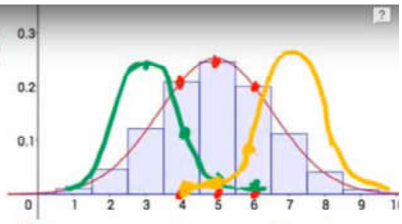
概率论与数理统计——参数估计

最大似然估计法



$L(p)$ $p=0.3$ $p=0.7$

1） 离散型随机变量

设总体 X 是离散型随机变量，概率分布为 $P\{X=t_i\}=p(t_i;\theta), i=1,2,\ldots$ 其中 $\theta\in\Theta$ 为待估参数.

$P \quad C_{10}^{k} p^{k}(1-p)^{10-k}$

设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是样本值，称函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$ 为样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的似然函数. 如果 $\hat\theta\in\Theta$，使得

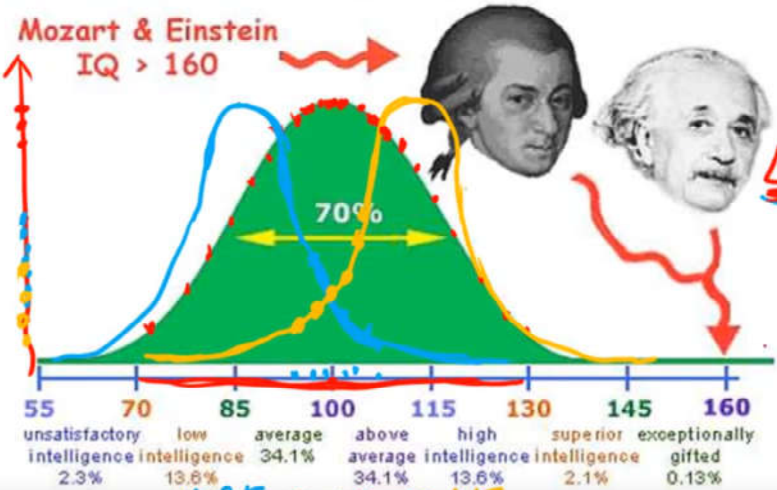
$$L(p)=C_{10}^{4}p^{4}(1-p)^{6}\cdot C_{10}^{5}p^{5}(1-p)^{5}\cdot C_{10}^{6}p^{6}(1-p)^{4}$$

$L(\hat\theta)=\max\limits_{\hat\theta\in\Theta}L(\theta)$，这样的 $\hat\theta$ 与 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 有关，记作 $\hat\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，称为未知参数 θ 的最大似然估计值，相应的统计量 $\hat\theta(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量.

概率论与数理统计——参数估计

最大似然估计法

$X_1 \; X_2 \; \cdots \; X_{100}$



$\mu=85 \quad \mu=100 \quad \mu=115$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}$$

$\hat\mu$

$\mu=100$

$\hat\mu=99.101$

3） 最大似然估计法的步骤

①写出似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m) \quad \text{（离散型）}$$

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\ldots,x_n;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m)\text{；} \quad \text{（连续型）}$$

②取对数 $\ln L$；

③对 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_m$ 求偏导数 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}, i=1,2,\ldots,m$

④判断方程组 $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}$ 是否有解.若有解，则其解即为所求最大似然估计；若无解，则最大似然估计常在 θ_i 的边界点上达到.

小元老师 概率论与数理统计——参数估计 微信公众号：小元老师

设总体 X 的分布律为 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\cdots$，其中 p 为未知参数，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求参数 p 的矩估计量和极大拟然估计量。

$L(p)=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}$

$=p(1-p)^{x_1-1}p(1-p)^{x_2-1}\cdots p(1-p)^{x_n-1}$

$=p^n(1-p)^{x_1+x_2\cdots+x_n-n}$

$\ln L(p)=n\ln p+(x_1+x_2\cdots+x_n-n)\ln(1-p)$

$\dfrac{d\ln L(p)}{dp}=\dfrac{n}{p}+\dfrac{(x_1+x_2+\cdots+x_n-n)}{1-p}(-1)=0$

$n-np=p(x_1+x_2\cdots+x_n-n)$

$p=\dfrac{1}{\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}}$

$=\dfrac{1}{\overline{X}}$

【解】（1） $EX=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=p(\sum_{k=1}^{\infty}x^k)'|_{x=1-p}=p(\frac{x}{1-x})'|_{x=1-p}=\frac{1}{p}$。

令 $EX=\overline{X}\Rightarrow \hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$；

（2） $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;p)=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}$

$$=p^n(1-p)^{x_1+x_2+\cdots+x_n-n},$$

$\ln L=n\ln p+(x_1+x_2+\cdots+x_n-n)\ln(1-p)$，

$\frac{d}{dp}\ln L=\frac{n}{p}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-n}{1-p}=0\Rightarrow \hat{p}=\frac{1}{\overline{x}}$（最大似然估计值），

$\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$（最大似然估计量）。

【最适御】13_最大似然估计【小元老师】考研数学，概率论与数理统计
概率论与数理统计——参数估计
微信公众号：小元老师

23. （本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量。

$\overline{X}=E(X)=\theta.$ $\hat{\theta}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}e^{-\frac{\theta}{x}}dx$

$=\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\theta}{x}}d\left(-\frac{\theta}{x}\right)\xlongequal{t=-\frac{\theta}{x}}\theta\int_{-\infty}^{0}e^t dt=\theta e^t\Big|_{-\infty}^{0}=\theta.$

概率论与数理统计——参数估计

23. （本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量。

$\hat{\theta}=\bar{X}$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{\theta^2}{x_1^3}e^{-\frac{\theta}{x_1}}\cdot\frac{\theta^2}{x_2^3}e^{-\frac{\theta}{x_2}}\cdots\frac{\theta^2}{x_n^3}e^{-\frac{\theta}{x_n}}$$

$$=\frac{\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^3}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i^3-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$$

$$\hat{\theta}=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

$$\sum\frac{1}{x_i}\neq\frac{1}{\sum x_i}$$

29:30 / 36:01

概率论与数理统计——参数估计

微信公众号：小元老师

(23)（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量.

(II)求 θ 的最大似然估计量.