Université de Tunis El Manar — **A.U. 2020/2021**
Institut supérieur d'informatique — **1ère année**
Département de mathématiques appliquées — **Analyse 1**

Fonctions usuelles

Exercice 1

On note par arcsin, arccos, arctan, *les fonctions réciproques des fonctions*

$$\begin{array}{ccccc} \sin & : & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1]\,, \\ \cos & : & [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1]\,, \\ \tan & : & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R}. \end{array}$$

1. *Calculer*

$$\forall x \in [-1,1]\,, \quad \sin(\arcsin(x))\,, \quad \cos(\arccos(x))\,, \quad \cos(\arcsin(x)) \quad \textit{et} \quad \sin(\arccos(x))\,.$$

2. *Déterminer*

(a) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,

(b) $\arccos\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

(c) $\arccos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$,

(d) $\arcsin\left(\cos\frac{2001\pi}{3}\right)$,

(e) $\arccos\left(\sin\frac{-2001\pi}{3}\right)$,

(f) $\arccos\left(\cos\frac{-13\pi}{6}\right)$.

Exercice 2

1. *Calculer :*

$$\arcsin(0), \quad \arcsin(\sin(\pi))\,, \quad \arccos(1), \quad \arccos(\cos(2\pi))\,.$$

2. *Soit*

$$\begin{array}{cccc} f : & \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x. \end{array}$$

Montrer que f est une bijection de $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ *dans* $[-1,1]$. *On note par g la fonction réciproque. Trouver la relation entre g et la fonction* arcsin.

3. *Soit*

$$\begin{array}{cccc} h : & [\pi,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin x. \end{array}$$

Montrer que h est une bijection de $[\pi,2\pi]$ *dans* $[-1,1]$. *On note par u sa fonction réciproque. Trouver la relation entre u et la fonction* arccos.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

1. *Quel est l'ensemble de définition de f ?*
2. *En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de f.*

Exercice 4

1. *Simplifier les expressions suivantes :*
   (a) $\tan(2\arctan(x))$.
   (b) $\sin(3\arctan(x))$.
2. *Montrer que :*
   (a) $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$ *pour tout* $x \in [-1, 1]$.
   (b) $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan(\frac{x+y}{1-xy})$, *pour tout* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *tel que* $x.y < 1$.

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes.

1. $2\ \arcsin(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.
2. $\arccos(x) = \arcsin(2x)$.
3. $\arctan(2x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(3x)$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$$

1. *Montrer que f est définie et continue sur* $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. *Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.*
3. *Pour les valeurs où cela ne pose pas de problème calculer $f'(x)$, en déduire les variation de f .*
4. *Calculer*
   $$\lim_{x\to -1^-} f'(x) \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$
   Que peut-on en déduire sur le graphe de f en $x = -1$ et $x = 1$?
5. *Tracer le graphe de f .*

Exercice 7

1. *Montrer que :*

$$\arctan(x)+\arctan(\tfrac{1}{x})=\tfrac{\pi}{2} \qquad \textit{pour tout } x>0,$$
$$\arctan(x)+\arctan(\tfrac{1}{x})=-\tfrac{\pi}{2} \quad \textit{pour tout } x<0.$$

2. *Soit f la fonction définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f : &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right). \end{array}$$

   a) *Justifier que f est dérivable sur $]-1,1[$.*

   b) *Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.*

   c) *En déduire une expression simple de $f(x)$.*

3. ***Application :** Montrer que :*

$$\arctan(\frac{1}{2})+\arctan(\frac{1}{3})=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 8

Montrer les égalités suivantes :

1. $\forall\ x \in \mathbb{R},\ arg\sinh(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$
2. $\forall\ x \geq 1,\ arg\cosh(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$
3. $\forall\ x \in]-1,1[\,,\ arg\tanh(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$

Exercice 9

1. *Simplifier les expressions suivantes :*

   (a) $\cosh\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right),$

   (b) $\sinh\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right),$

   (c) $\cosh\left(2arg\tanh(x)\right),$

   (d) $arg\sinh\left(2x\sqrt{x^2+1}\right).$

   (e) $\ln\left(\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}\right).$

2. *Montrer que :*

$$\forall x \geq 0,\ \arctan\left(\sinh(x)\right)=\arccos\left(\frac{1}{\cosh(x)}\right).$$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x)=x\sinh\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. *Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*

2. *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :*

$$\forall x>0,\ \tanh(x)<x.$$

3. *Montrer que la restriction de f sur $\mathbb{R}_+^*$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$.*