使用格林公式证明布劳威尔不动点定理

陈轶钊

2025 年 3 月 21 日

在这篇笔记里，我们使用格林公式证明平面上布劳威尔 (Brouwer) 不动点定理[1]，也就是下面的定理：

定理 0.1 (二维布劳威尔不动点定理) *取 $\mathbb{R}^2$ 上闭单位圆盘 $D^2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$. 对 D^2 到自身的任何一个光滑映射*

$$f\colon D^2 \longrightarrow D^2$$

它一定有一个不动点，也就是存在 $p_0 \in D^2$ 使得 $f(p_0) = p_0$.

在上个学期中，或许大家已经见过了一维的布劳威尔不动点定理：

> *“对闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数 $f\colon [0,1] \to [0,1]$，一定存在 $x \in [0,1]$ 使得 $f(x) = x$.”*

这一结论经常作为高等数学的练习题出现，使用连续函数的介值定理可以很快证明它。但高维的问题看起来就要困难很多，因为我们没有合适的处理办法——不过格林公式提供了一个工具。

在开始证明前，我们不得不给读者道个歉：因为课程主题、时间和内容复杂程度等多种因素的限制，我们不能完整地介绍布劳威尔不动点定理的证明背后的理论，所以如果读者在阅读证明的过程中感到困惑（如“这个函数是怎么构造出来的？”或“为什么要做这一步？”），那是十分正常的。这篇笔记的主要作用不是提供新的知识，而只是展示这样一个事实：格林公式能成为处理有关空间形状的“困难”问题所需要的关键工具。

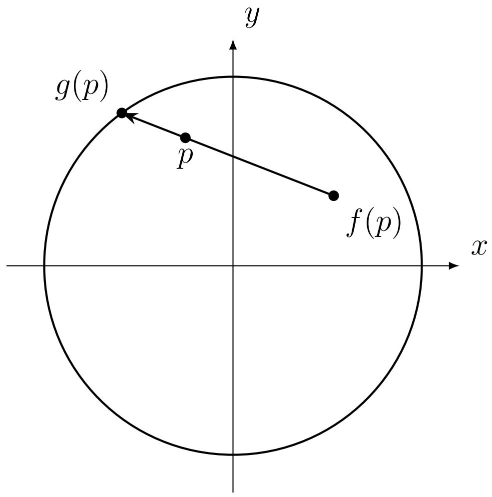
[1]严格来说，这叫光滑版本的二维布劳威尔不动点定理。定理的一般陈述是：对 $\mathbb{R}^n$ 中单位闭球 $D^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 1\}$，任何一个连续映射 $f\colon D^n \to D^n$ 一定有一个不动点。

1 定理的证明

为了不让读者被一些细节带偏，我们在正文里省略了一些计算过程和一些性质的验证，只给出证明主要步骤。一些证明的细节会用脚注的形式给出。

我们证明定理的办法是使用反证法，假设有一个光滑映射 $f\colon D^2 \to D^2$，使得它没有不动点。

第一步：我们从 f 构造一个光滑映射 $g\colon D^2 \to \partial D^2$，使得 g 保持单位圆 ∂D^2 上的点不动。对每个 $p \in D^2$，因为 $f(p) \neq p$，所以能取射线 $\overrightarrow{f(p)p}$，我们将它和单位圆 ∂D^2 的交点定义为 $g(p)$（如下图所示）。



这时可以验证 g 是一个光滑函数[2]，并且对单位圆上任何一点 q，都有 $g(q) = q$. 为了后面叙述的方便，我们记

$$g(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \quad \forall (x, y) \in D^2.$$

这时 g 保持单位圆上的点不动相当于对任意的 $t \in [0, 2\pi]$，有

$$u(\cos t, \sin t) = \cos t, \qquad v(\cos t, \sin t) = \sin t. \tag{1}$$

第二步：我们考虑下面的曲线积分

$$I = \int_{(\partial D^2)^+} \left[P(u,v)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\right] \mathrm{d}x + \left[P(u,v)\frac{\partial u}{\partial y} + Q(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}\right] \mathrm{d}y$$

[2]根据 $g(p)$ 在 $f(p)p$ 的延长线上，我们可以将 $g(p)$ 表示成 $p + \lambda \cdot \big(p - f(p)\big)$，其中 λ 是一个非负实数，且根据 $g(p)$ 在单位圆上可以知道 λ 满足一个（系数关于 p 光滑的）二次方程，进而可以解出 λ，这时很容易看出 λ 也是关于 p 的光滑函数，所以 $g(p) = p + \lambda \cdot \big(p - f(p)\big)$ 是光滑的。

其中
$$P(u,v)=\frac{-v}{u^2+v^2},\qquad Q(u,v)=\frac{u}{u^2+v^2}.$$
我们会发现，用不同的办法计算 I 会得到不同的结果，这就导致了矛盾。

第一种方式是使用格林公式。注意到 P,Q 作为关于 x,y 的函数，在 D^2 上都有定义，所以我们可以对上面的积分使用格林公式：
$$\begin{aligned}I=\iint_{D^2}&\left[\frac{\partial}{\partial x}\Big(P(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}+Q(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\right.\\&\left.-\frac{\partial}{\partial y}\Big(P(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\right]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=\cdots&\text{（使用链式法则等将被积函数展开）}\\=\iint_{D^2}&\left(\frac{\partial Q}{\partial v}-\frac{\partial P}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$
注意到最后一个表达式里的 $\frac{\partial Q}{\partial v}-\frac{\partial P}{\partial u}$ 恒等于 0，所以我们得到了
$$I=0. \tag{2}$$

另一种方式是直接计算。我们取 $(\partial D^2)^+$ 的参数化 $x(t)=\cos t, y(t)=\sin t$，其中 $t\in[0,2\pi]$. 那么
$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\left[\Big(P(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\Big(P(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left[P(u,v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+Q(u,v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left(P(u,v)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Q(u,v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
其中最后一个等号使用了链式法则。根据前面的等式 (1)，我们有
$$\begin{gathered}u=u(\cos t,\sin t)=\cos t,\quad v=v(\cos t,\sin t)=\sin t,\\\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)=-\sin t,\quad\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\cos t\end{gathered}$$
此外 P,Q 的表达式已知，将这些代入到上一个等式中，就得到了
$$I=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t+\cos^2 t}+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t+\cos^2 t}\right)\,\mathrm{d}t=2\pi. \tag{3}$$
对比式 (2) 和式 (3)，我们就得到了矛盾。