

Programmation Fonctionnelle Avancée 6 : Partage maximal de structures

Pierre Letouzey

Université Paris Cité
UFR Informatique
Institut de Recherche en Informatique Fondamentale
letouzey@irif.fr

13 mars 2023

© Roberto Di Cosmo et Ralf Treinen et Pierre Letouzey

Deux opérateurs de test d'égalité

- ▶ = teste l'égalité *structurelle*
- ▶ == teste l'égalité *physique*
- ▶ Si $x == y$ alors $x = y$, mais le contraire n'est pas toujours vrai.
- ▶ = est normalement ce que le programmeur veut, mais cet opérateur a un coût linéaire en la taille des deux structures à comparer.
- ▶ == a un coût constant, mais il faut faire attention si ce test a du sens.

Allocation de mémoire sur le tas

- ▶ Allocation de la mémoire, lors de la création de valeurs, dans la zone d'allocation dynamique (tas, en anglais : *heap*)
- ▶ Ne pas confondre avec la pile (anglais : *stack*) qui est utilisée lors des appels récursifs
- ▶ Le *Garbage Collector* récupère automatiquement la mémoire non référencée
- ▶ Les valeurs de type basique (bool, int) et les *constantes* des types algébriques sont représentées une seule fois dans la mémoire, les autres (string, constructeurs non-constants de types algébriques) sont nouvellement créées.

Exemples (equality.ml)

```
let _ = 1 = 1
let _ = 1 == 1

let _ = "ab" = "ab"
let _ = "ab" == "ab"

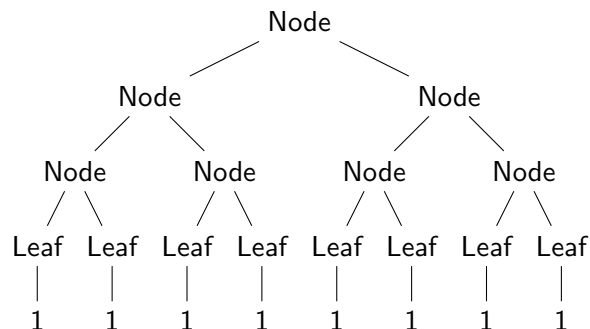
let s = "ab"
let t = s in s==t
```

Constructeurs

- Application d'un constructeur (d'un type algébrique) : coût constant, indépendant de la taille des arguments.
- Exemple des arbres binaires : Si $t1$ et $t2$ existent déjà sur le tas, `Noeud (t1,t2)` alloue de la mémoire pour une cellule *Noeud*, avec deux "pointeurs" vers les valeurs $t1$ et $t2$.

Zéro partage : fonction `bintree1`

- L'appel `(bintree1 h c)` fait 2^{h+1} allocations en mémoire.
- `(bintree1 3 1)` :



Exemples (`bintree1.ml`)

```
type 'a tree =
  | Leaf of 'a
  | Node of 'a tree * 'a tree

let rec bintree1 h c =
  if h=0 then Leaf c
  else
    Node (bintree1 (h-1) c, bintree1 (h-1) c)

let t1 = bintree1 5 42
```

Exemples (`bintree2.ml`)

```
let rec bintree2 h c =
  if h=0 then Leaf c
  else let t = bintree2 (h-1) c in Node (t,t)

let t2 = bintree2 5 42

let _ = t1=t2
let _ = t1==t2

let _ = match t1 with Node(x,y) -> x==y | _ -> false
let _ = match t2 with Node(x,y) -> x==y | _ -> false
```

Partage maximal : fonction bintree2

- L'appel `(bintree2 h c)` fait $h + 1$ allocations en mémoire.
- `(bintree2 3 1)` :

```
Node
( )
Node
( )
Node
( )
Leaf
|
1
```

Exemples (bintree3.ml)

```
let rec eqtree t1 t2 = match t1, t2 with
| Leaf v1, Leaf v2 -> v1=v2
| Node (l1, r1), Node (l2, r2) ->
  eqtree l1 l2 && eqtree r1 r2
| _ -> false

let _ = eqtree t1 t2
```

Égalité de valeurs d'un type algébrique

- Égalité physique (opérateur `==`) : teste simplement l'égalité des adresses mémoire des constructeurs de racine des deux valeurs. Coût constant.
- Égalité structurelle (opérateur `=`) : descend récursivement dans les deux structures, coût linéaire en la taille des deux valeurs.
- L'égalité structurelle générique de OCaml se comporte sur notre exemple comme la fonction `eqtree` suivante.

Objectif

- Dans l'exemple précédent on a pu construire t_2 tel que les sous-arbres sont partagés autant que possible.
- Mais la situation n'est pas toujours aussi simple : des structures peuvent être le résultat de calculs complexes.
- Notre but est de représenter quand même chaque structure une seule fois en mémoire (partage maximal). Cela aura deux avantages :
 1. minimiser la consommation de mémoire
 2. un test d'égalité plus efficace : on pourra remplacer `=` par `==`
- Nous avons besoin de deux ingrédients :
 1. les tables de hachage
 2. les tableaux faibles

Objectif

- Représenter des fonctions partielles finies $f: A \rightsquigarrow B$
- Cas d'usage : Le domaine *potentiel* A est très grand ou même infini ; par contre f est définie seulement pour un “petit” nombre de valeurs : son domaine *concret* est fini.
- (1) On souhaite un coût mémoire au plus linéaire dans la taille du domaine plus la taille du co-domaine de f .
- On pourrait utiliser des listes d'association, mais :
- (2) On souhaite une complexité constante pour accéder à la valeur de la fonction appliquée à un argument.
- (3) Fonctions modifiables : on veut pouvoir ajouter ou supprimer des paires (argument, résultat)

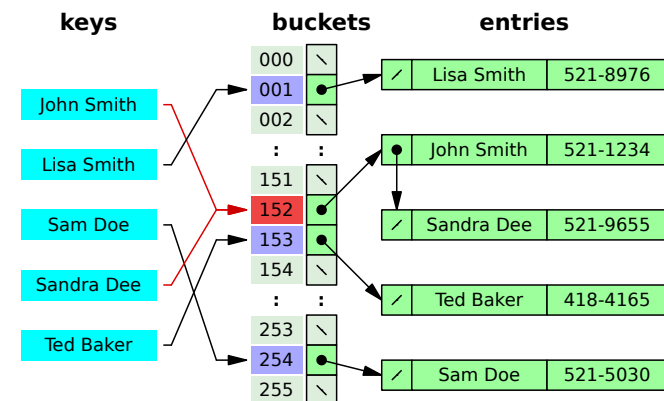
Problème : conflits

- On ne peut pas exclure des conflits de la fonction de hachage : $x \neq y$ et $h(x) = h(y)$ (non-injectivité de h).
- En pratique, on essaye de les éviter par un bon choix de la fonction de hachage.
- Pour gérer les conflits résiduels, les entrées du tableau ne sont pas des valeurs de B , mais des fonctions partielles $A \rightsquigarrow B$. Ces fonctions devront avoir un domaine vraiment petit (quelques éléments seulement), on peut donc les représenter par une liste d'association par exemple.
- Conséquence : on a besoin d'un test d'égalité pour A .

Réalisation

- Les tableaux répondent aux objectifs 2 (complexité constante) et 3 (fonctions modifiables), sauf qu'il faudrait utiliser comme indices des valeurs d'un type A .
- Solution : On utilise une *fonction de hachage* $h: A \rightarrow \text{int}$ pour mapper les arguments de la fonction f vers des entiers positifs (indices du tableau).
- Cela nous permet aussi de répondre à l'objectif 1 : on s'arrange pour que l'image de h soit un petit ensemble, par exemple l'intervalle $[0, \dots, d-1]$.
- Le tableau peut donc avoir la taille $O(d)$.

Table de hachage avec listes chaînées



Structures avec partage maximal

- ▶ Problème : on veut travailler avec des structures dynamiquement allouées en mémoire, mais on veut à chaque moment un partage maximal de sous-structures.
- ▶ Aucune (sous-)structure ne doit être représentée plusieurs fois en mémoire.
- ▶ Avantages :
 - ▶ Moins de consommation mémoire
 - ▶ Le test d'égalité peut être remplacé par l'égalité physique
- ▶ Difficulté : Les structures peuvent être créées dynamiquement pendant l'exécution du programme, on doit reconnaître quand une structure existe déjà en mémoire.

Termes arithmétiques hashconsés : version 1 (hc1.ml) I

Solution ad-hoc, en utilisant une table de hachage pour avoir accès à toutes les valeurs qu'on a déjà construites.

```

type term =
  | Const of int
  | Plus of term * term
  | Opp of term

let table = Hashtbl.create 251

let hashcons x =
  try Hashtbl.find table x
  with Not_found -> Hashtbl.add table x x; x

let const i = hashcons (Const i)
```

La technique du hashconsing

- ▶ Le nom vient du langage LISP qui fournit un seul constructeur cons pour construire des structures (listes, arbres, ...).
- ▶ Première idée : utiliser une table de hachage pour stocker des paires (t, t) de structures.
- ▶ Quand on construit une nouvelle structure t on regarde si elle existe déjà dans la table : si oui on prend la structure existante à la place de t , si non on l'ajoute à la table.
- ▶ Pour chaque paire (t, t) dans la table de hachage :
 - ▶ le t de gauche sert de clé de recherche (a priori comparée via =)
 - ▶ le t de droite sert de *représentant canonique* : toutes les structures égales (via =) à t deviendront exactement ce t .

Termes arithmétiques hashconsés : version 1 (hc1.ml) II

```

let plus t1 t2 = hashcons (Plus (t1, t2))
let opp t = hashcons (Opp t)

let t1 = plus (const 2) (const 42)
let t2 = plus (const (1 + 1)) (const (73-31))
let _ = t1=t2
let _ = t1==t2
```

Test d'égalité efficace

- ▶ La fonction `find` du module `Hashtbl` doit toujours tester l'égalité entre la clef donnée en argument, et la clef trouvée dans la table (à cause des conflits possibles).
- ▶ Pour cela, OCaml utilise par défaut `=`, la fonction polymorphe de test d'égalité structurelle, qui descend en profondeur dans la structure.
- ▶ Or, pour toutes les valeurs x et y *obtenues par la fonction `hashcons`* : $x = y$ ssi $x == y$. On peut en profiter pour tester l'égalité plus efficacement.
- ▶ On utilise le foncteur `Hashtbl.Make`, qui prend comme argument une structure avec un test d'égalité et une fonction de hachage.
- ▶ On s'assure par une interface que toutes les valeurs sont construites par le `hashconsing`.

Term arithmétiques hashconsés : version 2 (hc2.ml) II

```

| Opp of t
(* shallow comparison, uses == on substructures *)
let equal x y = match x,y with
| Const i, Const j -> i == j
| Plus (t1,t2), Plus (u1,u2) ->
    t1 == u1 && t2 == u2
| Opp t, Opp u -> t == u
| _ -> false
let hash = Hashtbl.hash (* generic function *)
end

module H = Hashtbl.Make(Term)

type term = Term.t

let table = H.create 251
    
```

Term arithmétiques hashconsés : version 2 (hc2.ml) I

Amélioration : on s'assure que toutes les valeurs sont créées à travers du `hashconsing`, ce qui nous permet d'utiliser dans la table de hachage un test d'égalité plus intelligent.

```

module type TERMHC = sig
  type term
  val const: int -> term
  val plus: term -> term -> term
  val opp: term -> term
end

module TermHC:TERMHC = struct
  module Term = struct
    type t =
      | Const of int
      | Plus of t*t
    
```

Term arithmétiques hashconsés : version 2 (hc2.ml) III

```

let hashcons x =
  try H.find table x
  with Not_found -> H.add table x x; x
let const i = hashcons (Term.Const i)
let plus t1 t2 = hashcons (Term.Plus (t1,t2))
let opp t = hashcons (Term.Opp t)
end

open TermHC
let t1 = plus (const 2) (const 42)
let t2 = plus (const (1 + 1)) (const (73-31))
let _ = t1=t2
let _ = t1==t2
    
```

Termes arithmétiques hashconsés - version 3 (hc3.ml)

- Pour calculer le hash d'une structure, notre implémentation utilise `Hashtbl.hash` qui traverse toute la structure.
- Pour éviter cela on peut stocker dans les nœuds les hashes des sous-structures.
- Attention, cela demande une modification du type.
- Au passage, on pourrait également associer à chaque structure hashconsée un entier unique, utilisable pour construire par exemple
 - des arbres équilibrés (qui nécessitent un ordre)
 - des arbres de Patricia (qui nécessitent une séquence de bit)
 - ...

Termes arithmétiques hashconsés - version 3 II

```

| Const i, Const j -> i = j
| Plus (t1,t2), Plus (u1,u2) ->
  t1 = u1 && t2 = u2
| Opp t, Opp u -> t = u
| _ -> false
let hash = function
| Const i -> i
| Plus (t1,t2) ->
  abs(19*(19*t1.hkey+t2.hkey)+2)
| Opp t -> abs (19 * t.hkey + 1)
end

```

```

(* signature de la structure parametre *)
module type HashedType = sig
  type t
  val equal: t -> t -> bool
end

```

Termes arithmétiques hashconsés - version 3 I

```

type 'a with _hashkey = {
  node: 'a;
  hkey: int (* hash key *)
}

(* type des termes avec clef de hachage *)
type term = term_node with _hashkey
and term_node =
| Const of int
| Plus of term*term
| Opp of term

(* structure parametre *)
module Term_node = struct
  type t = term_node
  let equal x y = match x,y with

```

Termes arithmétiques hashconsés - version 3 III

```

val hash: t -> int
end

(* signature de la structure obtenue *)
module type S =
  sig
    type value
    val hashcons : value -> value with _hashkey
  end
(* tres simplifiée *)

```

```

module Make(T : HashedType) : (S with type value = T.t) =
struct
  module H = Hashtbl.Make(T)
  type value = T.t
  let table = H.create 251
end

```

Termes arithmétiques hashconsés - version 3 IV

```

let hashcons d =
  try H.find table d
  with Not_found ->
    let d_hc = {node = d; hkey = T.hash d}
    in H.add table d d_hc; d_hc
end
module H = Make(Term_node)

let const i = H.hashcons (Const i)
let plus t1 t2 = H.hashcons (Plus (t1,t2))
let opp t = H.hashcons (Opp t)

let t1 = const 2
let t2 = const (1 + 1)
let _ = t1==t2

```

Tableaux faibles

- Module Weak de la bibliothèque standard
- Tableaux contenant des “pointeurs” faibles vers des structures
- Un objet vers lequel pointent seulement des pointeurs faibles peut être récupéré par le garbage collector (GC).
- Les valeurs stockées dans un tableau faible sont d'un type 'a option. Quand une valeur est supprimée par le GC, toute entrée correspondante dans des tableaux faibles est remplacée par None.
- Fonctionne comme décrit seulement pour des types de valeurs pour lesquelles il y a une “allocation” de cellules de mémoire. Ceci exclut en particulier les entiers.

Un problème ...

- L'implémentation actuelle risque d'épuiser la mémoire !
- En effet, toutes les structures de type term, une fois créées, restent accessibles au moins à travers la table de hachage.
- Donc le garbage collector ne peut jamais récupérer la mémoire occupée par une telle structure !

Exemples (weak1.ml)

```

let size = 1000
let a = Weak.create size
let _ = for i=0 to size-1 do
  Weak.set a i (Some [i;i+1;i+2;i+3;i+4])
done
let _ = Weak.get a 0
let _ = Weak.get a 1
let p = Weak.get a 1
let _ = Gc.compact ()
let _ = Weak.get a 0
let _ = Weak.get a 1

```


Fonctions de finalisation

- Fontionalité intéressante du Garbage Collector
- Le module Gc permet d'enregistrer une fonction de *finalisation* avec un objet de mémoire, cette fonction sera appliquée à l'objet avant la suppression de l'objet par le GC.
- Exemple d'application : on a un tableau faible d'objets qui représentent des connexions TCP/IP. Ces objets vont être détruits par le GC quand personne ne les utilise plus. Dans ce cas, on veut que le socket correspondant soit fermé.

Attentions aux “pointeurs” non intentionnés

- Attention : la création de “pointeurs” vers des objets fait que les objets stockés dans un tableau faible ne sont plus détruits par le GC.
- Cela inclus des clôtures créées lors la définition des finalisateurs (voir l'exemple suivant) !

Exemples (weak2.ml)

```
let size = 1000
let a = Weak.create size
let _ = for i=0 to size-1 do
    let v = [i;i+1;i+2;i+3;i+4] in
    Weak.set a i (Some v);
    Gc.finalise v
done
let _ = Gc.compact ()
```

Exemples (weak3.ml)

```
let size = 1000
let a = Weak.create size
let _ =
    for i=0 to size-1 do
        let v = [i;i+1;i+2;i+3;i+4] in
        let f x = print_string "killing:␣";
            print_int (List.hd v);
            print_newline ()
        in
        Weak.set a i (Some v);
        Gc.finalise f v
    done
let _ = Gc.compact ()
```

Améliorations du hashconsing

- Pour que des structures non référencées soient récupérées par le Gc, on utilise des tables de hachage faibles, voir Weak.Make.
- La vraie implémentation par Jean-Christophe Filliâtre n'utilise pas les tables de hachage faibles de OCaml, mais se base directement sur les tableaux faibles.
- On peut à plusieurs endroits éviter une application répétée de la fonction de hachage à la même donnée. Par exemple : une fois pour tester si une valeur est déjà dans la table, et puis une deuxième fois pour l'ajouter à la table.

Pour en savoir plus



Jean-Christophe Filliâtre and Sylvain Conchon

Type-safe modular hash-consing.

Proceedings of the ACM Workshop on ML.

Septembre 2006.

Code disponible à l'adresse

<https://github.com/backtracking/ocaml-hashcons>