调和函数的平均值性质的直观解释

陈轶钊

2025 年 3 月 6 日

目录

在第一周的补充习题里，有这样一道题：

结论 0.1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为开集，$f \in C^2(\Omega)$。记 B_ε 为以原点为圆心，ε 为半径的闭圆盘。证明：对任意的 $x = (x_1, x_2) \in \Omega$，

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} f(x+y)\, dy - f(x) \right] = c_2 \Delta f(x). \tag{1}$$

这里的 c_2 是一个常数，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ 是二维中的 *Laplace* 算子，$|B_\varepsilon|$ 表示球 B_ε 的体积。

请进一步求出 c_2。（提示：对 $f(x+y)$ 做 *Taylor* 展开。）

这篇笔记的目的不是给出这一问题的解答（事实上，除了提示中给出的办法之外，还有多种方法证明这一结论，如利用散度定理）。我们在这里给出更多的注记。

我们暂时偏离一下主题：童老师在这一道题目后给出了两个注记：

(1) 结论中括号里的第一项是 f 在以 x 为中心以 ε 为半径的球上的平均，这个量在坐标轴的旋转下保持不变。因此上述结论表明，Laplace 算子尽管是用沿着

坐标轴方向的纯二阶导数之和来定义的，但实际上是一个各向同性的算子，它不偏袒任何一个方向，平均地看待 f 在所有方向上的表现。

(2) 该结论对任意维数 n 都成立，不过常数 c_2 需要换成一个依赖于 n 的常数 c_n。

这里我们给出第一条注记的另一种解释。单看拉普拉斯算子的定义（$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$）来看，拉普拉斯算子 Δ 依赖平面直角坐标系的选取。但上面的等式 (1) 告诉我们，如果我们使用等式左侧作为拉普拉斯算子的定义，那么这一定义和原本的定义相差一个常数，且与坐标系的选取无关。因此等式 (1) 实际上说明拉普拉斯算子的定义是不依赖于坐标的。

回到正题，我们在下面的小节里会给出所谓的平均值公式。部分程度上，它是上面结论的推论。因为从定义上看，我们很难直观地看出拉普拉斯算子和平均值的关系，我们接着会给出两种直观解释，以说明平均值公式何以成立。

1 平均值公式

所谓的平均值公式是下面的定理：

定理 1.1 对 $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$（一般的，我们可以考虑 $\mathbb{R}^n$），下面三个命题彼此等价：

(1) $f(x,y)$ 是调和函数，即 $\Delta f\equiv 0$.

(2) 对任意一个闭球 $B_R(p)=\{q\in\mathbb{R}^2 \mid |q-p|\leqslant R\}$，$f$ 在球上的平均值等于 f 在球心处的值，即

$$\frac{1}{|B_R(p)|}\int_{B_R(p)} f\,\mathrm{d}V=f(p) \tag{2}$$

这里对区域 $D\subseteq\mathbb{R}^2$，记号 $|D|$ 表示 D 的面积，且 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) 对任意一个球面 $\partial B_R(p)=\{q\in\mathbb{R}^2 \mid |q-p|=R\}$，$f$ 在球面上的平均值等于 f 在球面中心处的值，即

$$\frac{1}{|\partial B_R(p)|}\int_{\partial B_R(p)} f(x,y)\,\mathrm{d}S=f(p) \tag{3}$$

这里的积分号表示第一型曲线（或曲面）积分，$|\partial B_R(p)|$ 表示 $\partial B_R(p)$ 的长度（或面积、体积）。

这一节剩下部分会给出这一定理的大致证明过程，读者第一次阅读时可以跳过。

1.1 平均值公式的证明

证明上面定理的一种办法是证明命题之间的推出关系 (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (2).

首先，利用补充题的等式 (1) 可以知道，从命题 (2) 可以推出命题 (1)，因为当命题 (2) 成立时，等式 (1) 的左侧为 0。

从命题 (1) 推出命题 (3) 的办法需要用到教材后面几节的内容，即高斯定理（下面公式中各个记号的含义与教材 128 页中对应公式相同）:

$$\iint_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S = \iiint_D \operatorname{div} \overrightarrow{F} \, \mathrm{d}V. \tag{4}$$

我们特别指出，$\overrightarrow{n}$ 是曲面（或超曲面）的单位外法向量。所以在命题 (1) 成立时，有：

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_R(p)} f(x) \, \mathrm{d}S(x) - & \left|\partial B_R(p)\right| f(p) \\
&= \int_{\partial B_R(p)} \left[f(x) - f(p)\right] \, \mathrm{d}S(x) \\
\text{(微积分基本定理)} &= \int_{\partial B_R(p)} \left[\int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(x-p)) \, \mathrm{d}t\right] \, \mathrm{d}S(x) \\
&= \int_{\partial B_R(p)} \left[\int_0^1 (x-p) \cdot \nabla f(x + t(x-p)) \, \mathrm{d}t\right] \, \mathrm{d}S(x) \\
\text{(交换积分次序)} &= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{\partial B_R(p)} (x-p) \cdot \nabla f(p + t(x-p)) \, \mathrm{d}S(x) \\
&= R \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{\partial B_R(p)} \overrightarrow{n} \cdot \nabla f(p + t(x-p)) \, \mathrm{d}S(x) \\
\text{(高斯定理)} &= R \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{B_R(p)} \operatorname{div}_x \left[\nabla f(p + t(x-p))\right] \, \mathrm{d}V
\end{aligned}$$

其中 $\int \cdots \mathrm{d}S(x)$ 表示积分的变元是 x，div_x 表示对 x 求散度。倒数第二个等号是因为 $\frac{x-p}{R}$ 正好是外指法向量。经过一些计算，可以算出

$$\operatorname{div}_x \left[\nabla f(p + t(x-p))\right] = t\Delta f(p + t(x-p)) = 0$$

所以上面式子右侧积分号中的表达式等于 0，这样就有

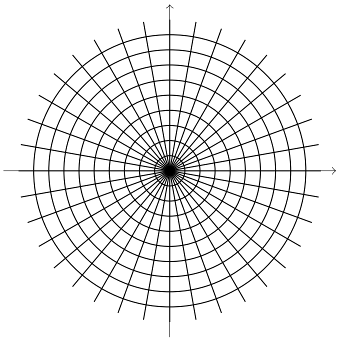
$$\int_{\partial B_R(p)} f(x) \, \mathrm{d}S(x) - \left|\partial B_R(p)\right| f(p) = R \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{B_R(p)} 0 \, \mathrm{d}V = 0$$

这个式子变形后就是命题 (3) 中的等式 (3)。

最后我们解释为何命题 (2) 和命题 (3) 等价，这可以实际上可以作为多重积分的一个练习题。事实上，$\mathbb{R}^n$ 中体积微元 $\mathrm{d}V$ 和球面（不一定是单位球面）的面积微元 $\mathrm{d}S$ 满足：

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\mathrm{d}S$$

其中 $r = (x^2 + \cdots + z^2)^{1/2}$. 对于 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$，可以靠计算直接验证这件事；我们也可以使用直观一点的看法：我们以原点为中心，将 $\mathbb{R}^n$ 分成一层层球壳，再将每个球壳细分成小块（如下图所示）



这时每个小块的体积可以视作 $\mathrm{d}V$，但每个小块的形状近似一个底面积为 $\mathrm{d}S$、高为 $\mathrm{d}r$ 的柱体，所以每个小块的体积为 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\mathrm{d}S$，这也就是我们要使用的公式。

根据上一个公式，我们可以得到

$$\int_{B_R(p)} f\,\mathrm{d}V = \int_{B_R(p)} f\,\mathrm{d}r\mathrm{d}S = \int_0^R \left[\int_{\partial B_r(p)} f\,\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}r.$$

也就是一个函数在球上的积分等于函数在球面上的积分的定积分，特别的，球的体积等于球面的面积的积分。从而我们可以得到

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{|B_R(p)|}\textstyle\int_{B_R(p)} f(x,y)\,\mathrm{d}V = f(p) \\
\iff\quad & |B_R(p)|\, f(p) = \textstyle\int_{B_R(p)} f(x,y)\,\mathrm{d}V = \int_0^R \left[\int_{\partial B_r(p)} f\,\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}r \\
& \text{求导} \Downarrow \qquad \Uparrow \text{积分} \\
\iff\quad & |\partial B_R(p)|\, f(p) = \textstyle\int_{\partial B_R(p)} f(x,y)\,\mathrm{d}S \\
\iff\quad & \tfrac{1}{|\partial B_R(p)|}\textstyle\int_{\partial B_R(p)} f(x,y)\,\mathrm{d}S = f(p)
\end{aligned}$$

这就说明命题 (2) 和命题 (3) 是等价的。

2 对平均值公式的解释

我们在这一节里给出两种解释这一公式的办法。一种借助了计算数学的视角，一种借助了拉普拉斯算子和波的关联。请注意，这两种办法都不是严格的数学证明，也很可能无法变成严格的数学证明。

2.1 借助计算数学的视角

对计算数学来说，一个基本的问题是如何在计算机上计算函数的导数。这一问题麻烦的地方在于，计算机没有办法求极限。一种朴素的解决办法是，我们取一个充分小的 ε，并将表达式

$$\frac{1}{\varepsilon}(f(x+\varepsilon,y)-f(x,y))$$

视作函数的（偏）导数。不严格地说，我们有 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{\varepsilon}(f(x+\varepsilon,y)-f(x,y))$. 对于二阶偏导数，我们也使用同样办法来计算：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{\varepsilon}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x-\varepsilon,y)) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(f(x+\varepsilon,y)+f(x-\varepsilon,y)-2f(x,y)\right) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{\varepsilon}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y-\varepsilon)) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(f(x,y+\varepsilon)+f(x,y-\varepsilon)-2f(x,y)\right)
\end{aligned}$$

这样我们可以写出拉普拉斯算子的“表达式”：

$$\begin{aligned}
\Delta f =& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
=& \frac{1}{\varepsilon^2}\left(f(x+\varepsilon,y)+f(x-\varepsilon,y)-2f(x,y)\right) \\
&+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(f(x,y+\varepsilon)+f(x,y-\varepsilon)-2f(x,y)\right) \\
=& \frac{1}{\varepsilon^2}\left(f(x+\varepsilon,y)+f(x-\varepsilon,y)+f(x,y+\varepsilon)+f(x,y-\varepsilon)-4f(x,y)\right)
\end{aligned}$$

由此我们可以得出一个函数为调和函数的“充要条件”：

$$\Delta f=0 \Longleftrightarrow f(x,y)=\frac{1}{4}\left(f(x+\varepsilon,y)+f(x-\varepsilon,y)+f(x,y+\varepsilon)+f(x,y-\varepsilon)\right)$$

这相当于说，一个函数 f 满足 $\Delta f=0$ 的“充要条件”是 f 在点 (x,y) 处的值等于这个点上方、下方、左侧、右侧四个点的平均值。这一论断可以看作一种非常粗糙的平均值公式。

2.2 借助波的性质

在空间的维数是奇数时，另一种更加精确的解释方法是利用波的性质[1]。

我们先给出描述波动的方程。对平面上一根绷直的弦、空间中平直的薄膜或者充满空间的弹性体，它们的波动可以用所谓的波方程描述：

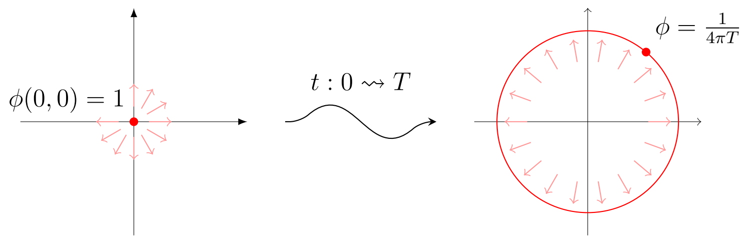
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(t,x) = c^2\Delta_x\phi(t,x). \tag{5}$$

其中 $f(t,x)$ 为 t 时刻在点 x 处的振幅，c 是一个正的常数，它的物理意义是波的速度。之后我们假定 x 在 $\mathbb{R}^3$（或者 $\mathbb{R}^{2n+1}$）中取值，并且波的速度 $c=1$.

现阶段我们不知道如何求解波方程 (5)，不过依靠经验，我们可以承认下面的性质成立[2]：

结论 2.1 (（不严格的）惠更斯原理) *对奇数维空间（如 $\mathbb{R}^3$）中的波，一点处的振幅会均匀地以匀速向四周扩散，且扩散后的振幅的总和等于这一点处原来的振幅。*

例如在 $\mathbb{R}^3$ 中（如下图所示），如果在 $t=0$ 时仅在的原点处有振动，且振幅为 1，那么在 $t=T$ 时刻，整个空间中仅在球面 $\partial B_T(0)=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid |x|=T\}$ 上有振动（我们假定了波速为 1），且球面上每点的振幅都是 $\frac{1}{4\pi T}$，它们的总和 $\int_{\partial B_T(0)}\frac{1}{4\pi T}\,\mathrm{d}S=1$ 恰好是一开始原点处的振幅。



这一结论和我们的生活经验是符合的：当我们在说话时，四周都能够听到我们说话，但只有在声波恰好经过听众时，才有波动传到耳朵里，而在其他时候没有波动，听众听不到声音。不过有些局限的是，这一性质仅对奇数维空间中的波成立，偶数维的波（如水波）具有完全不同的性质。

这时，一个调和函数 $\Delta f\equiv 0$ 会被视作一个“静止”的波 $\phi(t,x)=f(x)$. 反之，一个静止的波一定会定义一个调和函数。不过根据惠更斯原理，这个波并不是

[1]我也考虑过使用热方程来解释平均值原理，但热方程的缺陷在于，温度会在一瞬间“传递”到整个空间，这使得这一小节的论证完全不适用。

[2]知道波方程的解的表达式（Kirchhoff 公式）的读者会发现，下面的结论里少考虑了一项。不过对于我们讨论的问题来说，省略掉的项的值为 0，所以之后的解释是行得通的。

静止了，而是从 $t=0$ 时刻到 $t=T$ 时刻，每一点传播出去的振幅和传播到这一点的振幅相互抵消，导致了“静止”的效果。

对任意一点 x，从这一点传播出去的振幅就是 $f(x)$. 而对空间中另一点 y，它的振幅在 $t=T$ 时刻能传播到 x 当且仅当它到 x 的距离为 T，亦即 y 在球面 $\partial B_T(x)$ 上，且此时点 y 传播到 x 的振幅为 $\frac{f(y)}{|\partial B_T(y)|}$. 所以传播到 x 的振幅为

$$\int_{\partial B_T(x)} \frac{f(y)}{|\partial B_T(y)|}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{|\partial B_T(x)|}\int_{\partial B_T(x)} f(y)\,\mathrm{d}S(y).$$

两者相互抵消，也就是

$$f(x) = \frac{1}{|\partial B_T(x)|}\int_{\partial B_T(x)} f(y)\,\mathrm{d}S(y)$$

这正是前面的平均值公式 (3).

反之，当一个函数满足上面的公式时，每个点传播出去的振幅和接收到的振幅相互抵消，它会是某个静止的波的振幅，这样一定会有 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$. 所以我们最终得到了：

$$\Delta f \equiv 0 \Longleftrightarrow f \text{ 给出了“静止”的波} \Longleftrightarrow f \text{ 满足平均值公式 (3)}$$