

Projet *Labyrinthe*

Algorithmes et Structures de Donnée

Juan-Carlos Barros et Daniel Kessler

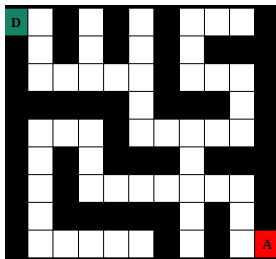
14 mai 2021

Cours d'*Algorithmes* et *Structures de donnée*

Cours d'*Algorithmes* et *Structures de donnée*

Projet *Labyrinthe*

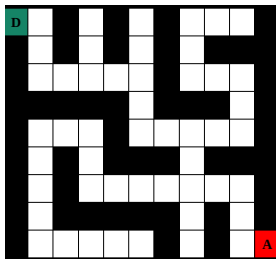
- Algorithme
- Structure de Donnée



Cours d'*Algorithmes* et *Structures de donnée*

Projet *Labyrinthe*

- *Algorithme*
A*
- *Structure de Donnée*



Cours d'*Algorithmes* et *Structures de donnée*

Projet *Labyrinthe*

- *Algorithme*
A*
- *Structure de Donnée*
Priority Queue

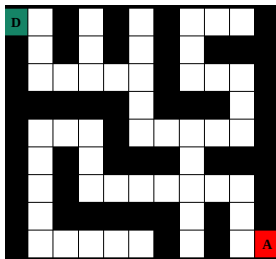


Table des matières

1 Quel algorithme pour résoudre quel problème ?

- Choix du problème
- Choix de l'Algorithme

2 Algorithme A*

- Pseudo-Code
- Heuristique et Priorité
- Structure de données "Priority Queue"
- Idée de preuve
- Exemple de résolution

3 Complexité

4 Tests avec Python

5 Conclusion

6 Références

Un labyrinthe, plusieurs problèmes

- Cherche-t-on un chemin quelconque ?

Un labyrinthe, plusieurs problèmes

- Cherche-t-on un chemin quelconque ?
 - ▶ Oui, on ne traversera le labyrinthe qu'une seule fois.
 - ▶ On veut le chemin le plus court, pour peut-être le réutiliser.

Un labyrinthe, plusieurs problèmes

- Cherche-t-on un chemin quelconque ?
 - ▶ Oui, on ne traversera le labyrinthe qu'une seule fois.
 - ▶ **On veut le chemin le plus court**, pour peut-être le réutiliser.

Un labyrinthe, plusieurs problèmes

- Cherche-t-on un chemin quelconque ?
 - ▶ Oui, on ne traversera le labyrinthe qu'une seule fois.
 - ▶ **On veut le chemin le plus court**, pour peut-être le réutiliser.
- Connait-on les coordonnées de la sortie dès le départ ?

Un labyrinthe, plusieurs problèmes

- Cherche-t-on un chemin quelconque ?
 - ▶ Oui, on ne traversera le labyrinthe qu'une seule fois.
 - ▶ **On veut le chemin le plus court**, pour peut-être le réutiliser.
- Connait-on les coordonnées de la sortie dès le départ ?
 - ▶ Oui, et cette information pourra nous aider.
 - ▶ Non, le lieu de la sortie partie des inconnues.

Un labyrinthe, plusieurs problèmes

- Cherche-t-on un chemin quelconque ?
 - ▶ Oui, on ne traversera le labyrinthe qu'une seule fois.
 - ▶ **On veut le chemin le plus court**, pour peut-être le réutiliser.
- Connait-on les coordonnées de la sortie dès le départ ?
 - ▶ **Oui, et cette information pourra nous aider.**
 - ▶ Non, le lieu de la sortie partie des inconnues.

Un problème, plusieurs solutions

- Breadth-First Search

- ▶ garantit de trouver une solution si elle existe
- ▶ solution optimale si tous les pas sont égaux

Un problème, plusieurs solutions

- Breadth-First Search

- ▶ garantit de trouver une solution si elle existe
- ▶ solution optimale si tous les pas sont égaux

- Dijkstra

- ▶ choisit où explorer selon les distances déjà parcourues
- ▶ garantit de trouver le plus court chemin

Un problème, plusieurs solutions

- Breadth-First Search

- ▶ garantit de trouver une solution si elle existe
- ▶ solution optimale si tous les pas sont égaux

- Dijkstra

- ▶ choisit où explorer selon les distances déjà parcourues
- ▶ garantit de trouver le plus court chemin

- A*

- ▶ nécessite de connaître les coordonnées de la sortie
- ▶ choisit où explorer selon les distances déjà parcourues et la distance à la sortie

Algorithme A*

pseudo-code

Démarrer une file d'attente avec la cellule de départ D , une liste de prédécesseurs avec $\{D : Nil\}$ et une liste de coûts d'accès avec $\{D : 0\}$.

Algorithme A*

pseudo-code

Démarrer une file d'attente avec la cellule de départ D , une liste de prédécesseurs avec $\{D : Nil\}$ et une liste de coûts d'accès avec $\{D : 0\}$.

Tant que la file d'attente n'est pas vide,

Algorithme A*

pseudo-code

Démarrer une file d'attente avec la cellule de départ D , une liste de prédécesseurs avec $\{D : Nil\}$ et une liste de coûts d'accès avec $\{D : 0\}$.

Tant que la file d'attente n'est pas vide,

- extraire (pop) la cellule prioritaire C de la file d'attente

Algorithme A*

pseudo-code

Démarrer une file d'attente avec la cellule de départ D , une liste de prédécesseurs avec $\{D : Nil\}$ et une liste de coûts d'accès avec $\{D : 0\}$.

Tant que la file d'attente n'est pas vide,

- extraire (pop) la cellule prioritaire C de la file d'attente
- si C est la cellule d'arrivée A , retourner le chemin qui y amène (via backtracking sur les prédécesseurs)

Algorithme A*

pseudo-code

Démarrer une file d'attente avec la cellule de départ D , une liste de prédécesseurs avec $\{D : Nil\}$ et une liste de coûts d'accès avec $\{D : 0\}$.

Tant que la file d'attente n'est pas vide,

- extraire (pop) la cellule prioritaire C de la file d'attente
- si C est la cellule d'arrivée A , retourner le chemin qui y amène (via backtracking sur les prédécesseurs)
- sinon, pour chaque voisin V de C qui n'est pas déjà accessible à moindre coût

Algorithme A*

pseudo-code

Démarrer une file d'attente avec la cellule de départ D , une liste de prédécesseurs avec $\{D : Nil\}$ et une liste de coûts d'accès avec $\{D : 0\}$.

Tant que la file d'attente n'est pas vide,

- extraire (pop) la cellule prioritaire C de la file d'attente
- si C est la cellule d'arrivée A , retourner le chemin qui y amène (via backtracking sur les prédécesseurs)
- sinon, pour chaque voisin V de C qui n'est pas déjà accessible à moindre coût
 - ▶ mémoriser le prédécesseur de V et le coût d'accès à V

Algorithme A*

pseudo-code

Démarrer une file d'attente avec la cellule de départ D , une liste de prédécesseurs avec $\{D : Nil\}$ et une liste de coûts d'accès avec $\{D : 0\}$.

Tant que la file d'attente n'est pas vide,

- extraire (pop) la cellule prioritaire C de la file d'attente
- si C est la cellule d'arrivée A , retourner le chemin qui y amène (via backtracking sur les prédécesseurs)
- sinon, pour chaque voisin V de C qui n'est pas déjà accessible à moindre coût
 - ▶ mémoriser le prédécesseur de V et le coût d'accès à V
 - ▶ ajouter V à la file d'attente

Heuristique et Priorité

La priorité d'une cellule C en attente est le coût estimé d'un chemin complet passant par cette cellule.

$$\text{priorité} = \text{coût_réel} (D \rightarrow C) + \text{coût_estimé} (C \rightarrow S)$$

Heuristique et Priorité

La priorité d'une cellule C en attente est le coût estimé d'un chemin complet passant par cette cellule.

$$\text{priorité} = \text{coût_réel} (D \rightarrow C) + \text{coût_estimé} (C \rightarrow S)$$

La distance restante depuis une cellule jusqu'à l'arrivée doit être estimée *sans jamais surestimer*.

Heuristique et Priorité

La priorité d'une cellule C en attente est le coût estimé d'un chemin complet passant par cette cellule.

$$\text{priorité} = \text{coût_réel} (D \rightarrow C) + \text{coût_estimé} (C \rightarrow S)$$

La distance restante depuis une cellule jusqu'à l'arrivée doit être estimée *sans jamais surestimer*.

- La **distance de Manhattan** $|\Delta x| + |\Delta y|$ est un bon estimateur si les mouvements permis sont horizontaux et verticaux.

Heuristique et Priorité

La priorité d'une cellule C en attente est le coût estimé d'un chemin complet passant par cette cellule.

$$\text{priorité} = \text{coût_réel} (D \rightarrow C) + \text{coût_estimé} (C \rightarrow S)$$

La distance restante depuis une cellule jusqu'à l'arrivée doit être estimée *sans jamais surestimer*.

- La **distance de Manhattan** $|\Delta x| + |\Delta y|$ est un bon estimateur si les mouvements permis sont horizontaux et verticaux.
- Une **heuristique nulle** ramène A^* à l'algorithme de Dijkstra (ou Breadth-First Search sur grille carrée).

File d'attente : “Priority Queue”

- Structure permettant insertion avec priorité et “pop” rapide de l’élément prioritaire
- Implémentation en Python en tant que **binary heap** avec le module *heapq*
- Dans cette implémentation, vérifier si vide en $O(1)$, insertion et “pop” en $O(\log(n))$ où n est le nombre d’objets en attente¹

1. cf. <https://www.cs.princeton.edu/wayne/kleinberg-tardos/pdf/BinomialHeaps.pdf>

Preuve de l'algorithme (grandes lignes)

L'heuristique $h(C, S)$ qui estime le chemin restant doit satisfaire deux conditions.

Preuve de l'algorithme (grandes lignes)

L'heuristique $h(C, S)$ qui estime le chemin restant doit satisfaire deux conditions.

- ① **l'inégalité triangulaire** : $h(C_1, S) \leq r(C_1, C_2) + h(C_2, S)$ où C_1, C_2 sont deux cellules, $r(C_1, C_2)$ et la distance réelle entre elles.

Elle garantit de trouver la sortie, sans se “perdre” dans des boucles éventuelles.

Preuve de l'algorithme (grandes lignes)

L'heuristique $h(C, S)$ qui estime le chemin restant doit satisfaire deux conditions.

- ① **l'inégalité triangulaire** : $h(C_1, S) \leq r(C_1, C_2) + h(C_2, S)$ où C_1, C_2 sont deux cellules, $r(C_1, C_2)$ et la distance réelle entre elles.

Elle garantit de trouver la sortie, sans se “perdre” dans des boucles éventuelles.

- ② **l'heuristique ne sur-estime jamais une distance**

Preuve de l'algorithme (grandes lignes)

L'heuristique $h(C, S)$ qui estime le chemin restant doit satisfaire deux conditions.

- 1 **l'inégalité triangulaire** : $h(C_1, S) \leq r(C_1, C_2) + h(C_2, S)$ où C_1, C_2 sont deux cellules, $r(C_1, C_2)$ et la distance réelle entre elles.

Elle garantit de trouver la sortie, sans se “perdre” dans des boucles éventuelles.

- 2 **l'heuristique ne sur-estime jamais une distance**

Cela garantit qu'il n'y a pas de chemin plus court que celui trouvé.

Preuve de l'algorithme (grandes lignes)

L'heuristique $h(C, S)$ qui estime le chemin restant doit satisfaire deux conditions.

- 1 **l'inégalité triangulaire** : $h(C_1, S) \leq r(C_1, C_2) + h(C_2, S)$ où C_1, C_2 sont deux cellules, $r(C_1, C_2)$ et la distance réelle entre elles.

Elle garantit de trouver la sortie, sans se “perdre” dans des boucles éventuelles.

- 2 **l'heuristique ne sur-estime jamais une distance**

Cela garantit qu'il n'y a pas de chemin plus court que celui trouvé.

Par contradiction :

Preuve de l'algorithme (grandes lignes)

L'heuristique $h(C, S)$ qui estime le chemin restant doit satisfaire deux conditions.

- 1 **l'inégalité triangulaire** : $h(C_1, S) \leq r(C_1, C_2) + h(C_2, S)$ où C_1, C_2 sont deux cellules, $r(C_1, C_2)$ et la distance réelle entre elles.

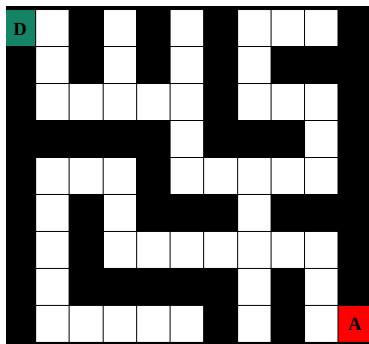
Elle garantit de trouver la sortie, sans se “perdre” dans des boucles éventuelles.

- 2 **l'heuristique ne sur-estime jamais une distance**

Cela garantit qu'il n'y a pas de chemin plus court que celui trouvé.

Par contradiction : s'il y en avait un, il aurait été estimé correctement ou sous-estimé, et serait donc prioritaire par rapport à un chemin complet trop long, vu qu'**un chemin complet a une priorité calculée uniquement en coût réel**.

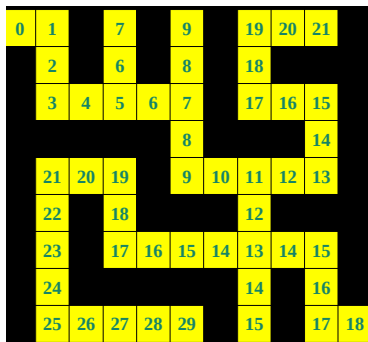
Exemple de résolution



Objectif

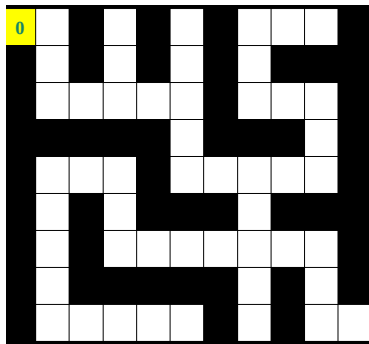
Trouver le chemin le plus court entre le
Départ et l'**A**rrivée

Exemple de résolution



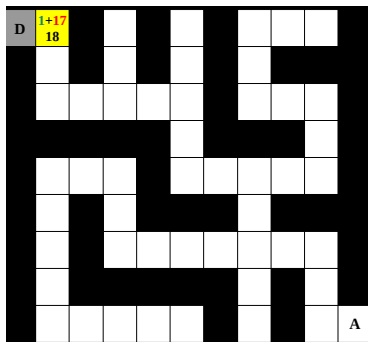
Chaque noeud est à une distance réelle de l'arrivée, mais ces distances ne sont pas encore connues.

Exemple de résolution



Le départ est mis en file d'attente, avec une priorité 0.

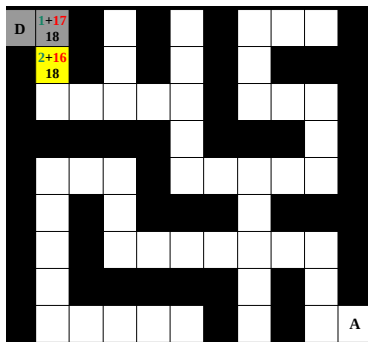
Exemple de résolution



Le seul voisin est évalué :

- coût réel pour y accéder : 1
- coût heuristique pour la suite : 17
- coût heuristique total (priorité) : 18

Exemple de résolution

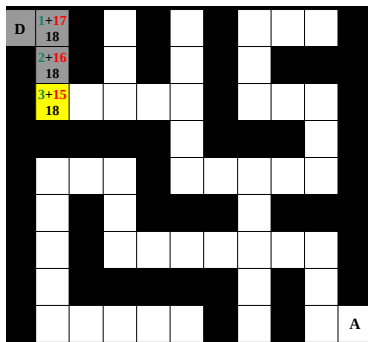


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

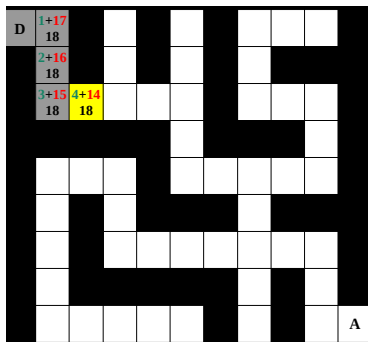


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

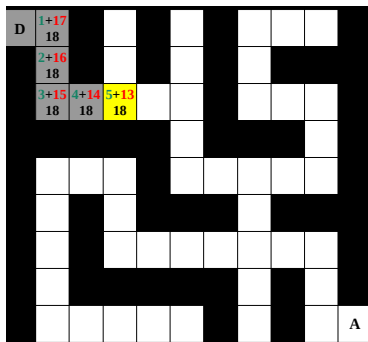


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

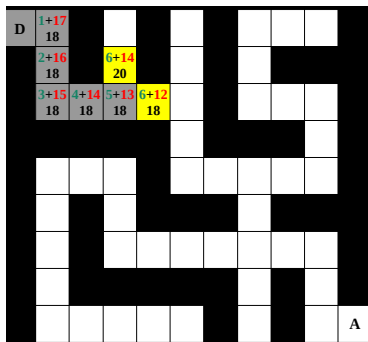


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

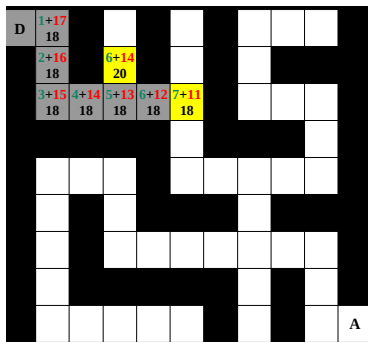


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

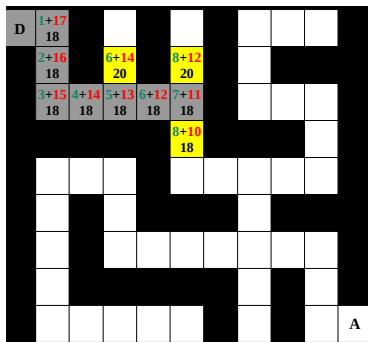


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

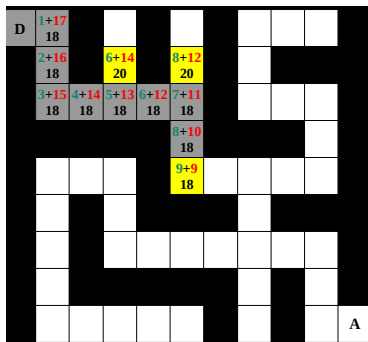


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

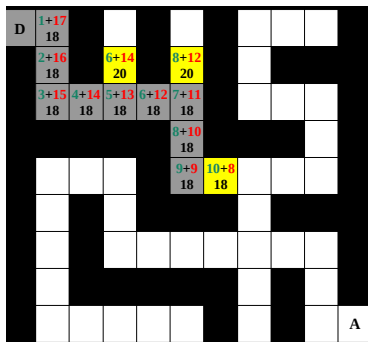


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

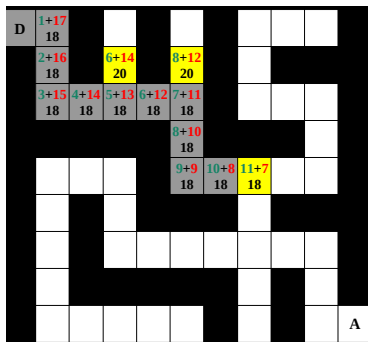


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

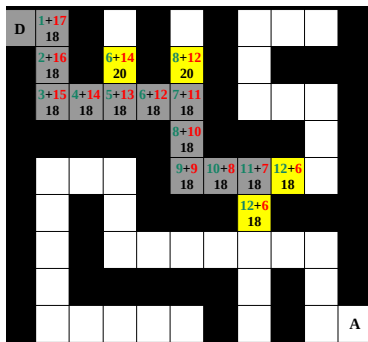


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

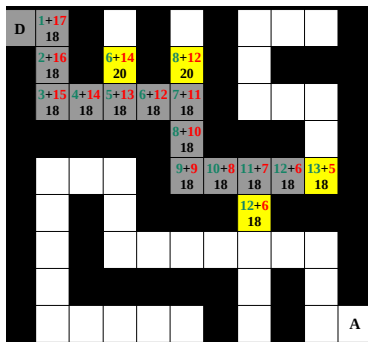


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.
Parfois deux choix ont la même priorité.

Exemple de résolution

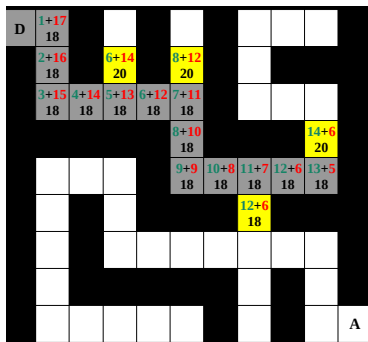


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

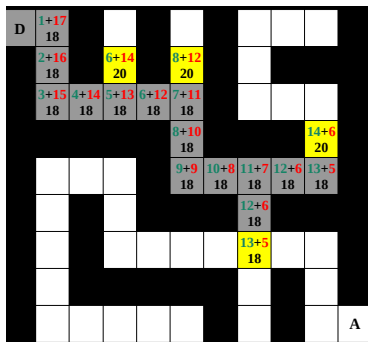


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

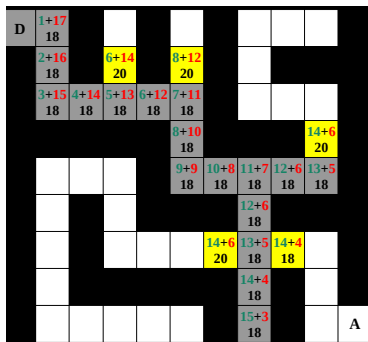


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

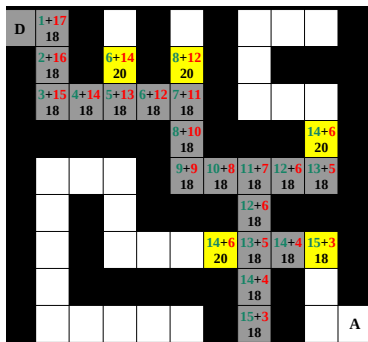


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

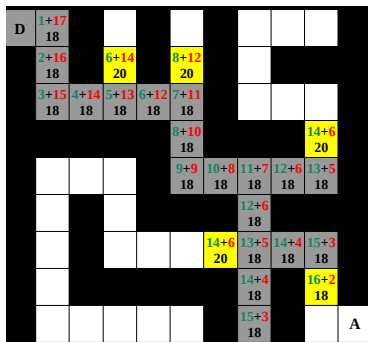


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

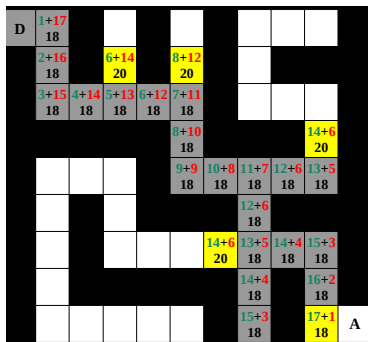


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

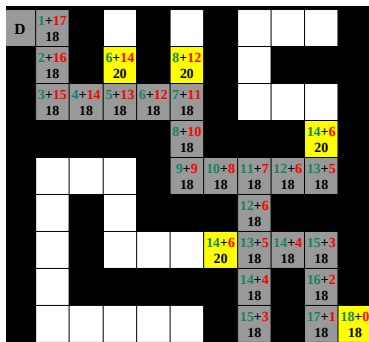


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

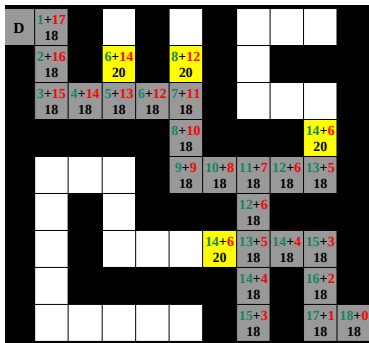


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution

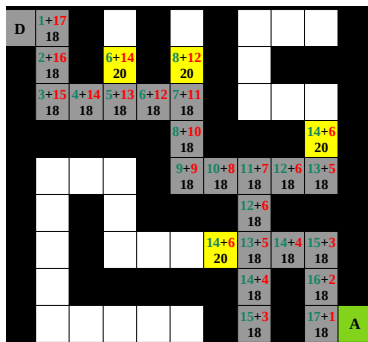


Légende :

- coût réel jusqu'ici
- coût heuristique pour la suite
- coût heuristique total

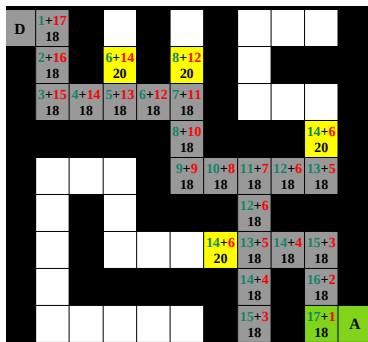
L'algorithme poursuit son chemin.

Exemple de résolution



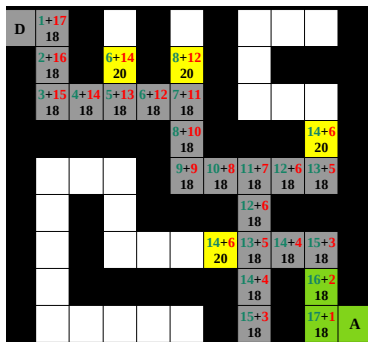
Un chemin vers la sortie a été trouvé!

Exemple de résolution



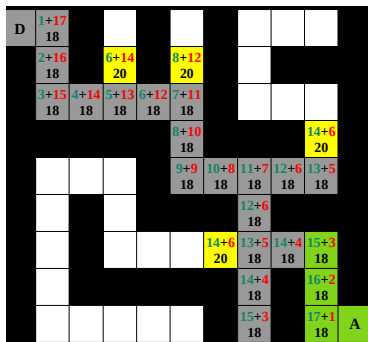
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



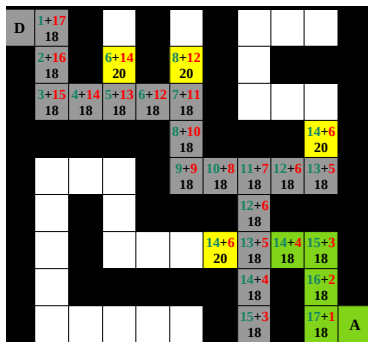
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



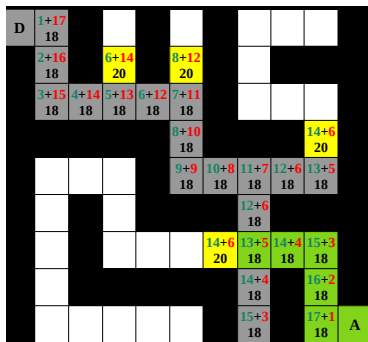
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



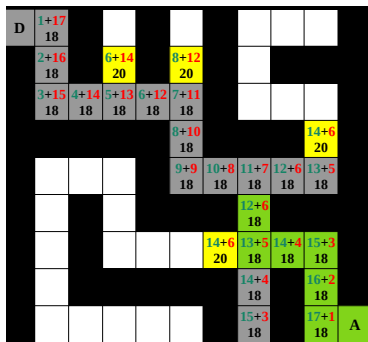
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



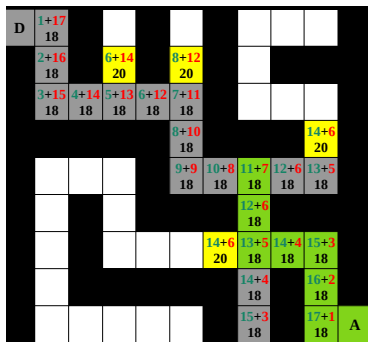
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



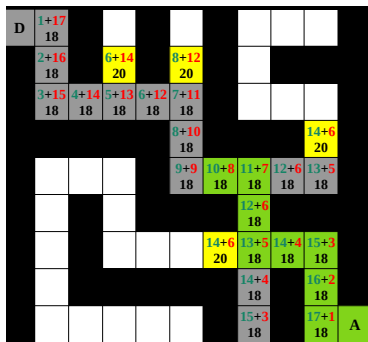
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



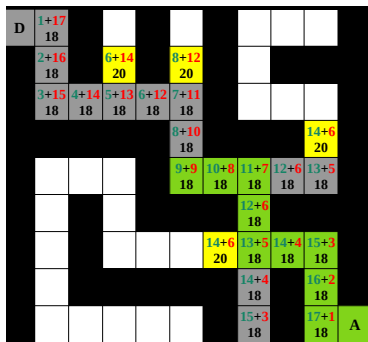
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



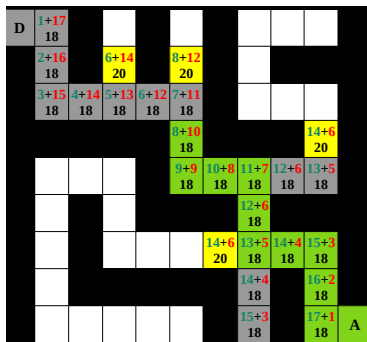
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



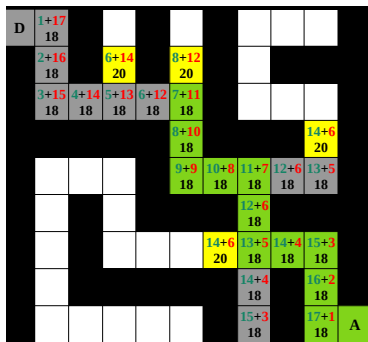
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



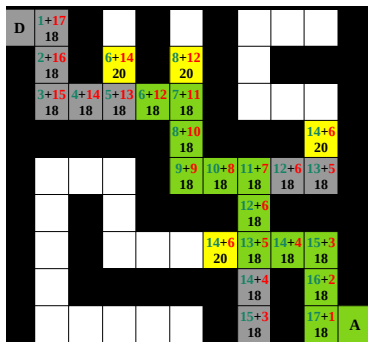
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



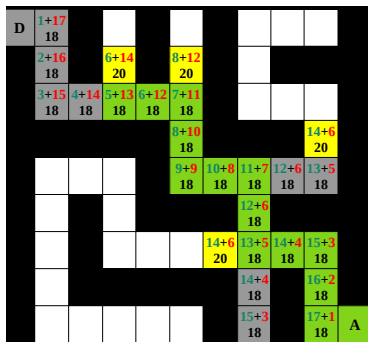
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



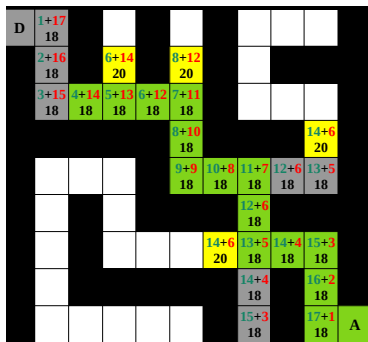
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



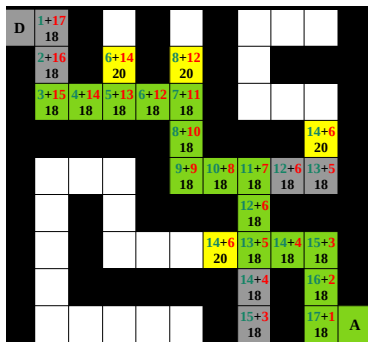
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



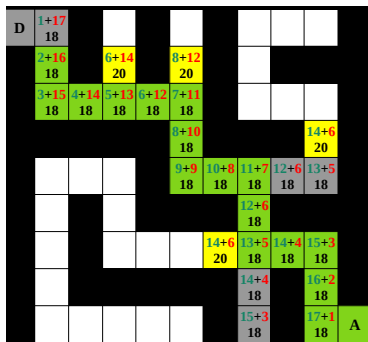
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



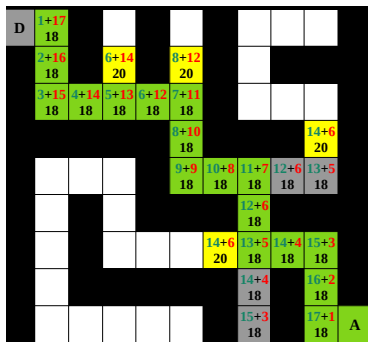
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



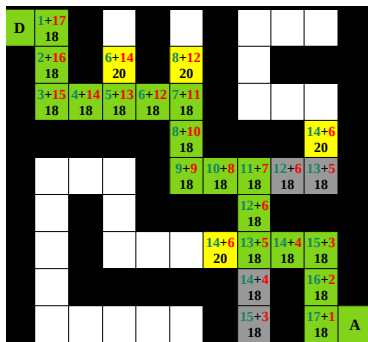
Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Exemple de résolution



Un chemin vers la sortie a été trouvé!
Backtracking pour reconstituer le chemin

Complexité

Le pire des cas sera réalisé par un labyrinthe dont le meilleur chemin revient souvent en arrière (s'éloigne de l'arrivée). Dans ce cas, aucun gain n'est réalisé par rapport à l'algorithme de Dijkstra (ou "heuristique nulle").

Complexité

Le pire des cas sera réalisé par un labyrinthe dont le meilleur chemin revient souvent en arrière (s'éloigne de l'arrivée). Dans ce cas, aucun gain n'est réalisé par rapport à l'algorithme de Dijkstra (ou "heuristique nulle").

Dans ce cas, on aura visité toutes les N cellules. Les coûts de lecture/écriture dans la file d'attente sont en $O(\log(n))$ où n est le nombre d'éléments dans la "frontière" d'exploration, donc $n \sim O(\sqrt{N})$. Les autres opérations sont à coût comparable ou moindre. L'ensemble de la recherche sera donc en $O(N \log(N))$.

Complexité

Le pire des cas sera réalisé par un labyrinthe dont le meilleur chemin revient souvent en arrière (s'éloigne de l'arrivée). Dans ce cas, aucun gain n'est réalisé par rapport à l'algorithme de Dijkstra (ou "heuristique nulle").

Dans ce cas, on aura visité toutes les N cellules. Les coûts de lecture/écriture dans la file d'attente sont en $O(\log(n))$ où n est le nombre d'éléments dans la "frontière" d'exploration, donc $n \sim O(\sqrt{N})$. Les autres opérations sont à coût comparable ou moindre. L'ensemble de la recherche sera donc en $O(N \log(N))$.

Cependant, le "worst case" ne rend pas justice à A* dont le but est justement d'éviter la plupart du temps le "worst case" avec un bon choix d'heuristique.

Tests avec Python

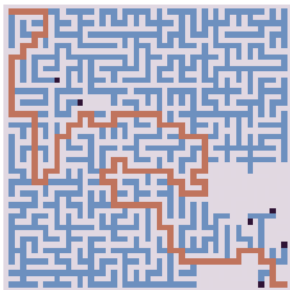
```
marge = QueuePrioritaire(grid.start)
cout_reel = {grid.start: 0}
parent = {grid.start: None}

while True:
    noeud_courant = marge.pop()
    if noeud_courant is None:
        raise ValueError("la grille n'a pas de solution")
    if noeud_courant == grid.out:
        break # chemin optimal trouvé
    # ... traiter noeud courant
```

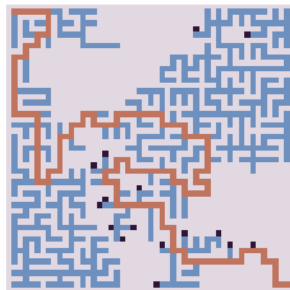
la suite dans : https://github.com/Dalker/ASD_labyrinthe/

Tests avec Python

A* with null heuristic



A* with Manhattan heuristic



Tests avec Python

```
* Comparaison heuristique nulle vs Manhattan distance *  
solveur1 = heuristique 0, solveur2 = heuristique Manhattan  
30x30 : generate=0.1019s solve1=0.0060s solve2=0.0022s  
40x40 : generate=0.1814s solve1=0.0096s solve2=0.0086s  
50x50 : generate=0.5002s solve1=0.0228s solve2=0.0204s  
60x60 : generate=0.8701s solve1=0.0280s solve2=0.0199s  
70x70 : generate=1.0461s solve1=0.0451s solve2=0.0391s  
80x80 : generate=1.4218s solve1=0.0563s solve2=0.0423s
```

Conclusion

- ...
- Robot-Aspirateur

Références

- Liste des sources consultées :
`https://github.com/Dalker/ASD_labyrinthe/wiki/Sources`
- Notre implémentation en Python, avec tests temporels et “tests visuels” (animations) :
`https://github.com/Dalker/ASD_labyrinthe/tree/main/implementation`