题目：设函数 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 在区间 (a,b) 上二阶可导，满足 $f(a)=f(b)=0$，且存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)>0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

证明：在区间 $[a,c]$ 和区间 $[c,b]$ 上，对 f 使用拉格朗日中值定理可得：存在 η_1,η_2，满足 $a<\eta_1<c<\eta_2<b$，且

$$f'(\eta_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\quad f'(\eta_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$$

上面的两个式子最右侧的不等号是因为 $f(a)=f(b)=0$ 且 $f(c)>0$. 从而我们知道

$$f'(\eta_2)-f'(\eta_1)<0$$

对函数 f' 和区间 $[\eta_1,\eta_2]$，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\eta_2)-f'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}<0 \tag{1}$$

其中最右侧的不等号是因为 $f'(\eta_2)-f'(\eta_1)<0$ 和 $\eta_1<\eta_2$. 这样就证明了结论。

注 0.1 本题的证明不唯一，例如使用反证法也可以证明结论：我们假设 $f''(x)$ 处处非负，也就是 $f''(x)\geqslant 0,\forall x\in(a,b)$. 这就说明 f 是一个下凸的函数。注意到对任意的 $x\in[a,b]$，有 $x=\lambda a+(1-\lambda)b$，其中 $\lambda=\frac{b-x}{b-a}\in[0,1]$. 这样由 f 的凸性可得：

$$f(x)=f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)=0,\quad\forall x\in[a,b].$$

这就和条件矛盾了。

题目：设 $g(x,y)$ 满足：对任意的 $\theta\in\mathbb{R}$，关于 t 的函数 $f_\theta(t)=g(t\cos\theta,t\sin\theta)$ 有极小值点 $t=0$. 问 $(0,0)$ 是否为 g 的极小值点？为什么？

解答：不一定，我们考察下面的例子：

$$g(x,y)=\begin{cases}-1, & y=x^2\text{且}x\neq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

这时 $(0,0)$ 的任何一个邻域 U 和 $y=x^2$ 都有不同于 $(0,0)$ 的公共点 (x_0,y_0)，所以在 U 上 $f(0,0)=0>-1=f(x_0,y_0)$. 这说明 $(0,0)$ 不是极小值点。

另一方面，对任意的 θ，至多有一个 $t=t_\theta$ 使得 $t_\theta\sin\theta=(t_\theta\cos\theta)^2$，且这一等式成立时一定有 $t_\theta\neq 0$，所以 f_θ 在区间 $(-|t_\theta|,|t_\theta|)$ 上恒为 0（在 t_θ 不存在时，我们取 $|t_\theta|=+\infty$），特别的，0 为 f_θ 的极小值点。这样 g 的确构成一个反例。

题目：设区间 $[a,b]$ 上二阶可导函数 f 满足 $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$，且存在正数 M，使得对任意的 $x\in(a,b)$，都有 $f''(x)\leqslant M$. 证明：对任意的 $x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant \frac{M}{16}(b-a)^2$.

证明：只需要证明：$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant \frac{M}{16}(b-a)^2$. 我们设 $|f(x)|$ 在 $x=c$ 处取到最大值。不失一般性，我们假定 $a\leqslant c\leqslant \frac{a+b}{2}$（否则可以改为对 $\tilde{f}(x)=f(a+b-x)$ 做讨论）。

不失一般性，我们设 $f(c)\geqslant 0$（在 $f(c)<0$ 时，我们可以改为对 $-f$ 做讨论），这样 f 一定在 c 处取到最大值，进而有：

$$f'(c)=0$$

这时对 $x\in[a,\frac{a+c}{2}]$，由拉格朗日中值定理得，存在 $\xi\in[a,x]$ 使得

$$|f'(x)|=|f'(x)-f'(a)|=|f''(\xi)|\,(x-a)\leqslant M(x-a)$$

其中最后一个不等号是因为 $|f''|$ 处处不超过 M.

与上面类似，对 $x\in[\frac{a+c}{2},c]$，有

$$|f'(x)|=|f'(x)-f'(c)|=|f''(\eta)|\,(c-x)\leqslant M(c-x).$$

这样就有：

$$\begin{aligned}|f(c)|&=\left|\int_a^c f'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^c|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+c}{2}}|f'(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+c}{2}}^c|f'(x)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^{\frac{a+c}{2}}M(x-a)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+c}{2}}^c M(c-x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{M}{2}(x-a)^2\Big|_a^{\frac{a+c}{2}}-\frac{M}{2}(c-x)^2\Big|_{\frac{a+c}{2}}^c\\&=\frac{M}{4}(c-a)^2\end{aligned}$$

而根据 $a\leqslant c\leqslant\frac{a+b}{2}$ 可知，$(c-a)^2\leqslant\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2=\frac{(b-a)^2}{4}$. 这和上面的式子结合就得到了：

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|=|f(c)|\leqslant\frac{M}{4}(c-a)^2\leqslant\frac{M}{16}(b-a)^2.$$

这样就完成了证明。