



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

概率论与数理统计

25/2/2013

主要教学参考书



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China



教材

《概率论与数理统计》

陈希孺

科大出版社

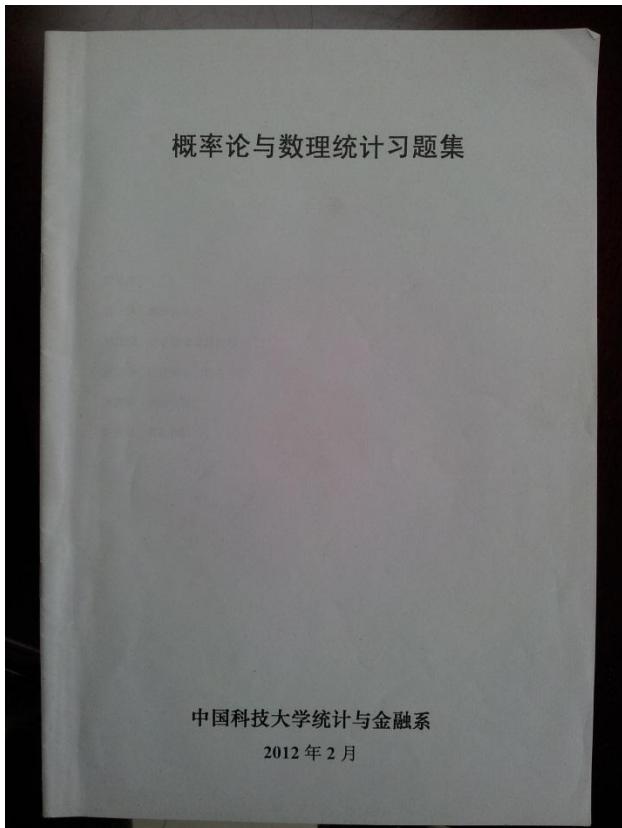
2009年

习题册与资源



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

- 作业习题册(教材科)



- 资源网站

- 课程主页

<http://staff.ustc.edu.cn/~zwp>

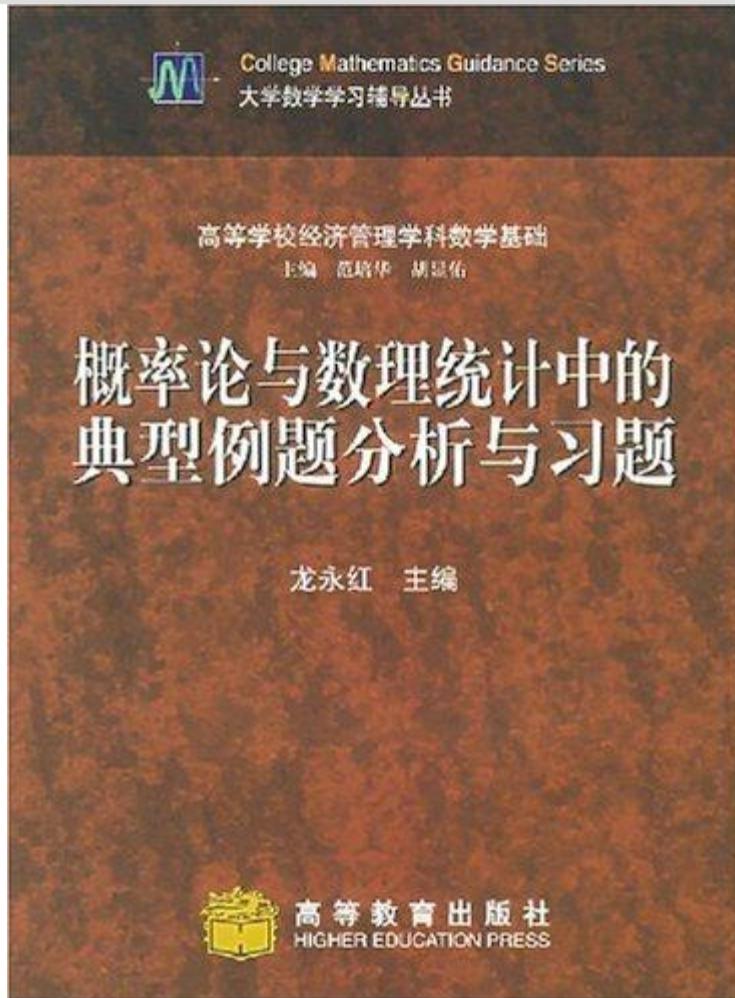
- 答疑交流论坛

<http://fisher.stat.ustc.edu.cn>

辅导书



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China



2012-2013学年第1学期

《概率统计》挂科率 3 %

{ 化院(138人, 不及格率: 4.35%)
信院(131人, 不及格率: 1.53%)

本学科的 ABC

概率(或然率或几率) —— 随机事件出现的可能性的量度 —— 其起源与博弈问题有关.

概率论是一门研究客观世界随机现象数量规律的 数学分支学科.

16世纪意大利学者开始研究掷骰子等赌博中的一些问题；17世纪中叶，法国数学家B. 帕斯卡、荷兰数学家C. 惠更斯 基于排列组合的方法，研究了较复杂的赌博问题，解决了“合理分配赌注问题”.



对客观世界中随机现象的分析产生了概率论；使概率论成为数学的一个分支的真正奠基人是瑞士数学家J.伯努利；而概率论的飞速发展则在17世纪微积分学说建立以后。

第二次世界大战军事上的需要以及大工业与管理的复杂化产生了运筹学、系统论、信息论、控制论与数理统计学等学科。

数理统计学是一门研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，以对所考察的问题作出推断或预测，直至为采取一定的决策和行动提供依据和建议的数学分支学科。



统计方法的数学理论要用到很多近代数学知识，如函数论、拓扑学、矩阵代数、组合数学等等，但关系最密切的是概率论，故可以说：概率论是数理统计学的基础，数理统计学是概率论的一种应用。但是它们是两个并列的数学分支学科，并无从属关系。

本学科的应用

概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产国民经济的各个部门中。例如

1. 气象、水文、地震预报、人口控制及预测都与《概率论》紧密相关；
2. 产品的抽样验收，新研制的药品能否在临床中应用，均要用到《假设检验》；
3. 寻求最佳生产方案要进行《实验设计》和《数据处理》；



4. 电子系统的设计, 火箭卫星的研制及其发射都离不开《可靠性估计》;
5. 处理通信问题, 需要研究《信息论》;
6. 探讨太阳黑子的变化规律时, 《时间序列分析》方法非常有用;
7. 研究化学反应的时变率, 要以《马尔可夫过程》来描述;



8. 生物学中研究 群体的增长问题时，提出了生灭型《随机模型》，传染病流行问题要用到多变量非线性《生灭过程》；
9. 许多服务系统，如电话通信、船舶装卸、机器维修、病人候诊、存货控制、水库调度、购物排队、红绿灯转换等，都可用一类概率模型来描述，其涉及到的知识就是《排队论》。

目前，概率统计理论进入其他自然科学领域的趋势还在不断发展。在社会科学领域，特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题，



都大量采用《概率统计方法》。法国数学家拉普拉斯 (*Laplace*)说对了：“生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题。”

英国的逻辑学家和经济学家杰文斯曾对概率论大加赞美：“概率论是生活真正的领路人，如果没有对概率的某种估计，那么我们就寸步难行，无所作为。

第一章 随机事件及其概率

确定性现象

随机现象 ——

- 每次试验前不能预言出现什么结果
- 每次试验后出现的结果不止一个
- 在相同的条件下进行大量观察或试验时，出现的结果有一定的规律性
——称之为**统计规律性**

§ 1.1 随机事件



基本术语

对某事物特征进行观察,统称**试验**.

若它有如下特点,则称为**随机试验**,用 E 表示

- 可在相同的条件下重复进行
- 试验结果不止一个,但能明确所有的结果
- 试验前不能预知出现哪种结果



样本空间——随机试验 E 所有可能的结果组成的集合称为**样本空间** 记为 Ω

样本空间的元素, 即 E 的直接结果, 称为**样本点(or基本事件)** 常记为 ω , $\Omega = \{\omega\}$

随机事件 —— Ω 的子集, 记为 A, B, \dots

它是满足某些条件的样本点所组成的集合.



例1 给出一组随机试验及相应的样本空间

E_1 ：投一枚硬币3次，观察正面出现的次数 $\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3\}$
————→ **有限样本空间**

E_2 ：观察总机每天9:00~10:00接到的电话次数
 $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$

E_3 ：观察某地区每天的最高温度与最低温度

$\Omega_3 = \{(x, y) | T_1 < x < y < T_2\}$ ————→ **无限样本空间**

其中 T_1, T_2 分别是该地区的最低与最高温度



基本事件 —— 仅由一个样本点组成的子集它是随机试验的直接结果,每次试验必定发生且只可能发生一个基本事件.

随机事件发生 —— 组成随机事件的一个样本点发生

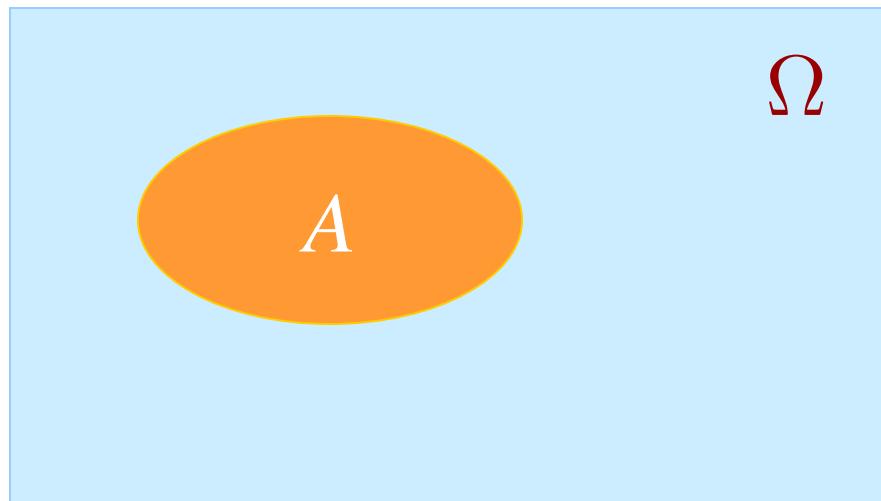
必然事件 —— 全体样本点组成的事件,记为 Ω , 每次试验必定发生的事件.

不可能事件 —— 不包含任何样本点的事件,记为 Φ ,每次试验必定不发生的事件.



事件的关系和运算

文氏图 (Venn diagram)



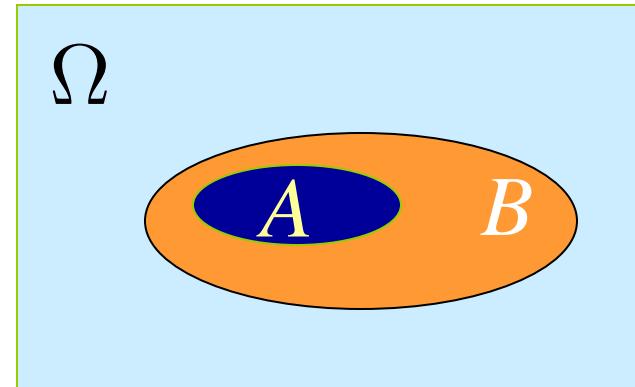
随机事件的关系和运算雷同
集合的关系和运算



1. 事件的包含

$A \subset B$ —— A 包含于 B

\Leftrightarrow 事件 A 发生必
导致事件 B 发生



2. 事件的相等

$A \subset B$ 且 $B \subset A$



3. 事件的并(和)

$A \cup B$ 或 $A + B$

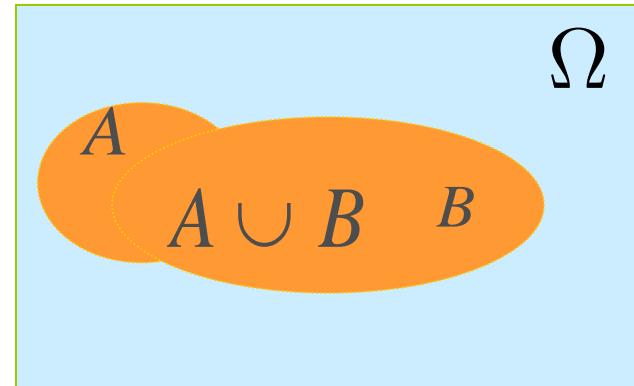
—— A 与 B 的和事件

$A \cup B$ 发生

\Leftrightarrow 事件 A 与事件 B 至少有一个发生

A_1, A_2, \dots, A_n 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^n A_i$

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和事件 —— $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$





4. 事件的交(积)

$A \cap B$ 或 AB

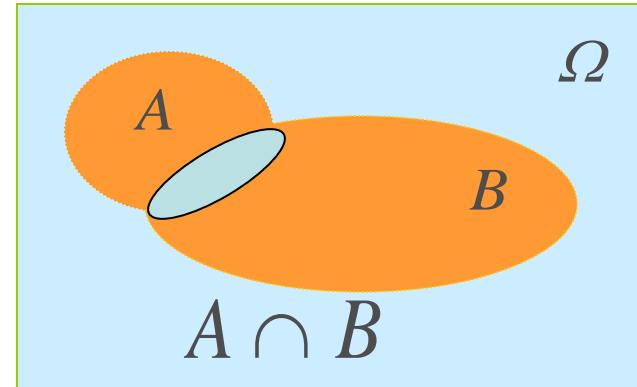
—— A 与 B 的积事件

$A \cap B$ 发生

\Leftrightarrow 事件 A 与事件 B 同时发生

A_1, A_2, \dots, A_n 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^n A_i$

$A_1, A_2, \dots, A_n \dots$ 的积事件 —— $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$





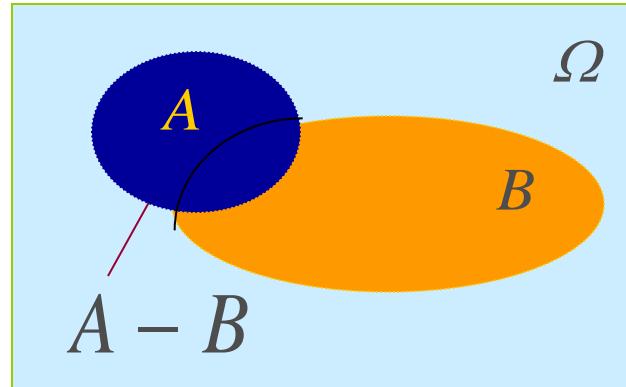
5. 事件的差

$A - B$

—— A 与 B 的差事件

$A - B$ 发生

\Leftrightarrow 事件 A 发生, 但
事件 B 不发生





6. 事件的互斥(互不相容)

$AB = \emptyset$ —— A 与 B 互斥

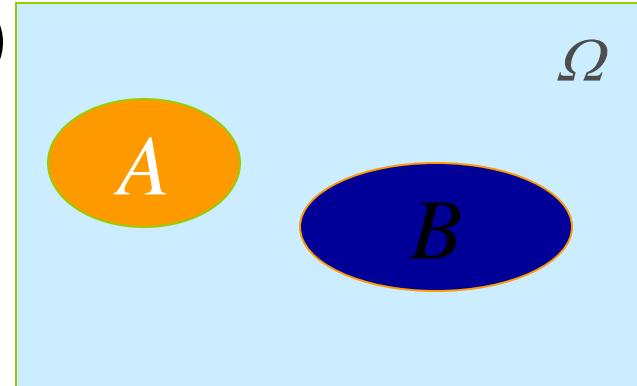
$\Leftrightarrow A, B$ 不可能同时发生

A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥

$\Leftrightarrow A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$

$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互斥

$\Leftrightarrow A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$





7. 事件的对立

$$AB = \emptyset, A \cup B = \Omega$$

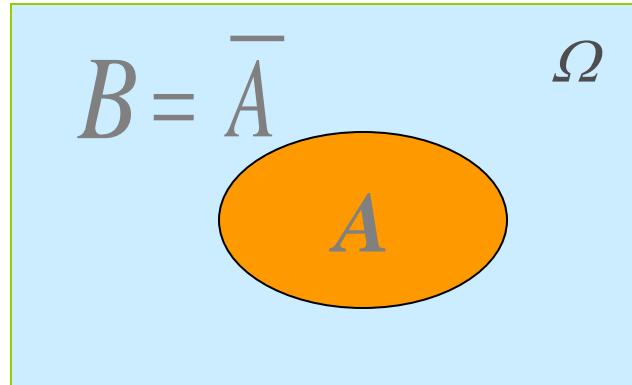
—— A 与 B 互相对立

\Leftrightarrow 每次试验 A 、 B 中有
且只有一个发生

称 B 为 A 的对立事件(or逆事件), 记为

$$B = \bar{A}$$

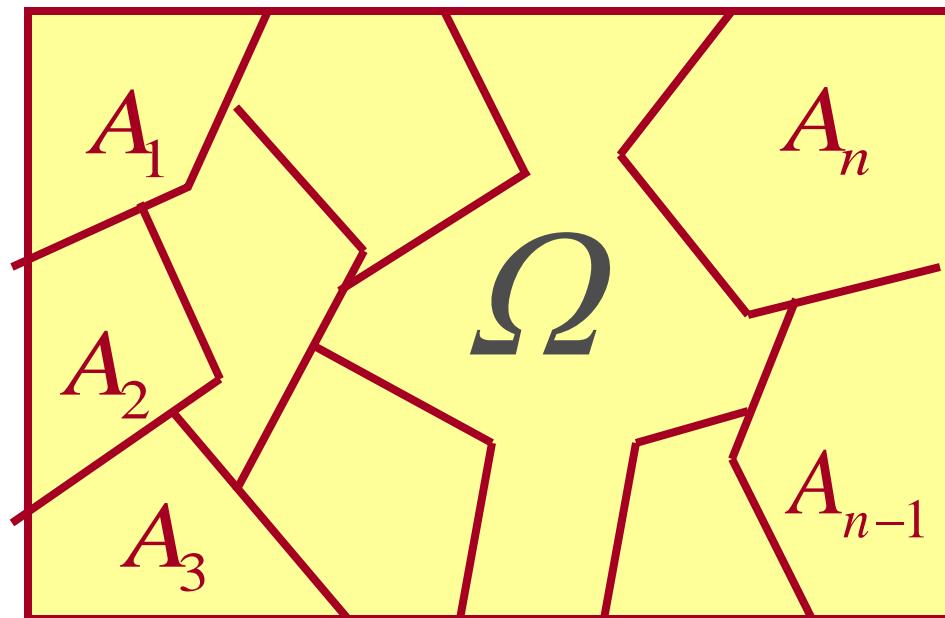
注意: “ A 与 B 互相对立” 与 “ A 与 B 互斥” 是不同的概念



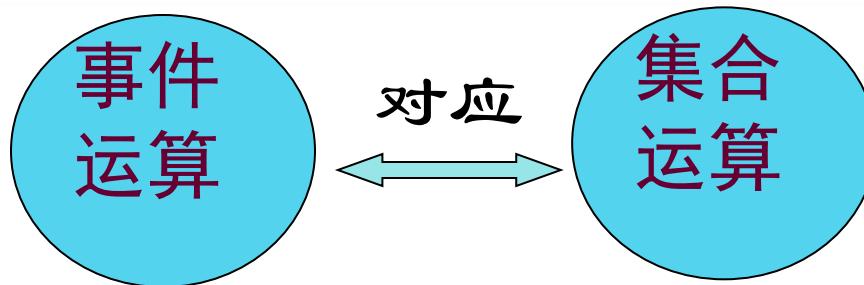


8. 完备事件组

若 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 且 $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$. 则称 A_1, A_2, \dots, A_n 为完备事件组, 或称 A_1, A_2, \dots, A_n 为 Ω 的一个划分



运算律



- 吸收律 $A \cup \Omega = \Omega$ $A \cap \Omega = A$
 $A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cup (AB) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
- 重余律 $\bar{\bar{A}} = A$
- 幂等律 $A \cup A = A$ $A \cap A = A$
- 差化积 $A - B = A\bar{B} = A - (AB)$



□ 交换律

$$A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$$

□ 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

□ 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$$

□ 反演律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B} \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$$

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$$



例3 化简事件 $\overline{(\overline{AB} \cup C) \overline{AC}}$

解 原式 $= \overline{\overline{AB} \cup C} \cup AC = \overline{\overline{AB} \overline{C}} \cup AC$
 $= (A \cup B)\overline{C} \cup AC$
 $= A\overline{C} \cup B\overline{C} \cup AC$
 $= A(\overline{C} \cup C) \cup B\overline{C}$
 $= A\Omega \cup B\overline{C} = A \cup B\overline{C}$



例4 利用事件关系和运算表达多个事件的关系

A, B, C 都不发生——

$$\overline{A} \ \overline{B} \ \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

A, B, C 不都发生——

$$\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$



例5 在图书馆中随意抽取一本书，
事件 A 表示数学书， B 表示中文书，
 C 表示平装书. 则

$ABC\bar{C}$ —— 抽取的是精装中文版数学书

$\bar{C} \subset B$ —— 精装书都是中文书

$\bar{A} = B$ —— 非数学书都是中文版的，且
中文版的书都是非数学书

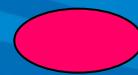
§1.2 概率的定义及计算



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

历史上概率的三次定义

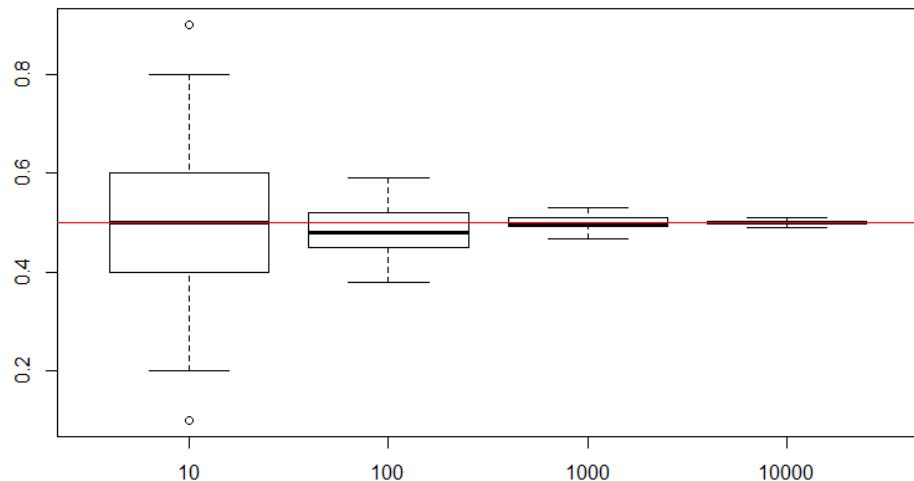
- ① 古典定义 —— 概率的最初定义
- ② 统计定义 —— 基于频率的定义
- ③ 公理化定义 —— 1930年后由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫给出



频率

设在 n 次试验中，事件 A 发生了 m 次，
则称 $f_n = \frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的 频率

分别掷一门硬币 10,
100, 1000 和 10000 次，
各个试验重复 50 次，
右图表示了各试验
正面出现频率的盒形图



频率的性质

- $0 \leq f_n(A) \leq 1$ _____ 非负性
- $f_n(\Omega) = 1$ _____ 归一性
- 事件 A, B 互斥, 则
$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$
 _____ 可加性
- 可推广到有限个两两互斥事件的和事件
- $$f_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$$
 _____ 稳定性
 - └── 某一定数

频率稳定性的实例

蒲丰(*Buffon*)投币 ——

投一枚硬币观察正面朝上的次数

$$n = 4040, \quad n_H = 2048, \quad f_n(H) = 0.5069$$

皮尔森(*Pearson*) 投币

$$n = 12000, \quad n_H = 6019, \quad f_n(H) = 0.5016$$

$$n = 24000, \quad n_H = 12012, \quad f_n(H) = 0.5005$$

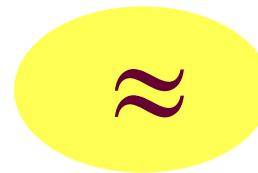


例 Dewey G. 统计了约438023个英语单词中各字母出现的频率,发现各字母出现的频率不同:

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| A: 0.0788 | B: 0.0156 | C: 0.0268 | D: 0.0389 |
| E: 0.1268 | F: 0.0256 | G: 0.0187 | H: 0.0573 |
| I: 0.0707 | J: 0.0010 | K: 0.0060 | L: 0.0394 |
| M: 0.0244 | N: 0.0706 | O: 0.0776 | P: 0.0186 |
| Q: 0.0009 | R: 0.0594 | S: 0.0634 | T: 0.0987 |
| U: 0.0280 | V: 0.0102 | W: 0.0214 | X: 0.0016 |
| Y: 0.0202 | Z: 0.0006 | | |

当试验次数较大时有

事件发生
的概 率



事件发生
的频 率

根据如下百年统计资料可得
世界每年发生大地震的概率

近百年世界重大地震

“重大”的标准 { ① 震级 7 级左右
② 死亡 5000 人以上

时间	地点	级别	死亡
1905.04.04	克什米尔地区	8.0	88万
1906.08.17	智利瓦尔帕莱索港地区	8.4	2万
1917.01.20	印度尼西亚巴厘岛	7.7	1.5万
1920.12.16	中国甘肃	8.6	10万
1923.09.01	日本关东地区	7.9	14.2万
1935.05.30	巴基斯坦基达地区	7.5	5万



时间	地点	级别	死亡
1948.06.28	日本福井地区	7.3	0.51 万
1970.01.05	中国云南	7.7	1 万
1976.07.28	中国河北省唐山	7.8	24.2
1978.09.16	伊朗塔巴斯镇地区	7.9	1.5
1995.01.17	日本阪神工业区	7.2	0.6 万
1999.08.17	土耳其伊兹米特市	7.4	1.7 万
2003.12.26	伊朗克尔曼省	6.8	3 万
2004.12.26	印尼苏门答腊岛附近海域	9.0	15 万

世界每年发生大地震概率约为14%

概率的定义

概率的统计定义

在相同条件下重复进行的 n 次试验中, 事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动, 且随 n 越大摆动幅度越小, 则称 p 为事件 A 的概率, 记作 $P(A)$.

对本定义的评价

优点: 直观
易懂

缺点: 粗糙
模糊

不便
使用



概率的 公理化定义

概率的公理化理论由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)1933年建立.

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，若能找到一个法则，使得对于 E 的每一事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$ ，称之为事件 A 的概率，这种赋值满足下面的三条公理：

- 非负性： $\forall A \subset \Omega, P(A) \geq 0$
- 归一性： $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性： $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

其中 A_1, A_2, \dots 为两两互斥事件

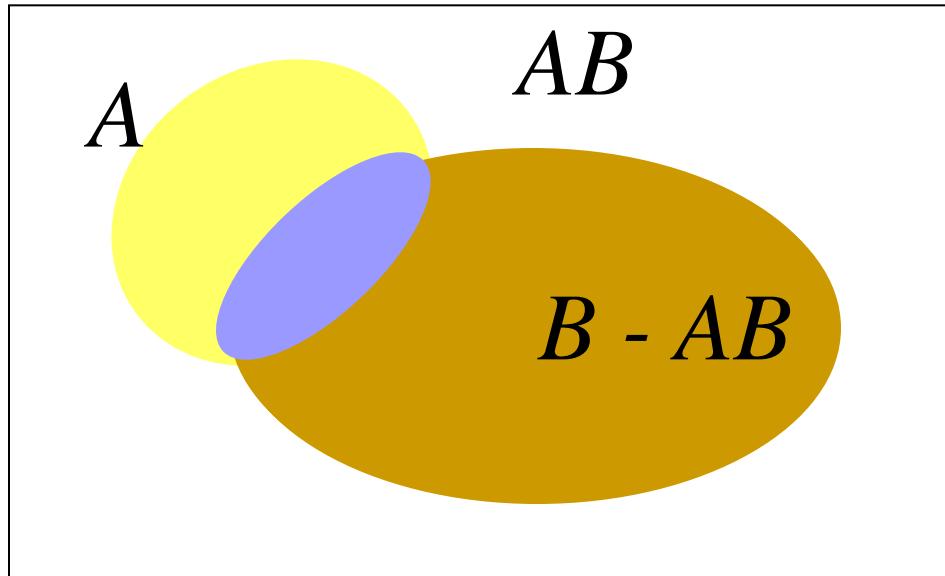
概率的性质

- $P(\emptyset) = 0$
- 有限可加性: 设 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥
 - $$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) \leq 1$
- 若 $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$
 $\Rightarrow P(A) \leq P(B)$



□ 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(B - A) = P(B) - P(AB)$$



$$B = AB + (B - A)$$

$$P(B) = P(AB) +$$

$$P(B - AB)$$



□ 加法公式：对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

推广：

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(AB) - P(AC) - P(BC) \\ &\quad + P(ABC) \end{aligned}$$



一般：

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \end{aligned}$$

右端共有 $2^n - 1$ 项.



□ 概率的连续性：①设事件列 $A_n \subset A_{n+1}$,
 $n = 1, 2, \dots$ 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

②设事件列 $A_n \supset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ 则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$



例1 小王参加“智力大冲浪”游戏，他能答出甲、乙二类问题的概率分别为0.7和0.2，两类问题都能答出的概率为0.1. 求小王

- (1) 答出甲类而答不出乙类问题的概率
- (2) 至少有一类问题能答出的概率
- (3) 两类问题都答不出的概率

解 事件 A, B 分别表示“能答出甲,乙类问题”

$$(1) P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.7 - 0.1 = 0.6$$

$$(2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.8$$

$$(3) P(\overline{A} \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0.2$$



例2 设 A, B 满足 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$, 在何条件下, $P(AB)$ 取得最大(小)值? 最大(小)值是多少?

解 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 0.3 \quad \text{—— 最小值}$$

最小值在 $P(A \cup B) = 1$ 时取得

$$P(AB) \leq P(A) = 0.6 \quad \text{—— 最大值}$$

最大值在 $P(A \cup B) = P(B)$ 时取得



例3 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$,

$$P(AB) = 0 , \quad P(AC) = P(BC) = 1/6$$

则事件 A, B, C 全不发生的概率为_____.

通过做此题 你能发现什么问题?

(此题是1992年考研填空题)



一般会解出

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) &= 1 - P(A \cup B \cup C) \\&\quad + P(AB) + P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\&= 1 - 3/4 + 2/6 = 7/12.\end{aligned}$$

另一方面,由题设得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1/2.$$

又可得

$$P(A \cup B \cup C) = 5/12.$$

于是得矛盾

$$P(A \cup B) = 1/2 > 5/12 = P(A \cup B \cup C).$$

若将条件修改为 $P(AC) = P(BC) = 1/9$ 便无矛盾

$$P(A \cup B) = 1/2 < 19/36 = P(A \cup B \cup C).$$

古典（等可能）概率

概率的 古典定义

设随机试验 E 具有下列特点：

- 基本事件的个数有限
- 每个基本事件等可能性发生

则称 E 为**古典(等可能)概率**

古典概率中概率的计算：

记 $n = \Omega$ 中包含的基本事件总数

$k =$ 组成 A 的基本事件个数

则 $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}$

排列组合有关知识复习

加法原理：完成一件事情有 n 类方法，第 i 类方法中有 m_i 种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\sum_{i=1}^n m_i$$

种不同的方法

乘法原理：完成一件事情有 n 个步骤，第 i 个步骤中有 m_i 种具体的方法，则完成这件事情共有

$$\prod_{i=1}^n m_i$$

种不同的方法



排列 从 n 个不同的元素中取出 m 个 (不放回地) 按一定的次序排成一排不同的排法共有

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

种

全排列 $A_n^n = n!$

可重复排列 从 n 个不同的元素中可重复地取出 m 个排成一排, 不同的排法有

$$n^m$$

种



不尽相异元素的全排列 n 个元素中有 m 类,
第 i 类中有 k_i 个相同的元素, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$,
将这 n 个元素按一定的次序排成一排, 不同的
排法共有

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

种



组合 从 n 个不同的元素中取出 m 个(不放回地)组成一组，不同的分法共有

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

多组组合 把 n 个元素分成 m 个不同的组(组编号)，各组分别有 k_1, k_2, \dots, k_m 个元素，
 $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ，则不同的分法共有

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \cdots C_{k_n}^{k_n} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!}$$

种



例3 袋中有 a 只白球, b 只红球, 从袋中按不放回与放回两种方式取 m 个球 ($m \leq a + b$), 求其中恰有 k 个 ($k \leq a, k \leq m$) 白球的概率

解 (1) 不放回情形

E : 球编号, 任取一球, 记下颜色, 放在一边,
重复 m 次

$$\Omega: n_{\Omega} = A_{(a+b)}^m = (a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-m+1)$$

记事件 A 为 m 个球中有 k 个白球, 则

$$n_A = C_m^k A_a^k A_b^{m-k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{a!}{(a-k)!} \cdot \frac{b!}{(b-m+k)!}$$



则

$$P(A) = \frac{C_m^k A_a^k A_b^{m-k}}{A_{a+b}^m} \quad k \leq a, k \leq m$$

又解 E_1 : 球编号, 一次取 m 个球, 记下颜色

$$\Omega_1: \quad n_{\Omega_1} = C_{a+b}^m$$

记事件 A 为 m 个球中有 k 个白球, 则

因此

$$P(A) = \frac{C_a^k C_b^{m-k}}{C_{a+b}^m} \quad k \leq a, k \leq m$$

称超几何分布

不放回地逐次取 m 个球, 与一次任取 m 个球算得的结果相同.



(2) 放回情形

E_2 : 球编号, 任取一球, 记下颜色, 放回去, 重复 m 次

$$\Omega_2: \quad n_{\Omega_2} = (a + b)^m$$

记 B 为取出的 m 个球中有 k 个白球, 则

$$P(B) = \frac{C_m^k a^k b^{m-k}}{(a+b)^m} = C_m^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{m-k}$$

记 $p = \frac{a}{a+b}$

$$P(B) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \quad k = 1, 2, \dots, \min(a, m)$$

称二项分布



例4 (分球模型) 设有 k 个不同的球, 每个球等可能地落入 N 个盒子中 ($k \leq N$), 设每个盒子容球数无限, 求下列事件的概率:

- (1) 某指定的 k 个盒子中各有一球;
- (2) 某指定的一个盒子恰有 m 个球 ($m \leq k$)
- (3) 某指定的一个盒子没有球;
- (4) 恰有 k 个盒子中各有一球;
- (5) 至少有两个球在同一盒子中;
- (6) 每个盒子至多有一个球.



解 设 (1) ~ (6) 的各事件分别为 $A_1 \cdots A_6$ 则

$$m_{A_1} = k! \quad \longrightarrow \quad P(A_1) = \frac{m_{A_1}}{n} = \frac{k!}{N^k}$$

$$m_{A_2} = C_k^m (N-1)^{k-m} \quad \longrightarrow \quad P(A_2) = \frac{C_k^m (N-1)^{k-m}}{N^k}$$

$$m_{A_3} = (N-1)^k \quad \longrightarrow \quad P(A_3) = \frac{(N-1)^k}{N^k}$$

$$m_{A_4} = C_N^k k! \quad \longrightarrow \quad P(A_4) = \frac{C_N^k k!}{N^k}$$

$$m_{A_5} = N^k - C_N^k k! \quad \longrightarrow \quad P(A_5) = \frac{N^k - C_N^k k!}{N^k} = 1 - P(A_4)$$

$$m_{A_6} = C_N^k k! \quad \longrightarrow \quad P(A_6) = P(A_4)$$



例5 “分球模型”的应用

生物系二年级有 n 个人，求至少有两人生日相同（设为事件A）的概率。

解 本问题中的人可被视为“球”，365天为365只“盒子”

\bar{A} 为 n 个人的生日均不相同,这相当于每个盒子至多有一个球. 由例4(6) 有

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{365}^n \cdot n!}{365^n} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{365}^n \cdot n!}{365^n}.$$

若 $n = 64$, $\Rightarrow P(A) \approx 0.997$.

计算古典概率注意事项

- 1° 明确所作的试验是等可能概型,有时需设计符合问题要求的随机试验,使其成为等可能概型.
- 2° 同一题的样本空间的基本事件总数 随试验设计的不同而不同,如 例3不放回试验的两种不同设计. 一般 n_{Ω} 越小越好.
- 3° 计算古典概率时须注意应用概率计算的有关公式,将复杂问题简单化.



若 $P(A) \leq 0.01$, 则称A为小概率事件.

小概率原理

—— (即实际推断原理)

一次试验中小概率事件一般是不会发生的.
若在一次试验中居然发生了, 则可怀疑该事件并非小概率事件.



例6 区长办公室某一周内曾接待过9次来访, 这些来访都是周三或周日进行的, 是否可以断定接待时间是有规定的?

解 假定办公室每天都接待, 则

$$P(\text{9次来访都在周三、日}) = 0.0000127 = \frac{2^9}{7^9}$$

这是小概率事件,一般在一次试验中不会发生. 现居然发生了,故可认为假定不成立,从而推断接待时间是有规定的.



几何概型

例7 某人的表停在9点了，他打开收音机听电台报时，已知电台是整点报时的，问他等待报时的时间短于十分钟的概率



$$P(A) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$



几何概型

设样本空间为有限区域 Ω , 若样本点落入 Ω 内任何区域 G 中的概率与区域 G 的测度成正比, 则样本点落入 G 内的概率为

$$P(A) = \frac{G \text{的测度}}{\Omega \text{的测度}}$$



例8 两船欲停同一码头, 两船在一昼夜内独立随机地到达码头. 若两船到达后需在码头停留的时间分别是 1 小时与 2 小时, 试求在一昼夜内, 任一船到达时, 需要等待空出码头的概率.

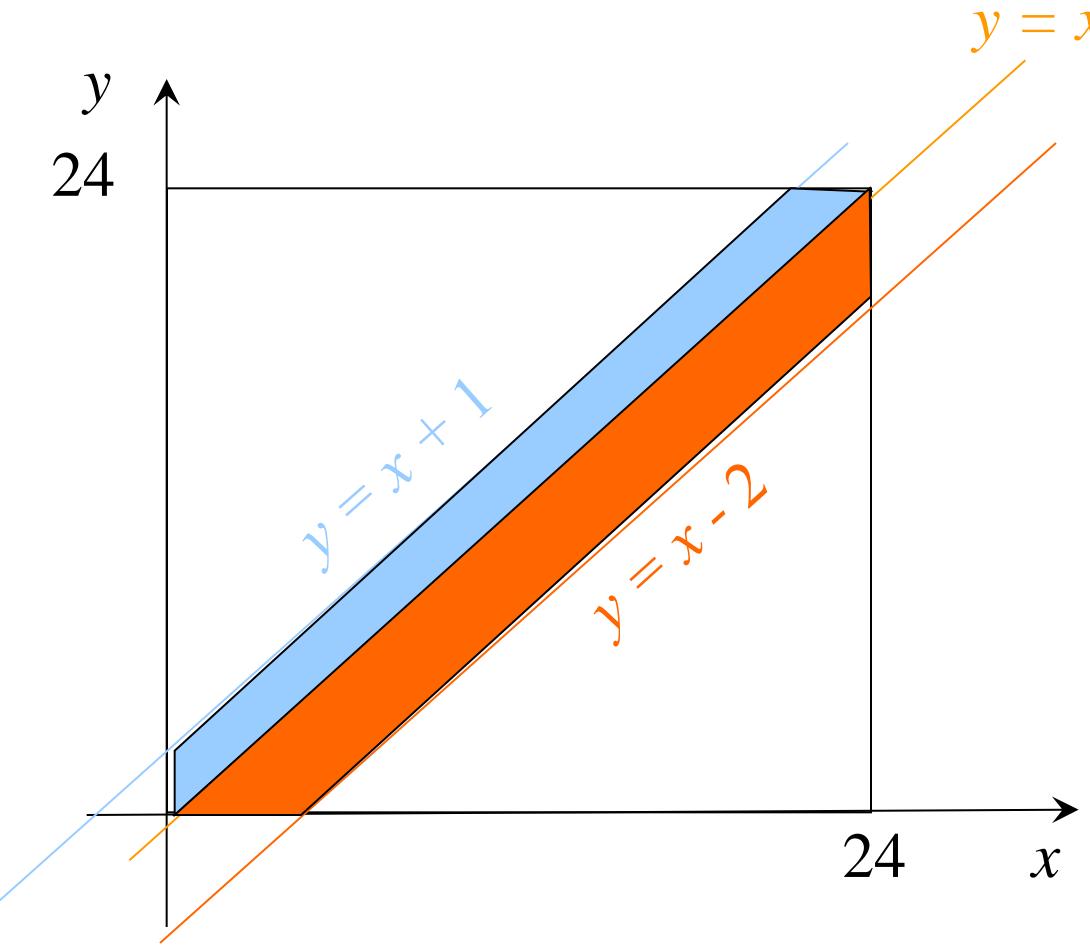
解 设船1 到达码头的瞬时为 x , $0 \leq x < 24$

船2 到达码头的瞬时为 y , $0 \leq y < 24$

设事件 A 表示任一船到达码头时需要等待空出码头



$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 24, 0 \leq y < 24\} \quad A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, 0 \leq y - x \leq 1, 0 \leq x - y \leq 2\}$$



$$S_{\Omega} = 24^2$$

$$S_{\bar{A}} = \frac{1}{2} 23^2 + 22^2$$

$$P(A) = 1 - \frac{S_{\bar{A}}}{S_{\Omega}} = 0.1207$$



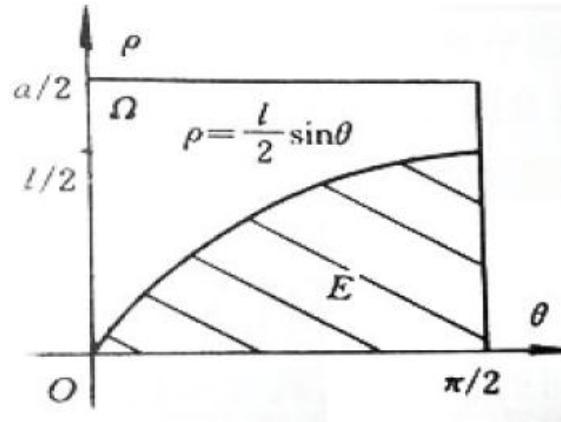
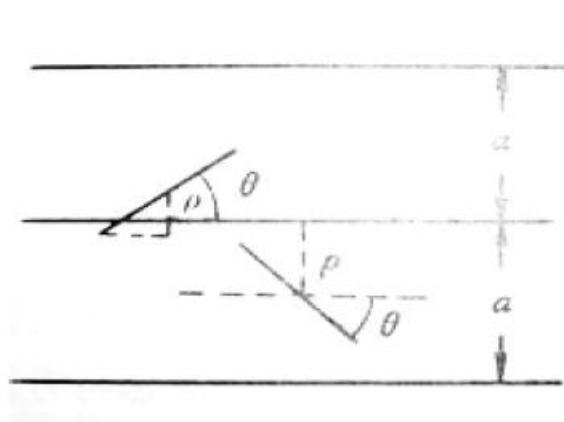
例9 (Buffon's needle) 桌面上画满间隔为 a 的平行线，现向桌面投掷一根长为 ℓ ($\ell < a$) 的针，求针与线相交的概率。

解：如下图所示，针的位置由针的中点到最近直线的距离 ρ 及针与直线所夹锐角 θ 决定。于是 $\Omega = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq a/2, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ 。由针的任意性，样本点 (ρ, θ) 在 Ω 中均匀分布，是几何概型。而针与某直线相交，当且仅当 $\rho \leq \frac{l}{2} \sin \theta$ 。即

$$E = \{(\rho, \theta) \in \Omega : \rho \leq \frac{l}{2} \sin \theta\}$$



图 1: 针和平行线位置关系



$$m(\Omega) = \frac{\pi a}{4}, \quad m(E) = \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \sin\theta d\theta$$

所以 $P(E) = \frac{m(E)}{m(\Omega)} = \frac{2l}{\pi a}$.