1　凸函数的连续性

我们给出下面的命题的证明：

命题 1.1 设一个定义在区间 I 上的函数 f 是凸的，也就是

$$f(t\cdot x_1+(1-t)\cdot x_2)\leqslant t\cdot f(x_1)+(1-t)\cdot f(x_2),\forall x_1,x_2\in I,t\in[0,1]. \tag{1}$$

那么 f 在 I 的内部一定是连续函数。

注 1.1 这里“I 的内部”这一要求是必要的，因为 f 的确可能在 I 的端点处不连续，比如考虑闭区间 $[0,1]$ 上的函数：

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(0,1)\\ 1, & x=0,1\end{cases}$$

那么这时稍作讨论（即讨论 x_1,x_2 是否为 $0,1$）可以知道，不等式 *(1)* 仍然成立，所以这是一个在定义域端点不连续的凸函数。

我们来看上面命题的证明。我们只需要验证 f 在每一点 x_0 处连续即可。这时可以取 $\delta>0$，使得 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 包含在 I 中。

对 $0\leqslant h<\delta$，我们在不等式 (1) 中取 $x_1=x_0,x_2=x_0+\delta,t=1-\frac{h}{\delta}$ 可得：

$$f(x+h)\leqslant f(x_0)+\frac{h}{\delta}(f(x_0+\delta)-f(x_0))$$

也就是

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant\left(\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}\right)\cdot h \tag{2}$$

又取 $x_1=x_0-\delta,x_2=x_0+h,t=\frac{h}{h+\delta}$ 可得：

$$(h+\delta)f(x_0)\leqslant\delta\cdot f(x_0+h)+h\cdot f(x_0-\delta)$$

也就是

$$f(x_0+h)-f(x_0)\geqslant\left(\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta}\right)\cdot h \tag{3}$$

将不等式 (2) 和 (3) 结合起来，我们就知道：

$$C_{x_0,\delta}\cdot h\leqslant f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant C'_{x_0,\delta}\cdot h,\forall 0\leqslant h<\delta \tag{4}$$

其中 $C_{x_0,\delta}, C'_{x_0,\delta}$ 是两个仅依赖于 f, x_0, δ 的常数。在上面的不等式两边令 $h \to 0+0$，就得到了：

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \tag{5}$$

也就是 f 在 x_0 处右连续。

类似的，可以证明 f 在 x_0 处左连续[1]。因此 f 在 x_0 处连续。

这样，我们就完成了证明。

注 1.2 在证明不等式 *(2)* 和 *(3)* 时 x_1, x_2, t 选取似乎有些刻意，主要原因是我们实际上将两个结论的证明揉在了一起：一个是我们的不等式 *(2)(3)*；另一个是：

“在凸函数的图像里，割线的斜率是‘单调递增’的。”[2]

事实上，利用这个结论结论可以很快得到命题*1.1*的直观证明：$|f(x_0+h) - f(x_0)|$ 可以写成

$$h \cdot \text{以}(x_0, f(x_0))\text{为端点的割线的斜率}.$$

在 h 有界的时候，割线斜率的“单调性”会告诉我们后一项是有界的，也就是上文中的不等式 *(4)* 成立，这样就知道 f 是连续的。

[1]这里也可以这样处理：我们将 f 的图像沿着 $x = x_0$ 作对称，也就是令 $g(x) = f(2x_0 - x)$，那么 g 仍然是个凸函数（为什么），所以根据上面的论证可知 g 在 x_0 处右连续，而这等价于 f 在 x_0 处左连续（为什么）。

[2]这一结论的一种严格陈述见伍胜健《数学分析》（第一版）219 页的不等式 (5.4.2)，事实上我们还可以写出许多类似的不等式。