1. (24 分) 判别下列正项级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}\right)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\arctan[2+(-1)^n]}{n^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\arctan\frac{1}{n})^{\alpha}\frac{1}{\ln(1+n+n^2)}$, $\alpha>0$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}$

解：对于 (1)，利用 $\ln(1+x)$ 和 $\sin x$ 在 0 处的 Taylor 展开，有

$$\begin{aligned}\ln\frac{1}{n}-\ln(\sin\frac{1}{n})&=-\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=-\ln\left(1+\left(n\sin\frac{1}{n}-1\right)\right)\\&=\ln\left(1+\left(n(\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3}))-1\right)\right)\\&=\ln\left(1+\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)=\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

因此 $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{n}-\ln(\sin\frac{1}{n})\right)/\frac{1}{6n^2}=1$，根据比较判别法知原级数收敛。

对于 (2)，注意到 $0\leqslant\arctan(2+(-1)^n)\leqslant 2$，所以 $0\leqslant\frac{n!\arctan[2+(-1)^n]}{n^n}\leqslant\frac{2n!}{n^n}$. 利用 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$ 或比值判别法可证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛，所以原级数收敛。

对于 (3)，注意到 $\arctan\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$ 和 $\ln(1+n+n^2)\sim\ln(n^2)=2\ln n$，所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left((\arctan\frac{1}{n})^{\alpha}\frac{1}{\ln(1+n+n^2)}\right)/\frac{1}{2n^{\alpha}\ln n}=1$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n^{\alpha}\ln n}$ 在 $\alpha>1$ 时收敛，在 $\alpha\leqslant 1$ 时发散，所以原级数在 $\alpha>1$ 时收敛，在 $\alpha<1$ 时发散。

对于 (4)，注意到 $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$，所以

$$(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}=e^{n^2\ln\cos n^{-1/2}}=e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)}=e^{n^2\left(-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)}=e^{-\frac{n}{2}+o(n)}.$$

在 n 充分大时，有 $o(n)\leqslant\frac{n}{4}$，进而 $(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^{n^2}=e^{-\frac{n}{2}+o(n)}\leqslant e^{-\frac{n}{4}}$. 根据比较判别法知原级数收敛。

2. (20 分) 根据 $\alpha>0$ 的取值讨论级数敛散性。若非正项级数需讨论条件收敛和绝对收敛性。

$$(1)\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}})\qquad(2)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{\alpha}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

解：对于 (1)，由于 $\left|\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}})\right|\sim\left|\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right|=\frac{1}{n^{\alpha}}$，所以由比较判别法知，级数 $\alpha>1$ 时绝对收敛，在 $\alpha\leqslant 1$ 时不绝对收敛。下面讨论 $0<\alpha\leqslant 1$ 时级数

的收敛性。根据 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展开，有

$$\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha})=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}-\frac{1}{2n^{2\alpha}}+o(\frac{1}{n^{2\alpha}})$$

所以 $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha})-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)/\frac{1}{2n^{2\alpha}}=1$. 注意到 $\frac{1}{2n^{2\alpha}}>0$，所以根据比较判别法，$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha})-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ 在 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时收敛，在 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散。而对级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$，由 Leibnitz 判别法知，它一定收敛。所以级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha})-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

在 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时收敛，在 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散。所以原级数的敛散性为

$$\alpha>1:\text{绝对收敛};\qquad \frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1:\text{条件收敛};\qquad \alpha\leqslant\frac{1}{2}:\text{发散}.$$

对于 (2)，我们有 Taylor 展开：

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\alpha}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}&=e^{(\ln\alpha)/n}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\\&=1+\frac{\ln\alpha}{n}+\frac{(\ln\alpha)^2}{2n^2}-\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}\right)+o(\frac{1}{n^2})\\&=\frac{2\ln\alpha-1}{2n}+\frac{(2\ln\alpha)^2+1}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\alpha}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)/\frac{1}{n}=\frac{2\ln\alpha-1}{2}\neq 0,\quad \text{若}\alpha\neq\sqrt{e},\\&\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\alpha}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)/\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\qquad\qquad \text{若}\alpha=\sqrt{e}.\end{aligned}$$

注意到 $\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}>0$，所以由比较判别法知，原级数在 $\alpha=\sqrt{e}$ 时绝对收敛，在 $\alpha\neq\sqrt{e}$ 时发散。

3. (10 分) 求 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 在 0 处的 Taylor 展开，并求 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的值。

解：可以算出

$$f'(x)=-\frac{2}{1+4x^2}=-2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n4^nx^{2n}$$

逐项积分后得到

$$f(x)=f(0)-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

在取 $x=\frac{1}{2}$ 时，右侧级数为 $\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，由 Leibnitz 判别法知它收敛，因此根据幂级数的性质，有

$$\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}f(x)=f(\frac{1}{2})=0$$

也就是 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

4. (8 分) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$。

   解：构造函数（方式不唯一）$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}x^{3n-1}$. 注意到在 $x=1$ 时，右侧的级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$，由 Leibnitz 判别法知它收敛，因此根据幂级数的性质，右侧幂级数的收敛半径 $\geqslant 1$，且在 $(-1,1]$ 上收敛到一个连续函数。对 $f(x)$ 逐项求导得：

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{3n-2}=-\frac{x}{1+x^3},\quad \forall x\in(-1,1).$$

   所以可以算出

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}&=f(1)=\lim_{t\to1-0}f(t)=\lim_{t\to1-0}\left(f(0)+\int_0^t f'(x)\,\mathrm{d}x\right)\\&=\int_0^1-\frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{x+1}{3\,(x^2-x+1)}-\frac{1}{3\,(x+1)}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\ln 2}{3}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

5. (12 分) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上 2π 周期的奇函数。在 $[0,\pi]$ 上 $f(x)=x(\pi-x)$。

   (1) 证明：$\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}$；

   (2) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$。

   解：对于 (1)：略，直接计算 f 的 Fourier 系数，然后利用 f 可微且连续得出其 Fourier 级数处处收敛到 f.

   对于 (2)，由 Parseval 等式可算出 $\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^4}{15}$，也就是 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$. 因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$ 收敛（设其收敛到 S），所以在 $\sum_{n=1}^{2N}\frac{1}{n^6}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n)^6}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)^6}$ 中令 $n\to+\infty$ 得到：$S=\frac{S}{64}+\frac{\pi^6}{960}$，所以可以解出 $S=\frac{\pi^6}{945}$.

6. (8 分) 设 m, n 为常数，若反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n(1-e^{-x})}{(1+x)^m} \, \mathrm{d}x$$

收敛，求 m, n 的取值范围。

解；原积分收敛当且仅当 $\int_0^1 \frac{x^n(1-e^{-x})}{(1+x)^m} \, \mathrm{d}x, \int_1^{+\infty} \frac{x^n(1-e^{-x})}{(1+x)^m} \, \mathrm{d}x$ 均收敛。又有

$$\frac{x^n(1-e^{-x})}{(1+x)^m} \sim x^n(1-e^{-x}) \sim x^{n+1}, \quad (x \to 0)$$
$$\frac{x^n(1-e^{-x})}{(1+x)^m} \sim \frac{x^n}{(1+x)^m} \sim x^{n-m}, \qquad (x \to +\infty)$$

所以由比较判别法，原积分收敛当且仅当 $\int_0^1 x^{n+1} \, \mathrm{d}x, \int_1^{+\infty} x^{n-m} \, \mathrm{d}x$ 收敛，而后者当且仅当 $n+1 > -1$ 且 $n-m < -1$，即 $-1 < n < m-1$. 所以 m, n 的取值范围是 $-2 < n < m-1$.

7. (10 分) 判断广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{(\arctan x)\cdot(\ln x)}{x^2} \, dx$ 的敛散性。

解：被积函数在 0 处连续，所以只需考虑无穷积分的敛散性。注意到在 x 充分大时，$\ln x < x^{1/2}$，所以对充分大的 x，有 $0 \leqslant \frac{(\arctan x)\cdot(\ln x)}{x^2} \leqslant \frac{\arctan x}{x^{3/2}} \leqslant \frac{\pi}{2x^{3/2}}$. 所以根据比较判别法，原积分收敛。

8. (8 分) 设 $f(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} \, dx\right)^2$，$g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} \, dx$。证明：$f(t) + g(t) = \frac{\pi}{4}$，并由此计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$.

解：先考虑 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f+g)$. 因为 f 是光滑函数与连续函数的变上限积分的复合，且 $\frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{(1+x^2)} = -2te^{-t^2(1+x^2)}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，所以 f, g 均可微，且有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f+g) &= f'(t) + g'(t) = 2e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2} \, \mathrm{d}x + \int_0^1 -2te^{-t^2(1+x^2)} \, \mathrm{d}x \\ (x = ty) \quad &= 2e^{-t^2} \int_0^1 te^{-t^2y^2} \, \mathrm{d}y + \int_0^1 -2te^{-t^1(1+x^2)} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2te^{-t^1(1+y^2)} \, \mathrm{d}y + \int_0^1 -2te^{-t^1(1+x^2)} \, \mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

所以 $f(t) + g(t)$ 与 t 无关，进而 $f(t) + g(t) = f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

在 $f(t) + g(t) = \frac{\pi}{4}$ 中取 $t \to +\infty$，得到 $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi}{4} - \lim_{t\to+\infty} g(t)$，而由 $0 \leqslant \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} \leqslant e^{-t^2}$ 可知，$\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 0，所以

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

两边开方就得到 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.