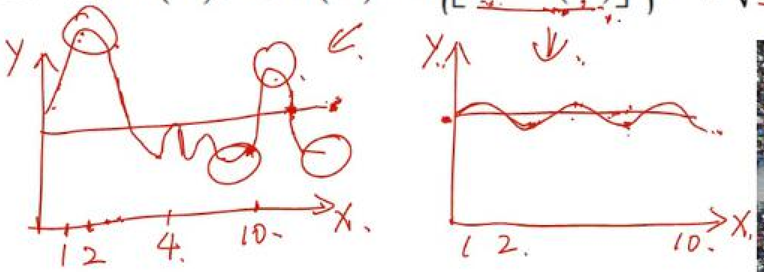
随机变量的方差

1 随机变量方差的定义

设 X 是一个随机变量，如果 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$ 存在，则称 $E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$ 为 X 的方差，记作 $D(X)$，即 $D(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}$，称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差.



随机变量的方差

2 方差的计算

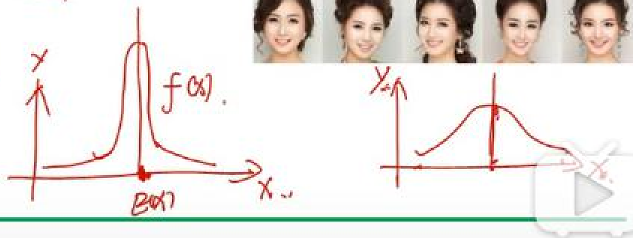
（1）定义法

离散情形：若 X 是离散型随机变量，其概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\ldots$

$$D(X)=E\left\{\left[X-E(X)\right]^2\right\}=\sum_i\left[x_i-E(X)\right]^2 p_i.$$

连续情形：设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，则

$$D(X)=E\left[X-EX\right]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-EX\right]^2 f(x)dx$$



（2）公式法

$$D(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2.$$

随机变量的方差

3 方差的性质

（1）设 c 为常数，则 $D(c)=0$.

（2）如果 X 为随机变量，c 为常数，则 $D(cX)=c^2D(X)$.

（3）如果 X 为随机变量，c 为常数，则有 $D(X+c)=D(X)$.

由性质（2）（3）可得 $D(aX+b)=a^2D(X)$ （a,b 为任意常数）.

（4）$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

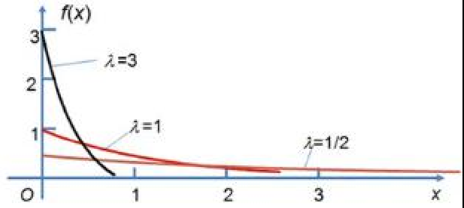
X、Y

概率论与数理统计——随机变量的数字特征

微信公众号：小元老师

常用随机变量的数学期望和方差

分布名称	分布记号	期望	方差
0－1 分布	$X \sim B(1,p)$	p	$p(1-p)$
二项分布	$X \sim B(n,p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$X \sim P(\lambda)$	λ	λ
几何分布	$X \sim G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
均匀分布	$X \sim U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$X \sim E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2



概率论与数理统计——随机变量的数字特征

微信公众号：小元老师

随机变量的方差

设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X \sim N(0,\frac{1}{2}),Y \sim N(0,\frac{1}{2}),Z=|X-Y|$，求 EZ,DZ。

概率论与数理统计——随机变量的数字特征

微信公众号：小元老师

随机变量的方差

设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0,x<-1\\ a+b\arcsin x,-1\le x<1\\ 1,x\ge 1\end{cases}$，求 DX。

随机变量的方差

设 $X \sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, 0 \le x \le \pi \\ 0, 其他\end{cases}$，对 X 进行独立重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$，求 EY^2。

$Y \sim B(4, p)$.

概率论与数理统计——随机变量的数字特征

微信公众号：小元老师

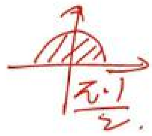
随机变量的方差

设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ a+b\arcsin x, -1\le x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}$，求 DX。

$F(-1)$. $a+b\arcsin(-1)=a-\frac{\pi}{2}b=0$.

$1=\lim\limits_{x\to 1^-} a+b\arcsin x = a+b\frac{\pi}{2}=1$.　　$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\pi}$.

$f(x)=F'(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$-1<x<1$.



$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$,　$E(X)=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$.

$E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1+1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx$

$=\frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.　$D(X)=\frac{1}{2}$

概率论与数理统计——随机变量的数字特征

微信公众号：小元老师

随机变量的方差

设 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, 0\le x\le\pi\\ 0, 其他\end{cases}$，对 X 进行独立重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$，求 EY^2。

$Y\sim B(4,p)$.

$p=P\{X>\frac{\pi}{3}\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$Y\sim B(4,\frac{1}{2})$.

$E(Y)=np=2$.　　$D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1=E(Y^2)-E^2(Y)$

$=E(Y^2)-2^2$.

$E(Y^2)=5$

随机变量的方差

$D(U)=E(U^2)-E^2(U)$

$1=E(U^2)-0$

设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,\frac{1}{2}),Y\sim N(0,\frac{1}{2}),Z=|X-Y|$，求 EZ,DZ。

$U=X-Y\sim N(0,1)$ $D(X-Y)=D(X)+D(Y)+2\times 0$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$Z=|U|$ $Z^2=U^2$ $f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$

$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=2\int_0^{+\infty}u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}d\frac{u^2}{2}$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t}dt\quad(t=\frac{u^2}{2})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(-e^{-t})\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$D(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)=1-\frac{2}{\pi}$