题目：设一个在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可微的函数 f 满足：$f'(0)=f'(1)$，$|f''(x)|\leqslant 1,\forall x\in[0,1]$. 证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\leqslant\frac{1}{12}$$

证明 0.0.1 我们在这里假定 $f''(x)$ 是可积的。

利用分部积分，有：

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}&=xf(x)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 x\cdot f'(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\\&=f(1)-\frac{f(0)+f(1)}{2}-\int_0^1 x\cdot f'(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{f(1)-f(0)}{2}-\int_0^1 x\cdot f'(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1}{2}f'(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 x\cdot f'(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(\frac{1}{2}-x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}\frac{1}{2}\left(x-x^2\right)\\&=\frac{1}{2}(x-x^2)f'(x)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{1}{2}(x-x^2)f''(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1}{2}(x^2-x)f''(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

根据 $f''(x)\leqslant 1$ 可知：

$$\frac{1}{2}(x-x^2)f''(x)\leqslant\left|\frac{1}{2}(x-x^2)\right|\cdot|f''(x)|\leqslant\frac{1}{2}(x-x^2).$$

将这一不等式代入上面的式子可得：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{f(0)+f(1)}{2}\leqslant\int_0^1\frac{1}{2}(x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}.$$

这样就完成了证明。

注 0.1 在证明过程中我们假定了 f'' 可积，也就是一个函数 g 的导数是可积的。这在一般情形并不成立，一个例子是

$$g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

它的导数在 $[-1,1]$ 上无界，因此不是黎曼可积的。即使我们要求 g 的导数 g' 有界，我们仍然可以找到反例[1]。

考虑到上面的证明是如此的简洁，我们有理由相信这只是出题人无意中忽略了 f'' 可积这一条件。不过即使去掉 f'' 可积，我们仍然有办法证明这一不等式。

一种办法是将分部积分的证明过程改进一下，变成这道题需要的证明。我们取积分 $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}\frac{1}{2}\left(x-x^2\right)$ 的一个黎曼和，然后使用*Abel* 变换整理这个黎曼和：

$$
\begin{aligned}
S(T)=&\sum_{i=1}^{N} f'(\xi_i)\left(\frac{1}{2}(x_i-x_i^2)-\frac{1}{2}(x_{i-1}-x_{i-1}^2)\right)\\
=&f'(\xi_N)\cdot\frac{1}{2}(x_N-x_N^2)-f'(\xi_1)\cdot\frac{1}{2}(x_0-x_0^2)\\
&-\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{2}(x_i-x_i^2)\left(f'(\xi_i)-f'(\xi_{i-1})\right)\\
=&-\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{2}(x_i-x_i^2)\left(f'(\xi_i)-f'(\xi_{i-1})\right)
\end{aligned}
$$

这时候根据 *Lagrange* 中值定理，有 $|f'(\xi_i)-f'(\xi_{i-1})| = |f''(\eta_i)|\cdot(\xi_i-\xi_{i-1}) \leqslant \xi_i-\xi_{i-1}=\Delta\xi_i$，将这一不等式代入上面的式子就有：

$$
S(T)\leqslant\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}(x_i-x_i^2)\Delta\xi_i
$$

在两边令 $\lambda(T)\to 0$ 就能得到 $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}\frac{1}{2}\left(x-x^2\right)\leqslant\frac{1}{12}$.

另一种办法就是使用更加困难的定理。首先根据 $|f''(x)|\leqslant 1$ 和 *Lagrange* 中值定理可知，$f'(x)$ 是 *Lipschitz* 连续的。而我们有[2]：

定理 0.1 一个 *Lipschitz* 连续的函数 g 一定是几乎处处可微的，并且有

$$
\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} g'(x)\mathrm{d}x = g(b)-g(a).
$$

这里 $\int_{[a,b]}^{\mathcal{L}}$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上的 *Lebesgue* 积分。

这样我们证明中用到的变形在 *Lebesgue* 积分的意义下仍然是成立的。

[1]见 StackExchange 上关于函数导数具有正测度的不连续点集的讨论，以及关于函数导数不连续性的讨论。根据 Lebesgue 定理（一个函数黎曼可积当且仅当它的不连续点的测度为 0），这些讨论中给出的函数的导数不是黎曼可积的

[2]见《实变函数》（周民强著）或香蕉空间中的条目微积分基本定理。