Содержание

Теоремы

Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть f и g имеют первообразные на $\langle a, b\rangle$, тогда:

1. $\int f+g=\int f+\int g; \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}: \int\alpha F=\alpha\int F$
2. $\phi:\langle c,d\rangle\to\langle a,b\rangle$, дифференцируема в $\langle c,d\rangle$:
$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt=\int f(x)dx|_{x=\phi(t)}=F(\phi(t))+C; t\in\langle c,d\rangle\$$$
3. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\neq 0$:
$$\int f(\alpha x+\beta)dx=\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+C$$
4. f, g – дифференцируемы на $\langle a,b\rangle$ и $f'g$ – имеет первообразную, тогда fg' тоже имеет первообразную и:
$$\int fg'=fg-\int f'g$$
5. (2.1) Если ϕ – обратима, то
$$\int f(x)dx=\left(\int f(\phi(t))\phi'(t)dt\right)|_{t:=\phi^{-1}(x)}$$
6.

Лемма об ускоренной сходимости

Пусть $f, g: D\to\mathbb{R}, D\in\mathbb{R}, a$ — предельная точка D, $a\in\mathbb{R}$

$\exists U(a): f, g\neq 0$, в $\dot{U}(a)\cap D, \lim\limits_{x\to a}f(x)=0, \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

Тогда $\forall x_k: (x_k\to a, x_k\in D, x_k\neq a), \quad \exists y_k\to a, y_k\in D, y_k\neq a$, что:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(y_k)}{g(x_k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_k)}{g(x_k)}=0$$

Доказательство:

Зафиксируем k и хотим чтобы выполнялось:

$$\left|\frac{g(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k} \qquad \wedge \qquad \left|\frac{f(x_n)}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k}$$

В знаменателе константа, слева константа, $f(x_n)$ и $g(x_n)$ стремится к нулю, очевевидно подобрать нужное n можем

Обозначим x_n как y_k. Последовательность построена, предел равен нулю

Правило Лопиталя

Пусть $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}, a \in \overline{R}$, f и g дифференцируемы. Пусть $g' \neq 0$ в (a, b)

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to_{x \to a+0} = A \in \overline{R}$ и $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность вида $\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}$

Тогда $\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство: $g' \neq 0 \Rightarrow g'$ — постоянного знака (из теоремы Дарбу) $\Rightarrow g$ — монотонна $\Rightarrow g \neq 0$

По Гейне: $x_k \to a, x_k \in (a, b), x_k \neq a$

Построим y_k из предыдущей леммы

$$\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} (\text{теорема Коши})$$
$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} \cdot \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$
$$\frac{f(y_k)}{g(x_k)} \to 0, \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} \to A, \frac{g(y_k)}{g(x_k)} \to 0$$
$$\Rightarrow \frac{f(x_k)}{g(x_k)} \to A$$

Теорема Штольца

Пусть $x_n, y_n \to 0$ — обе монотонны

$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to_{n \to +\infty} a \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда: $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$

Доказательство:

Воспользуемся следующим тривиальным фактом:

$$\begin{cases} \alpha < \frac{a}{b} < \beta \\ \alpha < \frac{c}{d} < \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha < \frac{a+c}{b+d} < \beta$$

1. $a \in \mathbb{R} > 0$:

$$\forall\varepsilon>0\ [\varepsilon<a]\quad\exists N_1:\forall n\ge N\ge N_1:$$
$$a-\varepsilon<\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N}<a+\varepsilon$$
$$a-\varepsilon<\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}}<a+\varepsilon$$
$$\vdots$$
$$a-\varepsilon<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<a+\varepsilon$$
$$\Rightarrow a-\varepsilon<\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}<a+\varepsilon$$
$$\frac{x_n}{y_n}\to 0,\qquad \frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}\to_{n\to+\infty}\frac{x_N}{y_N}$$
$$a-\varepsilon<\frac{x_N}{y_N}<a+\varepsilon$$

Получили:

$$\forall\varepsilon>0\ [\varepsilon<a]\quad\exists N_1:\forall N\ge N_1:a-\varepsilon<\frac{x_N}{y_N}<a+\varepsilon$$

2. $a<0, a\in\overline{\mathbb{R}}$. Меняем знак у одной из последовательности и сводим к 1
3. $a=+\infty$. Тоже все хорошо
4. $a=0$. Можно считать $a=+0$. Перевернем дробь: $\frac{y_n}{x_n}\to+\infty$

Пример неаналитической функции

???

Определения и формулировки

Первообразная, неопределенный интеграл

Пусть $F,f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$

Тогда F — **первообразная** f, если

$$\forall x\in\langle a,b\rangle:F'(x)=f(x)$$

Неопределенный интеграл f на $\langle a,b\rangle$ — это множество всех первообразных f = $\{F+c,c\in\mathbb{R}\}$, где F — любая первообразная $=\int F(x)dx=\int f$

Теорема о существовании первообразной

Пусть f – непрерывна на $\langle a,b\rangle$, тогда у нее существует первообразная

Таблица первообразных

$$\int 0 \cdot dx = C$$
$$\int dx = x + C$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \in \mathbb{R} \neq -1 \\ \ln|x| + c, \alpha = -1 \end{cases}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{|a + x|}{|a - x|} + C, |x| \neq a$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$