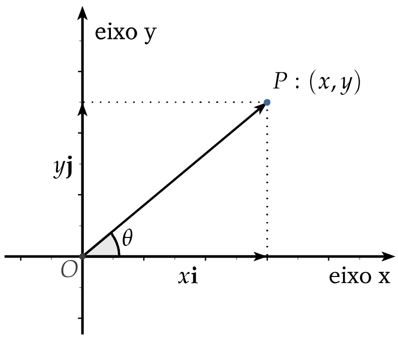
Semana 6 - Material de Apoio

2.2 BASES ORTONORMAIS E COORDENADAS CARTESIANAS



Vamos agora explorar algumas das vantagens de se trabalhar com as chamadas *bases ortonormais* ou, mais geralmente, com *sistemas de coordenadas cartesianas*.

Lembrando, uma base é dita ortonormal se seus vetores são unitários (possuem norma 1) e perpendiculares dois a dois. Um sistema de coordenadas formado por uma base ortonormal é chamado de sistemas de coordenadas cartesianas. A partir deste ponto vamos fixar notação e utilizar $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ para denotar uma base ortonormal para o plano, e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ para o espaço.

Seja $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ uma base ortonormal para $\mathbb{V}^2$, O um ponto no plano e $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$ o sistema de coordenadas cartesianas determinado por eles. Dado agora um ponto P no plano considere o vetor $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ e sua representação no sistema Σ dada por $\mathbf{r} : (x, y)$, ou seja:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Como a base considerada é ortonormal, segue diretamente do Teorema de Pitágoras que

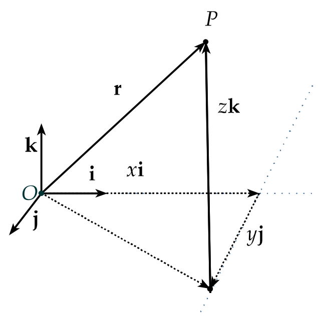
$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\|^2 &= \|x\mathbf{i}\|^2 + \|y\mathbf{j}\|^2 \\ &= x^2 \|\mathbf{i}\|^2 + y^2 \|\mathbf{j}\|^2 \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Assim, se denotarmos por r o tamanho do vetor $\mathbf{r}$ temos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A mesma ideia pode ser levada para o espaço, onde obtemos que se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, então

$$r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Voltemos por momento para o caso planar e denote por θ o ângulo entre o eixo OX e o vetor $\mathbf{r}$. Neste caso, não é difícil ver que

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos também que a distância entre os pontos $P : (a_1, a_2)$ e $Q : (b_1, b_2)$ é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Texto editado da apostila Geometria Analítica e Vetorial, de Miranda et al. O texto completo pode ser baixado no site da UFABC ou em nossa biblioteca do Moodle.

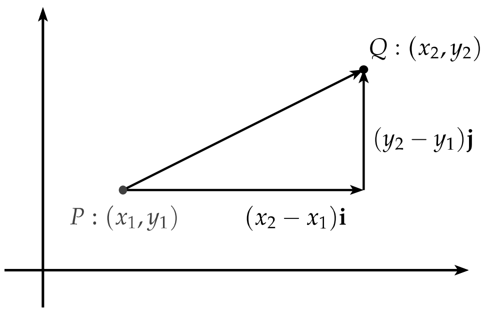


Figura 2.3: Distância entre dois pontos no plano.

E no caso tridimensional distância entre os pontos $P : (a_1, a_2, a_3)$ e $Q : (b_1, b_2, b_3)$ é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Observação 2.11 *É importante observar que para realizarmos os cálculos acima foi absolutamente necessário que o sistema de coordenadas considerado fosse cartesiano. Podemos calcular as mesmas quantidades utilizando outros sistemas, mas as expressões ficam diferentes e muito mais complicadas.*

Exemplo 2.12 Suponha fixado um sistema de coordenadas cartesiano. Calcule a distância

dos pontos $A : (1, 0, 2)$ e $B : (3, 2, 1)$.

Solução: Temos que $d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}||$. Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2, -1)$, segue que:

$$d(A, B) = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

$\square$

2.3 PRODUTO ESCALAR: ÂNGULO ENTRE DOIS VETORES

Em toda geometria é de fundamental importância a medição e manipulação de ângulos. Veremos que, além de diversas outras aplicações, ângulos entre vetores (ou entre vetores e retas) podem ser usados na definição de uma nova forma de representar pontos do espaço Euclidiano (coordenadas polares). Surge então a pergunta: como podemos utilizar os sistemas de coordenadas para determinar o ângulo entre dois vetores **u** e **v**?

Conforme já vimos no ínicio do Capítulo 1, entendemos por ângulo entre dois vetores **u** e **v** o ângulo θ, com $0 \leq \theta \leq \pi$, formado por representantes de **u** e **v** com mesma origem.

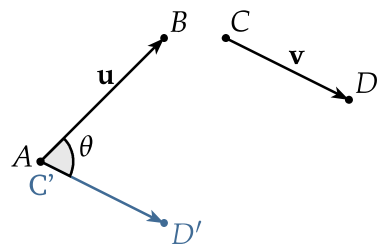


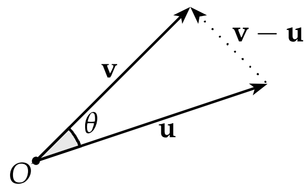
Figura 2.4: Ângulo entre **u** e **v**

O primeiro passo é escolher um sistema de coordenadas cartesiano $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$ com $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e escrever os vetores neste sistema, ou seja:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

Observe agora que pela lei dos cossenos

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos(\theta),$$



e portanto

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 =$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^3 + b_3^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,cos(\theta).$$

Assim

$$\cos(\theta) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Ao termo $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ daremos o nome de produto escalar de **u** por **v** e denotaremos por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Resumindo:

Definição 2.13 Se $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$ com $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ é um sistema de coordenadas cartesiano, $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$, então definimos o **produto escalar** (ou **produto interno**) de **u** e **v** como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Além disso vale:

Proposição 2.14 *Dados dois vetores* **u** *e* **v** *temos que:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta,$$

e assim o ângulo θ entre esses vetores satisfaz:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right).$$

Uma consequência imediata da definição de produto escalar é:

Proposição 2.15 *Dois vetores* **u** *e* **v** *são perpendiculares se e somente se* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Observação 2.16 Dado um vetor $\mathbf{v} = (x, y)$ num sistema cartesiano no plano, é interessante notar que o vetor $\mathbf{n} = (-y, x)$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e tem mesma norma de $\mathbf{v}$. Note:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= -xy + xy = 0 \\ \|\mathbf{n}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

De fato, veremos no Capítulo 9, Seção 9.3 que $\mathbf{n}_1 = (-y, x)$ é $\mathbf{v}$ rotacionado de $90°$ no sentido anti-horário, e $\mathbf{n}_2 = (y, -x)$ é $\mathbf{v}$ rotacionado de $90°$ no sentido horário.

Exemplo 2.17 Determine o ângulo entre $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solução:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow &\quad \theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60° \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.18 Mostre que os vetores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ são ortogonais.

Solução:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3, 4, 1) \cdot (2, -3, 6) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 = 6 - 12 + 6 = 0.$$

Logo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais.

□

Proposição 2.19 *O produto escalar possui as seguintes propriedades:*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Demonstração: Se $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ e $\mathbf{w} : (c_1, c_2, c_3)$

1. $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

2. $$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

3. $$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

4. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ então $\|\mathbf{u}\| = 0$ e consequentemente $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Reciprocamente, se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ temos $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$, e então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$.

5. A demonstração desse item é deixada como exercício ao leitor.

□

Exemplo 2.20 Num quadrado ABCD tem se $A = (3, -4)$ e $B = (5, 6)$. Quais são as coordenadas dos vetores C e D?

Solução 1: Denotando as coordenadas de C e D por $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$, temos que $\overrightarrow{AB} = (2, 10)$, $\overrightarrow{BC} = (c_1 - 5, c_2 - 6)$, $\overrightarrow{CD} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$ e $\overrightarrow{DA} = (d_1 - 3, d_2 + 4)$.

O vetor $\overrightarrow{BC}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AB}$ logo o produto escalar entre eles é nulo, ou seja,

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Isto implica que $2(c_1 - 5) + 10(c_2 - 6) = 0$, que simplificando resulta em

$$2c_1 + 10c_2 = 70 \tag{2.5}$$

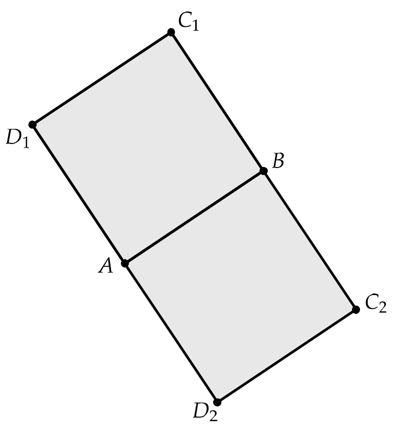


Figura 2.5: Quadrados de lado AB

Temos ainda que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{104}$, logo

$$(c_1 - 5)^2 + (c_2 - 6)^2 = 104 \tag{2.6}$$

Substituindo (2.5) em (2.6) teremos que $(c_2-6)^2 = 4$ e logo $c_2 = 8$ ou $c_2 = 4$

Quando $c_2 = 8$ por (2.5) $c_1 = -5$ e quando $c_2 = 4$ então $c_1 = 15$, ou seja, $C = (-5, 8)$ ou $C = (15, 4)$.

O cálculo de D é análogo. □

Solução 2: Uma segunda solução para o exemplo acima faz uso da Observação 2.16. Temos que $\overrightarrow{AB} = (2, 10)$ e daí, rotacionando $\overrightarrow{AB}$ de 90° no sentido anti-horário, temos $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (-10, 2)$. Logo:

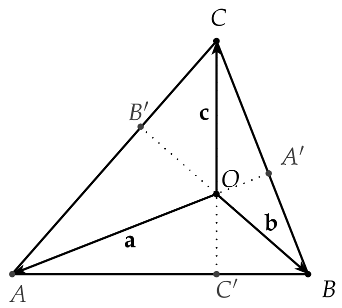
$$\begin{aligned} C &= B + \overrightarrow{BC} = (-5, 8) \\ D &= A + \overrightarrow{AD} = (-7, -2). \end{aligned}$$

Finalmente, se rotacionamos $\overrightarrow{AB}$ de 90° no sentido horário, temos $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (10, -2)$. Assim:

$$\begin{aligned} C &= B + \overrightarrow{BC} = (15, 4) \\ D &= A + \overrightarrow{AD} = (13, -6). \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.21 Mostre que as três alturas de um triângulo são concorrentes em único ponto.



Solução: Dado um triângulo ΔABC, então as alturas BB' e CC' se interceptam num ponto O. Sejam então os vetores: $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Como as retas OB e CA são perpendiculares:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = 0 \Rightarrow \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

De modo análogo, como as retas OC e AB são perpendiculares:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$$

E logo $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$, ou seja,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Desta forma a reta OA é perpendicular ao lado BC, sendo assim a altura relativa ao vértice A. Essa reta intercepta as outras alturas no ponto O, e assim as três retas se interceptam num único ponto, que é denominado **ortocentro** do triângulo ΔABC.

□

2.3.1 Projeção Ortogonal

Passemos agora a um novo problema. Dados dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$, com $\mathbf{u}$ não nulo, queremos decompor o vetor $\mathbf{v}$ em dois vetores $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ tais que $\mathbf{p}$ é paralelo a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{q}$ é perpendicular a u, ou seja, queremos encontrar $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ tais que

$$\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad \mathbf{p} = \lambda \mathbf{u} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

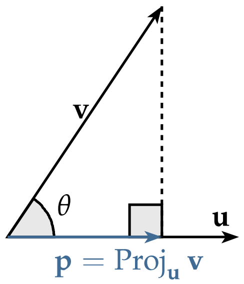


Figura 2.6: Projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$

Reescrevendo as condições acima temos que

$$(\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

e logo

$$(\mathbf{v} - \lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \lambda \|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{0}$$

Desta forma

$$\lambda = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

e

$$\mathbf{p} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \right) \mathbf{u}$$

Do mesmo modo podemos ver que o vetor $\mathbf{p}$ assim determinado é único. Tal vetor é chamado de projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ e é denotado por $\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$.

Demostramos assim o seguinte resultado.

Proposição 2.22 *Dado* $\mathbf{u}$ *um vetor não nulo, e* $\mathbf{v}$ *um vetor qualquer, então a projeção ortogonal* $\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$ *de* $\mathbf{v}$ *em* $\mathbf{u}$ *existe e é única:*

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\mathbf{u} \tag{2.7}$$

Observação 2.23 *Veja que um modo fácil de lembrar da projeção é observar a Figura 2.6 e ver que esta é um vetor* $\mathbf{p}$ *tal que seu comprimento obedece:*

$$\|\mathbf{p}\| = (\|\mathbf{v}\|\cos\theta) = \left(\frac{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta}{\|\mathbf{u}\|}\right) = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}\right),$$

e tem mesma direção e sentido que $\mathbf{u}$*, donde temos:*

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}\right)\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right) = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\mathbf{u}.$$

Note também que o vetor $\mathbf{p} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$ *não depende do comprimento de* $\mathbf{u}$*. Tal fato encontra-se expresso no lado direito da Equação 2.7 se observamos que o vetor* $\mathbf{u}$ *aparece duas vezes no seu numerador e "ao quadrado" no denominador.*

Exemplo 2.24 Determine a área do triângulo $\triangle ABC$ cujos vértices num sistema de coordenadas cartesiano são $A = (1,2)$, $B = (3,1)$ e $C = (2,5)$

Solução: Temos que $\overrightarrow{AB} = (2,-1)$ e $\overrightarrow{AC} = (1,3)$. Além disso, $\mathbf{n} = (1,2)$ é um vetor ortogonal a $\overrightarrow{AB}$.

A área do triângulo $\triangle ABC$ é dada por:

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|h,$$

onde $h = \|\mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\,\overrightarrow{AC}\| = \dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$, é a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao lado AB.

Como $\|\mathbf{n}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$, temos que $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\cdot\mathbf{n}|$. Logo:

$$S = \left(\frac{1}{2}\right)|1+6| = \frac{7}{2}.$$

$\square$

2.4 PRODUTO VETORIAL: VETOR PERPENDICULAR A DOIS VETORES DADOS

Voltemos nossa atenção agora para um novo problema: dado dois vetores não paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como podemos encontrar um novo vetor $\mathbf{w}$ perpendicular aos dois vetores dados? Note que, ao contrário do que ocorre com a projeção, este problema não possui uma única solução. De fato, se encontrarmos um vetor $\mathbf{w}$ satisfazendo as condições acima, qualquer vetor $\lambda\mathbf{w}$ também satisfará.

Passemos à solução. Como sempre, tomemos primeiro uma base ortonormal $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e façamos $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Vamos denotar por $\mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor que queremos determinar. Como queremos que o vetor $\mathbf{w}$ seja perpendicular aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, precisamos então que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$ e que $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Temos assim o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = -a_3z \\ b_1x + b_2y = -b_3z \end{cases}$$

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, pelo exercício 1.14, podemos supor sem perda de generalidade que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

e, usando a regra de Cramer, concluímos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_3z & a_2 \\ -b_3z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z\frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3z \\ b_1 & -b_3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

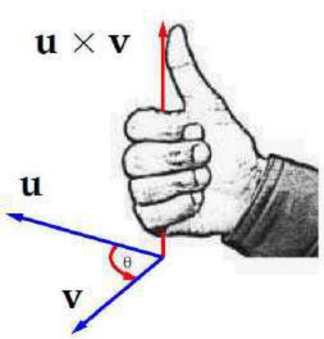
Escolhendo

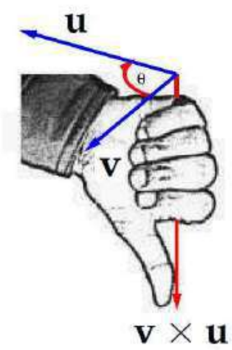
$$z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

temos que

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Motivados pelos cálculos acima, definimos:





A orientação de **u** x **v** é dada pela regra da mão direita como ilustrado ao lado. Repare que trocar a ordem do produto vetorial significa mudar a orientação de **w**.

Definição 2.25 O produto vetorial de $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ (num sistema de coordenadas cartesiano), denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, é o vetor obtido pelo seguinte determinante formal:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Antes de continuar apresentaremos algumas propriedades do produto vetorial.

Teorema 2.26 *Dados os vetores* $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$ *e* $\mathbf{w} = (c_1, c_2, c_3)$ *o produto vetorial possui as seguintes propriedades:*

1. *Anti-simetria* $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{u}$
2. *Distributiva:* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$
3. *Produto misto* $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
4. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2$
5. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}(\theta)$, *onde* θ *é o ângulo entre os vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

Demonstração: A demonstração dos três primeiros itens é direta e será deixada como exercícios:

Para demonstrarmos a quarta propriedade basta observar que

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 = \\
&= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)^2 \\
&= \left(a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2\right) \\
&- a_1^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 - a_2^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 - a_3^2 b_3^2 \\
&= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_1^2 + \\
&a_3^2 b_2^2 \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right)^2 + \left(a_1 b_3 - a_3 b_1\right)^2 + a_1 b_2 - a_2 b_1 \\
&= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2.
\end{aligned}$$

A quinta propriedade decorre facilmente da anterior, bastando para isso lembrar que

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \cos^2(\theta)$$

e portanto

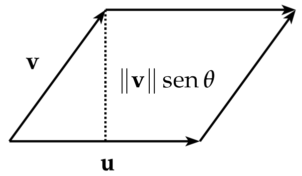
$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \left(1 - \cos^2(\theta)\right) = \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \operatorname{sen}^2(\theta)\end{aligned}$$

$\square$

Vamos agora explorar algumas consequências geométricas do produto vetorial.

2.4.1 Área de um Paralelogramo e de um Triângulo

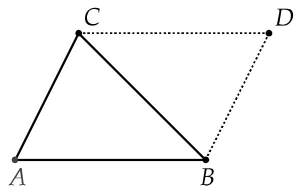
Primeiro considere o paralelogramo determinado por dois vetores não paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, como na figura abaixo



A altura do paralelogramo é dada por $\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}(\theta)$ e portanto, da propriedade 5 do produto vetorial, concluímos facilmente que sua área é dada por $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}(\theta) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Em resumo, mostramos que a área do paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é igual ao comprimento do produto vetorial destes vetores.

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

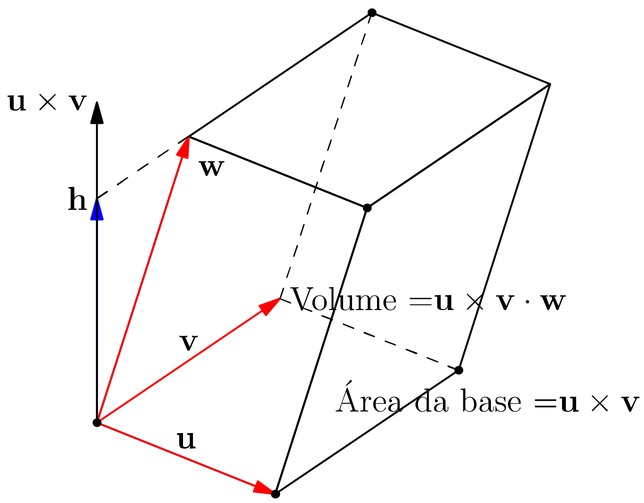
A partir da expressão anterior podemos encontrar uma expressão para a área de um triângulo ΔABC. Para isso considere o paralelogramo determinado pelos vetores AB e BC, como na figura abaixo. A diagonal BC desse paralelogramo divide este em dois triângulos de áreas iguais. Logo a área do triângulo será metade da área do paralelogramo:



$$A = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \right\|$$

2.4.2 Volume de um Paralelepípedo

A seguir vamos calcular o volume de um paralelepípedo, em função dos vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$.



Sabemos que o volume do paralelepípedo é dado pelo produto $V = A_b h$ da área A_b da base pela altura h. Como já vimos a área da base pode ser calculada por $A_b = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Já a altura é dada pela norma da projeção do vetor $\mathbf{w}$ sobre o vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Como

$$\text{Proj}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\, \mathbf{w} = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}),$$

segue que

$$\begin{aligned} \left\|\text{Proj}_{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\, \mathbf{w}\right\| &= \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \\ &= \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}. \end{aligned}$$

Segue portanto que

$$V = A_b h = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|.$$

Exemplo 2.27 Sejam $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ pontos no plano. Então a área

do $\triangle ABC$ é dada por

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Demonstração: Considere os vetores **a**, **b** e **c** de coordenadas $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 1)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 1)$ e $\mathbf{c} = (c_1, c_2, 1)$.

É fácil ver que eles são arestas de um tetraedro de altura 1 que tem como base um triângulo congruente ao triângulo $\triangle ABC$. Se $S_{\triangle ABC}$ é a área do triângulo $\triangle ABC$, o volume V_T desse tetraedro é:

$$V_T = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}. \tag{2.8}$$

Por outro lado, temos que, se V_P é o volume do paralelepípedo de arestas **a**, **b** e **c**, também vale:

$$V_T = \frac{1}{6} V_P. \tag{2.9}$$

Igualando as equações (2.8) e (2.9) segue:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} V_P = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

□

O resultado anterior nos dá um critério simples para que três pontos no plano sejam colineares.

Proposição 2.28 *Sejam $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$ pontos no plano. Então eles são colineares se a área do triângulo formado por eles for zero, ou seja se:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$