Poisson 核、Riemann-Lebesgue 引理、等周不等式

陈轶钊

2025 年 6 月 6 日

目录

1 Poisson 核 **1**

2 Riemann-Lebesgue 引理 **4**

3 等周不等式 **6**

这篇笔记包含三个部分：Poisson(泊松) 核的背景介绍、连续函数的 Riemann-Lebesgue(黎曼-勒贝格) 引理的证明以及使用 Fourier 级数证明等周不等式。

1 Poisson 核

我们先给出补充题的陈述：

习题：给定一个 2π 周期的连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 令 a_n, b_n 为其 Fourier 系数。取定 $r\in(0,1)$，定义 Abel-Poisson 和

$$A_rf(x) := \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)). \tag{1}$$

1. 证明存在一个 2π 周期的函数 $P_r(x)$（被称为 Poisson 核）[1]，使得

$$A_rf(x) = (f*P_r)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)P_r(y)\,\mathrm{d}y;$$

[1]注意到 Fourier 级数具有将乘积变为卷积的特性，所以 $P_r(x)$ 的存在并不是一件让人意外的事情：在将 f 的 Fourier 级数写成 $\sum_{n=-\infty}^{+infty}C_ne^{inx}$ 的形式后，A_rf 实际上靠系数的逐项相乘定义

2. 计算 $P_r(x)$ 的表达式并证明它非负；

3. 证明 $\{P_r(x)\}_r$ 当 $r \to 1^-$ 时构成了一族恒同元的逼近；

4. 证明在 $\mathbb{R}$ 上，$A_r f(x) \rightrightarrows f(x)(r \to 1^-)$.

习题中给出的 Poisson 核的定义有些让人摸不着头脑，实际上一个更自然地导出 Poisson 核的办法是考虑 Laplace 方程 $\Delta f = 0$——事实上，这一方程的变体 $\Delta f = \rho$ 就以 Poisson 命名，被称为 Poisson 方程。

习题中定义的 Poisson 核可以靠求解特定的边值问题得到：二维单位圆盘 $D^2 = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2, |z| \leqslant 1\}$ 上 Laplace 方程的边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & \forall z \in D^2 \\ u(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta), & \forall \theta \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

这一问题和上面补充题题的关系是，如果在极坐标下求解这个问题，我们找出的形式解就是 $u(r, \theta) = (A_r f)(\theta)$. 这时候补充题实际上说明了下面几件事：

- 边值问题 (2) 的形式解都可以写成卷积的形式，且卷积核只与给定区域有关。
- 用卷积给出的解在边界处是连续的，且满足边界条件。

我们接下来给出具体的求解过程。我们在下面的步骤里都假定 u 具有足够高的可微性（比如三阶连续可微），这样所有的 Fourier 级数都会收敛到原来的函数。

求解的第一步是在极坐标 (r, θ) 下重写这个边值问题[2]：

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, & \forall r < 1 \\ u(1, \theta) = f(\theta), & \forall \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3}$$

对第一个方程，可以使用标准的分离变量法来求解：对每个 r，我们将 $u(r, \theta)$ 展开为关于 θ 的 Fourier 级数：

$$u(r, \theta) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(r)\cos(n\theta) + b_n(r)\sin(n\theta))$$

$(C_n \rightsquigarrow r^{|n|} \cdot C_n)$，因此我们可以猜到 $P_r(x)$ 应该是

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inx} = (\text{一些计算}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} = \frac{1 - r^2}{|r - e^{ix}|^2}$$

[2]注意到 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

这里我们可以具体写出 $a_n(r), b_n(r)$ 的表达式，能很容易说明它们二阶可微。将这个展开代入上面的方程，得到

$$\frac{a_0''+\frac{1}{r}a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(a_n''+\frac{1}{r}a_n'-n^2a_n\right)\cos(nx)+\left(b_n''+\frac{1}{r}b_n'-n^2b_n\right)\sin(nx)\right)=0$$

根据 Fourier 级数的唯一性，我们知道 a_n, b_n 会是下面方程的解：

$$y''(r)+\frac{1}{r}y'(r)-n^2y(r)=0,\quad n\geqslant 0$$

这是一个 Euler 方程，我们可以算出它的解形如（这里 r^{-0} 表示 $\ln r$）：

$$C_1r^n+C_2r^{-n}, C_1, C_2\in\mathbb{R}$$

接下来我们使用边值条件来确定上面的常数 C_1, C_2. 首先 $u(0,\theta)$ 是函数在原点处的值，一定为一个有界常数，所以 Fourier 系数 $a_n(r), b_n(r)$ 在 $r=0$ 时有限，这说明 C_2 必须是 0. 此外 $u(1,\theta)=f(\theta)$ 会给出：

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta))&=f(\theta)=u(1,\theta)\\&=\frac{a_0(1)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(1)\cos(n\theta)+b_n(1)\sin(n\theta)).\end{aligned}$$

也就是 Fourier 系数满足：

$$a_n(1)=a_n,\qquad b_n(1)=b_n,\quad\forall n$$

根据这个可以算出

$$a_n(r)=a_n\cdot r^n,\qquad b_n(r)=b_n\cdot r^n,\quad\forall n.$$

所以我们最终知道边值问题的解的形式应该为

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\\&=(A_rf)(\theta).\end{aligned}$$

为了论证的严格，我们实际上还需要说明上面的等式的确给出了一个函数，并且的确是一个解。不过这部分和我们讨论的主题无关，所以暂且略去。

注 1.1 *事实上，除了使用 Fourier 级数，使用复变函数的工具也可以得到 Poisson 核。这主要基于下面两个结论：*

- 任何一个调和函数 $u(x,y)$ 在单连通区域上都是某个复可微函数（即全纯函数）$f(x+\sqrt{-1}y)=u(x,y)+\sqrt{-1}v(x,y)$ 的实部。

- 对任何一个复可微函数 f，它在一个单连通区域 Ω 中任意一点的值可以靠边界上的曲线积分计算出来：

$$f(z)=\oint_{\partial\Omega^+}\frac{f(\omega)}{\omega-z}\,\mathrm{d}\omega$$

这里我们不作更多展开。一个参考资料是 *Stein* 所著的 Complex Analysis 的第二章以及后面的第 *11*、*12* 道练习题。

2 Riemann-Lebesgue 引理

最一般的 Riemann-Lebesgue 引理的陈述是

引理 2.1 (Riemann-Lebesgue) 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上可积（对于有限区间上可积或者瑕可积的函数，我们可以规定它在区间外的值为 *0*），则有：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x=0$$

我们这一节给出一个弱一些版本。相较于补充题中的版本，这一版本的证明更能反映 Riemann-Lebesgue 引理背后的直观：对高频的震荡积分的时候，正、负的部分会抵消，最终只留下一个很小的数。

命题 2.1 对有界闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f，如果 f 是 *Lipschitz* 连续的，即存在 $L>0$ 满足对任意的 $x,y\in[a,b]$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L\,|x-y|$$

那么就有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x=0$$

证明 1 我们设 M 是 f 在区间 $[a,b]$ 上的最大值。接下来我们估计积分

$$I(\lambda)=\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x$$

的大小。我们将 $[a,b]$ 分成若干个小区间：

$$
\begin{aligned}
&a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N\leqslant x_{N+1}=b,\\
&\qquad\qquad x_{n+1}=x_n+\frac{2\pi}{\lambda},\forall 0\leqslant n\leqslant N-1=\left\lfloor\frac{\lambda(b-a)}{2\pi}\right\rfloor-1
\end{aligned}
$$

然后先估计 $f(x)\sin(\lambda x)$ 在每个小区间上的积分。对 $0\leqslant n\leqslant N-1$，注意到 $[x_n,x_{n+1}]=[x_n,x_n+\frac{2\pi}{\lambda}]$ 正好是 $\sin(\lambda x)$ 的一个周期，这时候有：

$$
\begin{aligned}
&\int_{x_n}^{x_n+\frac{2\pi}{\lambda}} f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_n}^{x_n+\frac{\pi}{\lambda}} f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_n+\frac{\pi}{\lambda}}^{x_n+\frac{2\pi}{\lambda}} f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_n}^{x_n+\frac{\pi}{\lambda}} f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_n}^{x_n+\frac{\pi}{\lambda}} f(x+\frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda(x+\frac{\pi}{\lambda}))\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{x_n}^{x_n+\frac{\pi}{\lambda}} \left(f(x)-f(x+\frac{\pi}{\lambda})\right)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

进而利用 *Lipschitz* 条件可以得到放缩：

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{x_n}^{x_n+\frac{2\pi}{\lambda}} f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant\left|\int_{x_n}^{x_n+\frac{\pi}{\lambda}} \left(f(x)-f(x+\frac{\pi}{\lambda})\right)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant\int_{x_n}^{x_n+\frac{\pi}{\lambda}}\left|f(x)-f(x+\frac{\pi}{\lambda})\right|\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_{x_n}^{x_n+\frac{\pi}{\lambda}} L\cdot\frac{\pi}{\lambda}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2 L}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

而对于区间 $[x_N,x_{N+1}]$，根据 N 的定义可以知道 $0\leqslant x_{N+1}-x_N<\frac{2\pi}{\lambda}$，所以

$$
\left|\int_{x_N}^{x_{N+1}} f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{x_N}^{x_{N+1}} M\,\mathrm{d}x=M(x_{N+1}-x_N)\leqslant\frac{2\pi M}{\lambda}.
$$

将上面的估计组合起来，就有：

$$
\begin{aligned}
|I(\lambda)|&\leqslant\left|\int_{x_N}^{x_{N+1}} f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right|+\sum_{n=0}^{N-1}\left|\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant\frac{2\pi M}{\lambda}+N\cdot\frac{\pi^2 L}{\lambda^2}\\
&\leqslant\frac{2\pi M}{\lambda}+\frac{(b-a)\lambda}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2 L}{\lambda^2}\\
&\leqslant\frac{2\pi M+\pi(b-a)L}{2\lambda}.
\end{aligned}
$$

这里倒数第二步不等式用到了 N 的定义。注意到上面不等式右侧在 $\lambda \to +\infty$ 时收敛到 0，所以由夹逼定理可知：

$$\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = 0$$

也即是欲证命题成立。

我们在最后指出，对于一般的连续函数 f，使用上面的办法也是可以证明类似的结论，只是这时候要用到连续函数的更多性质[3]。因为这些性质在课程中没有介绍，所以这里只能将条件加强为 Lipschitz 连续。

3 等周不等式

这一节是 Fourier 级数的一个有意思的应用：证明等周不等式。所谓的等周不等式是下面的几何直观的严格数学陈述：

在所有具有相同周长的图形里，圆的面积最大。

这一结论在直观上相当显然，但给出它的严格证明却花费了相当长的时间。不过现在，等周不等式有许多不同的证明和推广，涉及了数学中不同的主题和办法[4]。在现有的证明中，使用 Fourier 级数的证明大约是最简短的。

我们下面给出等周不等式的数学陈述和它的证明。

定理 3.1 (等周不等式) 设一个分段连续可微的闭曲线 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ 围成了一个区域 Ω，设 Ω 的面积为 V，γ 的长度为 F，则

$$V \leqslant \frac{1}{4\pi} F^2 \tag{4}$$

且这个不等式取到等号当且仅当 γ 是一个圆。

证明 2 我们重新选取 γ 的参数化，使得 $|\gamma'(t)| \equiv \frac{F}{2\pi}$，也就是

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \frac{1}{4\pi^2} F^2, \quad \forall t \tag{5}$$

[3]即有界闭区间上的连续函数一定是一致连续的。这一结论可以在伍胜健老师的《数学分析》（第一册）上找到。

[4]这些讨论可以参考数学维基的等周不等式条目。

这时候 $\gamma(t)$ 是一个 2π-周期的函数。

由 $x(t), y(t)$ 均是 2π-周期的可以知道 $x'(t), y'(t)$ 在 $[-pi, \pi]$ 上积分为 0，所以可以假设 $x'(t), y'(t)$ 的 *Fourier* 级数是

$$
\begin{aligned}
x'(t) &\sim \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)\\
y'(t) &\sim \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos(nt)+B_n\sin(nt)\right)
\end{aligned}
$$

使用分部积分可以算出 $x(t), y(t)$ 的 *Fourier* 级数为[5]

$$
\begin{aligned}
x(t) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos(nt)+\frac{a_n}{n}\sin(nt)\right)\\
y(t) &\sim \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{B_n}{n}\cos(nt)+\frac{A_n}{n}\sin(nt)\right)
\end{aligned}
$$

注意到 Ω 的面积 V 可以用积分 $\int x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t$ 表示（我们假定 γ 取逆时针向），这和广义 *Parseval* 恒等式[6]结合可以算出：

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \pi\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-b_n}{n}\cdot A_n+\frac{a_n}{n}\cdot B_n\right)\\
&= \pi\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(a_nB_n-b_nA_n\right)\\
&\leqslant \pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(a_n^2+b_n^2+A_n^2+B_n^2\right)\\
&\leqslant \pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n^2+b_n^2+A_n^2+B_n^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

这里最后一个等号用到了 *Parseval* 等式。注意到 $\gamma(t)$ 的速度是常数，即式 *(5)*，所以上面式子的最右边是

$$
\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4\pi^2}F^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4\pi}F^2.
$$

这样我们就得到了想要证明的不等式：

$$
V\leqslant\frac{1}{4\pi}F^2.
$$

[5]计算过程可以参考伍胜健《数学分析》（第二册）第 282 页

[6]即教材第十二章总练习题的最后一题。

最后我们来考察取等条件。在 γ 是圆的时候，不等式一定取到等号；反之，在取到等号时，根据放缩的过程，必须有：

$$a_n = B_n, \quad b_n = -A_n, \quad \forall n \geqslant 1$$
$$a_n^2 + b_n^2 + A_n^2 + B_n^2 = 0, \quad \forall n \geqslant 2$$

这样可以算出

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + A_1 \cos t + B_1 \sin t, \qquad y'(t) = \frac{A_0}{2} + (-B_1) \cos t + A_1 \sin t.$$

这时候很容易算出 $\gamma(t)$ 是一个以 $(\frac{a_0}{2}, \frac{A_0}{2})$ 为圆心、$\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ 为半径的圆。所以等周不等式在且仅在曲线是圆的时候取到等号。