Task03

常见分布与假设检验

By **99-华广学习小队-段秋阳**

2020.06.27

1 一般随机变量

离散型随机变量，连续型随机变量

连续型随机变量的概率密度函数：

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$$

2 常见分布

2.1 离散型分布

2.1.1 二项分布

n次伯努利试验产生的结果的概率分布

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

2.1.2 泊松分布

$\boxed{P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}$

2.1.3 几何分布

经过 k 次实验首次成功的概率：

$\boxed{p\{X=n\}=(1-p)^{n-1}p}$

2.1.4 负二项分布

实验一直进行到成功 r 次的概率：

$\boxed{P\{X=n\}=C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}}$

2.1.5 超几何分布

$\boxed{P\{X=n\}=\frac{C_k^x C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}}$

2.2 连续型分布

2.2.1 均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & others\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

2.2.2 正态分布

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$$

2.2.3 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$F(x)=P\{X\le x\}=1-e^{-\lambda x}$$

指数分布的无记忆性：

$$P\{X>s+t|X>t\}=P\{X>s\}$$

3 假设检验

3.1 正态总体的样本均值与样本方差的分布

3.1.1 单个正态总体

样本均值的分布：

$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2), \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

样本方差的分布：

$\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n), \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i-1}^{n}(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n-1)$

3.1.2 两个正态总体

$S_{XY}^2 = \frac{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}$

样本均值差的抽样分布：

$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}), \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$

样本方差比的抽样分布：

$F = \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

特别地，当$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$时，

$T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_{XY}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

$$W=\frac{(n_1+n_2-2)S_{XY}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$

有了这些分布之后，就可以在此基础上进行区间估计和假设检验