Regole generali per la risoluzione delle equazioni di ricorrenza

1) Se un'equazione di ricorrenza si presenta nella forma

$T(n) = aT(n-b) + \alpha$ (dove 'a' e 'b' sono interi e 'α' può essere un intero o una qualunque funzione)

l'equazione ha soluzione $T(n) = a^{n/b} \times \alpha$

2) Se un'equazione di ricorrenza si presenta nella forma

$T(n) = T(n-c) + f(n)$ (con 'c' costante)

si deve pensare ad un albero di ricorsione che si sviluppa in maniera lineare (quindi di altezza lineare) per cui si spende, ad ogni livello, la quantità data da f(n).

In primo luogo si ottiene il valore di f(n) calcolato in una variabile "i" secondo la seguente sommatoria: $\sum_{i=1}^{n} f(i)$

Dopodichè si può calcolare la soluzione dell'equazione di ricorrenza ragionando sulla questione dell'albero di ricorsione posta qualche riga sopra.

3) Se un'equazione si presenta nella forma

$T(n) = T(n-a) + T(n-b) + c$ (con 'a', 'b' e 'c' costanti) è conveniente effettuare uno “sdoppiamento” dell’equazione di ricorrenza, tramite una stima per eccesso e per difetto della stessa. Se ad esempio abbiamo un’equazione come

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

si effettua una “minorazione” al termine più piccolo tra i due

$$T(n) = 2T(n-2) + 1$$

e una “maggiorazione” al termine più grande tra i due

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

Queste due equazioni si presentano così nella forma proposta al punto 1, e sono facilmente risolvibili.

4) Se un’equazione si presenta nella forma

$$T(n) = aT(n/b) + T(n/b) + f(n) \quad \text{(con ‘a’ e ‘b’ costanti)}$$

bisogna utilizzare la tecnica dell’albero di ricorsione, tenendo presente che solitamente la somma dei due termini (n/b) restituisce n: questo ci porta alla conclusione che, ad ogni livello dell’albero, la somma della dimensione dei nodi è n e che per risolvere un nodo grande x spendiamo esattamente x, quindi ogni livello ci costa n. Il numero di livelli dell’albero dipende da quanto velocemente una ramificazione produrrà dei nodi tendenti al valore 1; se ad esempio abbiamo delle ramificazioni che producono dei nodi grandi n/4 e una ramificazione che produce nodi grandi n/2, i nodi grandi n/4 arriveranno prima degli altri a valere 1, quindi il numero di livelli dell'albero dipenderà appunto da questa ramificazione: per la precisione, avremmo $O(n \log_4 n)$ nodi. La soluzione finale, comunque, riducibile a $T(n) = O(n \log n)$.

5) Se un'equazione si presenta nella forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) \quad \text{(con 'a' e 'b' costanti)}$$

bisogna utilizzare il Teorema Fondamentale delle Ricorrenze (noto anche come Teorema Master), sul quale bisogna effettuare innanzitutto il seguente confronto

$$n^{\log_b a} \quad \text{vs} \quad f(n)$$

Se entrambe le funzioni sono asintoticamente uguali, l'equazione ha soluzione $T(n) = f(n) \times \log n$, altrimenti l'equazione acquisisce l'ordine asintotico della funzione polinomialmente più veloce. Possiamo distinguere 3 casi:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n)=O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$

2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

3. $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n)=\Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$ e $a f(n/b) \leq c f(n)$ per $c<1$ e n sufficientemente grande