Sistemas de equações lineares

Antes de começarmos a estudar sistemas lineares, vamos entender o que é uma equação linear.

Toda equação onde podemos escrever o conjunto de varáveis x_i multiplicadas por pesos sempre constantes reais a_i chamamos de equação linear.

$$a_a x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = \text{b}$$

$$a_i \text{ e } b \in \Re.$$

Texto editado do livro digital Álgebra Linear: Módulo 1 (UFRN-EAD), de J. Ferreira. O texto completo pode ser baixado na biblioteca digital da UFRN ou em nossa biblioteca do Moodle.

Exemplo 1

Quais das equações abaixo são lineares?

a) $-5x \ -8y \ -10{,}3z \ = 2$

b) $2,5x - \sqrt{2}y = 0$

c) $-2 + x \ - y \ = 3z$

d) $x - 3y - \sqrt{z} = 2$

e) $2x \ -yz \ +4 \ = 0$

f) $x + y\!/_2 + 3 = 0$

Tomando por base que a definição de equação linear é sempre uma equação onde as incógnitas têm grau máximo 1 e aparecem multiplicadas por constantes, não aparecendo outra forma de multiplicação, e podendo apresentar ainda constante sem multiplicação de variável, temos que apenas as letras a, b, c e f são lineares.

Na letra **d** aparece a raiz de uma variável, ou seja, $z^{\frac{1}{2}}$, não satisfazendo as condições; e na letra **e** aparecem duas variáveis sendo multiplicadas, o que caracteriza a não linearidade.

Um sistema de equações lineares ou sistema linear consiste em um conjunto de m equações lineares com n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1j}x_j & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +\ldots & +a_{ii}x_j & +\ldots & +a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m1}x_1 & +\ldots & +a_{mi}x_j & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

$$i\text{=1,2,...,}m \text{ e } \text{j=1,2,...,}n$$

Existem algumas classificações para sistemas de equações lineares, a mais simples delas é a que diferencia os sistemas homogêneos dos não homogêneos. Os sistemas lineares homogêneos são aqueles onde os termos independentes b_i são todos nulos, mas, caso haja ao menos um desses coeficientes diferentes de zero, então, o sistema passa a ser classificado como não homogêneo.

Exemplo 2

Sistemas lineares homogêneos:

$$\begin{cases} 2x + y - 3x = 0 \\ -x - z = 0 \\ x + y + x = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Sistemas lineares não homogêneos:

$$\begin{cases} 2x + y - 3x = 0 \\ -x - z = 0 \\ x + y + x = 1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Solução de sistemas lineares

A solução de um sistema de equações lineares é a sequência de números tais que a equação é satisfeita. É chamada de conjunto solução.

Por exemplo, no sistema linear $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, se tomarmos a solução $x=2$ e $y=1$, teremos sempre uma equação válida ao substituirmos nas duas equações, portanto, o conjunto solução desse sistema é $\{x, y \in \Re \ / \ x = 2, y = 1\}$.

A solução de um sistema de equações lineares pode ser bem determinada como mostra o exemplo acima, ou pode ser mais complexa. Por exemplo, se nos deparamos com um sistema linear formado por apenas uma equação e duas incógnitas $\{x+y= 5$, de imediato podemos dizer que existe mais de uma solução possível $(x,y) = (2,3)$ ou $(1,4)$ ou $(6,-1)$ e assim sucessivamente. Percebemos então que esse sistema possui infinitas soluções.

A quantidade de soluções de um sistema de equações lineares implica em uma nova classificação dos sistemas lineares, mostrada na Figura 1.

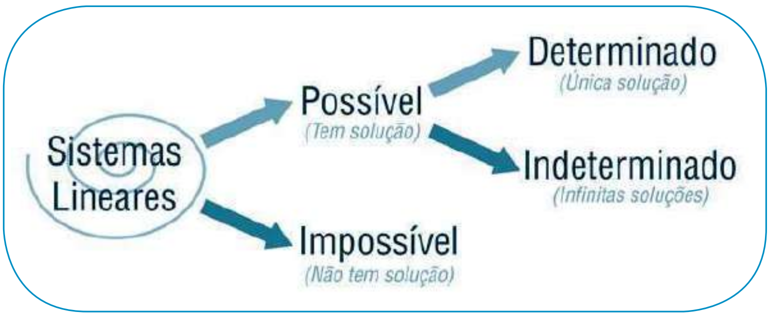

Figura 1 – Classificação de sistemas lineares quanto ao número de soluções

Um sistema linear pode ter ou não solução, sendo denominado de sistema possível ou impossível, respectivamente. Dentre os sistemas que admitem solução, existem os que têm apenas uma única solução (determinado) e outros que podem apresentar um conjunto infinito de soluções (indeterminado). Os sistemas possíveis também podem ser chamados de consistente e os impossíveis, de inconsistente.

Sistemas equivalentes

São sistemas de equações lineares que apresentam o mesmo conjunto solução, apesar de se apresentarem distintamente. Por exemplo, vimos anteriormente que o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ é $\{x, y \in \Re \ / \ x=2, y=1\}$, já o sistema $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$ apesar de ser diferente, também apresenta o mesmo conjunto solução: $\begin{cases} 3.2+1=7 \\ 2.2-2.1=2 \end{cases}$. Portanto, os dois sistemas são equivalentes.

Exemplo 3

Sistemas lineares homogêneos:

a) $\begin{cases} 2a-b=2 \\ a-b=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2a-b=1 \\ -4a+2b=-2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2a-b=1 \\ -4a+2b=-1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2a-b=2 \\ a-b=1 \end{cases}$ fazendo a primeira equação menos a segunda, temos:

$2a-a=2-1$

$a=1$ Se $a=1$, então, $b=0$

$S=\{a, b \in \Re \ / \ a=1, b=0\}$

Sistema possível determinado →Apresenta única solução.

b) $\begin{cases} 2a-b=1 \\ -4a+2b=-2 \end{cases}$ vamos isolar b na primeira equação e substituir na segunda:

$\begin{cases} b=2a-1 \\ -4a+2(2a-1)=-2 \\ -2=-2 \end{cases}$ Dessa forma não chegamos a conclusão nenhuma.

Isso ocorre porque as duas equações apresentam a mesma informação, note que se pegarmos a primeira equação e multiplicarmos por -2, obteremos exatamente a segunda equação. Na realidade, esse sistema de equações se resume a uma única equação: $\{2a-b=1$, resolvendo temos que $b=2a-1$, então qualquer solução que satisfaça essa equação é solução desse sistema. Por exemplo, (a,b) = $(1,1)$ ou $(0,-1)$ ou $(2,3)$ e assim sucessivamente.

$$S = \{a, b \in \Re \;/\; b = 2a - 1\}$$

Sistema possível indeterminado $\rightarrow$ Apresenta infinitas soluções.

c) $\begin{cases} 2a - b = 1 \\ -4a + 2b = -1 \end{cases}$ Vamos isolar b na primeira equação e substituir na segunda:

$\begin{cases} b = 2a - 1 \\ -4a + 2(2a - 1) = -1 \\ -2 = -1 \quad \Leftarrow \text{ERRO} \end{cases}$ Dessa forma, chegamos a uma inconsistência!

Isso acontece porque o sistema é impossível, não existe nenhuma combinação sequer para a e b que satisfaçam simultaneamente as duas equações.

S={Ø}

Sistema Impossível $\rightarrow$ Não apresenta soluções.

Atividade 1

Identifique o sistema quanto ao número de soluções. $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Representação matricial

Vamos considerar um sistema de equações lineares genérico, com m equações e n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1j}x_j & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +\ldots & +a_{ii}x_j & +\ldots & +a_{in}x_n & = b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m1}x_1 & +\ldots & +a_{mi}x_j & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Se considerarmos as incógnitas em um vetor, teremos: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Da mesma forma, um vetor com os termos independentes: $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Por fim, montamos uma matriz com os termos coeficientes: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Então, poderemos escrever o sistema de equações na forma matricial: $A \cdot X = B$.

A $\rightarrow$ matriz dos coeficientes

B $\rightarrow$ matriz dos termos independentes

X $\rightarrow$ matriz das incógnitas

Note que A tem dimensão $m\text{x}n$ e X $n\text{x}1$, a multiplicação $A \cdot X$ resulta na dimensão $m\text{x}1$, exatamente a dimensão de B.

Mas, qual a vantagem de utilizar essa representação matricial?

As vantagens são muitas. A primeira é a visualização, com essa representação é possível ter uma noção mais clara do sistema e de seu tamanho. Imagine também que você esteja trabalhando com um sistema enorme, com dezenas de variáveis, a organização na forma matricial facilita o controle das variáveis e viabiliza a utilização de diversos métodos de resolução de sistemas lineares, os quais veremos em seguida.

Vejamos um exemplo de manipulação de sistemas lineares na forma matricial que pode levar à solução.

Consideremos um sistema linear com n equações e n incógnitas, onde sabemos que a matriz dos coeficientes admite inversa.

$$AX = B$$

Como A^{-1} existe, podemos multiplicar ambos os lados da equação, pela esquerda, por A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$I \cdot X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Como sabemos, uma matriz multiplicada pela sua inversa é igual à matriz identidade e também, qualquer matriz multiplicada pela identidade é igual a ela mesma. Chegamos então à conclusão que podemos encontrar a solução de um determinado sistema linear encontrando a inversa da matriz dos coeficientes vezes a matriz dos termos independentes.

Exemplo 4

Encontre a solução de $\begin{cases} 2a - b = 2 \\ a - b = 1 \end{cases}$

Passando para a forma matricial $AX=B$, temos: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Onde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sabendo que $X= A^{-1}B$ precisamos encontrar A^{-1}. (Método da matriz adjunta, por exemplo.)

Como $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, logo, $a=1$ e $b=0$

$S = \{a, b \in \Re \;/\; a = 1, b = 0\}$

Regra de Cramer

A regra de Cramer é uma ferramenta útil na obtenção da solução de sistemas lineares que apresentam n equações e n incógnitas. Ela diz que a solução x_i é dada por:

$$x_i = \frac{det\, A_i}{det\, A} \qquad i = 1, 2, 3 \ldots, n$$

Onde:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Possível e Determinado $\Rightarrow det\, A \neq 0$

Possível e Indeterminado $\Rightarrow \begin{cases} det\, A = 0 \\ e \\ det\, A_1 = det\, A_2 = \ldots = det\, A_n = 0 \end{cases}$

Impossível $\Rightarrow \begin{cases} det\, A = 0 \\ e \\ \text{pelo menos um } det\, A_i \neq 0 \end{cases}$

$A \rightarrow$ matriz dos coeficientes

$A_i \rightarrow$ matriz obtida da substituição dos elementos da i-ésima coluna de A pelos termos independentes

Note que essa regra apenas pode ser utilizada para encontrar a solução quando a matriz A for quadrada, permitindo o cálculo do determinante.

Exemplo 5

Encontre a solução de $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$ usando a regra de Cramer.

Passando para a forma matricial $AX{=}B$, temos: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Onde: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Cálculo dos determinantes: $det\ A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Para calcular $det(A_1)$, substituímos a primeira coluna de A por B e para calular $det(A_2)$ substituímos a segunda coluna de A por B.

$$det\ A_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$det\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

Então, é só aplicar na equação:

$$x_1 = \frac{det\ A_1}{det\ A} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$x_2 = \frac{det\ A_2}{det\ A} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$S = \{x_1, x_2 \in \Re \ /\ x_1 = 1, x_2 = 3\}$$

Exemplo: Dado o sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = -15 \\ 2x - y + z = 10 \\ 3x \quad - z = 1 \end{cases}$.

Como $det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, podemos encontrar a solução desse sistema usando a regra de Cramer.

Assim,

$$x = \frac{det\begin{pmatrix} -15 & 2 & -3 \\ 10 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{4}{2} = 2, \quad y = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & -15 & -3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1, \quad z = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -15 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{10}{2} = 5.$$

Portanto, a única solução do sistema é (2 , -1 , 5).

LEITURA COMPLEMENTAR

MATRIZES E CRIPTOGRAFIA

Uma forma bastante interessante de ensinar matrizes inversas e multiplicação de matrizes é utilizando a criptografia. Vamos utilizar um método bastante simples que envolve matrizes inversas. Sejam A e B, tal que B é a matriz inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Logo, podemos verificar que AB = BA = 1.

A criptografia é o estudo dos princípios e técnicas pelas quais a informação pode ser transformada da sua forma original para outra ilegível, de forma que possa ser conhecida apenas por seu destinatário. Vamos utilizar essas duas matrizes como ‘chaves’ para codificar e decodificar a mensagem. O remetente vai usar a matriz A para codificar a mensagem e o destinatário vai usar a matriz B para decodificar a mensagem.

Para codificar uma mensagem o primeiro passo é convertê-la da forma alfabética para uma forma numérica. Então, vamos utilizar a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z	.	!	#	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

O remetente e o destinatário devem conhecer essa tabela alfanumérica e também podem fazê-la usando outras correspondências entre números e letras. Vamos codificar a seguinte mensagem: EU ACREDITO NA EDUCAÇÃO. Vamos fazer a correspondência entre as letras e os números usando a tabela dada.

E	U	#	A	C	R	E	D	I	T	O	#	N	A	#	E	D	U	C	A	C	A	O	.
5	21	29	1	3	18	5	4	9	20	15	29	14	1	29	5	4	21	3	1	3	1	15	27

Usamos o símbolo # entre as palavras para não causarmos confusão.

Como temos a matriz decodificadora A de ordem 2 (2x2), vamos colocar a sequência de números dispostos em uma matriz de duas linhas. Se o número de elementos da mensagem for ímpar, podemos acrescentar um caractere vazio, não vai alterar a mensagem. No caso o número 30.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 29 & 1 & 3 & 18 & 5 & 4 & 9 & 20 & 15 & 29 \\ 14 & 1 & 29 & 5 & 4 & 21 & 3 & 1 & 3 & 1 & 15 & 27 \end{bmatrix}$$

Para codificar a mensagem, multiplicamos a matriz A por M, tal que N = A·M.

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 21 & 29 & 1 & 3 & 18 & 5 & 4 & 9 & 20 & 15 & 29 \\ 14 & 1 & 29 & 5 & 4 & 21 & 3 & 1 & 3 & 1 & 15 & 27 \end{bmatrix}$$

Assim;

$$N = \begin{bmatrix} 29 & 64 & 116 & 8 & 13 & 75 & 18 & 13 & 30 & 61 & 60 & 114 \\ 24 & 43 & 87 & 7 & 10 & 57 & 13 & 9 & 21 & 41 & 45 & 85 \end{bmatrix}$$

Os elementos de N constituem a mensagem codificada: 29, 64, 116, 8, 13, 75, 18, 13, 30, 61, 60, 114, 24, 43, 87, 7, 10, 57, 13, 9, 21, 41, 45, 85.

Quando a mensagem codificada chegar ao destinatário, ele usará a matriz B decodificadora para ler a mensagem. Sabendo que B·N= B·A·M = I·M·M, temos:

Multiplicamos a matriz B por N.

$$\mathbf{BN} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 29 & 64 & 116 & 8 & 13 & 75 & 18 & 13 & 30 & 61 & 60 & 114 \\ 24 & 43 & 87 & 7 & 10 & 57 & 13 & 9 & 21 & 41 & 45 & 85 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BN} = \begin{bmatrix} 5 & 21 & 29 & 1 & 3 & 18 & 5 & 4 & 9 & 20 & 15 & 29 \\ 14 & 1 & 29 & 5 & 4 & 21 & 3 & 1 & 3 & 1 & 15 & 27 \end{bmatrix}$$

Finalmente, temos a matriz M=BN do remetente que é a mensagem original.

Agora é só reverter os números utilizando novamente a tabela alfanumérica.

5	**21**	**29**	**1**	**3**	**18**	**5**	**4**	**9**	**20**	**15**	**29**	**14**	**1**	**29**	**5**	**4**	**21**	**3**	**1**	**3**	**1**	**15**	**27**
E	**U**	**#**	**A**	**C**	**R**	**E**	**D**	**I**	**T**	**O**	**#**	**N**	**A**	**#**	**E**	**D**	**U**	**C**	**A**	**C**	**A**	**O**	**.**

Note que na mensagem inicial revertida em números há várias repetições de números, enquanto que a mensagem codificada não repete números, tornando-a mais difícil de ser desvendada. O que precisa ser escondido são apenas as matrizes A e B.

FONTE: Disponível em: <http://educacaomatematica2010.blogspot.com.br/2011/01/matrizes-e-criptografia.html>. Acesso em: 16 jan. 2016.