其他许多关于微分几何的书籍中也可能会有介绍。

这时候我们来看变量替换。我们做变量替换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$，那么函数 x, y 的全微分给出了形式记号之间的的等式：

$$\mathrm{d}x = A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}y = C\mathrm{d}u + D\mathrm{d}v.$$

注意这一表达式和 (1) 是一样的，所以这个变量替换的雅可比行列式和前面计算的相同，即 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = AD - BC$.

接下来我们把上面两个等式相乘，并利用我们前面定义的规则化简：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= (A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v) \wedge (C\mathrm{d}u + D\mathrm{d}v) \\
&\overset{\text{分配律}}{=} A\mathrm{d}u \wedge (C\mathrm{d}u + D\mathrm{d}v) + B\mathrm{d}v \wedge (C\mathrm{d}u + D\mathrm{d}v) \\
&\overset{\text{分配律}}{=} AC\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}u + AD\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v + BC\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}u + BD\mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}v \\
&\overset{\text{反交换律}}{=} AC \cdot 0 + AD\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v + AD(-\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v) + BD \cdot 0 \\
&= (AD - BC)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

这时雅可比行列式自动地出现在了系数里。此外我们还得到了

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v. \tag{3}$$

上面的等式和变量替换的公式只差一步了：如果我们认为重积分 $\iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 里的 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 就是 $|\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y|$（这里竖线表示绝对值），那么形式上就有：

$$\begin{aligned}
\iint f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint f \cdot |\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y| &\overset{\text{由}(3)}{=} \iint f \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v\right| \\
&= \iint f \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| |\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v| \\
&= \iint f \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

在不考虑积分区域的情况下，这就是重积分变量替换的公式。

2.1 另一个“推论”

从等式 (3) 还可以形式地推导别的公式。例如当 $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ 是微分同胚时（即从 x, y 可以反解出 u, v），那么这时候 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ 有定义，且类似 (3) 可以写出

$$\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \frac{D(u,v)}{D(x,y)}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

这样就有

$$\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \frac{D(u,v)}{D(x,y)}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \overset{由 (3)}{=} \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

比较系数就会得到

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = 1.$$

请注意，在这个等式里，我们暂时无法确定到底是哪两个点处的雅可比行列式之积为 1. 事实上，这一等式的更严格陈述就是课后补充题的最后一题：

结论 2.1 设 D 和 $\tilde{D}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的两个区域。假设存在一个从 D 到 $\tilde{D}$ 的双射 $(x,y) \mapsto (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$，记为 $\Phi := (\varphi_1, \varphi_2)$。记其逆映射为 $\Psi := (\psi_1, \psi_2)$，也就是说它满足 $\Psi \circ \Phi$ 为 D 上的恒同映射，用分量形式写即为：对任意 $(x,y) \in D$,

$$\psi_1(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)) = x, \quad \psi_2(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)) = y.$$

假如 $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ 在 D 上是 C^1 的，且逆映射 $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ 在 $\tilde{D}$ 上也是 C^1 的。任取 $(x_0, y_0) \in D$，令 $(\xi_0, \eta_0) := \Phi(x_0, y_0) = (\varphi_1(x_0, y_0), \varphi_2(x_0, y_0))$。则有 *Jacobi* 行列式的恒等式

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \left.\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\xi,\eta)}\right|_{(\xi_0,\eta_0)} = 1.$$

3 高维情形

我们可以推广上面的办法到 $\mathbb{R}^3$ 乃至一般的 $\mathbb{R}^n$，并且能形式地算出正确的公式。例如在 $\mathbb{R}^{\nvDash} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ 中，我们的反交换律会变成：

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$$

这时对换元 $Y(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$，经过一些计算后会有

$$\mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \mathrm{d}y_3 = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.$$

于是类似上面，我们可以形式地写出换元公式。