Chapitre 1 : Algèbre de Boole
Enoncée et Correction de la série N°1

Exercice N°1:

Utiliser les axiomes et les principaux théorèmes pour simplifier les expressions suivantes :

a) $x \, . \, (x + y)$
b) $(x + z \, . \, t) \, . \, (x \, . \, t + x \, . \, \overline{t} + z \, . \, t + y)$

Correction:

a) $x(x+y) = xx + xy = x + xy = x(1+y) = x$
b) $(x+zt)(xt + x.\overline{t} + zt + y)$
$= (xxt) + xx.\overline{t} + xzt + xy + zt\,xt + ztx.\overline{t} + ztzt + zty$
$= xt + x.\overline{t} + xzt + xy + zxt + zt + zty$
$= x(1 + y) + zt(x + 1 + y)$
$= x + zt$

Exercice N°2:

Appliquer les théorèmes de Morgan pour trouver :

a) une somme de monômes équivalente à :$(\overline{\overline{\overline{x}}.y + x.\overline{\overline{y}}})$
b) une expression équivalente à : x + y, avec le seul operateur « . » et le complément « - »

Correction:

a) $(\overline{\overline{\overline{x}}.y + x.\overline{\overline{y}}})$

$$= \overline{\overline{\overline{x}}.y.x.\overline{\overline{y}}}$$

$$= (\overline{\overline{x}} + \overline{y}).(\overline{x} + \overline{\overline{y}})$$

$$(= (x + \overline{y}).(\overline{x} + y) \quad)$$

$$= x.\overline{x} + xy + \overline{yx} + \overline{y}y$$

$$= x.y + \overline{yx}$$

b) x+y

$$= (\overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}})$$

$$= x + y$$

Exercice N°3:

Vérifier les égalités suivantes :

a) $(x+\bar{y}+x\bar{y})(xy+\bar{x}z+y\bar{z})=xy+\bar{x}\bar{y}z$

b) $(x+\bar{y}+xy)(x+\bar{y})\bar{x}y=0$

c) $(a+b)(\bar{a}+c)=(a+b)(\bar{a}+c)(b+c)$

d) $ab\bar{c}+d=(ab+c+d)(\bar{c}+d)(\bar{c}+d+e)$

e) $x+\bar{x}y+\bar{x}\bar{y}=1$

Correction:

a)

$$(x+\bar{y}+x\bar{y})(xy+\bar{x}z+y\bar{z})$$
$$=xxy+x\bar{x}z+xy\bar{z}+\bar{y}xy+\overline{yx}z+\bar{y}y\bar{z}+x\bar{y}xy+x\bar{y}xy+x\overline{yx}z+x\bar{y}y\bar{z})$$
$$=xy+xy\bar{z}+\overline{yx}z$$
$$=xy(1+\bar{z})+\overline{yx}z$$
$$=xy+\bar{y}\bar{x}z$$

b)

$$(x+\bar{y}+xy)(x+\bar{y})\bar{x}y$$
$$=xx\bar{x}y+x\bar{y}\bar{x}y+\bar{y}x\bar{x}y+\bar{y}\bar{y}\bar{x}y+xyx\bar{x}y+xy\overline{yx}y$$
$$=0$$

c)

$$(a+b)(\bar{a}+c)$$
$$=a\bar{a}+ac+b\bar{a}+bc$$
$$=ac+b\bar{a}+bc \qquad (1)$$
$$(a+b)(\bar{a}+c)(b+c)$$
$$=a\bar{a}b+a\bar{a}c+acb+acc+b\bar{a}b+bcb+b\bar{a}c+bcc$$
$$=ac(1+b)+b\bar{a}+bc \qquad (2)$$

(1) = (2) ➔ $(a+b)(\bar{a}+c)=(a+b)(\bar{a}+c)(b+c)$

d)

$$(ab+c+d)(\bar{c}+d)(\bar{c}+d+e)$$
$$=(ab\overline{cc}+ab\bar{c}d+ab\bar{c}e+abd\bar{c}+abdd+abde+cdd+cde+d\bar{c}\bar{c}+dd\bar{c}+de\bar{c}+dd\bar{c}+ddd+dde$$
$$=ab\bar{c}+d(ab+c+1+e)$$
$$=ab\bar{c}+d$$

e)

$$x+\overline{x}y+\overline{x}\,\overline{y}$$

$$=x+\overline{x}(\,y+\overline{y}\,)$$

$$=x+\overline{x}$$

$$=1$$

<u>Exercice N°4:</u>

a) g(a,b,c,d) = $abc+a+bc\overline{a}+da+\overline{a}b+\overline{d}a$

b) f(x,y,z,t) = $t\,\overline{x}y+t\,\overline{y}(\,\overline{xz}+xz\,)$

c) f(x,y,z) = $xyz+xyz+xyz+yz$

d) f(a,b,c) = $b(\,a+c\,)+c(\,\overline{a}+b\,)+ab$

1) Déterminer le complément de ces fonctions.
2) Simplifier algébriquement ces fonctions.

<u>Correction:</u>

1) a) g(a,b,c,d) = $abc+a+bc\overline{a}+da+\overline{a}b+\overline{d}a$

$$\overline{g}=\overline{abc+a+bc\overline{a}+da+\overline{a}b+\overline{d}a}$$

$$=\overline{a(\,bc+1+d+\overline{d}\,)+\overline{a}b(\,c+1\,)}$$

$$=\overline{a}a+\overline{a}\,\overline{b}$$

$$=\overline{ab}$$

b) f(x,y,z,t) = $t\,\overline{x}y+t\,\overline{y}(\,\overline{xz}+xz\,)$

$$\overline{f}=\overline{t\,\overline{x}y+t\,\overline{y}(\,\overline{xz}+xz\,)}$$

$$=\overline{t\,\overline{\overline{x}}y+t\,\overline{\overline{y}}}$$

$$=\overline{t}+(\,\overline{\overline{x}y}.y\,)$$

$$=\overline{t}+xy$$

c)f(x,y,z) = $xyz+xyz+xyz+yz$

$$\overline{f}=\overline{xyz+xyz+xyz+yz}$$

$$=\overline{xyz+yz}$$

$$=\overline{z(\,x+1\,)}$$

$$=\overline{yz}$$

$$=\overline{y}+\overline{z}$$

d) f(a,b,c) = $b(a+c)+c(\bar{a}+b)+ab$

$$\bar{f} = \overline{b(a+c)+c(\bar{a}+b)+ab}$$

$$= ab + bc + c\bar{a}$$

$$= (\bar{a}+\bar{b}).(\bar{b}+\bar{c}).(\bar{c}+a)$$

$$= \overline{bc} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}a$$