生成函数的两个简单例子

陈轶钊

2025 年 5 月 18 日

目录

1 证明组合恒等式 **2**

2 线性递推数列的通项公式 **3**

我们在这篇笔记里附上课上给出两个生成函数的简单例子的一些细节。

我们简单回顾一下生成函数这一技术的大致想法：在给了一个数列 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ 之后，我们可以将它整合到一个幂级数中，如可以考虑

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

或者是

$$\tilde{F}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=a_0+a_1x+\frac{a_2}{2}x^2+\frac{a_3}{6}x^3+\cdots$$

这里 $F,\tilde{F}$ 均被称为 $\{a_n\}$ 的生成函数。在 $\{a_n\}$ 增长速度足够慢的时候，生成函数 $F(x),\tilde{F}(x)$ 会是解析的。这时，用微积分的工具可以给出 $F(x),\tilde{F}(x)$ 的性质，进而得到 $\{a_n\}$ 的性质。

这篇笔记里的例子只是生成函数的最简单应用。除了用于证明组合恒等式和给出递推数列的性质外，生成函数也会被用于组合计数问题，因为一些计数原理可以用函数的运算来描述。此外，我们还可以考虑一族函数 $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ 的生成函数：

$$F(t,x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)t^n=f_0(x)+f_1(x)t+f_2(x)t^2+\cdots$$

比如整数阶的第一类 Bessel 函数 $\{J_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 的生成函数是：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)y^n=e^{\frac{x}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)}$$

单独介绍生成函数的资料相对少见，因为生成函数本身没有太多理论，一般被视为处理问题的技巧（在高中数学竞赛里，生成函数倒经常被视为一个单独的主题，但高中阶段不会讨论生成函数的收敛性）。一个稍微详细一些的介绍是芝加哥大学一个暑期项目的学生报告。

1 证明组合恒等式

我们课上提到的一个例子是，由广义组合数给出的数列

$$a_n = \binom{N}{n} = \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{n!}$$

的一个生成函数为

$$F_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{N}{n} x^n = (1+x)^N, \qquad \forall x \in (-1,1).$$

这个结果的应用是一个简单的组合恒等式的证明：

$$\sum_{p+q=n} \binom{N}{p}\binom{M}{q} = \binom{M+N}{n}. \text{（}M,N\text{未必为整数）} \tag{1}$$

作为区间 $(-1,1)$ 上的函数，我们有函数的等式 $(1+x)^N(1+x)^M = (1+x)^{M+N}$. 如果将等式的左边展开成幂级数，是

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \binom{N}{p} x^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} \binom{M}{q} x^q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{p+q=n} \binom{N}{p}\binom{M}{q}\right] x^n$$

而右边的幂级数是

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{M+N}{n} x^n$$

所以根据泰勒展开的唯一性，我们就得到了想要证明的组合恒等式 (1).

注 1.1 在这个例子里，对收敛性的讨论是十分重要的。有些时候，一个数列的生成函数会被看作一个形式幂级数，也就是 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 中的 x 只是一个符号，不代表任何具体的数（或者说，把生成函数看作集合 $\mathbb{R}\{x\} = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ 中的元素，但 $\mathbb{R}\{x\}$ 上有额外的乘法结构）。这时等式

$$\text{“}(1+x)^N\text{”} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{N}{n} x^n.$$

的左侧只是一个形式的记号，不再具有任何实际意义（特别是在 N 不是一个整数的时候）。这时候我们很难做到在不使用恒等式 *(1)* 的情况下证明等式

$$“(1+x)^N” \cdot “(1+x)^M” = “(1+x)^{M+N}”$$

成立。反之，在有了收敛性的保证之后，上面的等式就成了函数之间的等式，可以很轻松地证明它成立。

2 线性递推数列的通项公式

另一个使用生成函数的例子是用生成函数求递推数列的通项公式。例如我们考虑 Fibonacci(斐波那契) 数列：

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 1$$

它的通项公式是：

$$F_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

其中 λ_1, λ_2 是方程 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ 的两根，C_1, C_2 是两个常数，可由 F_1, F_2 解出。

我们使用生成函数的技术证明这一结果。考虑 $\{F_n\}_{n\geq 0}$ 的生成函数

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = 1 + x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots$$

使用归纳法可以证明：$F_n \leqslant 2^n$，也就是 $\sqrt[n]{F_n} \leqslant 2$. 所以 $G(x)$ 在 $|x| < \frac{1}{2}$ 时一定收敛。为了利用递推关系，我们考虑：

$$\begin{aligned}
G(x) = \quad & F_0 + \quad F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots \\
xG(x) = \quad & \qquad\quad F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

将两个式子相加得到

$$\begin{aligned}
(1+x)G(x) &= F_0 + F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + \cdots \\
&= F_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^{n-1} \\
&= F_0 + \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n \\
&= F_0 + \frac{1}{x}\left(G(x) - F_0 - F_1x\right)
\end{aligned}$$

将上面的等式看作关于 $G(x)$ 的方程，可以解出

$$G(x) = \frac{(F_1 - F_0)x + F_0}{1 - x - x^2} = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

为了给出 $G(x)$ 的幂级数展开，我们将 $1 - x - x^2$ 分解：

$$1-x-x^2 = x^2\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} - 1\right) = x^2\left(\frac{1}{x} - \lambda_1\right)\left(\frac{1}{x} - \lambda_2\right) = (1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x).$$

所以有

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x)} \\ &= \frac{C_1}{1 - \lambda_1 x} + \frac{C_2}{1 - \lambda_2 x} \\ &= C_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_1^n x^n + C_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_2^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n) x^n. \end{aligned}$$

将这个等式和 $G(x)$ 的定义比较就会得到：$F_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$.

如果使用 $\tilde{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$，并考虑 $\tilde{G}(x) + \tilde{G}'(x)$，也可以得到类似的结果。不过此时需要求解一个二阶常系数 ODE，它的特征方程的两根正好为 λ_1, λ_2.

另外一个例子是考虑由关系 $a_{n+1} = a_n + n a_{n-1}$ 给出的递推数列，它的生成函数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ 会满足一个线性 ODE，所以我们理论上也能算出这样的数列的通项公式。