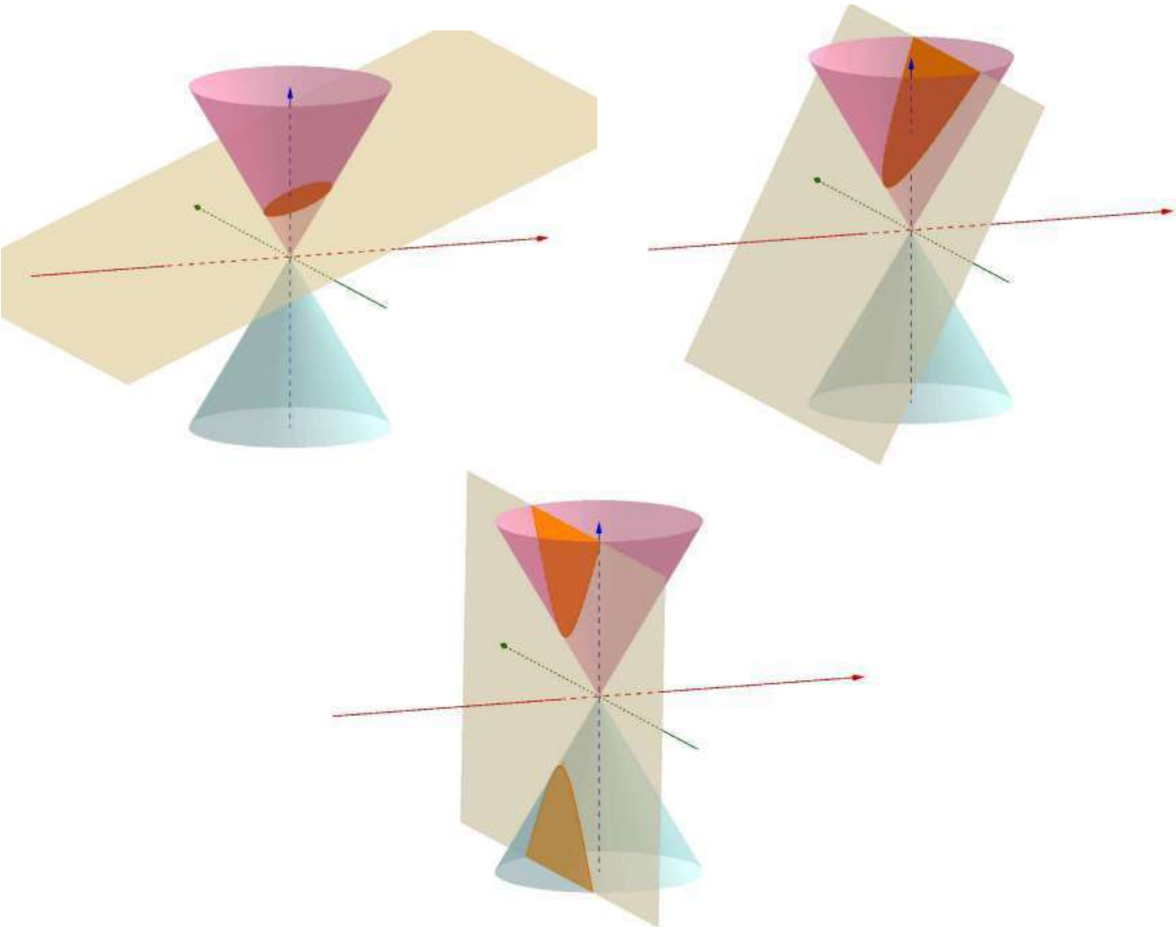
Semana 9 - Material de Apoio

Texto editado da apostila Geometria Analítica e Vetorial, de Miranda et al. O texto completo pode ser baixado no site da UFABC ou em nossa biblioteca do Moodle.

7 CÔNICAS

7.1 INTRODUÇÃO

As **curvas cônicas** ou **seções cônicas** são as curvas obtidas pela intersecção de um cone com planos que não contenham o vértice desse cone.



Existem essencialmente três tipos de cônicas que podem ser obtidas a partir de um cone cuja reta geratriz faz ângulo α com o eixo desse cone:

- *parábola*: obtida pela intersecção do cone com um plano que forma ângulo α com o eixo do cone;

- *elipse*: obtida pela intersecção do cone com um plano que forma um ângulo $\theta > \alpha$ com o eixo do cone;
- *hipérbole*: obtida pela intersecção do cone com um plano que forma um ângulo $\theta < \alpha$ com o eixo do cone.

Pode-se mostrar que o lugar geométrico de tais curvas num plano pode ser caracterizado por relações envolvendo a distância de seus pontos a seus focos e retas diretrizes como descrito a seguir (ver Seção 7.6). Assim sendo, definimos:

Definição 7.1 Uma **elipse** $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2 de eixo maior medindo $2a > \|\overrightarrow{F_1F_2}\|$ é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2é igual a $2a$. Ou seja, dados F_1 e F_2, com $\|\overrightarrow{F_1F_2}\| = 2c$, e um número $a > c$, dizemos que P é um ponto da elipse $\mathcal{E}$ se somente se:

$$\|\overrightarrow{F_1P}\| + \|\overrightarrow{F_2P}\| = 2a. \tag{7.1}$$

Definição 7.2 Uma **hipérbole** $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 de eixo transverso medindo $2a < \|\overrightarrow{F_1F_2}\|$ é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é igual a $2a$. Ou seja, dados F_1 e F_2, com $\|\overrightarrow{F_1F_2}\| = 2c$, e um número $a < c$, dizemos que P é um ponto da hipérbole $\mathcal{H}$ se somente se:

$$\left| \|\overrightarrow{F_1P}\| - \|\overrightarrow{F_2P}\| \right| = 2a. \tag{7.2}$$

Definição 7.3 Uma **parábola** $\mathcal{P}$ de foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujas distâncias ao ponto F e a reta d são iguais. Ou seja, dados F e d, dizemos que P é um ponto da parábola $\mathcal{P}$ se somente se:

$$\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d). \tag{7.3}$$

7.2 ELIPSE

Conforme descrito na Definição 7.1, uma elipse $\mathcal{E}$ é o lugar geométrico formado por pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, é constante.

Nesta seção estudaremos a equação chamada **forma canônica da elipse**, que representa uma elipse alinhada com plano cartesiano e centrada em sua origem. Antes, porém, fixemos a terminologia básica envolvida no estudo de elipses.

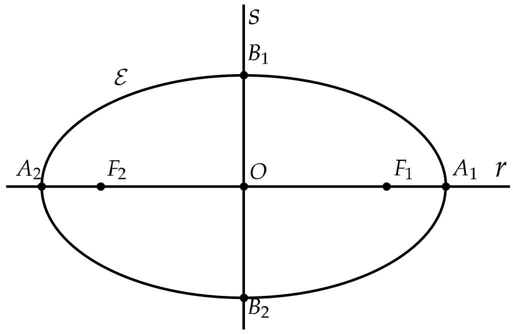


Figura 7.1: Elipse

7.2.1 Terminologia

- Os pontos F_1 e F_2 descritos na Definição 7.1 são denominados **focos da elipse**. O segmento $\overline{F_1F_2}$ de comprimento $2c$ é o **segmento focal da elipse** e $2c$ é a **distância focal da elipse.**
- A reta r contendo F_1 e F_2 é denominada **reta focal da elipse**.
- A intersecção de $\mathcal{E}$ com r consiste de dois pontos A_1 e A_2 que são os **vértices da elipse sobre a reta focal**. O segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ é o chamado **eixo focal da elipse** (ou **eixo maior da elipse**).
- O ponto médio $O \in r$ do segmento $\overline{F_1F_2}$ é o **centro da elipse**;
- A reta s perpendicular a r por O é a **reta não focal da elipse**.
- A intersecção de $\mathcal{E}$ com s consiste de dois pontos B_1 e B_2 que são os **vértices da elipse sobre a reta não focal**. O segmento $\overline{B_1B_2}$ é o chamado **eixo não focal da elipse** (ou **eixo menor da elipse**).
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre $\mathcal{E}$ é denominado **corda da elipse**;
- Chamamos de **amplitude focal** o comprimento de uma corda que contenha um dos focos da elipse e que seja perpendicular ao eixo focal desta. Notamos que existem duas dessas cordas, usualmente denominadas individualmente por *lactus rectum*.
- A menor região retangular que contém a elipse é chamada **retângulo fundamental da elipse**.
- A menor coroa circular que contém a elipse é denominada **coroa fundamental da elipse**.

7.2.2 Equação da Elipse

Comecemos nosso estudo da equação da elipse observando os dois exemplos abaixo descritos.

Exemplo 7.4 Usando a mesma notação descrita na Subseção 7.2.1, consideremos num sistema de coordenadas cartesiano uma elipse de focos $F_1 = (0,0)$ e $F_2 = (2,1)$ e eixo focal medindo $2a = 4$.

Tomando $P = (x,y)$ a equação (7.1) fica:

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = 4.$$

Vamos então manipular tal equação de modo a eliminar suas raízes quadradas.

Isolando o termo $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$ e elevemos a igualdade resultante ao quadrado de modo a obter:

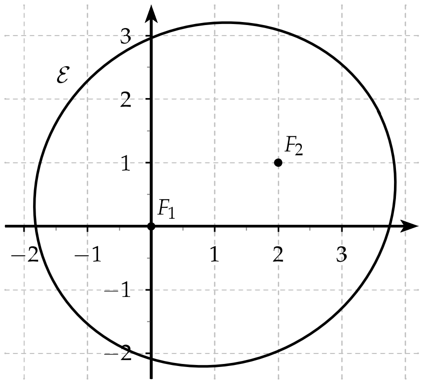


Figura 7.2: Exemplo 7.2.2

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2-2x+1\right) = 16 - 8\sqrt{x^2+y^2} + \left(x^2+y^2\right).$$

Simplificando e isolando $8\sqrt{x^2+y^2}$:

$$4x+2y+11 = 8\sqrt{x^2+y^2}.$$

Finalmente, elevando ao quadrado e simplificando a expressão obtida, chegamos a:

$$48x^2+60y^2+16xy+88x+44y+121 = 0. \tag{7.4}$$

Essa equação quadrática é, então, a representação cartesiana procurada da elipse $\mathcal{E}$.

Exemplo 7.5 Considere agora, num sistema de coordenadas cartesiano, $F_1 = (-4,0)$ e $F_2 = (4,0)$ de modo que o eixo focal r fica alinhado com o eixo Ox e o centro O da elipse fica sobre a origem do sistema de coordenadas. Estudemos uma elipse de eixo focal medindo $2a = 10$. Seja $P = (x,y)$ um ponto qualquer da elipse $\mathcal{E}$.

Em coordenadas cartesianas, a equação (7.1) fica:

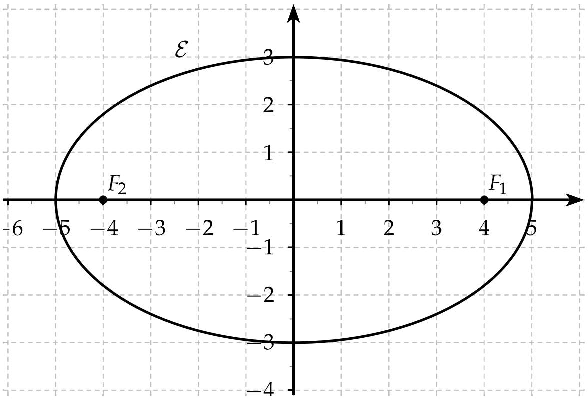


Figura 7.3: Exemplo 7.2.2

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+y^2} = 10.$$

Tentaremos no que se segue simplificar tal equação eliminando as raizes quadradas manipulando-a algebricamente.

Inicialmente, isolemos a raiz $\sqrt{(x+4)^2+y^2}$ e elevemos a igualdade obtida ao quadrado:

$$(x+4)^2+y^2 = 100 + \left[(x-4)^2+y^2\right] - 20\sqrt{(x-4)^2+y^2}.$$

Simplificando tal equação chegamos e manipulando-a de modo a isolar o termo $20\sqrt{(x-4)^2+y^2}$ ficamos com:

$$100-16x = 20\sqrt{(x-4)^2+y^2},$$

ou ainda:

$$5-\frac{4}{5}x = \sqrt{(x-4)^2+y^2},$$

Elevando esta igualdade ao quadrado chegamos a:

$$25+\frac{16}{25}x^2-8x = x^2+16-8x+y^2.$$

Donde temos:

$$\frac{9}{25}x^2+y^2 = 9.$$

Finalmente, dividindo-a por 9, segue:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1, \tag{7.5}$$

que é a forma canônica da elipse $\mathcal{E}$.

Esses exemplos e os cálculos neles envolvidos sugerem que toda elipse pode ser representada no plano cartesiano por um **equação quadrática** da forma:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

onde A, B, C, D, E e F são constantes (que dependem da elipse a ser representada). Tal suposição prova-se de fato verdadeira (deixamos ao leitor interessado sua demonstração).

No entanto, é visível que a Equação (7.5) obtida no segundo exemplo é muito mais simples que a Equação (7.4) obtida no primeiro. Isso ocorre devido a uma melhor escolha, no Exemplo 7.2.2, do sistema de coordenadas usado.

Encontremos, então, a equação da elipse $\mathcal{E}$ num sistema de coordenadas adequado a $\mathcal{E}$.

Assuma que os focos F_1 e F_2 possuem coordenadas $(-c,0)$ e $(c,0)$ respectivamente. Tomando $P=(x,y)$. Da Equação (7.1) obtemos:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

e logo $\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Elevando ao quadrado ambos os lados dessa expressão obtemos:

$$c^2 + 2cx + x^2 + y^2 = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} + c^2 + x^2 + y^2$$

Simplificando temos que

$$a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrando ambos os lados da equação obtemos

$$\begin{aligned}
a^2\left(c^2 - 2cx + x^2 + y^2\right) &= \left(a^2 - cx\right)^2 \\
a^2\left(c^2 - 2cx + x^2 + y^2\right) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
a^2\left(c^2 - 2cx + x^2 + y^2\right) - \left(a^4 - 2a^2cx + c^2x^2\right) &= 0 \\
-a^4 + a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 &= 0 \\
a^2\left(a^2 - c^2\right) &= \left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2
\end{aligned}$$

Substituindo $b^2 = \left(a^2 - c^2\right)$ temos

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2.$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2 chegamos finalmente a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Chegamos assim à seguinte proposição:

Proposição 7.6 *Uma elipse $\mathcal{E}$ de focos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ e eixo maior medindo $2a$ tem equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.6}$$

onde b é tal que $a^2 = b^2 + c^2$.

*Tal equação é usualmente conhecida como a **forma canônica da elipse** (ou **equação reduzida da elipse**).*

*Os números a, b e c são conhecidos como **parâmetros geométricos da elipse**.*

Observação 7.7 *Se na dedução da equação da elipse tivéssemos adotado o sistema de coordenadas com os focos sobre o eixo y e a origem entre os focos, isto é o sistema com o eixo maior*

$\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ sobre o eixo y e o eixo menor $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$ sobre o eixo x, teríamos, no final, a equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Observação 7.8 *Para uma elipse de equação:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com $a > b$, é fácil ver que:

- *O retângulo fundamental da elipse é a região retangular $R = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2; x \in [-a, a], y \in [-b, b]\}$.*
- *A coroa fundamental da elipse é a região $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2; b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$.*

7.2.3 Esboço da Elipse

Considere uma elipse $\mathcal{E}$ de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com $a, b > 0$.

Observe inicialmente que, se um ponto $P = (x, y)$ está na elipse $\mathcal{E}$, também a ela pertencem os pontos $P' = (-x, y)$, $P' = (x, -y)$ e $P' = (-x, -y)$. Desse modo, basta para esboçarmos $\mathcal{E}$ basta estudarmos a elipse no primeiro quadrante do sistema de coordenadas e refletirmos tal esboço ao longo dos eixos Ox e Oy (que são eixos de simetria da elipse).

Além disso, isolando-se o parâmetro y da equação de $\mathcal{E}$ obtemos:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

donde observamos que para esboçarmos $\mathcal{E}$ no primeiro quadrante basta estudarmos o gráfico da função:

$$\begin{aligned} f : [0, a] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Observação 7.9 *Note que para $x > a$, temos $(a^2 - x^2) < 0$ e, portanto, f não fica bem definida.*

Como $f(0) = b$ e $f(a) = 0$ temos que dois dos vértices da elipse têm coordenadas $(0, b)$ e $(a, 0)$.

Além disso, temos que f é *decrescente*, já que, para $x_0, x_1 \in [0, a]$, temos:

$$x_0 < x_1 \iff x_0^2 < x_1^2 \iff a^2 - x_0^2 > a^2 - x_1^2$$
$$\iff \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} > \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2} \iff f(x_0) > f(x_1).$$

O uso de cálculo diferencial nos permite concluir que o gráfico de f é *côncavo*, isto é fixos dois pontos P_0 e P_1 quaisquer sobre o gráfico de f, temos que o gráfico de f fica acima do segmento $\overline{P_0P_1}$.

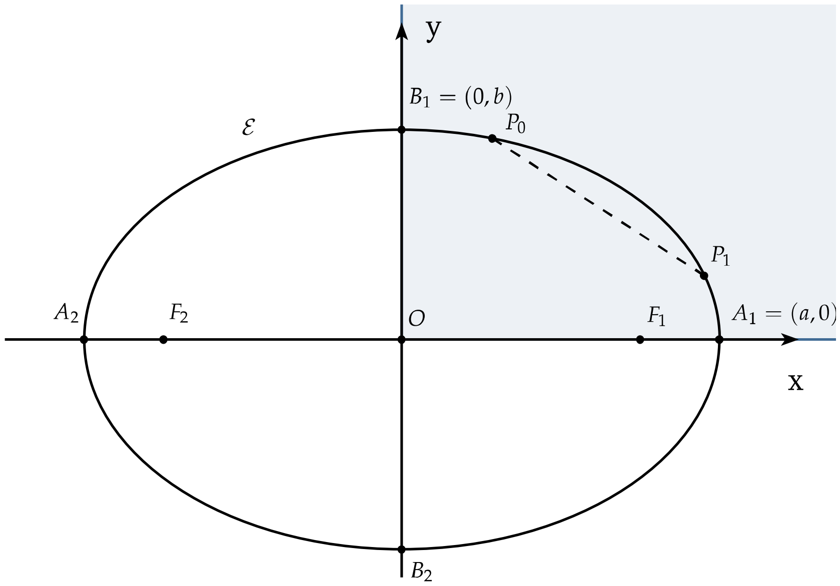


Figura 7.4: Esboço da Elipse

A concavidade do gráfico de f decorre do fato de que a segunda derivada de f é dada por:

$$f''(x) = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}},$$

que é negativa para todo $x \in (0, a)$.

Observação 7.10 *Uma elipse pode ser facilmente desenhada com o auxílio de um barbante de comprimento* $2a$*. Basta para isso fixarmos as extremidades do barbante nos focos e traçarmos uma curva com o lápis apoiado (porém não preso) no barbante de modo a manter este sempre esticado.*

7.2.4 Exemplos

Exemplo 7.11 Determine a equação da elipse de focos $(3,0)$ e $(-3,0)$ e vértices $(0,4)$ e $(0,-4)$.

Solução: Primeiramente notamos que temos uma elipse de focos no eixo Ox (pois a segunda coordenada dos focos é 0). Então, usando a mesma notação da Proposição 7.6, temos $c = 3$ e $b = 4$, e, como $a^2 = b^2 + c^2$, segue que $a = 5$. Desse modo a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

que é uma elipse com vértices $A_1 = (5,0)$, $A_2 = (-5,0)$, $B_1 = (0,4)$, $B_2 = (0,-4)$ e focos $F_1 = (3,0)$ e $F_2 = (-3,0)$. $\square$

Exemplo 7.12 Determine a equação da elipse de focos $(0,4)$ e $(0,-4)$ e eixo maior medindo 12.

Solução: Nesse exemplo temos uma elipse de focos no eixo Oy (pois a primeira coordenada dos focos é 0). Assim, usando a notação da Observação 7.15, temos $c = 4$ e $2a = 12$ e, como $a^2 = b^2 + c^2$, segue que $b = 2\sqrt{5}$. Desse modo a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1,$$

que é uma elipse com vértices $A_1 = (0,6)$, $A_2 = (0,-6)$, $B_1 = (2\sqrt{5},0)$, $B_2 = (-2\sqrt{5},0)$ e focos $F_1 = (0,4)$ e $F_2 = (0,-4)$. $\square$

Exemplo 7.13 Seja $\mathcal{E}$ uma elipse de centro na origem e tal que um de seus vértices sobre a reta focal é $(0,5)$. Sabendo que $\mathcal{E}$ passa pelo ponto $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right)$, determine a equação da elipse.

Solução: Nesse exemplo temos novamente uma elipse de focos no eixo Oy (nesse caso porque nos é informado que o centro da elipse está na origem e o ponto $(0,5)$ sobre a reta focal). Assim, usando a notação da Observação 7.15, temos $a = 5$. Desse modo a equação procurada é do tipo:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

com $0 < b < 5$.

Usando agora que o ponto $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right)$ pertence a $\mathcal{E}$ temos que:

$$\frac{\left(6\sqrt{5}/5\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{25} = 1.$$

Resolvento tal equação (de incógnita b) obtemos $b = 3$. Logo a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

□

7.3 HIPÉRBOLE

De acordo com a Definição 7.2, uma hipérbole $\mathcal{H}$ é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a $2a$ (onde $2a < \|\overrightarrow{F_1F_2}\|$).

Desenvolveremos nesta seção a equação tida como a **forma canônica da hipérbole**, que descreve uma hipérbole cujos focos estão em um dos eixos coordenados simetricamente dispostos em retação a origem. Assim como fizemos para a elipse, fixemos primeiramente a terminologia básica envolvida no estudo de hipérboles.

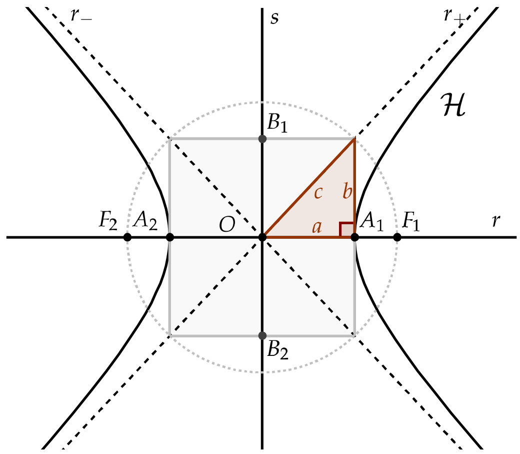


Figura 7.5: Hipérbole

7.3.1 Terminologia

- Os pontos F_1 e F_2 descritos na Definição 7.2 são denominados **focos da hipérbole**. O segmento $\overline{F_1F_2}$ de comprimento $2c$ é o **segmento focal da hipérbole** e $2c$ é a **distância focal da hipérbole**.
- A reta r contendo F_1 e F_2 é denominada **reta focal da hipérbole**.
- A intersecção de $\mathcal{H}$ com r consiste de dois pontos A_1 e A_2 que são os **vértices da hipérbole sobre a reta focal**. O segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ é o chamado **eixo transverso da hipérbole**.

- O ponto médio $O \in r$ do segmento $\overline{F_1F_2}$ é o **centro da hipérbole**;
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$ (onde $c^2 = a^2 + b^2$), cujos extremos B_1 e B_2 estão simetricamente localizados em relação ao centro O da hipérbole sobre a reta s perpendicular a r por O, é denominado **eixo conjugado da hipérbole**;
- Os números a, b e c são conhecidos como **parâmetros geométricos da hipérbole**.
- As retas r_- e r_+ pelo centro O de inclinação $-b/a$ e b/a respectivamente são as **assíntotas da hipérbole** (ver Subseção 7.3.3);
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre $\mathcal{H}$ é denominado **corda da hipérbole**;
- Chamamos de **amplitude focal da hipérbole** o comprimento de uma corda que contenha um dos focos da hipérbole e que seja perpendicular à reta focal desta.
- O **retângulo fundamental da hipérbole** é a região retangular $R = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2; x \in [-a,a], y \in [-b,b]\}$.
- Uma hipérbole é dita **equilátera** quando os parâmetros geométricos a e b dessa hipérbole são iguais.

7.3.2 Equação da Hipérbole

Escrevendo a equação (7.2), apresentada na Definição 7.2, e manipulando-a algébricamente de modo análogo ao que fizemos para a elipse chegamos ao seguinte resultado:

Proposição 7.14 *Uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$ e eixo transverso medindo $2a$ tem equação*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7.7}$$

onde b é tal que $c^2 = a^2 + b^2$.

*Tal equação é usualmente conhecida como a **forma canônica da hipérbole** (ou **equação reduzida da hipérbole**).*

Observação 7.15 *Se na dedução da equação da hipérbole tivéssemos partido de focos localizados sobre o eixo Oy (ou seja $F_1 = (0, c)$ e $F_2 = (0, -c)$), teríamos chegado à equação:*

$$-\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

7.3.3 Assíntotas

Definição 7.16 Uma reta r de equação $y = mx + n$ é dita ser uma **assíntota** de uma dada função $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ em $+\infty$ ($a \in \mathbb{R}$) se a distância entre o gráfico de f a reta r tende a zero quando x vai para infinito, isto é se:

$$\lim_{x \to +\infty} d(P, r) = 0, \tag{7.8}$$

onde $P = (x, f(x))$. Analogamente podemos definir assíntota de f em $-\infty$.

A proposíção abaixo mostra que hipérboles admitem duas assíntotas.

Proposição 7.17 *As retas r_+ e r_- de equações*

$$r_+ : y = \frac{b}{a}x \qquad e \qquad r_- : y = -\frac{b}{a}x$$

*são **assíntotas da hipérbole** $\mathcal{H}$ de equação*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demonstração: De fato, para uma tal hipérbole $\mathcal{H}$, temos que $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ se e somente se $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Então temos:

$$\begin{aligned}
d(P, r_+) &= \frac{|bx - ax|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \\
&= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{|bx + ay|}{|bx + ay|} \\
&= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{1}{|bx + ay|} \\
&= \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} \frac{1}{|bx + ay|}
\end{aligned}$$

Assim sendo, temos que

$$\lim_{(x,y) \to (\pm\infty, \pm\infty)} d(P, r_+) = 0.$$

Analogamente, temos também que

$$\lim_{(x,y) \to (\pm\infty, \mp\infty)} d(P, r_-) = 0.$$

□

Observação 7.18 *Rigorosamente, r_+ e r_- são assíntotas, no sentido da Definição 7.16, da função*

$$f_+(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

em $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente; e da função

$$f_-(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

em $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente. Funções essas obtidas da equação de $\mathcal{H}$ isolando-se o parâmetro y.

7.3.4 Esboço da Hipérbole

Seja uma Hipérbole $\mathcal{H}$ de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com $a, b > 0$.

Como na elipse observamos que, se um ponto $P = (x, y)$ está na hipérbole $\mathcal{H}$, também a ela pertencem os pontos $P' = (-x, y)$, $P' = (x, -y)$ e $P' = (-x, -y)$. Assim sendo, a hipérbole $\mathcal{H}$ é *simétrica* em relação aos eixos Ox e Oy.

Além disso, isolando-se o parâmetro y da equação de $\mathcal{H}$ obtemos:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Estudemos então o gráfico da função:

$$\begin{aligned} f : [a, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Observação 7.19 *Observe que, no caso a hipérbole, para $x \in [0, a)$, temos $(x^2 - a^2) < 0$ e, portanto, f não fica bem definida.*

Note agora que $f(a) = 0$ nos dá o vértice $A_1 = (a, 0)$ da hipérbole. Além disso, temos que f é *crescente*, já que, para $x_0, x_1 \in [a, +\infty)$, temos:

$$\begin{aligned} x_0 < x_1 &\iff x_0^2 < x_1^2 \iff x_0^2 - a^2 < x_1^2 - a^2 \\ &\iff \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2} < \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2} \iff f(x_0) < f(x_1). \end{aligned}$$

Cálculo diferencial nos permite concluir que o gráfico de f também é *côncavo* no caso da hipérbole.

A concavidade do gráfico de f decorre do fato de que a segunda derivada de f é dada por:

$$f''(x) = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}},$$

que é negativa para todo $x \in [a, +\infty)$.

Finalmente, sabemos que $f(x)$ tem a reta $r_+ : y = \frac{b}{a}x$ como *assíntota* e é tal que $f(x) < \frac{b}{a}x$ para todo $x \in [a, +\infty)$. Desse modo sabemos que $f(x)$ se aproxima assintoticamente de r_+, por baixo dessa reta, quando x tende a $+\infty$.

7.3.5 Exemplos

Exemplo 7.20 Uma hipérbole $\mathcal{H}$ tem vértices nos pontos $(0, 4)$ e $(0, -4)$, e um foco no ponto $(-5, 0)$. Obtenha a equação da hipérbole e de suas assíntotas.

Solução: É fácil perceber que $\mathcal{H}$ é uma hipérbole com centro na origem e focos no eixo Oy. Assim sua equação é do tipo:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

com $c^2 = a^2 + b^2$ e $2c$ a distância focal.

Como $\mathcal{H}$ tem vértices $(0, 4)$ e $(0, -4)$ segue que $a = 4$. Como um dos focos de $\mathcal{H}$ é $(-5, 0)$ segue que $c = 5$. Logo, a partir da igualdade $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos $b = 3$. Assim a equação de $\mathcal{H}$ é:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

As assíntotas de $\mathcal{H}$ são $r_+ : x = (b/a)y$ e $r_- : x = -(b/a)y$, ou seja:

$$r_+ : x = \left(\frac{3}{4}\right) y \qquad r_- : x = -\left(\frac{3}{4}\right) y.$$

□

Exemplo 7.21 Uma hipérbole $\mathcal{H}$ tem os focos num dos eixos coordenados e centro na origem. Sabendo que uma das assíntotas de $\mathcal{H}$ é a reta $3x - 2y = 0$ e que $P = (4\sqrt{2}, 6) \in \mathcal{H}$, determine a equação de $\mathcal{H}$.

Solução:

- **Focos no eixo Ox:**

  Seja $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a equação da hipérbole procurada. Como a reta $3x - 2y = 0$, que é a também a reta de equação $y = \dfrac{3}{2}x$, é uma das assíntotas obtemos:

  $$\frac{b}{a} = \frac{3}{2},$$

  ou seja $b = \dfrac{3}{2}a$.

  Usando que $P \in \mathcal{H}$ obtemos:

  $$\frac{(4\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{6^2}{b^2} = 1.$$

  Usando que $b = \dfrac{3}{2}a$ e simplificando algebricamente a igualdade chegamos então a:

  $$\frac{16}{a^2} = 1.$$

  Donde $a^2 = 16$, ou seja $a = 4$. Usando novamente que $b = \dfrac{3}{2}a$ obtemos então $b = 6$. Logo chegamos à equação:

  $$\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

- **Focos no eixo Oy:**

  Seja agora $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ a equação da hipérbole procurada. Como a reta $3x - 2y = 0$, que é a também a reta de equação $x = \dfrac{2}{3}y$, é uma das assíntotas obtemos:

  $$\frac{b}{a} = \frac{2}{3},$$

  ou seja $b = \dfrac{2}{3}a$.

  Usando que $P \in \mathcal{H}$ obtemos:

  $$\frac{6^2}{a^2} - \frac{(4\sqrt{2})^2}{b^2} = 1.$$

Usando que $b = \frac{3}{2}a$ e simplificando a equação chegamos a:

$$-\frac{36}{a^2} = 1.$$

Como $a^2 > 0$ observamos que não existe a tal que a igualdade acima seja satisfeita, ou seja, não existe hipérbole com focos no eixo Oy contendo P e com assíntota $3x - 2y = 0$.

Conclusão: A única hipérbole cuja equação resolve o problema é:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

□

Exemplo 7.22 Encontre o centro, os focos e vértices da hipérbole de equação:

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0.$$

Solução: Tentaremos aqui manipular a equação dada de forma a obter uma equação da forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

que representa uma hipérbole de centro $C = (x_0, y_0)$, focos $F_1 = (x_0 + c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 - c, y_0)$, onde $c^2 = a^2 + b^2$, e vértices $V_1 = (x_0 + a, y_0)$ e $V_1 = (x_0 - a, y_0)$.

Comecemos completando quadrados escrevendo:

$$(9x^2 - 18x + 9) - (4y^2 + 8y + 4) - 9 + 4 - 31 = 0.$$

Donde temos:

$$9(x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = 36.$$

E, finalmente:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{9} = 1.$$

Tal equação representa uma hipérbole de centro $C = (1, -1)$ de parâmetros $a = 2$, $b = 4$ e $c = 2\sqrt{5}$. Logo temos focos $F_1 = (1 + 2\sqrt{5}, -1)$ e $F_2 = (1 - 2\sqrt{5}, -1)$ e vértices $V_1 = (3, -1)$ e $V_1 = (-1, -1)$. □

7.4 PARÁBOLA

Conforme descrito na Definição 7.3, uma parábola $\mathcal{P}$ de foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujas distâncias a F e d são iguais.

Nesta seção estudaremos **funções quadráticas de uma variável**, cujos gráficos representam parábolas com retas diretrizes paralelas aos eixos coordenados. Em particular veremos a chamada **forma canônica da parábola** que é a equação que representa uma parábola com vértice na origem, foco sobre um dos eixos coordenados e reta diretriz paralela ao outro eixo coordenado.

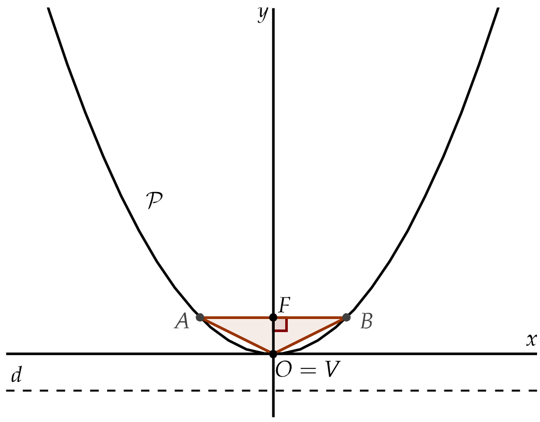


Figura 7.6: Parábola

7.4.1 Terminologia

- O ponto F descrito na Definição 7.3 é denominado **foco da parábola**.
- A reta d, também descrita na Definição 7.3 é denominada **diretriz da parábola**.
- A distância $2p$ entre o foco F e a reta diretriz d da parábola é chamada **parâmetro da parábola**.
- O ponto V de intersecção da perpendicular à d por F com a parábola é o **vértice da parábola**;
- A reta perpendicular a d por F é o **eixo de simetria da parábola**.
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre $\mathcal{P}$ é denominado **corda da parábola**;
- Tomando A e B os extremos da corda que contém F e é paralela a diretriz d, obtemos o triângulo $\triangle VAB$ denominado **triângulo fundamental da parábola**.

7.4.2 Equação da Parábola

Para uma parábola com diretriz paralela ao eixo Ox e vértice na origem do sistema de coordenadas vale o seguinte resultado:

Proposição 7.23 *Uma parábola $\mathcal{P}$ de foco $F = (0, p)$ e reta diretriz $d : y = -p$ $(p \neq 0)$ tem equação*

$$y = \left(\frac{1}{4p}\right) x^2. \tag{7.9}$$

Tal equação é usualmente conhecida como a ***forma canônica da parábola*** *(ou* ***equação reduzida da parábola****).*

Demonstração: Seja $P = (x, y)$ um ponto da parábola. A partir da equação $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$ obtemos:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

Simplificando e isolando y chegamos então a:

$$y = \left(\frac{1}{4p}\right) x^2.$$

□

Observação 7.24 *Para uma parábola de foco $F = (p, 0)$ e reta diretriz vertical $d : x = -p$ uma demonstração análoga nos levaria a equação:*

$$x = \left(\frac{1}{4p}\right) y^2, \tag{7.10}$$

a qual também é conhecida como forma canônica da parábola.

No caso particular da parábola, porém, é importante destacar sua descrição como gráfico de funções quadráticas de uma variável real.

Definição 7.25 Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **quadrática** quando existem a, b, c reais com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sobre funções quadráticas vale o seguinte resultado:

Proposição 7.26 *O gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com:*

- *foco:*
$$F = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta - 1}{4a}\right),$$
- *diretriz:*
$$d : y = -\frac{\Delta + 1}{4a},$$
- *vértice:*
$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Observação 7.27 *O gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o lugar geométrico dado pela equação $y = f(x)$. Logo, pela Proposição 7.26, $y = ax^2 + bx + c$ é a equação de uma parábola com diretriz paralela ao eixo Ox.*

É análoga a demonstração da proposição acima o fato de que $x = ay^2 + by + c$ é equação de uma parábola com:

- *foco:*
$$F = \left(-\frac{\Delta - 1}{4a}, -\frac{b}{2a}\right),$$
- *diretriz:*
$$d : x = -\frac{\Delta + 1}{4a},$$
- *vértice:*
$$V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right),$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Observação 7.28 *É importante notar que as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$, com $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$ para algum $\lambda \neq 0$, têm mesmas raízes, ou seja $f(x) = 0$ se e somente se $g(x) = 0$, no entanto seus gráficos são distintos e, portanto, representam parábolas diferentes.*

A Proposição 7.26 segue imediatamente dos Lemas 7.29 e 7.30, abaixo demonstrados.

Lema 7.29 *O gráfico de uma função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é uma parábola com:*

- *foco:*
$$F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right),$$
- *diretriz:*
$$d : y = k - \frac{1}{4a},$$
- *vértice $V = (m, k)$.*

Demonstração: Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do gráfico de f (de modo que $y = a(x-m)^2 + k$). Tome $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e $d : y = k - \frac{1}{4a}$. Mostremos que $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$ (ver Definição 7.3).

Por um lado temos:
$$\overrightarrow{FP} = \left(x - m, a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\right).$$

Donde segue:
$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{FP}\| &= \sqrt{(x-m)^2 + a^2(x-m)^4 - 2a(x-m)^2\frac{1}{4a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2(x-m)^4 + 2a(x-m)^2\frac{1}{4a} + \left(\frac{1}{4a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right)^2} \\ &= \left|a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right|. \end{aligned}$$

Por outro lado:
$$d(P, d) = \left|a(x-m)^2 + k - \left(k - \frac{1}{4a}\right)\right| = \left|a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\right|.$$

Logo, vale $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$.

Como o vértice da parábola é o ponto médio do menor segmento que liga F à d é fácil ver que $V = (m, k)$. □

Lema 7.30 *Vale a igualdade:*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Essa forma de escrever a função quadrática é conhecida como ***forma canônica*** *do trinômio de segundo grau.*

Demonstração: De fato:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Completando quadrado de modo a obter $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ temos:

$$\begin{aligned} a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right). \end{aligned}$$

□

Observação 7.31 *Vale a recíproca da Proposição 7.26, ou seja, fixos $m, n, p \in \mathbb{R}$ $(n \neq p)$ tais que $F = (m, n)$ e $d : y = p$ são respectivamente foco e diretriz de uma parábola então existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que a parábola é gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

Deixamos ao leitor interessado verificar que vale tal afirmação para:

$$a = \frac{1}{2(n-p)} \qquad b = -\frac{m}{n-p} \qquad c = n + p - \frac{m^2}{2(n-p).}$$

7.4.3 Esboço da Parábola

O esboço da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ (ou gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$) pode ser facilmente estudado a partir da forma canônica do trinômio (Lema 7.30):

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Fixemos, para estudo, $a > 0$. Facilmente observamos que f tem seu *mínimo* no ponto onde $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$, ou seja quando $x = -\frac{b}{2a}$.

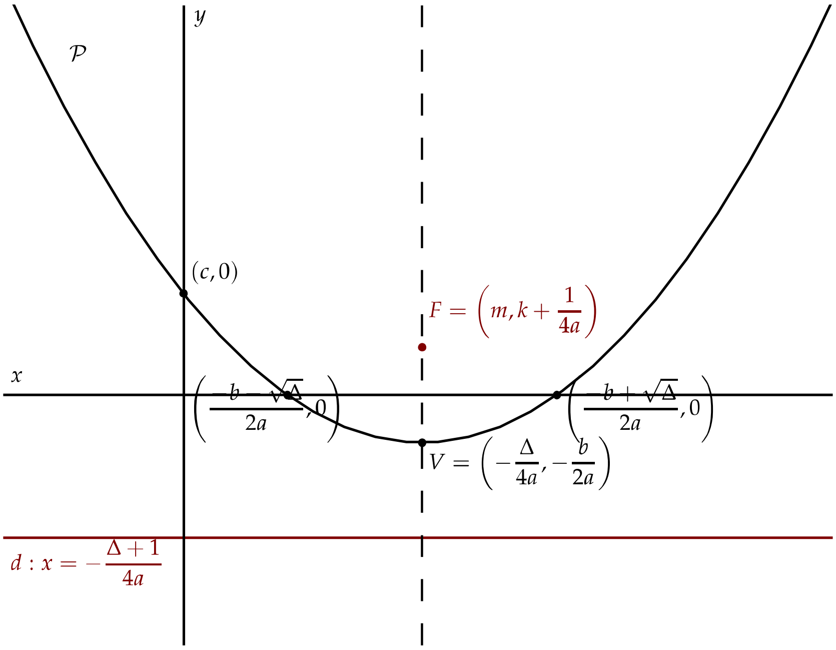


Figura 7.7: Parábola

Além disso, para $-\frac{b}{2a} \leq x_1 < x_2$ temos que:

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

donde segue que $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja f é *crescente* em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Analogamente vemos que f é *decrescente* em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

Um pouco de cálculo diferencial nos permite concluir que, para $a > 0$, o gráfico de f é **convexo**, isto é fixos dois pontos P_0 e P_1 quaisquer sobre o gráfico de f, temos que o gráfico de f fica abaixo do segmento $\overline{P_0P_1}$.

A convexidade do gráfico de f decorre do fato de que a segunda derivada de f é dada por:

$$f''(x) = a > 0.$$

Finalmente, se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, podemos obter as raizes de f facilmente igualando a forma canônica do trinômio e isolando o parâmetro x, obtendo assim a **Fórmula de Bhaskara**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observação 7.32 *Se $a < 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem seu máximo em $x = -\frac{b}{2a}$, é decrescente em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ e crescente em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, tem gráfico côncavo e tem suas raizes dada pela (mesma) Fórmula de Bhaskara (quando $\Delta > 0$).*

7.4.4 Exemplos

Exemplo 7.33 Determine a equação da parábola de foco $F = (1, 2)$ e reta diretriz $r : y = 4$.

Solução: Seja $P = (x, y)$ um ponto da parábola. A equação $\|\overrightarrow{FP}\| = d(p, r)$ em coordenadas fica:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = |y - 4|.$$

Elevando essa igualdade ao quadrado obtemos:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = y^2 - 8y + 16.$$

Isolando então o parâmetro y chegamos à:

$$y = \left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{11}{4}\right).$$

□

Exemplo 7.34 Consider uma parábola $\mathcal{P}$ com vértice na origem e com o eixo Ox como reta

focal. Suponha que o ponto $(3, -6)$ pertença à $\mathcal{P}$. Determine a equação de $\mathcal{P}$, seu foco F e reta diretriz d.

Solução: Sabemos que $\mathcal{P}$ é uma parábola de parâmetro $2p$ com equação da forma:

$$x = \pm\left(\frac{1}{4p}\right)y^2.$$

Como a primeira coordenada do ponto $(3, -6)$ é positiva temos:

$$\mathcal{P} : x = +\left(\frac{1}{4p}\right)y^2.$$

Substituindo as coordenadas do ponto $(3, -6)$ na equação acima chegamos à $p = 3$. Logo temos:

$$\mathcal{P} : x = \left(\frac{1}{12}\right)y^2.$$

Tal parábola tem, assim, foco $F = (3, 0)$ e reta diretriz $d : x = -3$. □

Exemplo 7.35 Considere a função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Escreva f na forma quadrática canônica e a partir de tal determine suas raízes. Determine as coordenadas do vértice, foco e a equação da reta diretriz da parábola que é gráfico de f.

Solução: Completando quadrado obtemos $f(x) = (x^2 - 6x + 9) - 1 = (x - 3)^2 - 1$ que é a forma canônica de f.

Igualando a forma canônica a zero chegamos a:

$$(x - 3)^2 = 1.$$

Donde temos $x - 3 = \pm 1$ ou ainda $x = 3 \pm 1$. Logo $x = 2$ e $x = 4$ são as raízes de f.

O vértice da parábola que é gráfico de f, ocorre no ponto onde f é mínimo, ou seja em $x = 3$. Logo as coordenadas do vértice são $(3, -1)$.

Claramente o eixo de simetria da parábola em questão é paralelo ao eixo Oy. Suponhamos então que o foco da parábola tenha coordenadas $F = (3, -1 + c)$ e a diretriz tenha equação $d : y = -1 - c$ (Note que o vértice da parábola dista o mesmo do foco e da diretriz da parábola).

Considere um ponto P qualquer da parábola diferente do vértice. Tome por exemplo $P = (0, 8)$. Devemos ter $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$.

Por um lado, temos então $\overrightarrow{FP} = (-3, 9 - c)$ e:

$$\|\overrightarrow{FP}\| = \sqrt{9 + (9 - c)^2}.$$

Por outro lado:

$$d(P, d) = 8 - (-1 - c) = 9 + c.$$

Deve valer então:

$$9 + (9 - c)^2 = (9 + c)^2.$$

Donde temos $c = (1/4)$.

Logo $F = (3, -3/4)$ e $d : y = -5/4$. □

7.5 ⋆ EXCENTRICIDADE

Proposição 7.36 *Sejam $\eta > 0$, $\eta \neq 1$ e $F = (c, 0)$. Tome r a reta de equação $x = c/\eta^2$ (logo paralela ao eixo Oy).*

Então, se $P = (x, y)$ satisfaz a igualdade

$$\overrightarrow{FP} = \eta d(P, r), \tag{7.11}$$

temos que:

- *se $0 < \eta < 1$, então P pertence a elipse de equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $a = c/\eta$ e b tal que $a^2 = b^2 + c^2$.

- *se $\eta > 1$, então P pertence a hipérbole de equação*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde $a = c/\eta$ e b tal que $c^2 = a^2 + b^2$.

Demonstração: Escrevendo a equação (7.11) em coordenadas cartesianas temos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \eta\left(\frac{c}{\eta^2} - x\right).$$

Elevando essa equação ao quadrado e manipulando algebricamente o resultado facilmente chegamos na igualdade:

$$x^2\left(1 - \eta^2\right) + y^2 = c^2\left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right).$$

Dividindo tal equação por $c^2\left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)$ obtemos:

$$\frac{x^2}{c^2/\eta^2} + \frac{y^2}{c^2\left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)} = 1.$$

Então, para $0 < \eta < 1$, observamos que $c^2\left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right) > 0$. Tomando então $a^2 = c^2/\eta^2$ e $b^2 = c^2\left(\frac{1}{\eta^2} - 1\right)$ (de modo que $a^2 = b^2 + c^2$) temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Caso $\eta > 1$ temos que $c^2\left(\frac{1}{\eta^2}-1\right) < 0$. Tomando $a^2 = c^2/\eta^2$ e $b^2 = -c^2\left(\frac{1}{\eta^2}-1\right)$ (de modo que $c^2 = a^2 + b^2$) segue:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

Proposição 7.37 *Sejam $\eta = 1$ e $F = (c, 0)$. Tome r a reta de equação $x = -c$. Então, se $P = (x, y)$ satisfaz a igualdade*

$$\|\overrightarrow{FP}\| = \eta d(P, r), \tag{7.12}$$

temos que:

$$y^2 = 4cx.$$

Demonstração: Escrevendo a equação (7.12) em coordenadas cartesianas temos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = (c + x).$$

Elevando essa equação ao quadrado e manipulando algebricamente o resultado facilmente obtemos:

$$y^2 = 4cx.$$

□

Observação 7.38 *A reta r e o ponto F desctritos nas proposições 7.36 e 7.37 são denominados respectivamente* **reta diretriz** *e* **foco** *da cônica em questão.*

O parâmetro η, que aparece em ambas as proposições, é denominado **excentricidade** *da cônica.*

Observação 7.39 *É facil mostrar que as recíprocas das proposições acima são válidas, ou seja:*

- *Se $P = (x, y)$ é um ponto da elipse de equação:*

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

  então, tomando $c > 0$ tal que $a^2 = b^2 + c^2$, $\eta = c/a$ (note $0 < \eta < 1$), $F = (c, 0)$ e $r : x = c/\eta^2$ temos que P satisfaz a equação (7.11).

- *Se $P = (x, y)$ é um ponto da hipérbole de equação:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

então, tomando $c > 0$ tal que $c^2 = a^2 + b^2$, $\eta = c/a$ (note $\eta > 1$), $F = (c, 0)$ e $r : x = c/\eta^2$ temos que P satisfaz a equação (7.11).

- *Se $P = (x, y)$ é um ponto da parábola de equação:*

$$y^2 = 4cx,$$

então, tomando $\eta = 1$, $F = (c, 0)$ e $r : x = -c$ temos que P satisfaz a equação (7.12) *(que é a mesma que a equação* (7.11)*).*

Excentricidade e a forma de uma cônica

A excentricidade η de uma cônica é usualmente usada para estudar o formato das cônicas.

No caso da elipse, quanto mais η for próximo à 0 maior a "semelhança" da elipse com um círculo. De fato, dividindo $a^2 = b^2 + c^2$ por a^2, teríamos que $(b/a)^2 = 1 - \eta^2$. Logo para η pequeno (b/a) estaria próximo de 1. Assim sendo, a e b seriam aproximadamente iguais. Tomando $b = a$ teríamos então a equação do círculo: $x^2 + y^2 = a^2$.

Para $\eta < 1$ próximo de 1 teríamos por outro lado que (b/a) seria próximo de 0, ou seja, b seria muito menor que a, o que nos levaria a uma elipse bem alongada ao longo do eixo Ox.

Na hipérbole, por sua vez, se $\eta > 0$ estiver perto de 1 teremos (b/a) próximo de 0, pois dividindo $c^2 = a^2 + b^2$ por a^2 obtemos $\eta^2 = 1 + (b/a)^2$. Isso implica que as assíntotas da hipérbole tem inclinação próxima a 0, ou seja, a medida que η fica mais perto de 1 as hipérboles ficam mais próximas do eixo Ox.

Por outro lado, a medida que η tende à $+\infty$ temos que (b/a) também tende a $+\infty$, ou seja, a inclinação das assíntotas da hipérbole crescem de modo que as hipérboles se aproximam do eixo Oy.

Em geometria, dizemos que duas figuras são **semelhantes** se pode-se obter uma a partir da outra pela composição de isometrias (translação, rotação, reflexão) e homotetias (fixos centro O e razão k, uma homotetia leva P em P' pela relação $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$).

Sobre a semelhança das cônicas valem o seguinte resultado:

Proposição 7.40 *Se duas cônicas têm mesma excentricidade então elas são semelhantes, em particular todas as parábolas são semelhantes entre si.*

Demonstração: Consideraremos apenas as cônicas cujas equações estão na sua forma canônica (pois, como veremos em breve, todas as cônicas podem ser transformadas na forma canônica por rotações e translações).

Considere duas elipses $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ de equações:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\mathcal{E}' : \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Se ambas têm mesma excentricidade temos que $(b/a) = (b'/a')$, donde segue que $(a/a') = (b/b') = k$. Tome então a homotetia h com centro na origem e razão k, ou seja tal que $h(x,y) = (kx, ky)$. Então, afirmamos que se $P = (x,y)$ está em $\mathcal{E}$, $h(P)$ está em $\mathcal{E}'$. De fato, se P satisfaz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

temos que

$$\frac{(kx)^2}{a'^2} + \frac{(ky)^2}{b'^2} = \frac{a'^2x^2}{a'^2a^2} + \frac{b'^2y^2}{b'^2b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A semelhança de hipérboles de mesma excentricidade segue de modo análogo.

No caso de duas parábolas $\mathcal{P} : y = ax^2$ e $\mathcal{P}' : y = a'x^2$, tome $k = (a/a')$. Daí se $P = (x,y)$ está em $\mathcal{P}$ temos que vale $y = ax^2$. Por outro lado tomando a homotetia $h(x,y) = (kx, ky)$ temos:

$$a'(kx)^2 = a'\left(\frac{a}{a'}\right)^2 x^2 = \left(\frac{a}{a'}\right) ax^2 = ky.$$

$\square$