Université de Tunis El Manar
Institut supérieur d'informatique
Département de mathématiques appliquées

A.U. 2020/2021
1ère année
Analyse 1

Fonctions usuelles
Correction

Exercice 1

1. (a) $\forall x \in [-1, 1]$, *on a* $\sin(\arcsin x) = x$

   (b) $\forall x \in [-1, 1]$, *on a* $\cos(\arccos x) = x$,

   (c) $\forall x \in [-1, 1]$, *on a* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$,
   en effet, on a
   $$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x).$$
   Or
   $$\forall\ x \in [-1, 1],\ on\ a\ \sin(\arcsin x) = x,$$
   alors
   $$\cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2 \Longrightarrow |\cos(\arcsin x)| = \sqrt{1 - x^2}.$$
   Et on a
   $$\forall x \in [-1, 1],\ on\ a\ (\arcsin x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
   Ainsi
   $$\cos(\arcsin x) \geq 0.$$
   Par suite
   $$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

   (d) $\forall x \in [-1, 1]$, *on a* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$,
   en effet, en utilisant le fait que
   $$\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1,$$
   on obtient que
   $$\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x),$$
   et comme
   $$\forall\ x \in [-1, 1], \cos^2(\arccos x) = 1.$$
   Alors
   $$\sin^2(\arccos x) = 1 - x^2 \Longrightarrow |\sin(\arccos x)| = \sqrt{1 - x^2}.$$

Or

$$\forall\ x \in [-1,1], (\arccos x) \in [0,\pi].$$

Ainsi

$$\sin(\cos x) \geq 0$$

Par suite

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

2. (a)

$$\forall\ x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \textit{on a}\ \arcsin(\sin x) = x.$$

Alors

$$\begin{aligned}\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) &= \arcsin\left(\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

(b)

$$\forall x \in [0,\pi],\ \textit{on a}\ \arccos(\cos x) = x.$$

Alors

$$\begin{aligned}\arccos\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) &= \arccos\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(c)

$$\forall x \in [0,\pi],\ \textit{on a}\ \arccos(\cos x) = x,$$

Alors

$$\begin{aligned}\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right) &= \arccos\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\arcsin\left(\cos\frac{2001\pi}{3}\right) &= \arcsin(\cos 667\pi)\\ &= \arcsin(\cos(\pi+666\pi))\\ &= \arcsin(\cos(\pi+2\times 333\pi))\\ &= \arcsin(\cos\pi)\\ &= \arcsin(-1)\\ &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\arccos\left(\sin\left(-\frac{2001\pi}{3}\right)\right) &= \arccos\left(\sin\left(-667\pi\right)\right)\\ &= \arccos\left(\sin\left(\pi-668\pi\right)\right)\\ &= \arccos\left(\sin\left(2\times 334\pi\right)\right)\\ &= \arccos\left(\sin 0\right)\\ &= \arccos\left(0\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\arccos\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)\right) &= \arccos\left(\cos\left(-2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= \arccos\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 2

1. (a) $\arcsin 0 = 0,$
   (b) $\arcsin(\sin\pi) = \arcsin(\sin 0) = 0$
   (c) $\arccos 1 = 0,$
   (d) $\arccos(\cos 2\pi) = \arccos(\cos 0) = 0.$
2. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f & : \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x. \end{array}$$

f est une fonction continue,dérivable sur $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

$$f'(x) = \cos x \leq 0 \left(\textit{pour } x \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right),$$

f est décroissante sur cet intervalle.
Alors f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ *à valeurs dans* $f\left(\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$.

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = y \\ x \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = g(y) \\ y \in [-1,1] \end{array}\right. ,$$

en effet,

$$\forall \quad x \in [\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}], \qquad \textit{on a} \quad x-\pi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

On suppose $X = x - \pi$, *alors* $x = X + \pi$. *Donc*

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = y \\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(X + \pi) = y \\ X \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\pi - (-X)) = y \\ -X \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sin(X) = y \\ -X \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$(\textit{En appliquant } \arcsin) \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin(\sin(X)) = -\arcsin y \\ -X \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \pi = -\arcsin y \\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi - \arcsin y \\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi - \arcsin y = g(y) \\ y \in [-1, 1] \end{cases}$$

3. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} h & : & [\pi, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos x; \end{array}$$

h est une fonction continue,dérivable sur $\mathbb{R}$, *en particulier sur* $[\pi, 2\pi]$.

$$h'(x) = -\sin x \geq 0, \quad (\textit{pour } x \in [\pi, 2\pi]),$$

h est croissante sur cet intervalle.
Alors h réalise une bijection de $[\pi, 2\pi]$ *à valeurs dans* $h([\pi, 2\pi]) = [-1, 1]$.

$$\begin{cases} h(x) = y \\ x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u(y) \\ y \in [-1, 1] \end{cases},$$

en effet,

$$\forall \;\; x \in [\pi, 2\pi], \qquad \textit{on a} \quad x - \pi \in [0, \pi].$$

On suppose $X = x - \pi$, *alors* $x = X + \pi$. *Donc*

$$\begin{aligned}
\begin{cases} h(x) = y \\ x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = y \\ x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(X + \pi) = y \\ X \in [0, \pi] \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos(X) = y \\ X \in [0, \pi] \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(X) = -y \\ X \in [0, \pi] \end{cases} \\
(\textit{En appliquant } \arccos) & \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos(\cos(X)) = \arccos(-y) \\ X \in [0, \pi] \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x - \pi = \arccos(-y) \\ x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + \arccos(-y) \\ x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \pi + \arccos(-y) = g(y) \\ y \in [-1, 1] \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. *Soit*

$$f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2}).$$

L'ensemble de définition de f *est*

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R};\ 2x\sqrt{1 - x^2} \in [-1, 1]\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R};\ 1 - x^2 \geq 0\right\}.$$

Or $1 - x^2 \geq 0$ *si et seulement si* $x \in [-1, 1]$.
Cherchons x ***tel que*** $2x\sqrt{1 - x^2} \in [-1, 1]$ ***:***

$$-1 \leq 2x\sqrt{1 - x^2} \leq 1.$$

La double inégalité équivaut, en passant au carré, à

$$\begin{aligned}
4x^2(1 - x^2) \leq 1 & \Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (2x^2 - 1)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Cette inégalité est toujours vérifiée et donc

$$D_f = [-1, 1].$$

2. *Puisque le domaine de définition est* $[-1,1]$, *il est légitime de poser* $x = \sin t$ *avec* $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}) \\ &= \arcsin(2\sin t\cos t) \qquad \big(\textit{car } t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]\big) \\ &= \arcsin(\sin(2t)). \end{aligned}$$

On peut alors simplifier cette expression, mais il faut prendre garde que

$$\arcsin(\sin u) = u \Leftrightarrow u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Dans les autres cas, il faut se ramener à cet intervalle en utilisant les propriétés de la fonction sinus. On trouve

- *Si* $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, *on a* $2t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *Alors,*

$$\arcsin(\sin(2t)) = 2t.$$

- *Si* $t \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, *on a* $2t \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ *et* $\pi - 2t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.
De plus, on a $\sin(\pi - u) = \sin(u)$.
On en déduit que dans ce cas,

$$\arcsin(\sin(2t)) = \arcsin(\sin(\pi - 2t)) = \pi - 2t.$$

- *Si* $t \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[$, *on a* $2t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ *et* $\pi + 2t \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
De plus, on a $\sin(\pi + u) = -\sin(u)$.
En utilisant l'imparité de la fonction arcsin, *on obtient*

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin(2t)) &= -\arcsin(-\sin(2t)) \\ &= -\arcsin(\sin(\pi + 2t)) \\ &= -\pi - 2t. \end{aligned}$$

Finalement, on peut revenir à f *utilisant la relation* $t = \arcsin(x)$. *On trouve que*

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - 2\arcsin(x) & \textit{si} \quad x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\\ 2\arcsin(x) & \textit{si} \quad x \in][-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \\ \pi - 2\arcsin(x) & \textit{si} \quad x \in]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \end{cases}$$

Exercice 4

1.

(a) $\tan(2 \arctan(x))$.

Rappelons que

$$tan(2y) = \frac{2\tan(y)}{1 - \tan^2(y)}.$$

On pose, $y = \arctan(x)$*, on obtient*

$$\tan(2\arctan(x)) = \frac{2\tan(\arctan(x))}{1-\tan^2(\arctan(x))}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\tan(\arctan(x)) = x$*.*
D'où

$$\tan(2\ \arctan(x)) = \frac{2x}{1-x^2}$$

(b) $\sin(3\ \arctan(x))$
On sait que

$$\begin{aligned} \sin(3y) = \sin(2y+y) &= \cos(2y)\sin(y) + \cos(y)\sin(2y) \\ &= (2\cos^2(y)-1))\sin(y) + 2\cos^2(y)\sin(y) \\ &= \sin(y)(4\cos^2(y)-1). \end{aligned}$$

Donc

$$\sin(3y) = \sin(y)(4\cos^2(y)-1).$$

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = \arctan(x).$$

On obtient

$$\sin(3\arctan(x)) = \sin(\arctan(x))(4\cos^2(\arctan(x))-1).$$

Or

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ce qui donne que

$$\cos(\arctan(x)) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

De plus $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *et donc* $\cos(\arctan(x)) > 0$.
On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Par suite

$$\sin(\arctan(x)) = \cos(\arctan(x))\tan(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sin(3\ \arctan(x)) &= \sin(\arctan(x))(4\cos^2(\arctan(x))-1) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(\frac{4}{1+x^2}-1) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(\frac{3-x^2}{1+x^2}) \\ &= \frac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

2.

(a) *On pose*

$$f(x) = \arccos(x) + \arccos(-x)$$

f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, où

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = c.$$

Or pour $x = 0$, on

$$f(0) = \arccos(0) + \arccos(0) = 2\arccos(0) = \pi.$$

D'où

$$f(x) = \pi.$$

Ainsi

$$\forall x \in [-1,1], \quad \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$

(b) *Rappelons que*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

On pose $a = \arctan(x)$ et $b = \arctan(y)$.
Alors, on obtient

$$\tan(\arctan(x) + \arctan(y)) = \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(y))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(y))}.$$

Donc

$$\tan(\arctan(x) + \arctan(y)) = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Or, si $xy < 1$, on a $\arctan(x) + \arctan(y)$ est dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Dans ce cas

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

Exercice 5

1. $2\arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
   On Pose $f(x) = \arcsin(x)$ et $g(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
   Or, par définition on a $D_f = [-1,1]$.
   Et d'aprés Exercice 3 , on a $D_g = [-1,1]$.
   D'autre part, on a

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \sin(2\arcsin(x)) \;=\; \sin(\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}))$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) \quad = \quad 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Or

$$\forall\ x \in [-1,1],\ \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \quad \Leftrightarrow \quad 2\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}].$$

Donc

$$\begin{aligned} x\ \textit{solution} \quad &\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1]\ \textit{et}\ 2\ \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ &\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1]\ \textit{et}\ \arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \big[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\big]. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \big[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\big]$.

2.

$$\arccos(x) = \arcsin(2x)$$

Par définition on a, $x \longmapsto \arccos(x)$ *est défini sur* $[-1,1]$.
On obtient alors $x \longmapsto \arcsin(2x)$ *est définie sur* $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.
Et par suite le domaine de définition de l'équation est $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.
En prenant le sin, *alors*

$$\sin(\arccos(x)) = \sin(\arcsin(2x)) = 2x.$$

En appliquant la formule

$$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1,$$

pour $y = \arccos(x)$, *on obtient*

$$\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Puisque par définition $\arccos(x) \in [0,\pi]$, *on a donc*

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Et par suite

$$\sqrt{1-x^2} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \textit{et} \quad 1-x^2 = 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Donc l'unique solution est $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. *Montrer que* $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.
En prenant la tan, *on a*

$$\tan\big(\arctan(2x) + \arctan(3x)\big) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

En utilisant la formule

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\tan(\arctan(2x)+\arctan(3x)) &= \frac{\tan(\arctan(2x))+\tan(\arctan(3x))}{1-\tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(3x))}\\ &= \frac{5x}{1-6x^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

alors, on a

$$6x^2+5x-1=0,$$

ce qui donne

$$x_1 = \frac{1}{6} \quad \textit{et} \quad x_2 = -1.$$

Puisque $\arctan(x)$ *a le même signe que* x *alors* x *est nécessairement positif.*
Donc la solutin est $x_1 = \frac{1}{6}$.

Exercice 6

1. *Soit* f *la fonction définie par*

   $$f(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$$

   f *est définie et continue si et seulement si* $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$.
   Or

   $$\begin{aligned} & -1 \leq \tfrac{1}{x} \leq 1\\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{x^2} \leq 1\\ \Leftrightarrow\ & x^2 \geq 1\\ \Leftrightarrow\ & x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[.\end{aligned}$$

2. - *On a*

     $$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

     Donc

     $$\lim_{x\to-\infty} \arcsin(\frac{1}{x}) = \arcsin(0) = 0.$$

   - *On a*

     $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

     Donc

     $$\lim_{x\to+\infty} \arcsin(\frac{1}{x}) = \arcsin(0) = 0$$

- *On a*
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x} = -1.$$
Donc
$$\lim_{x\to -1^-} \arcsin(\frac{1}{x}) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$
- *On a*
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = -1.$$
Donc
$$\lim_{x\to 1^+} \arcsin(\frac{1}{x}) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

3.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{-1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \\ &= \frac{-\mid x\mid}{x^2\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$
D'où
$$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{-\mid x\mid}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$
Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$.

4.
$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{-\mid x\mid}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-\mid x\mid}{x^2\sqrt{x^2-1}} = -\infty$$
Le graphe de f admet des demi−tangentes verticales en $x = -1$ et en $x = 1$.

5.

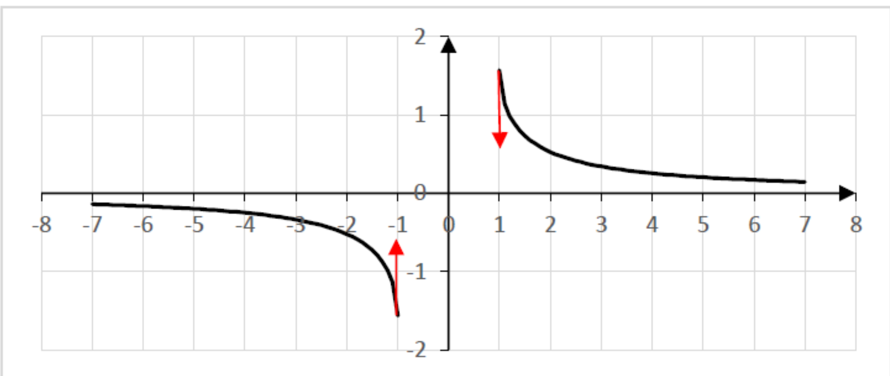

FIGURE 1 – Le graphe de $f(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$.

Exercice 7

1. (a) *On a :*

$$\forall\ y \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan(\frac{\pi}{2} - y) = \frac{1}{\tan y}.$$

Donc,

$$\forall\ y \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \frac{\pi}{2} - y = \arctan\left(\frac{1}{\tan y}\right).$$

On prend $y = \arctan x$*, avec* $x > 0$*, on obtient :*

$$\forall\ x > 0, \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) *Si* $x < 0$*, on a* $-x > 0$*.*
Donc

$$\arctan(-x) + \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme la fonction $x \longmapsto \arctan x$ *est impaire, on obtient :*

$$\forall\ x < 0, \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

2. (a) *La fonction :*

$$x \longmapsto \frac{2x}{1-x^2}$$

est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1\cup, +\infty[$*, et en particulier sur* $]-1, 1[$*.*
Comme la fonction :

$$x \longmapsto \arctan x$$

est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$*. Alors la fonction :*

$$f \ : \ x \ \longmapsto \ \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right),$$

est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1\cup, +\infty[$*, et en particulier sur* $]-1, 1[$*.*

(b) *On a :*

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) &= \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' \arctan'\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \\
&= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \\
&= \frac{2}{1+x^2} \\
&= 2\arctan'(x).
\end{aligned}$$

(c) *On a :*

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = 2\arctan'(x).$$

Par continuité, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = 2\arctan(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Pour $x = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(0) &= 2\arctan(0) + c \\ &= \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)_{|x=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $c = 0$.
D'où

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = 2\arctan(x).$$

3. ***Application :***
On a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2\arctan(x).$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)_{|x=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Pour $x = \frac{1}{3}$, on a :

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)_{|x=\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right).$$

*Or d'après **(1)** on a :*

$$\arctan\left(\frac{4}{3}\right) + \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$