Projet *Labyrinthe*

Algorithmes et Structures de Donnée

Juan-Carlos Barros et Daniel Kessler

14 mai 2021

Cours d'*Algorithmes* et *Structures de donnée*

Projet *Labyrinthe*

- Algorithme
  A*
- Structure de Donnée
  Priority Queue

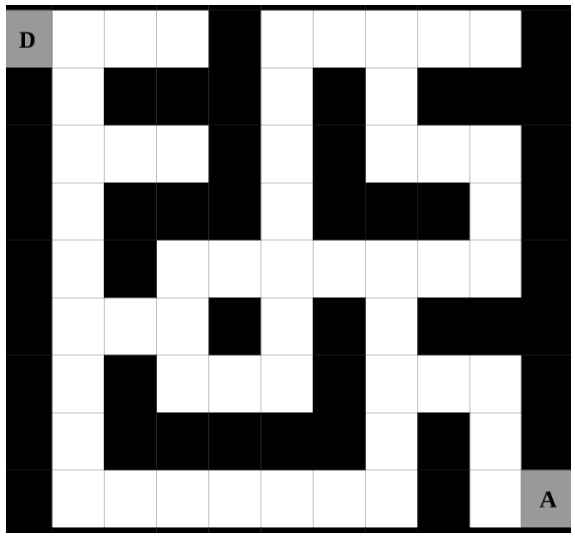


Table des matières

Un labyrinthe, plusieurs problèmes

- Cherche-t-on un chemin quelconque ?
  - Oui, on ne traversera le labyrinthe qu'une seule fois.
  - **Non, on veut le chemin le plus court**, pour peut-être le réutiliser.
- Connait-on les coordonnées de la sortie dès le départ ?
  - **Oui, et cette information pourra nous aider.**
  - Non, le lieu de la sortie fait partie des inconnues.

Un problème, plusieurs solutions

- Breadth-First Search
  - garantit de trouver une solution si elle existe
  - solution optimale si tous les pas sont égaux
- Dijkstra
  - choisit où explorer selon les distances déjà parcourues
  - garantit de trouver le plus court chemin
- A*
  - nécessite de connaître les coordonnées de la sortie
  - choisit où explorer selon les distances déjà parcourues et la distance à la sortie

Algorithme A*

pseudo-code

Démarrer une file d'attente avec la cellule de départ D, une liste de prédécesseurs avec $\{D : Nil\}$ et une liste de coûts d'accès avec $\{D : 0\}$.

Tant que la file d'attente n'est pas vide,

- extraire (pop) la cellule prioritaire C de la file d'attente
- si C est la cellule d'arrivée A, retourner le chemin qui y amène (via backtracking sur les prédecesseurs)
- sinon, pour chaque voisin V de C qui n'est pas déjà accessible à moindre coût
  - mémoriser le prédecesseur de V et le coût d'accès à V
  - ajouter V à la file d'attente

Heuristique et Priorité

La priorité d'une cellule C en attente est le coût estimé d'un chemin complet passant par cette cellule.

priorité = coût_réel $(D \to C)$ + coût_estimé $(C \to S)$

La distance restante depuis une cellule jusqu'à l'arrivée doit être estimée *sans jamais la surestimer*.

- La **distance de Manhattan** $|\Delta x| + |\Delta y|$ est un bon estimateur si les mouvements permis sont horizontaux et verticaux.
- Une **heuristique nulle** ramène A* à l'algorithme de Dijkstra (ou Breadth-First Search sur grille carrée).

File d'attente : "Priority Queue"

- Structure permettant insertion avec priorité et "pop" rapide de l'élément prioritaire
- Implémentation en Python en tant que **binary heap** avec le module *heapq*
- Dans cette implémentation, vérifier si vide en $O(1)$, insertion et "pop" en $O(\log(n))$ où n est le nombre d'objets en attente [1]

1. cf. https ://www.cs.princeton.edu/ wayne/kleinberg-tardos/pdf/BinomialHeaps.pdf

Preuve de l'algorithme (grandes lignes)

L'heuristique $h(C)$ qui estime le chemin restant depuis une cellule C doit satisfaire deux conditions.

1. **Monotonicité** : sorte d'inégalité triangulaire faible $h(C_1) \leq r(C_1, C_2) + h(C_2)$ où C_1, C_2 sont deux cellules, $r(C_1, C_2)$ est la distance réelle entre elles.

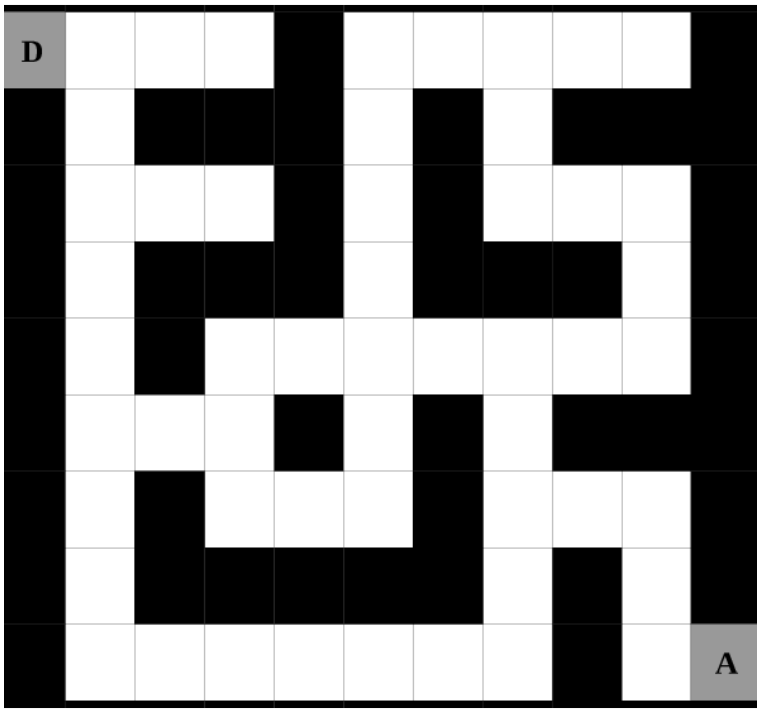
   Cette propriété garantit de trouver la sortie, sans se "perdre" dans des boucles éventuelles.

2. **Admissibilité : l'heuristique ne surestime jamais une distance**

   Cela garantit qu'il n'y a pas de chemin plus court que celui trouvé.

   Par contradiction : s'il y en avait un, il aurait été estimé correctement ou sous-estimé, et serait donc prioritaire par rapport à un chemin complet trop long, vu qu'**un chemin complet a une priorité calculée uniquement en coût réel.**

Exemple de résolution



Complexité

Le pire des cas sera réalisé par un labyrinthe dont le meilleur chemin revient souvent en arrière (s'éloigne de l'arrivée). Dans ce cas, aucun gain n'est réalisé par rapport à l'algorithme de Dijsktra (ou "heuristique nulle").

Dans ce cas, on aura visité toutes les N cellules. Les coûts de lecture/écriture dans la file d'attente sont en $O(\log(n))$ où n est le nombre d'éléments dans la "frontière" d'exploration, donc $n \sim O(\sqrt{N})$. Les autres opérations sont à coût comparable ou moindre. L'ensemble de la recherche sera donc en $O(N \log(N))$.

Cependant, le "worst case" ne rend pas justice à A* dont le but est justement d'éviter la plupart du temps le "worst case" avec un bon choix d'heuristique.

Tests avec Python

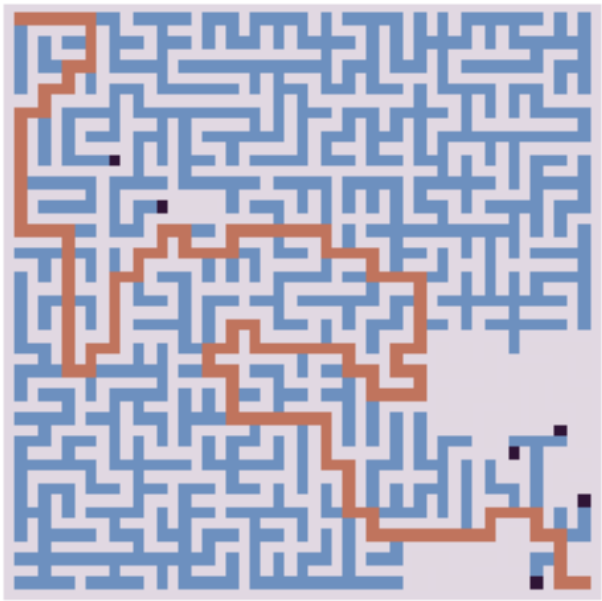
```
marge = QueuePrioritaire(grid.start)
cout_reel = {grid.start: 0}
parent = {grid.start: None}

while True:
    noeud_courant = marge.pop()
    if noeud_courant is None:
        raise ValueError("la grille n'a pas de solution")
    if noeud_courant == grid.out:
        break  # chemin optimal trouvé
    # ... traiter noeud courant
```

la suite dans : https://github.com/Dalker/ASD_labyrinthe/

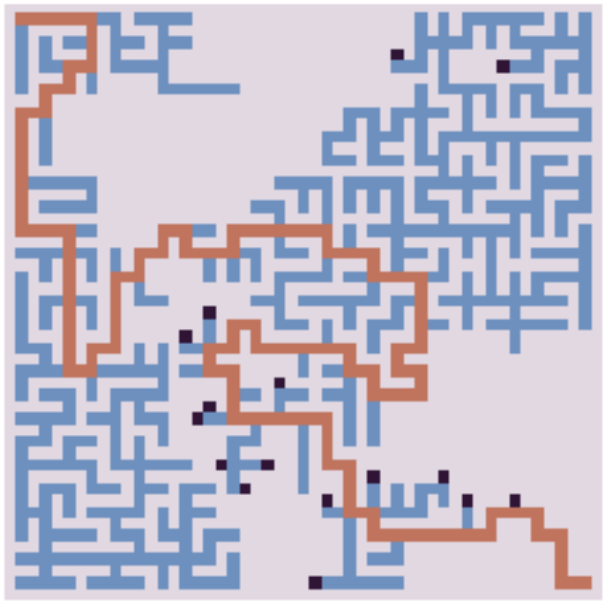
1. cloner le dossier `implementation`
2. exécuter `visual_test.py` et `time_test.py`

Tests avec Python

A* with null heuristic



A* with Manhattan heuristic



Tests avec Python

```
* Comparaison heuristique nulle vs Manhattan distance *
solveur1 = heuristique 0, solveur2 = heuristique Manhattan
30x30 : generate=0.1019s solve1=0.0060s solve2=0.0022s
40x40 : generate=0.1814s solve1=0.0096s solve2=0.0086s
50x50 : generate=0.5002s solve1=0.0228s solve2=0.0204s
60x60 : generate=0.8701s solve1=0.0280s solve2=0.0199s
70x70 : generate=1.0461s solve1=0.0451s solve2=0.0391s
80x80 : generate=1.4218s solve1=0.0563s solve2=0.0423s
```

Conclusion

- Fourmis
- Robot-Aspirateur

Références

- Liste des sources consultées : `https://github.com/Dalker/ASD_labyrinthe/wiki/Sources`
- Notre implémentation en Python, avec tests temporels et "tests visuels" (animations) : `https://github.com/Dalker/ASD_labyrinthe/tree/main/implementation`