Série complémentaire d'algébre

Exercice 1

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes:

1. $R_1(X) = \frac{1}{X^3-X}$.
2. $R_2(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$.
3. $R_3(X) = \frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$.
4. $R_4(X) = \frac{X^3+1}{(X-1)^3}$.
5. $R_5(X) = \frac{1}{X^8+X^4+1}$.

Exercice 2

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes:

1. $F(X) = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$
2. $G(X) = \frac{X^5-X^2+1}{(X^2+1)^2(X+1)^2}$
3. $H(X) = \frac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3}$

Correction Exercice 1:

1. D'abord le dénominateur de $R_1(X)$ se factorise en $X(X-1)(X+1)$ et comme la partie entière est nulle alors la fraction $R_1(X)$ se décompose de la maniére suivante

$$R_1(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

$$XR_1(X)/_{X=0} = a \Rightarrow a = -1$$

$$(X-1)R_1(X)/_{X=1} = b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$(X+1)R_1(X)/_{X=-1} = c \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Enfin on obtient,

$$R_1(X) = \frac{1}{X^3-X} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)}.$$

2. En remarquant que dans la fraction $R_2(X)$ le numérateur et le dénominateur ont le même degré, alors en effectuant la division euclidienne, on peut trouver que

$$\begin{aligned} R_2(X) &= \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} \\ &= 1+\frac{5X+3}{X^2-3X+2} \\ &= E(X)+G(X) \end{aligned}$$

où $E(X) = 1$ (la partie entière) et $G(X) = \frac{5X+3}{X^2-3X+2}$. Le dénominateur de $G(X)$ se factorise en $(X-1)(X-2)$, alors la décomposition de G en éléments simples est la suivante:

$$G(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

$$(X-1)\,G(X)\,/_{X=1} = a \Rightarrow a = -8$$

$$(X-2)\,G(X)\,/_{X=2} = b \Rightarrow b = 13.$$

On trouve finalement:

$$R_2(X) = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}.$$

3. En remarquant que dans la fraction aussi $R_3(X)$ le numérateur et le dénominateur ont le même degré, alors en effectuant la division euclidienne, on peut trouver que

$$\begin{aligned} R_3(X) &= \frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)} \\ &= 1+\frac{6X^2-11X+6}{(X-1)(X-2)(X-3)} \\ &= E(X)+K(X) \end{aligned}$$

où $E(X) = 1$ (la partie entière) et $K(X) = \frac{6X^2-11X+6}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. La décomposition de K en éléments simples est la suivante:

$$K(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}.$$

$$(X-1)\,K(X)\,/_{X=1} = a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$(X-2)\,K(X)\,/_{X=2} = b \Rightarrow b = -8.$$

$$(X-3)\,K(X)\,/_{X=3} = c \Rightarrow c = \frac{27}{2}.$$

On trouve finalement:

$$R_3(X) = 1 + \frac{1}{2(X-1)} - \frac{8}{X-2} + \frac{27}{2(X-3)}.$$

4.

$$\begin{aligned} R_4(X) &= \frac{X^3+1}{(X-1)^3} \\ &= 1 + \frac{3X^2-3X+2}{(X-1)^3} \\ &= 1 + K(X) \end{aligned}$$

où $K(X) = \frac{3X^2-3X+2}{(X-1)^3}$. La décomposition de la fraction K est donnée comme suit:

$$K(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3}.$$

$$(X-1)^3 K(X) /_{X=1} = c \Rightarrow c = 2$$

Maintenant afin de trouver b, on soustrait $\frac{2}{(X-1)^3}$:

$$\begin{aligned} & \frac{3X^2-3X+2}{(X-1)^3} - \frac{2}{(X-1)^3} \\ = & \frac{3X}{(X-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} \end{aligned}$$

$$(X-1)^2 \frac{3X}{(X-1)^2} /_{X=1} = b \Rightarrow b = 3.$$

De même, pour calculer a, on retranche $\frac{3}{(X-1)^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{3X}{(X-1)^2} - \frac{3}{(X-1)^2} &= \frac{3}{(X-1)} \\ &= \frac{a}{(X-1)} \end{aligned}$$

On a donc, $a = 3$. Finalement la décomposition de la fraction $R_4(X)$ est la suivante:

$$\begin{aligned} R_4(X) &= \frac{X^3+1}{(X-1)^3} \\ &= 1 + \frac{3}{(X-1)} + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3} \end{aligned}$$

5.On factorise le dénominateur. D'abord $X^8+X^4+1=\left(X^4+1\right)^2-X^4=\left(X^4+X^2+1\right)\left(X^4-X^2+1\right)$

De même
$$X^4+X^2+1=\left(X^2+X+1\right)\left(X^2-X+1\right)$$
$$X^4-X^2+1=\left(X^2+1\right)^2-3X^2=\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)\left(X^2-X\sqrt{3}+1\right)$$

Ainsi R_5 s'écrit

$$R_5(X)=\frac{aX+b}{X^2+X+1}+\frac{cX+d}{X^2-X+1}+\frac{eX+f}{X^2+X\sqrt{3}+1}+\frac{gX+h}{X^2-X\sqrt{3}+1}$$

La parité de R_5 donne les relations $c=-a, d=b$, $g=-e$, $h=f$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}R_5(X)&=\frac{aX+b}{X^2+X+1}-\frac{aX-b}{X^2-X+1}+\frac{eX+f}{X^2+X\sqrt{3}+1}-\frac{eX-f}{X^2-X\sqrt{3}+1}\\&=2\frac{(b-a)X^2+b}{X^4+X^2+1}+2\frac{\left(f-e\sqrt{3}\right)X^2+f}{X^4-X^2+1}\end{aligned}$$

Or $R_5(iX)=R_5(X)$ .On en déduit$\left\{\begin{array}{c}f=b\\f-e\sqrt{3}=a-b\end{array}\right.$ donc $f=b$ et $e=\frac{\sqrt{3}}{3}(2b-a)$.

Pour trouver a et b on multiplie R par X^2+X+1 et on donne à X la valeur j.

$aj+b=\frac{1}{(j^2-j+1)(j^4-j^2+1)}=\frac{1}{(-2j)(-2j^2)}=\frac{1}{4}$.Donc $a=0$ et $b=\frac{1}{4}$.

Enfin on trouve :

$$R_5(X)=\frac{1}{4\left(X^2+X+1\right)}+\frac{1}{4\left(X^2-X+1\right)}+\frac{2X\sqrt{3}+3}{12\left(X^2+X\sqrt{3}+1\right)}-\frac{2X\sqrt{3}-3}{12\left(X^2-X\sqrt{3}+1\right)}.$$

Correction Exercice 2:

1. On factorise le dénominateur. D'abord $(X+1)^2\left(X^2+1\right)=(X+1)^2(X+i)(X-i)$, la fraction F étant à coefficients réels ainsi les parties polaires sont conjuguées.

On a donc

$$\begin{aligned}F(X)&=\frac{X^4+1}{(X+1)^2\left(X^2+1\right)}\\&=1+\frac{a}{(X+1)^2}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+i}+\frac{\bar{c}}{X-i}.\end{aligned}$$

Maintenant, en multipliant par $(X-i)$ et prenant $X=i$, on trouve

$$c=\frac{i^4+1}{(i+1)^2\left(i^2+1\right)}=\frac{-1}{2}.$$

De même

$$a=1$$

Après, en retranchant $\frac{1}{(X+1)^2}$, on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)} - \frac{1}{(X+1)^2} \\ = & \frac{X^2(X-1)}{(X+1)(X^2+1)} \\ = & 1 + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+i} + \frac{\bar{c}}{X-i} \end{aligned}$$

On multiplie par $(X+1)$ et on remplace X par -1, on trouve

$$b = -1$$

La décompsition de F alors est :

$$F(X) = 1 + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{2(X+i)} - \frac{1}{2(X-i)}.$$

2.La décomposition est de la forme $G = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2} + \frac{eX+f}{X^2+1}$.

On trouve d'abord

$$a = \lim_{X \to -1} (X+1)^2 G(X) = \frac{X^5 - X^2 + 1}{(X^2+1)^2}_{/X=-1} = -\frac{1}{4}.$$

Ensuite

$$ci + d = \left(X^2+1\right)^2 G(x)_{/X=i} = \frac{X^5 - X^2 + 1}{(X+1)^2}_{/x=i} = \frac{i+2}{2i} = \frac{1}{2} - i.$$

Donc

$$\begin{cases} c = -1 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On donne à X la valeur 0 : $1 = a + b + d + f \implies b = 1 - a - d - f = \frac{3}{4} - f$

On donne à X la valeur j, et on utilise $j^3 = 1$ et $1 + j + j^{\ 2} = 0$. On a $G(j) = 1$.

Donc $1 = aj^{\ 2} - bj + (cj + d)j - (ej + f)j^{\ 2} = \frac{5}{4} + f - e + j\left(\frac{7}{4} + f - b\right)$.

On en déduit $0 = \frac{7}{4} + f - b = 2f + 1$ donc $f = -\frac{1}{2}$et $b = \frac{5}{4}$.

De même, $1 = \frac{5}{4} + f - e = \frac{3}{4} - e \implies e = -\frac{1}{4}$.

Conclusion:

$$G(X) = \frac{-1}{4(X+1)^2} + \frac{5}{4(X+1)} - \frac{2X-1}{2(X^2+1)^2} - \frac{X+2}{4(X^2+1)}$$