使用级数构造函数

陈轶钊

2025 年 5 月 3 日

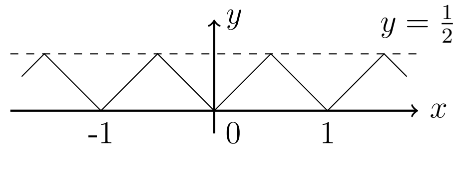
目录

在建立了级数的工具之后，我们可以使用级数这一工具构造出一些性质相当“奇异”的函数。我们在这一节里给出两个例子。第一个例子是构造连续但处处不可微的函数；另一个例子是关于 Taylor 展开的 Borel 引理，它说明函数的 Taylor 展开可以是任意的幂级数。

1 连续但处处不可微的函数

虽然处处连续但处处不可微函数在刚开始学习微分时就作为特殊的例子出现过，但具体的构造几乎都需要使用级数。

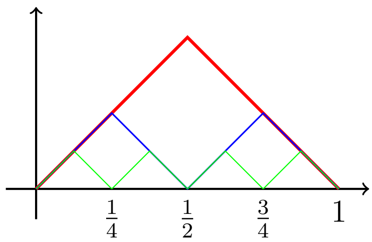
我们这里给出的例子是高木 (Takagi) 函数 (也会被叫做范德瓦尔登 (van der Waerden) 函数)。如果 $x \in \mathbb{R}$ 落在区间 $[n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]$ 中，其中 n 是一个整数，定义函数 ϕ 在 x 处的值为 $|x-n|$. 函数 ϕ 的图像如下：



使用 $\phi(x)$ 可以定义 Takagi 函数

$$T(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\phi(2^nx)=\phi(x)+\frac{1}{2}\phi(2x)+\frac{1}{4}\phi(4x)+\cdots \tag{1}$$

下图展示了函数列 $\{\frac{1}{2^n}\phi(2^nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的前几项：



另一个连续但处处不可微的函数的例子是魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 函数

$$W(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\cos(b^nx),\quad 0<a<1,b=2k+1,k\in\mathbb{N},ab>1+\frac{3\pi}{2}.$$

这两个函数的形式是相似的，但相较之下，我们更容易证明 Takagi 函数 $T(x)$ 连续且处处不可微。

Takagi 函数 $T(x)$ 的连续性是相当容易证明的。从 ϕ 的定义可以知道 $|\phi|\leqslant\frac{1}{2}$，这样 $|\frac{1}{2^n}\phi(x)|$ 有上界 $\frac{1}{2^{n+1}}$. 而数项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ 收敛，所以根据 M-判别法可以知道级数 (1) 的部分和 $T_n(x)$ 一致收敛到 $T(x)$. 所以 $T(x)$ 作为连续函数一致收敛的极限是连续的。

1.1 不可微性的证明

我们下面证明函数 $T(x)$ 处处不可微。这一结果是相当符合我们的直观的：每个 $\phi(2^nx)$ 在形如 $\frac{k}{2^n},k\in\mathbb{Z}$ 的点上不可微，随着求和的增加，不可微的点会越来越密，直到在整个 $\mathbb{R}$ 上不可微。

证明的办法不唯一[1]，我们选取一种计算上简便，但讨论起来略微繁琐的办法。我们对 $\mathbb{R}$ 中的点 x 分两种情况讨论：

(1) x 形如 $\frac{k}{2^m}$，其中 k,m 是整数.　　(2) x 无法表示为 $\frac{k}{2^m}$.

[1]例如也可以直接取适当的 $x_n\to x$ 后计算 $\lim_{n\to+\infty}\frac{T(x_n)-T(x)}{x_n-x}$. 如果稍微修改一下函数的定义，取 $V(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\phi(4^nx)$，那计算上会更加简便。

在开始证明前，我们先给出 T 的一个简单性质。我们用 $T_n(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{2^k}\phi(2^k x)$ 表示级数的部分和。注意到在 x 为整数时 $\phi(x)=0$，所以有：

$$\phi(2^n\cdot\frac{k}{2^m})=0,\forall m,n,k\in\mathbb{Z},n\geqslant m\geqslant 0.$$

这样会有

$$T(\frac{k}{2^m})=T_{m-1}(\frac{k}{2^m})+\sum_{n\geqslant m}\frac{1}{2^n}\phi(k\cdot 2^{n-m})=T_{m-1}(\frac{k}{2^m}). \tag{2}$$

我们接下来开始证明。

对第一种情况，我们只用证明 $T(x)$ 在 $\frac{k}{2^m}$ 处没有右导数。我们先证明这在 0 处成立：取 $x_m=\frac{1}{2^m}$，只需证明极限

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{T(x_m)-T(0)}{x_m-0}=\lim_{m\to+\infty}\frac{T(x_m)}{x_m}\overset{\text{由 }(2)}{=}\lim_{m\to+\infty}\frac{T_{m-1}(x_m)}{x_m}$$

不存在。注意到在 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时 $\phi(x)=x$，所以 $\frac{1}{2^n}\phi(2^n x_m)=\frac{1}{2^n}\phi(2^{n-m})$ 在 $n<m$ 时为 $\frac{1}{2^m}$（这也可以从图像中看出来）。所以上面的极限是：

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\overbrace{\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m}}^{m\text{个}}}{\frac{1}{2^m}}=\lim_{m\to+\infty}m$$

这一定不存在。这样我们就得到了 0 处的不可微性。

我们下一步说明 $T(x)$ 在所有整数处没有右导数。注意到 ϕ 是以 1 为周期的，所以 $T(x)$ 也是以 1 为周期的。这样对任意的整数 k，有

$$\frac{T(k+\Delta x)-T(k)}{\Delta x}=\frac{T(\Delta x)-T(0)}{\Delta x}$$

我们刚刚说明了右侧在 $\Delta x\to 0+0$ 时的极限不存在，所以左侧的极限也不存在，即 $T(x)$ 在整数 k 处没有右导数。从这可以进一步推出 $T(2^m x)$ 在 $2^m x\in\mathbb{Z}$ 时，即 x 形如 $\frac{k}{2^m},k\in\mathbb{Z}$ 时也没有右导数。这会在下一段的证明中用到。

最后我们使用 $T(x)$ 的“自相似性”说明对一般的 $x=\frac{k}{2^m}$，T 在 x 处没有右导数。我们有 [2]

$$\begin{aligned}T(x)&=T_{m-1}(x)+\frac{1}{2^m}\left(\phi(2^m x)+\frac{1}{2^1}\phi(2^{m+1}x)+\frac{1}{2^2}\phi(2^{m+2}x)+\cdots\right)\\&=T_{m-1}(x)+\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\phi\big(2^n\cdot(2^m x)\big)\\&=T_{m-1}(x)+\frac{1}{2^m}T(2^m x)\end{aligned}$$

[2]注意到 $\frac{1}{2^m}T(2^m x)$ 的图像可以靠对 $T(x)$ 的图像缩放得到，所以下面的等式说明 $T(x)$ 和自身的缩放相差一个部分和，这相当于某种自相似性质。

所以如果 $T(x)$ 在 $\frac{k}{2^m}$ 处可微，那它在这一点处也存在右导数。又很容易验证 $T_{m-1}(x)$ 处处存在右导数，因为它是一些处处存在右导数的函数的有限和。所以 $T(2^m x) = 2^m(T(x) - T_{m-1}(x))$ 在 $x = \frac{k}{2^m}$ 处也有右导数，这和上一段最后给出的结果矛盾了。这样我们就完成了第一种情况的证明。

对第二种情况，注意到对每个 $m \in \mathbb{N}$，函数 T_m 在 $\mathbb{R} - \{\frac{k}{2^m} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 上是可微的，所以对任意的 m，T_m 在 x 处可微。

我们使用反证法证明结论：假设 T 在 x 处可微。对每个正整数 m，可以取整数 k_m 使得

$$\frac{k_m}{2^m} < x < \frac{k_m + 1}{2^m}$$

我们记 $x_m = \frac{k_m}{2^m}, y_m = \frac{k_m+1}{2^m}$，则 $\lim_{m\to+\infty} x_m = \lim_{m\to+\infty} y_m = x$，进而

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{T(x_m) - T(x)}{x_m - x} = \lim_{m\to+\infty} \frac{T(y_m) - T(y)}{y_m - x} = T'(x) \tag{3}$$

又可以算出

$$\begin{aligned}
\frac{T(x_m) - T(x)}{x_m - x} &\overset{\text{由}(2)}{=} \frac{T_{m-1}(x_m) - T(x)}{x_m - x} \\
&= \frac{T_{m-1}(x_m) - T_{m-1}(x)}{x_m - x} - \frac{T(x) - T_{m-1}(x)}{x_m - x} \\
&\geqslant \frac{T_{m-1}(x_m) - T_{m-1}(x)}{x_m - x} \qquad \big(\text{由}T(x) \geqslant T_{m-1}(x)\text{和}x_m < x\big)
\end{aligned}$$

更进一步，对 $0 \leqslant n < m$，函数 $\frac{1}{2^n}\phi(x)$ 在区间 $[\frac{k_m}{2^m}, \frac{k_m+1}{2^m}]$ 上是一次函数，所以它们的和 $T_{m-1}(x)$ 在这个区间上也是一次函数。所以上面不等式最右侧就是 $T'_{m-1}(x)$. 这样我们得到了

$$\frac{T(x_m) - T(x)}{x_m - x} \geqslant T'_{m-1}(x).$$

类似的，可以证明 $\frac{T(y_m)-T(x)}{x_m-x} \leqslant T'_{m-1}(x)$，所以有

$$\frac{T(y_m) - T(x)}{x_m - x} \leqslant T'_{m-1}(x) \leqslant \frac{T(x_m) - T(x)}{x_m - x}.$$

前面的等式 (3) 说明了上面不等式两端具有相同的极限，夹逼原理告诉我们 $\{T'_m(x)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 也应当有极限。但对任意的 m，有

$$\left|T'_{m-1}(x) - T'_m(x)\right| = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=x} \frac{1}{2^m}\phi(2^m t)\right| = 1$$

最后一个等号可以从函数图像看出来。根据柯西收敛原理，这说明 $\{T'_m(x)\}$ 发散，这显然矛盾了。

2 Borel 引理

Borel 引理的陈述如下：

引理 2.1 (Borel) *任给一个数列* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，*存在一个光滑函数* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *满足：*f *在* 0 *处的 Taylor 展开为*

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots.$$

亦即 $f^{(n)}(0)=n!a_n,\forall n\geqslant 0.$

这一引理部分地回答了这样的问题：一个函数的 Taylor 展开究竟有多“坏”。

我们来看证明。我们取一个光滑函数 $\eta(x)$ 满足：$0\leqslant\eta\leqslant 1$，且它在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上恒为 1，在 $(-1,1)$ 以外的区域恒为 0，例如可以取

$$\eta(x)=\begin{cases}1 & \text{若}\,|x|\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{e^{-\frac{1}{1-|x|}}}{e^{-\frac{1}{1-|x|}}+e^{-\frac{2}{2|x|-1}}} & \text{若}\,\frac{1}{2}<|x|<1\\ 0 & \text{若}\,|x|\geqslant 1\end{cases}$$

然后考虑下面形式的函数项级数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\eta(\frac{x}{\delta_n})\tag{4}$$

其中 $\delta_1,\delta_2,\ldots$ 是待定的常数。

为了使上面的级数收敛到一个光滑函数，我们希望选取 δ_n 使得 $x^n\eta(\frac{x}{\delta_n})$ 和它的各阶导数充分小。具体而言，我们希望有：

$$\forall 0<n\in\mathbb{N},\ \forall 0\leqslant k<n,\ \max_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(a_nx^n\eta(\frac{x}{\delta_n})\right)\right|\leqslant\frac{1}{2^n}\tag{5}$$

我们先说明，在上面的条件 (5) 成立时，我们构造的函数 (4) 是光滑的。根据函数项级数可求导的充分条件，只需要证明，对任意的非负整数 k，级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(a_nx^n\eta(\frac{x}{\delta_n})\right)$$

是一致收敛的。因为去掉有限项之后不改变一致收敛性，所以只用考虑

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(a_nx^n\eta(\frac{x}{\delta_n})\right)$$

的敛散性。而上面的条件 (5) 告诉我们：

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(a_n x^n \eta(\frac{x}{\delta_n})\right)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

而 $\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ 是收敛的，所以根据 M-判别法，上面的级数一致收敛。

我们再验证构造的函数 (4) 满足引理的要求，即 $f^{(n)}(0)=n!a_n$. 前面证明了级数求导之后的级数还是一致收敛的，所以可以交换求和和求导的次序：

$$f^{(n)}(0)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=0}\left(a_k x^k \eta(\frac{x}{\delta_k})\right) \tag{6}$$

又有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=0}\left(a_k x^k \eta(\frac{x}{\delta_k})\right)=a_k\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\Big|_{x=0}\eta(\frac{x}{\delta_k})\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^{n-j}}{\mathrm{d}x^{n-j}}\Big|_{x=0}x^k\right)$$

注意到 $\eta(\frac{x}{\delta_n})$ 在区间 $[-\frac{\delta_n}{2},\frac{\delta_n}{2}]$ 上恒为 1，所以它在这个区间上的任意阶导数都是 0，这样上面的求和只剩下第一项，也就是

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=0}\left(a_k x^k \eta(\frac{x}{\delta_k})\right)=a_k\eta(0)\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=0}x^k=\begin{cases}k!a_k & 若 k=n\\ 0 & 若 k\neq n\end{cases}$$

所以 f 的 n 阶导数的表达式 (6) 中只剩下了 $k=n$ 这一项，也就是

$$f^{(n)}(0)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big|_{x=0}\left(a_n x^n \eta(\frac{x}{\delta_n})\right)=n!a_n.$$

至此我们知道，只要一开始的条件 (5) 满足，那引理就得到了证明。我们最后来说明这件事。

我们任取一个正整数 n. 注意到 $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\eta(\frac{x}{\delta_n})=\frac{1}{\delta_n^k}\eta^{(n)}(\frac{x}{\delta_n})$，所以有

$$\begin{aligned}\max_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(a_n x^n \eta(\frac{x}{\delta_n})\right)\right| &= \max_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{k}a_n\binom{k}{j}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\eta(\frac{x}{\delta_n})\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}x^{k-j}}x^n\right)\right|\\ &= \max_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{k}a_n\binom{k}{j}\cdot\frac{1}{\delta_n^j}\eta^{(j)}(\frac{x}{\delta_n})\cdot\frac{n!}{(n-k+j)!}x^j\right|\\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k}\frac{n!k!}{j!(k-j)!(n-k-j)!}\max_{x\in\mathbb{R}}\left|a_n\eta^{(j)}(\frac{x}{\delta_n})\frac{x^{n-k+j}}{\delta_n^j}\right|\\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k}n!k!\max_{x\in\mathbb{R}}\left|a_n\eta^{(j)}(\frac{x}{\delta_n})\frac{x^{n-k+j}}{\delta_n^j}\right|\end{aligned}$$

又因为 $\eta(x)$ 在 $[-1,1]$ 以外的区域恒为 0，所以 $\eta^{(j)}(\frac{x}{\delta_n})$ 在 $[-\delta_n,\delta_n]$ 以外的区域恒为 0，进而

$$\begin{aligned}\max_{x\in\mathbb{R}}\left|a_n\eta^{(j)}(\frac{x}{\delta_n})\frac{x^{n-k+j}}{\delta_n^j}\right| &= \max_{x\in[-\delta_n,\delta_n]}\left|a_n\eta^{(j)}(\frac{x}{\delta_n})\right|\cdot\left|\frac{x^{n-k+j}}{\delta_n^j}\right| \\ &\leqslant \max_{x\in[-\delta_n,\delta_n]}\left|a_n\eta^{(j)}(\frac{x}{\delta_n})\right|\cdot\frac{\delta_n^{n-k+j}}{\delta_n^j} \\ &= \delta_n^{n-k}\max_{x\in[-1,1]}\left|a_n\eta^{(j)}(x)\right|\end{aligned}$$

将这个代入到上面的不等式，得到：

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(a_nx^n\eta(\frac{x}{\delta_n})\right)\right|\leqslant\delta_n^{n-k}\sum_{j=0}^{k}n!k!\left|a_n\right|\cdot\max_{x\in[-1,1]}\left|\eta^{(j)}(x)\right|=C_{n,k,a_n,\eta}\delta_n^{n-k}$$

其中 $C_{n,k,a_n,\eta}$ 是仅依赖于 n,k,a_n 和 η 的常数。注意到 $n-k>0$，所以上式的右端是一个常数乘以 δ_n 的正的幂次，进而在

$$\delta_n<\delta_{n,k}=\frac{1}{\left(2^nC_{n,k,a_n,\eta}\right)^{n-k}}$$

时，有

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(a_nx^n\eta(\frac{x}{\delta_n})\right)\right|\leqslant\frac{1}{2^n}$$

进一步，取 δ_n 满足 $\delta_n\leqslant\min\{\delta_{n,k}\mid 0\leqslant k<n\}$，就得到了一开始给出的条件 (5) 成立。

至此，我们完成了证明。