平面上齐次函数的性质与一些反例的构造

陈轶钊

2024 年 12 月 25 日

我们在这篇笔记里证明给出一道课后补充题的解答（我们在课上没来得讲），并且利用它构造一些反例。

1 题目及证明

我们的题目是：

例 1.1 (习题 13.2) 对一个二元函数 $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$，如果对任意的 $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 以及任意的 $\lambda > 0$，都有 $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$，那么就称 f 是 α-次齐次函数，这里 $\alpha \in \mathbb{R}$. 如有需要，也可以额外定义 f 在原点的值。请注意这一定义和教材习题 *6.5* 中第 *8* 题的定义稍有不同，本定义中限制 $\lambda > 0$。我们姑且使用这一定义。

本题接下来均假设 f 是 α 次齐次函数。

(i) 证明：存在某个 $\mathbb{R}$ 上的 2π 周期函数 g，使得在极坐标的记号下，f 在原点之外可以表示为

$$f(x,y) = r^\alpha g(\theta), \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

这里的 (r,θ) 由 $r := \sqrt{x^2+y^2}$ 和 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 确定。

(ii) 假设 (i) 中的 $g = g(\theta)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导。证明：$\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上各点处都存在，并且都是 $(\alpha - 1)$ 次齐次函数。

(iii) 假设 (i) 中的 $g = g(\theta) \in C^n(\mathbb{R})$。证明：$f \in C^n(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$。特别地，如果 g 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数，即 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$，那么 $f(x,y)$ 在原点之外的各点都可以求任意多阶导数。

我们来看证明。

对于 (i)：对任意的 $\theta \in \mathbb{R}$，我们取 $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. 那么有

$$g(\theta + 2\pi) = f(\cos(\theta + 2\pi), \sin(\theta + 2\pi)) = f(\cos\theta, \sin\theta) = g(\theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

因此 g 是 2π-周期的。此外还有

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^\alpha f(\cos\theta, \sin\theta) = r^\alpha g(\theta), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

上面的第二个等号用到了 f 是 α-次齐次的。这样我们就证明了 (i).

然后来看 (ii). 我们依据 x, y 的符号分四种情况讨论。

- 如果 $x > 0$. 这时候从 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 可以将 r, θ 表示为关于 x, y 的函数：

  $$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

  所以 r, θ 是关于 x, y 的可微函数，而根据 g 可导可以推出 $f = r^\alpha g(\theta)$ 关于 r, θ 有一阶偏导，所以根据链式法则可以算出 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$：

  $$\frac{\partial f}{\partial x} = r^{\alpha-1}\left(\alpha g(\theta)\cos\theta - g'(\theta)\sin\theta\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = r^{\alpha-1}\left(\alpha g(\theta)\sin\theta + g'(\theta)\cos\theta\right).$$

  上面的表达式和 r 是一次齐次的这一事实结合起来就可以说明 f 的两个一阶偏导数都是 $(\alpha - 1)$-次齐次的。

- 如果 $x < 0$，那么 f 可以表示为 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}} g(\pi + \arctan\frac{y}{x})$，这样和上一情况类似，可以用链式法则算出 f 关于 x, y 的一阶偏导，并证明它是 $(\alpha - 1)$-次齐次的。

- 如果 $y > 0$，取 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \operatorname{arccot}\frac{y}{x}$，后面的讨论与上面情况类似。

- 如果 $y < 0$，取 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \pi + \operatorname{arccot}\frac{y}{x}$，后面的讨论与上面情况类似。

这样就证明了 (ii). 这里我们需要分类讨论的原因是我们没有办法找到一个从 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 到 $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ 的光滑映射，所以只能在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 的子集上构造对应的映射。

最后对于 (iii)，我们利用下面的结论给出一个不需要归纳法的证明：

结论 1.1 设 $f: D \to \mathbb{R}$ 和 $g: \Omega \to D$ 都有所有的 n-阶偏导，且它们的 n-阶偏导连续（我们称这样的函数是 n-阶连续可微的），那么 $f \circ g: \Omega \to \mathbb{R}$ 也有所有的 n-阶偏导，且它的 n-阶偏导连续。

注意，这个结论的证明实际上仍然依赖归纳法，所以我们只是把归纳法藏到了这个结论里。

和 (ii) 类似，我们也需要分 $x > 0, x < 0, y > 0, y < 0$ 四种情况讨论。我们这里只展示 $x > 0$ 时的证明。

我们取 $F(r, \theta) = r^\alpha g(\theta), G(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x})$. 由于 F 是两个 n-阶连续可微函数（r^α 和 $g(\theta)$）的乘积，所以 F 也是 n-阶连续可微的。而 G 由初等函数组成，所以也是 n-阶连续可微的。这样根据上面的结论，$f(x, y) = F \circ G(x, y)$ 在 $x > 0$ 的区域上是 n-阶连续可微的。这样我们就证明了 (iii).

2 应用：一些反例的构造

我们用上面的结果构造一些反例。

例 2.1 (习题 13.3) 请构造 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，使得它在 $\mathbb{R}^2$ 上各点处的一阶偏导数都存在，在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上可微，但在 $(0,0)$ 不可微。

我们取 $f(x, y) = r \sin\theta \cos\theta$，其中 r 可以取 0. 这时根据上一节的题目可知 f 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上可微。我们下面验证 f 在 $(0,0)$ 处有一阶偏导数，但不可微，这样它的确构成一个反例。

首先可以算出：对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$，$f(x, 0) = f(0, y) = 0$，这样

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{f(\xi, 0) - f(0,0)}{\xi} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\eta \to 0} \frac{f(0, \eta) - f(0,0)}{\xi} = 0.$$

这说明 f 在 $(0,0)$ 处有一阶偏导。

我们使用反证法说明 f 在 $(0,0)$ 处不可微。若不然，根据上面的计算可以知道 $df|_{(0,0)} = 0$. 取方向 $\boldsymbol{l} = (\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4})$，那么有：

$$0 = \cos\frac{\pi}{4}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \sin\frac{\pi}{4}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(0,0) = \lim_{t \to 0+0} \frac{r \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{r} = \frac{1}{2}.$$

这显然矛盾了。因此 f 在 $(0,0)$ 处不可微。

例 2.2 (习题 13.4) 请构造 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 满足：

(a) $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 在 $(0,0,0)$ 的一个邻域内存在；

(b) $\frac{\partial f}{\partial z}$ 在 $(0,0,0)$ 的一个邻域内连续；

(c) 但 f 在 $(0,0,0)$ 处不连续。

我们取

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)=\begin{cases}\cos\theta\sin\theta & \textit{if } r>0;\\ 0 & \textit{if } r=0.\end{cases}$$

因为 f 的值和 z 无关，所以 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上恒等于 0. 特别的，$\frac{\partial f}{\partial z}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续，即 f 满足 (b).

又可以算出：

$$\lim_{(x,x,0)\to(0,0,0)}f(x,x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

这说明 f 在 $(0,0,0)$ 处不连续，即 f 满足 (c).

最后我们说明 f 处处存在一阶偏导，这样 f 也满足 (a). 我们已经说明了 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 处处存在，并且根据上一节的结论，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 x,y 不同时为 0 时一定存在。这样只用说明它们在 $(0,0,z)$ 处存在。

注意到对任意的 $x,y,z\in\mathbb{R}$，有 $f(x,0,z)=f(0,y,z)=0$，因此

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,z)=\lim_{\xi\to 0}\frac{f(\xi,0,z)-f(0,0,z)}{\xi}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,z)=\lim_{\eta\to 0}\frac{f(0,\eta,z)-f(0,0,z)}{\xi}=0.$$

这样 f 处处存在偏导，所以 f 的确构成一个反例。