Semana 5 - Material de Apoio

1 ESTRUTURA VETORIAL DO PLANO E DO ESPAÇO

"Meça o que for mensurável, e torne mensurável o que não o for."
Galileu Galilei

Texto editado da apostila Geometria Analítica e Vetorial, de Miranda et al. O texto completo pode ser baixado no site da UFABC ou em nossa biblioteca Moodle.

1.1 DEFINIÇÕES ELEMENTARES

Como veremos ao longo desse texto, a utilização da linguagem vetorial permite uma descrição elegante e unificada dos principais resultados da geometria Euclideana bem como possibilita uma transição natural da formulação axiomática para a descrição analítica (em coordenadas) dessa mesma geometria.

Nesse capítulo, daremos o primeiro passo nessa caminhada e apresentaremos o básico da linguagem vetorial. Antes porém, no intuito de motivar, começaremos entendendo um pouco do papel fundamental que os vetores desempenham nas ciências naturais.

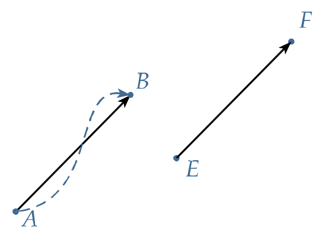


Figure 1.1: Todos os três caminhos ligando dois pontos correspondem ao mesmo deslocamento.

Para entendermos o papel que os vetores desempenham nas ciências, começamos observando que, por um lado, diversas grandezas físicas ficam completamente determinadas por um único valor (um número real), num sistema de unidades. Assim por exemplo o volume de um corpo fica especificado quando dizemos quantos metros cúbicos esse corpo ocupa, bem como a massa, a temperatura, a carga elétrica, a energia, etc. Grandezas que ficam determinadas por um único valor real são denominadas **grandezas escalares**.

Por outro lado, diversas grandezas físicas exigem para sua completa determinação, além de uma valor numérico o conhecimento de sua direção orientada. Tais grandezas são denominadas grandezas vetoriais ou simplesmente vetores.

O exemplo mais simples e ilustrativo é o deslocamento de um corpo. Se um corpo se move do ponto A para o ponto B, dizemos que ela sofreu um deslocamento de A para B. Para sabermos precisamente o deslocamento de um corpo precisamos conhecer o quanto o ele se deslocou (a intensidade do deslocamento) mas também em que direção ele se deslocou. Pelas mesmas razões apresentadas serão grandezas vetoriais: a velocidade, a aceleração, a quantidade de movimento, a força e o torque.

É importante que observemos que para as grandezas escalares uma parte significativa da utilidade de medi-las, i.e, associar um número provém da riqueza de estruturas dos números: os números podem ser somados, subtraídos, comparados, etc.

Para que as grandezas descritas vetorialmente sejam úteis (tanto para a ciência como para a própria geometria) temos que construir no conjunto dos vetores estruturas análogas. Assim, neste e no próximo capítulo, descreveremos e construiremos diversas operações vetoriais e suas interpretações.

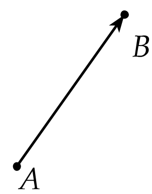
Como boa parte da construção dos vetores e de suas operações que faremos neste texto será de natureza primordialmente geométrica, assumiremos que o leitor conhece os principais conceitos e resultados da geometria Euclideana plana e espacial. Em particular suporemos conhecidos os conceitos de ângulos, retas, planos, comprimento de segmentos, distância de dois pontos, etc.

Notação 1.1 *De modo a fixar notação, ao longo deste texto denotaremos por $\mathbb{E}^3$ o espaço euclideano tridimensional e por $\mathbb{E}^2$ o plano euclideano, usaremos letras latinas maiúsculas, A, B, etc. para representar pontos, letras latinas minúsculas r, s, etc. para indicar retas, as letras gregas minúsculas π, θ, etc. para denotar planos. Eventualmente usaremos letras latinas ou gregas minúsculas também para denotar denotar números reais (escalares ou parâmetros de equações). Nesse caso, o contexto deve deixar claro a que a letra se refere.*

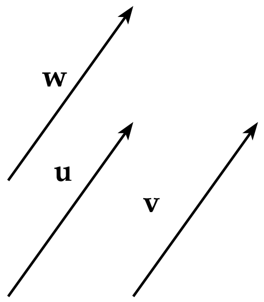
Para tornarmos clara a definição de vetor, começaremos com um termo relacionado: os vetores aplicados.

Definição 1.2 Um **vetor aplicado** ou **segmento orientado** é um par ordenado de pontos do espaço Euclideano, ou, de modo equivalente, um segmento de reta no qual se escolheu um dos extremos A, como ponto inicial. Nesse caso o outro extremo B do segmento será denominado ponto final e o vetor aplicado com ponto inicial A e final B será denotado por $\overline{AB}$. Para nossas considerações um ponto A é considerado um segmento que denominaremos **segmento nulo**. Esse segmento será denotado por $\overline{AA}$ ou por $\overline{0}$.

O comprimento do um segmento $\overline{AB}$ será denotado por $\left|\overline{AB}\right|$ e será denominado também tamanho, intensidade, magnitude ou norma do vetor.



Os vetores aplicados servem apenas parcialmente ao propósito de representar grandezas que possuem intensidade, direção e sentido, pois apesar de podemos representar grandezas com esses atributos como vetores aplicados, essa representação não é única. Ou seja, existem vários vetores aplicados com pontos iniciais e finais distintos, mas que possuem intensidade, direção e sentido iguais. Para eliminarmos esse problema, identificaremos, i.e, diremos que são iguais, todos esses vetores. Assim diremos que dois **vetores aplicados** são **equivalentes** (ou **equipolentes**) se e somente se, possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido ou ainda se ambos são nulos.



$$\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

Uma identificação análoga, ocorre com as frações: duas frações podem ter numeradores e denominadores diferentes e mesmo assim diremos que elas são iguais (ou equivalentes) pois representam a mesma grandeza.

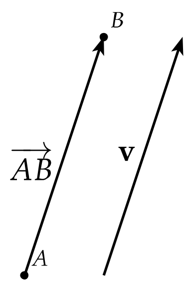
Quando identificamos os vetores aplicados equivalentes obtemos **vetores livres** ou simplesmente **vetores**.

Definição 1.3 O conjunto de todos os vetores aplicados que possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido é dito **vetor**.

É fundamental observar que dado um vetor podemos escolher livremente "o ponto onde inicia tal vetor", ou seja, dado um vetor e um ponto podemos escolher um vetor aplicado que inicia nesse ponto e que possui a mesma intensidade, direção e sentido do vetor. Cada vetor aplicado com a mesma direção, sentido e comprimento do vetor, é dita ser um **representante do vetor**.

É importante que fique clara a seguinte diferença: se por um lado vetores aplicados ficam bem definidos pela escolha de direção, sentido, comprimento e **origem**, por outro, vetores precisam *apenas* de direção, sentido e comprimento. Isso significa que consideramos *equivalentes* segmentos orientados que são paralelos, apontam no mesmo sentido e tem o mesmo comprimento, mas consideramos *iguais* vetores paralelos, de mesmo sentido e com mesmo comprimento.

O vetor cujos representantes são segmentos orientado nulos, ou seja com pontos iniciais e finais coincidentes será denominado **vetor nulo**. O vetor nulo será denotado por $\overrightarrow{AA}$ ou por $\mathbf{0}$.



Denotaremos os vetores utilizando fontes minúsculas em negrito $\mathbf{a}$, através de uma flecha superior: $\overrightarrow{a}$ ou ainda no caso em que tivermos dois pontos A e B, denotaremos por $\overrightarrow{AB}$ o vetor que tem como representante o vetor aplicado $\overline{AB}$. Graficamente vetores são representados como flechas, no qual a ponta da flecha aponta no sentido do vetor.

Dado um vetor e um segmento que o representa, teremos que a direção do vetor é a direção desse segmento, o sentido vem de termos escolhido uma orientação no segmento, ou seja de termos escolhido um ponto inicial e final e o comprimento de um vetor é o comprimento do segmento que o representa.

Como consequência dos axiomas de congruência da geometria Euclideana, temos que dado um segmento (ou um representante de um vetor) e um ponto podemos construir um segmento paralelo e de mesmo comprimento iniciando em A. Se denotarmos por B o ponto final desse segmento, então teremos provado o seguinte resultado.

Proposição 1.4 *Dados um vetor* $\mathbf{v}$ *e um ponto* A*, existe um único ponto* B *tal que o vetor aplicado* $\overline{AB}$ *é representante de* $\mathbf{v}$*, ou seja, tal que* $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$.

O comprimento de um vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ será também denominado **norma** do vetor e será denotado por $\|\mathbf{v}\|$ ou ainda por $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Notação 1.5 *O conjunto de todos os vetores de* $\mathbb{E}^3$ *será denotado por* $\mathbb{V}^3$*. De modo análogo, denotaremos por* $\mathbb{V}^2$ *o conjunto de vetores associados a* $\mathbb{E}^2$*, i.e. classe de equivalência de segmentos de retas no plano.*

De modo geral, conceitos envolvendo vetores são definidos utilizando seus representantes. Nesse espírito temos as seguintes definições:

Diremos que dois vetores são **paralelos** quando seus representantes tiverem a mesma direção ou quando um desses vetores for o vetor nulo $\mathbf{0}$. O termo vetores paralelos inclui o caso especial onde os vetores estão sobre a mesma reta ou mesmo o caso em que coincidem. Como consequência da definição anterior temos que o vetor nulo é paralelo a todo vetor e também que todo vetor é paralelo a si mesmo.

Diremos que um conjunto de vetores são **coplanares** se esses vetores possuem representantes contidos no mesmo plano.

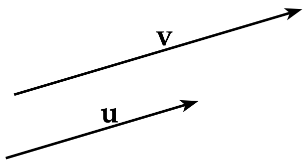


Figure 1.2: Vetores paralelos.

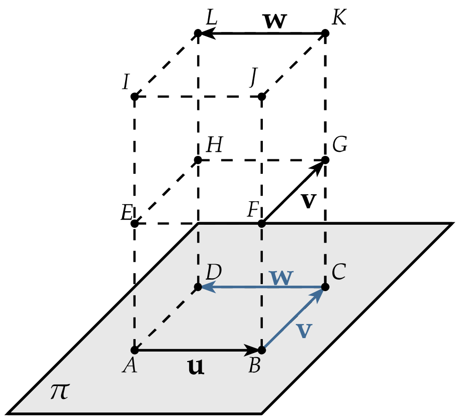


Figure 1.3: **u**, **v** e **w** são coplanares.

Definimos o **ângulo entre dois vetores u** e **v** como o ângulo θ (com θ satisfazendo $0 \leq \theta \leq \pi$) entre representantes $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de **u** e **v**, respectivamente, com mesma origem.

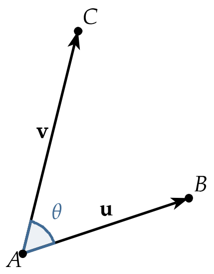


Figure 1.4: Ângulo entre vetores

Finalmente, dois vetores **u** e **v** são ditos **ortogonais**, se um dos vetores for o vetor nulo, ou se ao escolhermos dois representantes para esses vetores que iniciam no mesmo ponto, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ esses segmentos forem ortogonais, ou seja, se o ângulo determinado por esses segmentos for um ângulo reto.

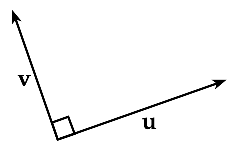


Figure 1.5: Vetores ortogonais

Observação 1.6 Note que, segundo nossa definição, o vetor nulo $\mathbf{0}$ é o único vetor paralelo e ortogonal a qualquer outro vetor, e coplanar a qualquer par de vetores.

1.1.1 Operações com Vetores

Por tradição, grandezas que possuem apenas magnitude, ou seja, grandezas que são representadas por números reais são denominadas grandezas escalares. Seguindo essa tradição denominamos um número real λ de **escalar** .

Vamos definir duas operações envolvendo vetores: a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

Definição 1.7 Multiplicação por Escalar: Dado um vetor $\mathbf{v}$ e um escalar λ podemos realizar a multiplicação de λ e $\mathbf{v}$ obtendo o vetor $\lambda\mathbf{v}$ definido do seguinte modo:

- Se o vetor $\mathbf{v}$ é nulo ou o escalar λ é zero então $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Se $\lambda > 0$, o vetor $\lambda\mathbf{v}$ é o vetor com o mesmo sentido, mesma direção e com comprimento $|\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$.
- Se $\lambda < 0$ então o vetor $\lambda\mathbf{v}$ tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor $\mathbf{v}$ e comprimento $|\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$.

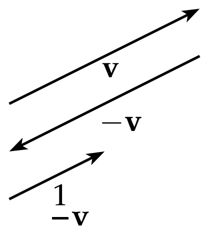


Figure 1.6: Multiplicação de um vetor por um escalar.

Observação 1.8 Dados um vetor $\mathbf{v}$ e um escalar λ denotaremos usualmente o vetor $\left(\frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{v}$ por $\left(\frac{\mathbf{v}}{\lambda}\right)$. A equação anterior pode ser vista como uma definição da divisão de um vetor por um escalar.

Um vetor de comprimento 1 é denominado **vetor unitário**. Dado um vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, temos que o vetor:

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

é unitário e possui a mesma direção e sentido que $\mathbf{v}$ e é denominado **versor** associado à $\mathbf{v}$. Para maiores detalhes veja exercício 1.11.

Um termo que usaremos ocasionalmente é o de **vetor direcional** ou **vetor diretor**. Muito frequentemente estaremos interessados apenas na direção de um vetor e não no seu tamanho. Por exemplo, como veremos posteriormente, uma reta é completamente determinada por um ponto P e um vetor $\mathbf{v}$. Nesse caso o tamanho de $\mathbf{v}$ não é importante e podemos multiplica-lo livremente por um escalar.

Através da multiplicação de vetores por escalares podemos dar uma caracterização algébrica para o paralelismo de vetores:

Teorema 1.9 *Se dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ então $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Iremos considerar primeiramente o caso em que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm mesmo sentido. Neste caso, visto que $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, podemos escolher

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Com essa escolha, provaremos que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos, $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem a mesma direção. E como estamos assumindo que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ possuem o mesmo sentido e como λ é maior que zero então pela definição de multiplicação por escalares $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem o mesmo sentido. Finalmente

$$\|\lambda\mathbf{v}\| = \lambda\|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|$$

O que prova que eles tem o mesmo comprimento. Logo, como os vetores $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem mesma direção, sentido e comprimento eles são iguais.

A demonstração do caso em que $\mathbf{u}$ e $\lambda\mathbf{v}$ possuem direção contrária é análoga, porém nesse caso escolhendo $\lambda = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$. $\square$

Proposição 1.10 *Dois vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *são paralelos se e somente se* $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbf{v} = \theta \mathbf{u}$ *para algum* $\theta \in \mathbb{R}$.

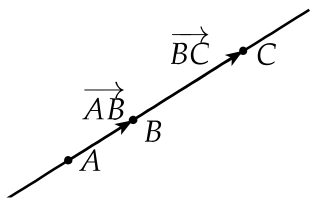
Demonstração: Suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos.

Caso $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, pelo teorema acima, temos que $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Caso contrário, i.e., se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ então $\mathbf{v} = \theta \mathbf{u}$ para $\theta = 0$.

A implicação contrária segue da definição de multiplicação de um vetor por um escalar. Se $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta \mathbf{u}$ então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm mesma direção, ou seja, são paralelos. □

E como consequência do corolário anterior temos:

Teorema 1.11 *Três pontos* A, B, C *pertencem a mesma reta se e somente se* $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$ *ou* $\overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$.



Demonstração: Claramente se A, B, C pertencem a mesma reta então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são paralelos e consequentemente pelo corolário acima temos:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$$

Se $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$, então pelo corolário anterior os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. Consequentemente são paralelas as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$. Mas como o ponto B pertence a ambas as retas, essas são coincidentes, i.e., os pontos A, B, C pertencem a mesma reta. □

Definição 1.12 Soma de vetores Dois ou mais vetores podem ser somados do seguinte modo: a soma, $\mathbf{v} + \mathbf{u}$, de dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ é determinada da seguinte forma: A partir de um segmento orientado $\overline{AB}$, representante arbitrário de $\mathbf{v}$, tome um segmento orientado $\overline{BC}$ que representa $\mathbf{u}$, i.e., tome um representante de $\mathbf{u}$ com origem na extremidade final do representante de $\mathbf{v}$, desta forma o vetor $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ é definido como o vetor representado pelo segmento orientado $\overline{AC}$, ou seja, pelo segmento que vai da origem do representante de $\mathbf{v}$ até a extremidade final do representante de $\mathbf{u}$.

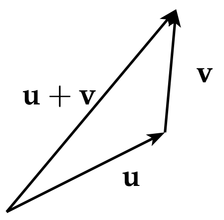


Figure 1.7: Soma de Vetores

A soma de vetores também pode ser feita através da **regra do paralelogramo**. Para somar dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ através dessa regra tomamos representantes desses vetores que começam num ponto comum O, como na figura 1.8. Então, a partir do ponto final de cada vetor traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se interceptam no ponto P. E logo um paralelogramo é formado. O vetor diagonal $\overrightarrow{OP}$ é a soma dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$. O vetor $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ obtido por esse método é o mesmo que o obtido pelo método anterior, pois o segmento $\overline{OP}$ divide o paralelogramo em triângulos congruentes que representam a soma dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$.

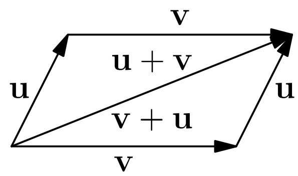


Figure 1.8: Regra do paralelogramo.

Pela definição da soma de vetores, temos que em geral o comprimento de $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ é diferente da soma dos comprimento dos vetores $\mathbf{u}$ $\mathbf{v}$, i.e.,

$$\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \neq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Para determinarmos o comprimento de $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ podemos utilizar a lei dos cossenos para o triângulo da figura:

Considerando γ o ângulo indicado na Figura 1.9, pela Lei dos Cossenos temos:

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\gamma} \tag{1.1}$$

Considerando, α, β e γ os ângulos indicados na Figura 1.9, pela Lei dos Senos segue:

$$\frac{|\mathbf{w}|}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{|\mathbf{u}|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{|\mathbf{v}|}{\operatorname{sen}\beta} \tag{1.2}$$

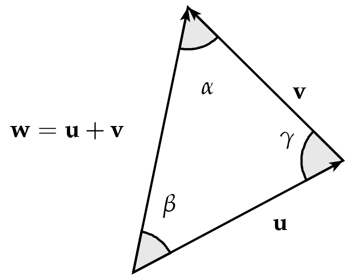


Figure 1.9: comprimento e direção de $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

As equações 1.1 e 1.2 são a formulação vetorial das Leis dos Cossenos e dos Senos respectivamente.

Observação 1.13 Note que o ângulo γ representado na Figura 1.9 é na verdade o suplementar do ângulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Notamos que, como $-1 \leq \cos\gamma \leq 1$, um resultado imediato de (1.1) é:

Teorema 1.14 (Desigualdade Triangular) *Dados dois vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *temos que:*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \tag{1.3}$$

Além disso, vale a igualdade de (1.3) *se e somente se os vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *tiverem mesma direção e sentido.*

Observamos também que, a partir da definição de soma vetorial, é fácil ver que $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{v} = \mathbf{v}$, ou seja, o vetor nulo é um elemento neutro para a adição. Mais, podemos definir o vetor oposto a um vetor dado. Para isso consideremos a seguinte propriedade, cuja demonstração deixamos como exercício (1.7):

Para cada vetor $\mathbf{u}$ *existe um único vetor* $-\mathbf{u}$ *tal que* $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

O vetor $-\mathbf{u}$ é denominado como o **vetor oposto** de $\mathbf{u}$ e é o vetor com o mesmo comprimento e direção de $\mathbf{u}$, mas com sentido oposto.

A partir do vetor oposto podemos definir **subtração de vetores**: , definimos a subtração $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ como a soma do vetor $\mathbf{v}$ com o vetor $-\mathbf{u}$.

De modo equivalente podemos definir o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ como o o vetor que adicionado a $\mathbf{u}$ dá o vetor $\mathbf{v}$. Consequentemente, se representarmos os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ começando no mesmo ponto, o vetor $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ será o vetor que liga a extremidade final de $\mathbf{u}$ a extremidade final de $\mathbf{v}$ (vide figura 1.11).

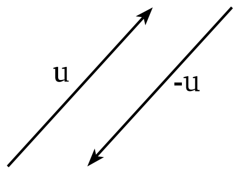


Figure 1.10: Vetor oposto.

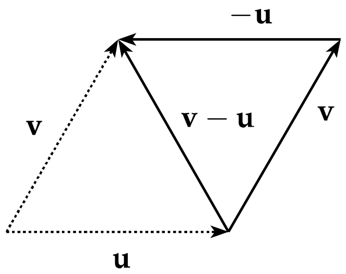
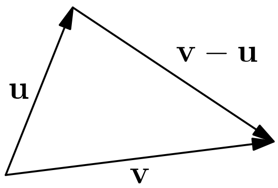


Figure 1.11: Subtração de Vetores



Uma observação importante é que sempre que os vetores formam um polígono fechado, como a figura abaixo, sua soma é nula: Como um caso especial dessa regra é a soma de um vetor com seu oposto, i.e., $\mathbf{v}+(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

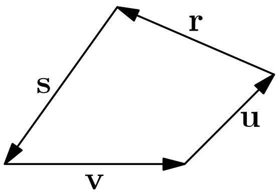


Figure 1.12: A soma de vetores que formam um polígono fechado é nula: $\mathbf{v}+\mathbf{u}+\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{0}$

As seguintes propriedades da soma e multiplicação de vetores devem ser evidentes:

Proposição 1.15 *Sejam* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *vetores e* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *escalares. As operações com vetores possuem as seguintes propriedades:*

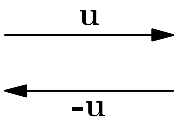
Propriedades da soma:

S1. Propriedade Comutativa: $\mathbf{v}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$

S2. Propriedades associativa: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

S3. Elemento Neutro: $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

S4. Elemento oposto: Para cada vetor $\mathbf{u}$ existe um único vetor $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$



Propriedades da multiplicação de vetor por escalar:

M1. Propriedade distributiva de escalares em relação aos vetores: $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}$

M2. Multiplicação por zero $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$

M3. Associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}=\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$

M4. Distributiva dos vetores em relação aos escalares $(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{u}$

M5. Elemento neutro multiplicativo $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Demonstração: Esboçaremos a demonstração de algumas dessas propriedades:

A propriedade comutativa segue da regra do paralelogramo para a adição dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, veja a figura 1.13. A diagonal é simultaneamente os vetores $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

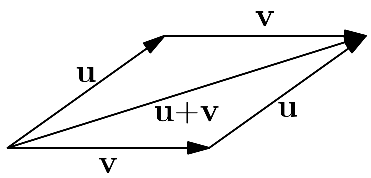


Figure 1.13: Propriedade Comutativa da Soma

A propriedade associativa segue de imediato do fato que quando três vetores são adicionados, o mesmo vetor fecha o polígono, como na figura 1.14.

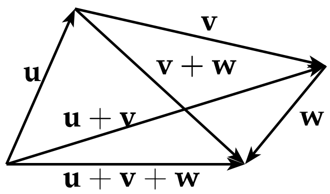


Figure 1.14: Propriedade Associativa da Soma

As propriedades S3 e S4 são deixadas como exercício ao leitor.

A propriedade M1 segue de modo simples a partir da regra do paralelogramo. Deixamos os detalhes a cargo do leitor. M2 e M5 são resultados imediatos da definição de multiplicação de vetor por escalar.

Para demonstrarmos a propriedade M3, i.e., a associatividade da multiplicação por escalares $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ observamos inicialmente que os vetores $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ possuem a mesma direção e sentido independentemente do sinal de λ_1 e λ_2 (terão o mesmo sentido de $\mathbf{u}$ se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, e sentido oposto a $\mathbf{u}$ se λ_1 e λ_2 tiverem sinais contrários).

Além disso, os comprimentos de $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})$ são os mesmos pois:

$$\|\lambda_1(\lambda_2\mathbf{u})\| = |\lambda_1| \cdot \|\lambda_2\mathbf{u}\| = |\lambda_1| \cdot (|\lambda_2|\,\|\mathbf{u}\|) = |\lambda_1\lambda_2| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{u}\|.$$

A propriedade M4, i.e, a distributiva dos vetores em relação aos escalares

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u},$$

segue da observação de que a direção e o sentido dos vetores $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}$ e $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}$ é a mesma. Esse fato é claro se λ_1 e λ_2 tiverem o mesmo sinal, ou se $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, no outros casos o sentido é determinado pelo escalar de maior módulo $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$.

Se o sinal de λ_1 e λ_2 forem o mesmo, teremos que

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}\| = |(\lambda_1 + \lambda_2)|\,\|\mathbf{u}\| = (|\lambda_1| + |\lambda_2|)\|\mathbf{u}\| = \|\lambda_1\mathbf{u}\| + \|\lambda_2\mathbf{u}\|.$$

Pela definição de adição de vetores é fácil ver que a soma de dois vetores de mesmo sentido é um vetor também de mesmo sentido e com o comprimento igual a soma do comprimento dos vetores somados. Daí temos:

$$\|\lambda_1\mathbf{u}\| + \|\lambda_2\mathbf{u}\| = \|\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}\|.$$

Por outro lado, caso os sinais de λ_1 e λ_2 sejam contrários, teremos:

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}\| = \big|(\lambda_1 + \lambda_2)\big|\|\mathbf{u}\| = \big|\,|\lambda_1| - |\lambda_2|\,\big|\|\mathbf{u}\| = \big|\|\lambda_1\mathbf{u}\| - \|\lambda_2\mathbf{u}\|\big|.$$

Novamente, pela definição de soma vetorial, segue que:

$$\big|\|\lambda_1\mathbf{u}\| - \|\lambda_2\mathbf{u}\|\big| = \|\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{u}\|.$$

□

Todas as propriedades algébricas dos vetores podem ser deduzidas das 9 propriedades acima. Essas propriedades são análogas as propriedades dos números reais e grande parte da álgebra desenvolvida para números reais se estende para as operações vetoriais. De modo mais geral podemos definir um espaço vetorial como um conjunto com uma operação $+$ e uma operação de multiplicação por escalares satisfazendo os nove axiomas acima. Os espaços vetoriais são uma das estruturas matemáticas de maior importância.

Vejamos algumas propriedades algébricas dos vetores:

Exemplo 1.16 $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$

Demonstração: Pela propriedade $M5$ temos que $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 1\mathbf{v} + 1\mathbf{v}$ e pela propriedade $M4$ temos que $1\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (1 + 1)\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$ e logo $\mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v}$. □

Exemplo 1.17 $\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, ou seja o vetor oposto a $\mathbf{v}$ é $-1\mathbf{v}$.

Demonstração: Pela propriedade $M5$ temos que $\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = 1\mathbf{v} + (-1\mathbf{v})$ e pela propriedade $M4$ temos que $1\mathbf{v} + (-1\mathbf{v}) = (1 - 1)\,\mathbf{v} = 0\mathbf{v}$. Finalmente a propriedade $M2$ nos diz que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Como o vetor oposto é único temos que o vetor oposto a $\mathbf{v}$ é $-1\mathbf{v}$. □

Exemplo 1.18 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$.

Demonstração: Vamos provar a primeira implicação. Se $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ então, $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$

Vamos começar calculando $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v}$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}) \text{ por } S2 \tag{1.4}$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{ por } M4 \text{ e } M5 \tag{1.5}$$

por outro lado, como $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{u} \tag{1.6}$$

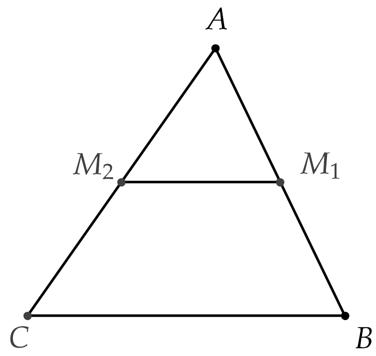
e consequentemente por 1.5 e 1.6 temos:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$$

A implicação contrária é semelhante. O leitor pode tentar, assim, completar os detalhes. □

O seguinte exemplo ilustra como podemos atacar um problema geométrico utilizando a linguagem vetorial.

Exemplo 1.19 Os segmentos que unem os pontos médios de dois lados de um triângulo é



paralelo ao terceiro lado.

Solução: Seja o triângulo ΔABC e seja M_1 o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e M_2 o ponto médio do lado $\overline{AC}$.

Como M_1 é ponto médio do lado $\overline{AB}$ temos que vetor $\overrightarrow{AM_1}$ é igual a metade do vetor $\overrightarrow{AB}$. Analogamente, temos que $\overrightarrow{AM_2}$ é metade do vetor $\overrightarrow{AC}$, i.e.,

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \tag{1.7}$$
$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \tag{1.8}$$

e consequentemente:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM_1} \tag{1.9}$$
$$\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{M_2A} \tag{1.10}$$

Então como:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \tag{1.11}$$

substituindo 1.9 e 1.10 em 1.11 temos:

$$\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{M_2A} + 2\overrightarrow{AM_1} \tag{1.12}$$
$$\overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{M_2A} + \overrightarrow{AM_1}) = 2\overrightarrow{M_2M_1} \tag{1.13}$$

e consequentemente:

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

E assim o segmento $\overline{M_2M_1}$ é paralelo ao segmento $\overline{CB}$ e seu comprimento é metade do último.

□

Exemplo 1.20 Dado um triângulo de vértices A, B, C. Dado P o ponto de encontro da bissetriz do ângulo $\widehat{C}$ com o lado $\overline{AB}$ Então o vetor CP é paralelo ao vetor $\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$, ou seja,

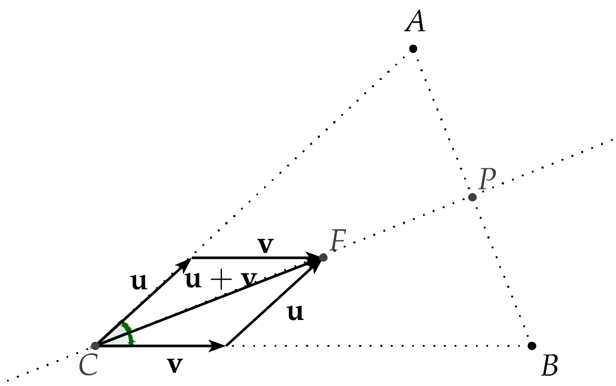
$$\overrightarrow{CP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|} \right) \tag{1.14}$$

Solução:

Note primeiramente que, para provarmos a equação (1.14), basta mostrarmos que, se F é tal que:

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|},$$

então F está sob a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$.



Faremos isso observando que a diagonal AC de um losango $ABCD$ divide os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ em ângulos iguais, ou seja é bissetriz de $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$. Isso segue do caso LLL de congruência de triângulos ($\triangle ABC \cong \triangle ADC$).

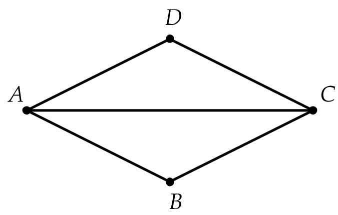


Figure 1.15: Se $ABCD$ é losango então $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

Considere agora os vetores $\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}$ e $\mathbf{v} = \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$. Como os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ possuem o mesmo comprimento, pois são unitários, o paralelogramo determinado por estes vetores é um losango. Consequentemente, como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos aos lados CA e CB do triângulo $\triangle ABC$, e a regra do paralelogramo nos diz que a soma de dois vetores é a diagonal do paralelogramo por eles formado, temos que, se $\overrightarrow{CF} = (\mathbf{u} + \mathbf{v})$, então o segmento CF divide o ângulo $\hat{C}$ em ângulos iguais.

Finalmente, se P é um ponto qualquer da bissetriz de $\widehat{C}$, o vetor $\overrightarrow{CP}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{CF}$, i.e,

$$\overrightarrow{CP} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{CA}}{\left\| \overrightarrow{CA} \right\|} + \frac{\overrightarrow{CB}}{\left\| \overrightarrow{CB} \right\|} \right)$$

□

1.4 SOMA DE PONTO COM VETOR

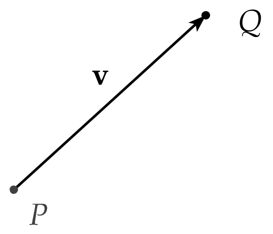
A soma do ponto com o vetor $\mathbf{v}$ nos retorna a translação do ponto P ao ser transportado pela direção, sentido e comprimento de $\mathbf{v}$.

Definição 1.48 Dado um ponto P e um vetor $\overrightarrow{v}$ podemos definir a **soma de ponto com vetor** do seguinte modo.

Seja um representante de $\overrightarrow{v}$ que começa em P e seja Q o ponto final desse representante. Definimos então:

$$P + \mathbf{v} := Q$$

Podemos reescrever a definição de soma de ponto com vetor de outra forma: diremos que $P + \mathbf{v} = Q$ se e somente se $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$.



Se escolhermos um ponto fixo no espaço O que chamaremos de **origem**, cada ponto P do espaço (ou plano) pode ser escrito como

$$P = O + \overrightarrow{OP}$$

Nesse caso o vetor $\overrightarrow{OP}$ é dito **vetor posição** de P.

Proposição 1.49 *A soma de ponto com vetor tem as seguintes propriedades:*

1. $P + \mathbf{O} = P$
2. $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
3. $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
4. $(P + \mathbf{u}) - \mathbf{u} = P$
5. $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

Demonstração: Faremos a demonstração dos três primeiras propriedades e deixaremos as outras como exercício ao leitor.

1. É imediata pois $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$
2. Se $P + \mathbf{u} = P + \mathbf{v}$, seja $Q = P + \mathbf{u}$, então $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ e assim $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. A recíproca é imediata.
3. Seja $Q_1 = P + \mathbf{u}$, $Q_2 = Q_1 + \mathbf{v}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Para demonstrar que $(P + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ basta mostrarmos que $Q_2 = Q_3$.

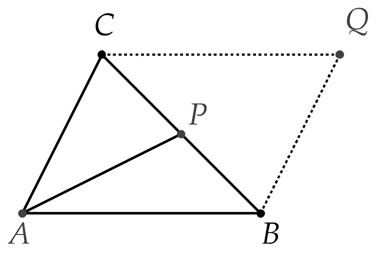
   Por definição $Q_1 = P + \mathbf{u}$ implica que $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ_1}$. De modo análogo, $Q_2 = Q + \mathbf{v}$, implica que $\mathbf{v} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$ e $Q_3 = P + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ implica que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_3}$.

   Logo

$$\overrightarrow{PQ_3} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} \tag{1.20}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ_3} = \overrightarrow{PQ_2} \tag{1.21}$$
$$\Rightarrow Q_3 = Q_2 \tag{1.22}$$

□

Exemplo 1.50 Dado ΔABC um triângulo e P um ponto sobre BC. Se $Q = P + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ demonstre que $ABQC$ é um paralelogramo e assim Q não depende da escolha de P.



Solução: Como $Q = P + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ então

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

e logo

$$\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}$$

e logo

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

E assim $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$. De modo análogo podemos provar que $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AC}$ e assim $ABQC$ é um paralelogramo.

□

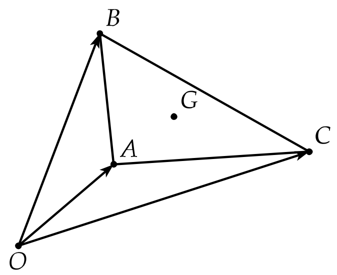
Exemplo 1.51 Dado um triângulo ΔABC e O um ponto qualquer. Então o baricentro G do triângulo ΔABC é dado por:

$$G = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

Solução:

Seja

$$P = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.$$



Como $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, temos que:

$$P = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

que simplificando fica:

$$P = O + \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

E como $A = O + \overrightarrow{OA}$, a expressão anterior é equivalente a:

$$P = A + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

No exercício 1.2.1 já provamos que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$ ou na forma de soma de ponto com vetor que:

$$G = A + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

E assim temos que $G = P$, ou seja, demonstramos que:

$$G = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

□

1.2 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR DE VETORES

Tanto no plano como no espaço, existem infinitas direções de movimento. Apesar desse fato nossa intuição nos diz "no espaço existem essencialmente três direções de movimento", enquanto que "no plano existem essencialmente duas direções de movimento". O que real- mente queremos dizer ao a firmarmos que existem "essencialmente apenas três direções de movimento"?

O objetivo dessa seção é responder matematicamente a essa questão. Para isso intro- duziremos os conceitos de **combinação linear**, **dependência** e **independência linear** e posteriormente o conceito de **dimensão**.

Como vimos na seção anterior, a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar nos permitem obter novos e diferentes vetores a partir de alguns vetores dados. Os vetores assim obtidos são ditos **combinação linear** dos vetores iniciais.

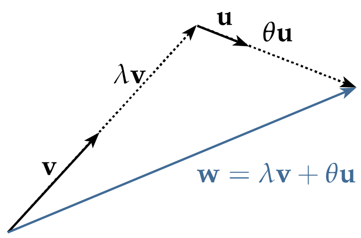


Figura 1.16: O vetor $\mathbf{w}$ pode ser escrito como somas de múltiplos dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Já os conceitos de dependência e independência linear estão intuitivamente associados a capacidade ou não de se escrever um vetor de um conjunto em função de outros. Assim por exemplo, ainda de maneira intuitiva, um conjunto de vetores será linearmente dependente, se as direções desses vetores são dependentes nos sentido de não podermos obter uma dessas direções a partir (como combinação) das outras.

Geometricamente, veremos ainda que o conceito de dependência linear estará associado como o fato que as direções desses vetores estarem em uma posição especial restrita, como ocorre por exemplo quando dois vetores são colineares ou quando três vetores são coplanares.

De posse desses conceitos a afirmação inicial poderá ser reescrita de modo preciso como "no espaço existem apenas três direções de movimento linearmente independentes". Para tanto, passemos a uma descrição mais cuidadosa de todos esses conceitos.

Definição 1.21 Diremos que um vetor $\mathbf{w}$ é **combinação linear** dos vetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n\}$ se existem escalares $\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}$ tal que

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i.$$

Nesse caso diremos também que o vetor $\mathbf{w}$ é dependente dos vetores $\mathbf{v}_i$ com $i = 1, \ldots, n$, ou ainda, que o vetor $\mathbf{w}$ pode ser representado em função dos vetores $\mathbf{v}_i$ com $i = 1, \ldots, n$

Exemplo 1.22 O vetor $\mathbf{w}$ ilustrado na figura 1.17 é combinação de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Pois

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}.$$

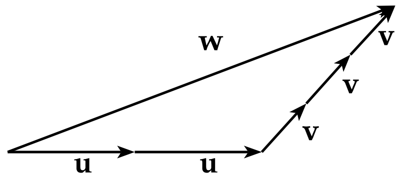


Figura 1.17: $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

Exemplo 1.23 Na figura 1.18 temos que vetor $\mathbf{f}_1$ é combinação linear de $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$.

Como os vetores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$ formam um polígono fechado sua soma é $\mathbf{0}$

$$\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4 + \mathbf{f}_5 = \mathbf{0}$$

e assim:

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_4 - \mathbf{f}_5.$$

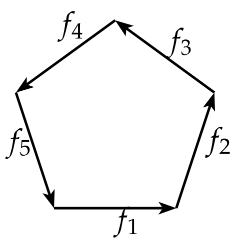


Figura 1.18: O vetor $\mathbf{f}_1$ é combinação linear dos vetores $\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5$.

Definição 1.25

- Um vetor $\mathbf{v}$ é dito **linearmente dependente (LD)** se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- Os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ $(n \geq 2)$ são ditos **linearmente dependentes (LD)** se existe um $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que o vetor $\mathbf{v_i}$ seja combinação linear dos demais vetores, ou seja:

$$\mathbf{v_i} = \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{v_j},$$

  onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Definição 1.26 Dizemos que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são **linearmente independentes (LI)** se eles não são linearmente dependentes.

Temos a seguinte caracterização simples para a dependência linear de dois vetores. Essa caracterização será generalizada para um número maior de vetores na seção 1.2.1.

Proposição 1.27 *Quaisquer dois vetores não nulos e não paralelos* $\mathbf{e}_1$ *e* $\mathbf{e}_2$ *são linearmente independentes.*

Demonstração: Por redução ao absurdo, suponha que os vetores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são linearmente dependentes.

Então pela definição de dependência linear temos que $\mathbf{e}_1 = \lambda \mathbf{e}_2$ ou $\mathbf{e}_2 = \theta \mathbf{e}_1$. Donde, pelo Corolário 1.10, temos que $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são paralelos, o que contradiz nossas hipóteses.

Logo $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são linearmente independentes. □

A partir da definição anterior podemos provar a seguinte caracterização:

Proposição 1.28 *Os vetores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *são linearmente dependentes se e somente se existem* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ NÃO todos nulos *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mathbf{v_1} = \mathbf{0}.$$

Demonstração: Para $n = 1$ temos que se $\mathbf{v}$ é linearmente dependente então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ daí para $\lambda = 1$, por exemplo temos $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Reciprocamente, se $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para algum $\lambda \neq \mathbf{0}$ pela definição de multiplicação por escalar segue que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, logo $\mathbf{v}$ é linearmente dependente.

Para $n \geq 2$, suponha que os vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade suponha que

$$\mathbf{v_1} = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \mathbf{v_i},$$

para $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Somando $(-1)\mathbf{v_1}$ a ambos os lados da igualdade chegamos a:

$$(-1)\mathbf{v_1} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}.$$

Logo $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}$ com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ não todos nulos (pois $\lambda_1 = -1$).

Reciprocamente, considere que existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ não todos nulos tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \mathbf{v_1} = \mathbf{0}.$$

Suponha, sem perda de generalidade que $\lambda_1 \neq 0$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\dfrac{1}{\lambda_1}$ e isolando $\mathbf{v_1}$ chegamos a:

$$\mathbf{v_1} = \sum_{i=2}^{n} -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \mathbf{v_i}.$$

Ou seja, o vetor $\mathbf{v_1}$ é combinação linear dos demais. □

A contrapositiva da proposição anterior nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 1.29 *Os vetores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *são linearmente independentes se e somente se*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0}\right) \Longrightarrow (\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$$

Ou seja, a única relação linear entre os vetores é a trivial, ou ainda, o vetor **0** pode ser escrito de modo único como combinação dos vetores $\mathbf{v}_i$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Desse teorema é imediata a unicidade da representação de um vetor como combinação linear de vetores LI:

Proposição 1.30 *Seja* **u** *um vetor que possa ser escrito como combinação linear do conjunto de vetores linearmente independente* $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots n}$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v_i}$$

então essa representação é única.

Demonstração: Dadas duas representações de u, i.e, suporemos que **u** possa ser escrito como combinação linear de $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots n}$ de duas maneiras distintas:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i \tag{1.16}$$

e

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \mathbf{v}_i \tag{1.17}$$

mostraremos que essas representações são iguais, isto é que $\lambda_i = lambda_i'$.

Subtraindo a equação 1.17 da equação 1.17 obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

e logo

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_i') \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Finalmente, como os vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\dots n}$ são linearmente independentes, temos que para cada i, $(\lambda_i - \lambda_i') = 0$, e assim $\lambda_i = \lambda_i'$. Dessa forma, temos que a representação é única. □

Observação 1.31 *A partir do Teorema 1.29 e da Proposição 1.28, estudar a dependência linear dos vetores* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ *é uma tarefa simples. Basta estudar a equação:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v_i} = \mathbf{0},$$

com incógnitas λ_i ($i \in \{1,2,\ldots,n\}$). Se tal equação admitir apenas a solução $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, então os vetores $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ são LI. Caso contrário, são linearmente dependentes.

Exemplo 1.32 Suponha que os vetores $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ são LI. Mostre que os vetores $\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}$ e

$\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ também são LI.

Solução: Para demonstrar que os vetores $\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ são LI, vamos estudar a equação:

$$a\mathbf{u}+\mathbf{v}+b\mathbf{u}-\mathbf{v}+c\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}$$

Expandindo e agrupando temos:

$$(a+b+c)\mathbf{u}+(a-b+c)\mathbf{v}+c\mathbf{w}=\mathbf{0}$$

Como $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ são LI temos que:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b+c=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior temos que $a=b=c=0$. Consequentemente temos que

$$a\mathbf{u}+\mathbf{v}+b\mathbf{u}-\mathbf{v}+c\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=\mathbf{0}\Rightarrow a=b=c=0$$

e logo os vetores $\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{u}-\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ são LI. $\square$

1.3 BASES

Dizemos que um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ **gera** o espaço (um dado plano) se qualquer vetor $\mathbf{w}$ do espaço (do plano) puder ser escrito como combinação linear dos vetores $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,\ldots,n}$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Proposição 1.39 *Dois vetores não paralelos de $\mathbb{V}^2$ geram $\mathbb{V}^2$.*

Ou seja,dados um vetor $\mathbf{f} \in \mathbb{V}^2$ e dois vetores não nulos e não paralelos $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ de $\mathbb{V}^2$ temos que existem m e $n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2.$$

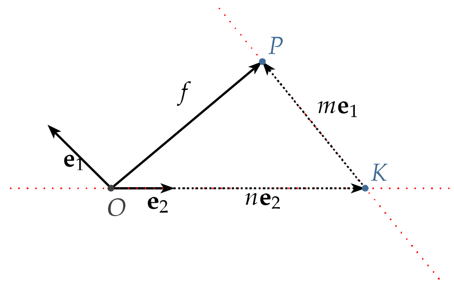


Figura 1.22: Dois vetores não paralelos geram o plano

Demonstração: Considere um ponto arbitrário O do espaço. Primeiramente observe que $\mathbf{f}$ é paralelo ao plano determinado pelo ponto O e pelos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Considere o representante de $\mathbf{f}$ que começa no ponto O e termina em P, i.e., seja $\mathbf{f} = \overrightarrow{OP}$. Considere a reta paralela a $\mathbf{u}$ que passa pelo ponto P e a reta paralela a $\mathbf{v}$ que passa por O. Essas retas se encontram num ponto K (Por quê?). É fácil ver, então, que $\mathbf{f} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$.

Como $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a $\mathbf{u}$, tal vetor é um escalar vezes $\mathbf{u}$, ou seja, $\overrightarrow{KP} = \lambda_1\mathbf{u}$. De maneira análoga $\overrightarrow{OK} = \lambda_2\mathbf{v}$. Desta forma temos:

$$\mathbf{f} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v}.$$

$\square$

Proposição 1.40 *Dados* $\mathbf{f}$*, um vetor qualquer de* $\mathbb{V}^3$*, e* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *três vetores não nulos, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano, temos que existem* $l, m, n \in \mathbb{R}$ *tais que:*

$$\mathbf{f} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3.$$

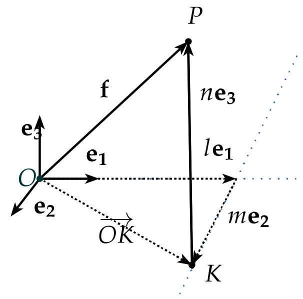


Figura 1.23: Três vetores não coplanares geram espaço

Demonstração: A demonstração é análoga a da Proposição 1.39.

Começamos escolhendo representantes dos vetores $\mathbf{f}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ que começam no ponto O (veja a figura 1.23). Seja então a reta paralela a $\mathbf{w}$ passando por P. Essa reta intercepta o plano determinado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ no ponto K.

O vetor $\overrightarrow{OK}$ estando no mesmo plano que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, pode ser escrito como combinação linear desses vetores:

$$\overrightarrow{OK} = l\mathbf{u} + m\mathbf{v}$$

O vetor $\overrightarrow{KP}$ é paralelo a $\mathbf{w}$, i.e, $\overrightarrow{KP} = n\mathbf{w}$. Finalmente como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$ temos que:

$$\mathbf{f} = l\mathbf{u} + m\mathbf{v} + n\mathbf{w}.$$

□

Proposição 1.41 *Quaisquer três vetores* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *não coplanares são linearmente independentes.*

Demonstração: Suponha que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ são linearmente dependentes. Temos então que um dos vetores é combinação linear dos demais.

Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_2 + \theta\mathbf{e}_3$. Segue que o vetor $\mathbf{e}_1$ é paralelo ao plano determinado pelo ponto O e pelos vetores $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ (Por quê?). Donde temos que os vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ seriam coplanares. □

Definição 1.42 Uma **base** para o espaço (um dado plano) é um conjunto ordenado de vetores $\{\mathbf{v}_i\}$ linearmente independentes e que geram o espaço (o plano).

Teorema 1.43 (Teorema da Base para o Plano) *Qualquer vetor* $\mathbf{f} \in \mathbb{V}^2$ *pode ser escrito de maneira única como combinação linear de dois vetores não nulos e não paralelos* $\mathbf{e}_1$ *e* $\mathbf{e}_2$ *de* $\mathbb{V}^2$*, isto é:*

$$\mathbf{f} = m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$$

com m *e* $n \in \mathbb{R}$ *únicos.*

Ou seja, dois vetores não nulos e não paralelos de $\mathbb{V}^2$ formam uma base para $\mathbb{V}^2$.

Demonstração: Consequência imediata das Proposições 1.39, 1.30 e 1.27. □

Corolário 1.44 *Toda base para o plano tem exatamente dois vetores. Ou seja, o plano tem dimensão* 2*.*

Teorema 1.45 (Teorema da Base para o Espaço) *No espaço tridimensional, sejam três vetores não nulos* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$*, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano. Então qualquer vetor* $\mathbf{f}$ *no espaço pode ser escrito como combinação linear única de* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$*, isto é:*

$$\mathbf{f} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3$$

com $l, m, n \in \mathbb{R}$*.*

Ou seja, três vetores não nulos, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano formam uma base para $\mathbb{V}^3$,

Demonstração: A demonstração do Teorema segue diretamente das Proposições 1.40, 1.30 e 1.41. □

Corolário 1.46 *Toda base para o espaço tem exatamente três vetores. Ou seja, o espaço* $\mathbb{V}^3$ *tem dimensão* 3*.*

Intimamente relacionado ao conceito de base está o conceito de dimensão de um plano/espaço. A **dimensão** é definida como o número de vetores numa base, ou seja, o número de vetores independentes a partir do qual podemos obter todos os outros. Como provamos o plano tem dimensão 2 e o espaço tem dimensão 3.

Agora demonstraremos o teorema de caracterização geométrica da dependência e independência linear:

Teorema 1.47 ***(Caracterização Geométrica da Dependência e Independência Linear)***
Para vetores em $\mathbb{V}^2$ e $\mathbb{V}^3$ temos:

1. *Um vetor* $\mathbf{v}$ *é linearmente dependente se e somente se* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. *Dois vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *são linearmente dependentes se e somente se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são paralelos.*
3. *Três vetores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *são linearmente dependentes se e somente se* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *são coplanares.*
4. *Quatro ou mais vetores são sempre linearmente dependentes.*

Demonstração: 1. A demonstração segue de imediato a partir Definição 1.25.

2. Se $\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v}$. Pelo Corolário 1.10, ou $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \theta\mathbf{u}$ $(\lambda, \theta \in \mathbb{R})$. Logo, como um dos vetores é necessariamente combinação linear do outro, segue que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são linearmente dependentes.

   A recíproca é a contrapositiva da Proposição 1.27.

3. Se três vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares temos dois casos a considerar ou $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos, ou $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ não são paralelos.

   Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ são paralelos, pela argumentação acima, um dos vetores é combinação linear do outro. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Temos então que:

   $$\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + 0\mathbf{w}.$$

   Logo $\mathbf{u}$ é combinação linear dos demais vetores e, portanto, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são linearmente dependentes.

   Se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são coplanares e $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ não são paralelos, pelo Teorema **??** temos que

   $$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v},$$

   para $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Assim, os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são linearmente dependentes.

   A recíproca segue da Proposição 1.41.

4. Considere n vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$, com $n \geq 4$. Duas coisas podem ocorrer: ou os $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são coplanares ou não o são.

Se $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ são coplanares, um dos vetores é combinação linear dos demais. Suponha $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2 + \theta\mathbf{v}_3$. Segue que:

$$\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2 + \theta\mathbf{v}_3 + \sum_{i=4}^{n} 0\mathbf{v}_i.$$

Logo $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ são linearmente dependentes.

Caso $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ não sejam coplanares, pelo Teorema **??**,

$$\mathbf{v_4} = \lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \lambda_3\mathbf{v_3},$$

para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Daí temos:

$$\mathbf{v_4} = \lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \lambda_3\mathbf{v_3} + \sum_{i=5}^{n} 0\mathbf{v_i}.$$

Logo, $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ são linearmente dependentes.

□

2 VETORES EM COORDENADAS

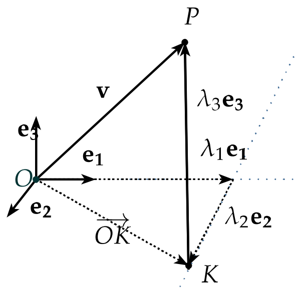
No primeiro capítulo estudamos vetores de um ponto de vista totalmente geométrico. Porém, o ferramental geométrico se mostra ineficiente e quiçá insuficiente quando nos deparamos com problemas de maior complexidade. Neste capítulo introduziremos a representação algébrica dos vetores e do espaço Euclidiano. É essa representação que nos permite converter problemas geométricos em problemas algébricos e efetivamente realizar cálculos com vetores.

Os primeiros passos no sentido de encontrar tais representações já foram dados no capítulo anterior, ao estudarmos o conceito de base. Neste capítulo daremos continuidade a estas ideias e veremos como utilizar as propriedades geométricas estudadas até agora para encontrar representações algébricas não apenas para vetores, mas também para os pontos do espaço Euclidiano. Tais representações serão chamadas de *sistemas de coordenadas*, e serão o foco principal deste capítulo.

Mais precisamente, um **sistema de coordenadas** é uma identificação contínua do plano (espaço) euclideano com uma região de $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) que nos permita localizar pontos através de pares (triplas) de números reais.

Vejamos, por exemplo, como podemos relacionar vetores e pontos no espaço de modo a obter um sistema de coordenadas.

Se considerarmos $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base de $\mathbb{V}^3$, pelo teorema da base para o espaço, temos que qualquer vetor v pode ser representado como:



$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3,$$

onde os coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são únicos.

Tal igualdade nos permite construir a seguinte bijeção entre $\mathbb{V}^3$ e $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \iota_1 : \mathbb{V}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{v} &\longmapsto (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \end{aligned}$$

Lembramos ao leitor que **bijeção** é uma função que identifica univocamente os elementos do domínio com os do contra-domínio. Mais precisamente uma função bijetora é uma aplicação simultaneamente **injetora**, isto é, que leva elementos distintos do domínio em elementos distintos da imagem, e **sobrejetora**, ou seja, tal que todo elemento do contra domínio é imagem de algum elemento do domínio.

Devido existência da bijeção descrita acima, definimos a seguinte notação:

$$\mathbf{v} : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\mathcal{B}}.$$

Chamamos $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de **coordenadas** do vetor $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{B}$.

Considere agora o espaço Euclidiano ($\mathbb{E}^3$). O primeiro passo necessário para encontrarmos um sistema de coordenadas é "localizar" os pontos no espaço. Observe que para isso não basta uma base de vetores, pois, como já dissemos anteriormente, vetores não são localizados no espaço. Assim torna-se necessária a escolha de um ponto qualquer para nos servir de referência. Fixemos então um ponto $O \in \mathbb{E}^3$ a que chamaremos de *origem* do sistema de coordenadas. A partir de tal ponto as posições de todos os pontos de $\mathbb{E}^3$ serão determinadas.

Observe que, fixado O, um ponto P qualquer em $\mathbb{E}^3$ pode ser escrito como $P = O + \overrightarrow{OP}$. Tal igualdade nos permite identificar univocamente pontos de $\mathbb{E}^3$ com vetores de $\mathbb{V}^3$:

$$\begin{aligned} \iota_2 : \mathbb{E}^3 &\longrightarrow V^3 \\ P &\longmapsto \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

Chamamos assim $\overrightarrow{OP}$ de **vetor posição** de P.

Tomando a composta $\iota := \iota_1 \circ \iota_2$ obtemos uma bijeção entre os pontos de $\mathbb{E}^3$ e os elementos de $\mathbb{R}^3$: a cada ponto P podemos associar a tripla $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2.1 SISTEMAS DE COORDENADAS

Motivado pelo exposto acima, definimos

Definição 2.1 Um **sistema vetorial de coordenadas no espaço** Σ é o conjunto formado por uma base de vetores $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e um ponto O, chamado de origem do sistema de coordenadas. Denotaremos o sistema de coordenadas por

$$\Sigma = (O, \mathcal{B}).$$

A bijeção entre $\mathbb{E}^3$ e $\mathbb{R}^3$ dada por ι devido à Σ nos permite definir a seguinte notação:

$$P : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\Sigma},$$

onde $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ são as coordenadas do vetor posição $\overrightarrow{OP}$ na base $\mathcal{B}$. Chamamos, nesse caso, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de **coordenadas** do ponto P no sistema de coordenadas Σ.

Observação 2.2 *Fixado um sistema de coordenadas Σ, é usual representar as coordenadas de um vetor* **v** *na base $\mathcal{B}$ associada a Σ também por $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)_\Sigma$.*

Muitas vezes quando o sistema de coordenadas Σ e a base $\mathcal{B}$ estão claros pelo contexto é comum, também, denotar tanto o ponto P quanto seu vetor posição $\overrightarrow{OP}$ indistintamente por suas coordenadas: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (sem indicar os sub-índices Σ ou $\mathcal{B}$). Nesse caso cabe ao leitor entender pelo contexto a quem se referem as coordenadas descritas, a um ponto ou a um vetor.

Finalmente, verifique que podemos de forma totalmente análoga à descrita acima identificar pontos do plano euclideano $\mathbb{E}^2$ com vetores de $\mathbb{V}^2$ e com elementos de $\mathbb{R}^2$. Para isso tudo que precisamos é de um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ onde $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{V}^2$, ou seja, um conjunto formado por dois vetores linearmente independentes.

No que se segue apresentaremos os resultados apenas para $\mathbb{V}^3$, deixando implícita sua validade em $\mathbb{V}^2$.

Se **i**, **j** e **k** forem três vetores ortonormais, ou seja, ortogonais dois a dois e de norma 1, então o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ onde $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ é chamado de **sistema cartesiano de coordenadas**. Daqui em diante as letras **i**, **j** e **k** sempre denotarão vetores ortonormais.

Um **sistema de coordenadas** cujos vetores não são ortogonais é dito **sistema de coordenadas oblíquo**.

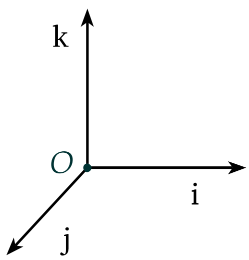


Figura 2.1: Sistema de Coordenadas Ortonormais

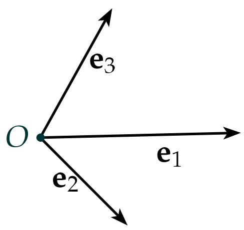
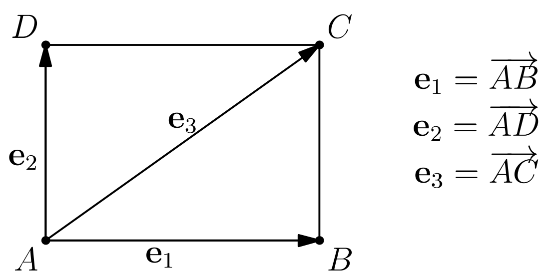


Figura 2.2: Sistema de Coordenadas Oblíquo

Exemplo 2.3 Dado um retângulo $ABCD$ conforme a figura abaixo, vamos encontrar as coordenadas dos pontos A, B, C, D e dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$ nos seguintes sistemas de coordenadas:

1. $\Sigma_1 = (A, \mathcal{B}_1)$ onde $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
2. $\Sigma_2 = (B, \mathcal{B}_2)$ onde $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{e}_3, \frac{1}{2}\mathbf{e}_1)$.



Solução: (1) Vamos primeiro escrever as coordenadas de A, B, C, D no sistema Σ_1. Para isso devemos escrever os vetores $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ como combinação linear de $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Por definição

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_1 \ \text{ e } \ \overrightarrow{AD} = \mathbf{e}_2.$$

Temos também que

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

e que $\overrightarrow{AA}$, sendo o vetor nulo, é igual a $0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2$. Assim as coordenadas são

$$\begin{aligned}
A : (0,0)_{\Sigma_1} & \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AA} = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\
B : (1,0)_{\Sigma_1} & \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AB} = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 \\
C : (1,1)_{\Sigma_1} & \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AC} = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \\
D : (0,1)_{\Sigma_1} & \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AD} = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

Para encontrar as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$ basta observar que

$$\overrightarrow{BD} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \ \text{ e } \ \overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

e portanto temos

$$\overrightarrow{BD} : (-1,1)_{\Sigma_1}$$

$$\overrightarrow{AC} : (1,1)_{\Sigma_1}$$

(2) Vamos agora escrever as coordenadas dos pontos A, B, C, D no sistema $\Sigma_2 = \left(B, (\mathbf{e}_3, \frac{1}{2}\mathbf{e}_1)\right)$.

Para tanto devemos escrever os vetores $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ como combinação de $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ sendo $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1$.

Observe que

$$\overrightarrow{BA} = -\mathbf{e}_1 = -2\left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1\right) = -2\mathbf{f}_2,$$

$$\overrightarrow{BB} = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 \text{ (vetor nulo)},$$

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 = -1\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2$$

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2.$$

E assim as coordenadas dos pontos são

$$A : (0, -2)_{\Sigma_2}$$
$$B : (0, 0)_{\Sigma_2}$$
$$C : (-1, 2)_{\Sigma_2}$$
$$D : (1, -4)_{\Sigma_2}$$

Calculando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{AC}$, usando que $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1$ obtemos que

$$\overrightarrow{BD} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2$$

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_1,$$

e portanto vale

$$\overrightarrow{BD} : (1, -4)_{\Sigma_2}$$

$$\overrightarrow{AC} : (1, 0)_{\Sigma_2}.$$

□

2.1.1 Operações Vetoriais em Coordenadas

Agora que sabemos como representar vetores e pontos em coordenadas precisamos saber como operar com estas representações. A proposição abaixo nos diz como as operações com pontos e vetores vistas no capítulo anterior podem ser traduzidas para a representação que acabamos de apresentar.

Proposição 2.4 *Se* $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$ *e* $P : (p_1, p_2, p_3)_\Sigma$ *então:*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} : (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_\Sigma$
2. $\lambda\mathbf{u} : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_\Sigma$
3. $P + \mathbf{u} : (a_1 + p_1, a_2 + p_2, a_3 + p_3)_\Sigma$

Demonstração:

1. Dado um sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$, onde $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$, como $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ e $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$, por definição temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

E logo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \\ &= = (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 + (a_3 + b_3)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

E desta forma as coordenadas de $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ no sistema de coordenadas Σ são

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} : (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$$

2. Como $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$, por definição temos que:

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

   Desta forma temos que

$$\lambda\mathbf{u} = \lambda\left(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3\right) \tag{2.1}$$
$$= \lambda a_1\mathbf{e}_1 + \lambda a_2\mathbf{e}_2 + \lambda a_3\mathbf{e}_3 \tag{2.2}$$

   E consequentemente:

$$\lambda\mathbf{u} : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

3. Deixaremos como exercício para o leitor.

□

Considere fixado um sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$. Observadas as operações com pontos e vetores em coordenadas, uma pergunta que resta ser respondida é: dados os pontos $A : (a_1, a_2, a_3)$ e $B : (b_1, b_2, b_3)$, como podemos encontrar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$?

Observe que, pela definição de subtração de vetores, vale que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Então, como $\overrightarrow{OA} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ e $\overrightarrow{OB} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, temos:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - a_2)\mathbf{e}_2 + (b_3 - a_3)\mathbf{e}_3$$
$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Tal igualdade dá origem a **notação de Grassmann** que diz:

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

Observe que a igualdade acima é, no entanto, apenas uma notação já que em nenhum momento foi definida soma ou subtração de pontos.

Exemplo 2.5 Dados os pontos $A : (1, 3, 2)$, $B : (1, 1, 1)$ e $C : (1, 1, 0)$ determine as coordenadas

1. dos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$
2. do vetor $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
3. do ponto $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Solução:

1. $\overrightarrow{AB} : (1-1, 1-3, 1-2) = (0, -2, -1)$
   $\overrightarrow{BC} : (1-1, 1-1, 0-1) = (0, 0, -1)$
2. $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (0, -2, -1) + \frac{1}{3}(0, 0, -1) = (0, -2, -1 - \frac{1}{3}) = (0, -2, -\frac{4}{3})$
3. $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) + \frac{1}{2}(0, -2, -1) = (1, 0, -\frac{1}{2})$

$\square$

Exemplo 2.6 Determine o ponto médio $M = (m_1, m_2, m_3)$ de um segmento com ponto

inicial $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, num sistema de coordenadas $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$, onde $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$.

Solução: Primeiro observamos que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ pois os vetores possuem o mesmo sentido e o comprimento $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ é duas vezes o comprimento $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|$.

Assim

$$(b_1 - a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - a_2)\mathbf{3}_2 + (b_3 - e_3)\mathbf{e}_3 = 2(m_1 - a_1)\mathbf{e}_1 + 2(m_2 - a_2)\mathbf{e}_2 + 2(m_3 - a_3)\mathbf{e}_3$$

o que implica em

$$b_i - a_i = 2(m_i - a_i),$$

para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Logo

$$m_i = \frac{b_i - a_i}{2},$$

para todo i, e

$$M : \left(\frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 + a_2}{2}, \frac{b_3 + a_3}{2}\right).$$

$\square$

De posse da representação dos vetores em coordenadas podemos agora fornecer critérios para a dependência e a independência linear de vetores:

Teorema 2.7 *Os vetores* $\mathbf{u} : (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{v} : (b_1, b_2, b_3)$ *e* $\mathbf{w} : (c_1, c_2, c_3)$ *são linearmente independentes se e somente se*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Demonstração: Os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são linearmente independentes se o sistema:

$$x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0 \tag{2.3}$$

possuir somente a solução trivial $x = y = z = 0$

Em coordenadas podemos expressar a equação 2.4 como:

$$x\,(a_1, a_2, a_3) + y\,(b_1, b_2, b_3) + z\,(c_1, c_2, c_3) = 0 \tag{2.4}$$

E logo teremos o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Pela regra de Cramer (ver Apêndice C pág. C.3) o sistema anterior tem solução única se e somente se seu determinante for não nulo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\square$

Exemplo 2.8 (leitura opcional) Considere fixada uma base de vetores $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Sejam $\mathbf{f_1} = (1, 1, 1)_\mathcal{B}$, $\mathbf{f_2} = (1, 0, 1)_\mathcal{B}$ e $\mathbf{f_3} = (0, -1, 1)_\mathcal{B}$.

1. Mostre que $\mathcal{C} = (\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3})$ é uma base de $\mathbb{V}^3$.
2. Encontre as coordenadas do vetor $\mathbf{u} = (1, 2, 3)_\mathcal{C}$ na base $\mathcal{B}$.
3. Encontre as coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (1, 2, 3)_\mathcal{B}$ na base $\mathcal{C}$.

Solução:

1. Pelo teorema da base, basta mostrarmos que $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_3}$ são linearmente independentes.

Como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

pelo Teorema 2.7 temos que, de fato, $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$ e $\mathbf{f_3}$ são linearmente independentes.

2.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (1,2,3)_{\mathcal{C}} = 1\mathbf{f_1} + 2\mathbf{f_2} + 3\mathbf{f_3} = \\ &= 1(1,1,1)_{\mathcal{B}} + 2(1,0,1)_{\mathcal{B}} + 3(0,-1,1)_{\mathcal{B}} = (3,-2,6)_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

3. Antes de escrevermos $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{C}$ precisamos obter as coordenadas dos vetores $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ e $\mathbf{e_3}$ na base $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} \mathbf{f_1} &= 1\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2} + 1\mathbf{e_3} \\ \mathbf{f_2} &= 1\mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2} + 1\mathbf{e_3} \\ \mathbf{f_3} &= 0\mathbf{e_1} - 1\mathbf{e_2} + 1\mathbf{e_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{f_1} &= 1\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2} + 1\mathbf{e_3} \\ \mathbf{f_1} - \mathbf{f_2} &= 0\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2} + 0\mathbf{e_3} \\ \mathbf{f_3} + (\mathbf{f_1} - \mathbf{f_2}) &= 0\mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2} + 1\mathbf{e_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{f_1} - (\mathbf{f_1} - \mathbf{f_2}) - [\mathbf{f_3} + (\mathbf{f_1} - \mathbf{f_2})] &= 1\mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2} + 0\mathbf{e_3} \\ \mathbf{f_1} - \mathbf{f_2} &= 0\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2} + 0\mathbf{e_3} \\ \mathbf{f_3} + (\mathbf{f_1} - \mathbf{f_2}) &= 0\mathbf{e_1} + 0\mathbf{e_2} + 1\mathbf{e_3} \end{cases}$$

Donde temos:

$$\begin{cases} \mathbf{e_1} &= 1\mathbf{f_1} + 2\mathbf{f_2} - 1\mathbf{f_3} = (1,2,-1)_{\mathcal{C}} \\ \mathbf{e_2} &= 1\mathbf{f_1} - 1\mathbf{f_2} + 0\mathbf{f_3} = (1,-1,0)_{\mathcal{C}} \\ \mathbf{e_3} &= 1\mathbf{f_1} - 1\mathbf{f_2} + 1\mathbf{f_3} = (1,-1,1)_{\mathcal{C}} \end{cases}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (1,2,3)_{\mathcal{B}} = 1\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 3\mathbf{e_3} = \\ &= 1(1,2,-1)_{\mathcal{C}} + 2(1,-1,0)_{\mathcal{C}} + 3(1,-1,1)_{\mathcal{C}} = (6,-3,2)_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.10 Determine m de modo que os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sejam linearmente dependentes, onde:

$$\mathbf{v} = (1, m+1, m+2) \quad \mathbf{w} = (1, 0, m) \quad \mathbf{k} = (0, 2, 3)$$

Solução: Para que os vetores sejam linearmente dependentes, pelo teorema 2.7 o seguinte determinante deve se anular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+m & 2+m \\ 1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+m & 2+m \\ 1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 - 3m$$

E assim queremos determinar os valores de m para os quas $1 - 3m = 0$ e assim $m = \dfrac{1}{3}$. □