课上漏掉的题目

陈铁钊

2025 年 3 月 20 日

题目：求 $\int_{\widehat{AB}}(x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y$ 的值，其中 $A(-2,-1),B(3,0)$，$\widehat{AB}$ 为任意的路径.

这里给出两种办法，它们在计算第二型曲线积分都比较常见。

方法 1 验证 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$，由此证明积分和路径无关，然后选取一条特殊路径做积分。

方法 2 找出 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的一个原函数 f，这样积分就会等于原函数在端点处的值的差。

这两种办法各有优劣。第一种办法更加一般（不过需要注意 P,Q 的定义域），但第二种办法写出的过程往往更加简短。

解 1：我们先验证上面的积分和道路无关。注意到 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 前的系数均定义在单连通区域 $\mathbb{R}^2$ 上，且有：

$$\frac{\partial(6x^2y^2-5y^4)}{\partial x}-\frac{\partial(x^4+4xy^3)}{\partial y}=(12xy^2-0)-(0+12xy^2)=0$$

因此题目给出的积分和路径 $\widehat{AB}$ 的选取无关。取折线段[1]ACB，其中 $C(-2,0)$，这时

$$\overline{AC}\colon x=-2\ (-1\leqslant y\leqslant 0),\qquad \overline{CB}\colon y=0\ (-2\leqslant y\leqslant 3)$$

[1]在本题中，选取折线段比直接选取线段 $\overline{AB}$ 要更方便计算——在直线段 $\overline{AB}$ 上积分需要展开一个四次多项式。

所以有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{\overline{AC}} (x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{\overline{CB}} (x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{0} \left(6(-2)^2y^2-5y^4\right)\,\mathrm{d}y + \int_{-2}^{3} (x^4+0)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \left(24y^2-5y^4\right)\,\mathrm{d}y + \int_{-2}^{3} x^4\,\mathrm{d}x \\
&= \left(8y^3-y^5\right)\Big|_{y=-1}^{y=0} + \frac{x^5}{5}\Big|_{x=-2}^{x=3} \\
&=62
\end{aligned}
$$

解 2：我们考虑函数[2]

$$F(x,y)=\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5$$

这时有：

$$\mathrm{d}F=\left(x^4+4xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(6x^2y^2-5y^4\right)\mathrm{d}y$$

所以有

$$\text{原式}=F(x,y)\Big|_{(x,y)=(-2,-1)}^{(x,y)=(3,0)}=F(3,0)-F(-2,-1)=62$$

[2]很多时候，相比于按照教材给出的步骤逐步计算原函数，“凑”原函数会减少很多解题时间，所以读者可以自己摸索一套方便的“凑”原函数的办法。