Exercícios Propostos[1]

⚠ *Números complexos e plano de Argand-Gauss*

1. Escreva os números complexos na forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Em seguida, calcule o módulo ($|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$) e o complexo conjugado ($\overline{z} = a - bi$).

(a) $(1 + i) - (2 - 3i)$

(b) $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$

(c) $(4 - 7i)(1 + 3i)$

(d) $\dfrac{5 - i}{3 + 4i}$

(e) $\dfrac{3}{4 - 3i}$

(f) $1 + i^{101}$

2. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:

(a) $(3 + 4i)^2 - 2\overline{z} = z$

(b) $iz + 3\overline{z} = 5 - 2i$

(c) $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^2 + \dfrac{1}{z} = 1 + i$

(d) $z^2 = 4 + 2i\sqrt{5}$

3. Determine todas as soluções das equações no conjunto $\mathbb{C}$.

(a) $9z^2 + 16 = 0$

(b) $z^4 - 1 = 0$

(c) $2z^2 - 2z + 1 = 0$

(d) $z^2 + z + 2 = 0$

(e) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

(f) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$

4. Denote por $\mathrm{Re}(z)$ a parte real de z e $\mathrm{Im}(z)$ a parte imaginária. Mostre que as seguintes relações são válidas para quaisquer z, z_1 e z_2.

(a) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

(b) $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

(c) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$

(d) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$

(e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

5. Represente graficamente os pontos $z = x + iy$ que satisfazem as condições abaixo.

(a) $|z| = 2$

(b) $|z| < 2$

(c) $|z| > 2$

(d) $|z - 1| = 2$

(e) $|z + 1| = |z - 1|$

(f) $|z + 1| \geq |z|$

⚠ *Forma polar dos números complexos e fórmulas de De Moivre*

6. Sendo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ um número complexo não nulo na forma polar, mostre que $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$.

7. Determine a forma polar para zw, z/w e $1/z$ colocando primeiro z e w na forma polar com argumento entre 0 e 2π.

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 03/09/2024 até 16:00 horas**

(a) $z = 2\sqrt{3} - 2i$, $w = 8i$
(b) $z = \sqrt{3} + i$, $w = 1 + \sqrt{3}i$
(c) $z = 5(\sqrt{3} + i)$, $w = -3 - 3i$
(d) $z = 4\sqrt{3} - 4i$, $w = -1 + i$

8. Determine as potências indicadas usando o teorema de De Moivre.

(a) $(1 - \sqrt{3}i)^6$ (b) $(1 - i)^8$ (c) $(2\sqrt{3} + 2i)^7$ (d) $(1 + i)^{40}$

9. Determine as raízes indicadas e as esboce no plano complexo de Argand-Gauss.

(a) As raízes quadradas de i
(b) As raízes cúbicas de 1
(c) As raízes quartas de $1 + i$
(d) As raízes cúbicas de $-8i$
(e) As raízes quintas de -32
(f) As raízes sextas de 64

⚠ *Fórmula de Euler*

10. Para valores reais de $|x| \ll 1$, podemos escrever as *aproximações polinomiais*

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2},$$
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Use essas aproximações para verificar que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, onde $i^2 = -1$.

11. Escreva o número complexo na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, usando a fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.

(a) $e^{-i\pi/2}$
(b) $e^{2\pi i}$
(c) $e^{i\pi/3}$
(d) $e^{-i\pi}$
(e) $e^{2+i\pi}$
(f) $e^{\pi+i}$

12. Use a fórmula de Euler para demonstrar as seguintes fórmulas para $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Em seguida, prove o teorema fundamental da trigonometria: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Graus	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos(θ)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan(θ)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0