3

Ricorrenze

Nel caso di algoritmi ricorsivi (ad esempio, merge sort, ricerca binaria, ricerca del massimo e/o del minimo), il tempo di esecuzione può essere descritto da una funzione ricorsiva, ovvero da un'equazione che descrive una funzione in termini del suo valore con input più piccoli. Esempio

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + n & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

3.1 Metodo iterativo

Il metodo iterativo consiste nello srotolare la ricorrenza, cioè "richiamare", la ricorrenza un certo numero di volte (ogni volta con un argomento di dimensione più piccola) fin quando non è possibile esprimerla come una somma di termini dipendenti solo da n e dalle condizioni iniziali. Questo metodo, così la sua variante – il *metodo dell'albero di ricorsione* – si rivela particolarmente utile quando non si hanno idee precise sull'ordine di grandezza della ricorrenza. Entrambi i metodi permettono infatti di "capire come si dipanano i costi nella ricorsione".

Exercise 3.1. Si risolva le seguenti ricorrenze usando il metodo iterativo. Supponete che ciascuna $T(n)$ sia pari ad uno quando $n = 1$

1. $T(n) = c + T(n/2)$
2. $T(n) = 1 + 2T(n/2)$
3. $T(n) = n^3 + 3T(n/3)$

Soluzione. 1. Ad esempio nel caso della prima ricorrenza:

$$\begin{aligned} T(n) &= c + T(n/2) & \\ &= c + c + T(n/4) = & \text{dopo due passi} \\ &= c + c + c + T(n/8) & \text{dopo tre passi} \\ &= c + c + c + c + T(n/16) = & \text{dopo quattro passi} \\ &= \dots & \\ &= kc + T(n/2^k) & \text{dopo } k \text{ passi} \end{aligned}$$

Continuiamo a srotolare la ricorrenza fin quando $n/2^k = 1$ ossia fin quando $k = \lg n$. Allora, possiamo riscrivere $T(n)$ come segue:

$$T(n) = c \log n + T(1) = c \lg n + 1 = \Theta(\lg n)$$

2.

$$\begin{aligned}
T(n) &= 1 + 2T(n/2) \\
&= 1 + 2\big(1 + 2T(n/4)\big) \\
&= 1 + 2 + 4T(n/4) && \text{dopo 2 passi} \\
&= 1 + 2 + 4\big(1 + 2T(n/8)\big) \\
&= 1 + 2 + 4 + 8T(n/8) && \text{dopo 3 passi} \\
&= 1 + 2 + 4 + \dots 2^{k-1} + 2^k T(n/2^k) && \text{dopo } k \text{ passi} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 2^k T(n/2^k)
\end{aligned}$$

Di nuovo continuiamo a srotolare la ricorrenza fin quando $n/2^k = 1$ ossia fin quando $k = \lg n$. Allora, possiamo riscrivere $T(n)$ come segue:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\lg n - 1} 2^i + 2^{\lg n} = \sum_{i=0}^{\lg n - 1} 2^i + n = \frac{1 - 2^{\lg n}}{1 - 2} + n =$$

$$-(1 - n) + n = (n - 1) + n = 2n - 1 = \Theta(n)$$

3.

$$\begin{aligned}
T(n) &= n^3 + 3T(n/3) \\
&= n^3 + 3\big((n/3)^3 + 3T(n/9)\big) \\
&= n^3 + n^3/9 + 9T(n/9) && \text{dopo 2 passi} \\
&= n^3 + n^3/9 + 9\big((n/9)^3 + 3T(n/27)\big) = \\
&= n^3 + n^3/9 + n^3/9^2 + 27T(n/27) && \text{dopo 3 passi} \\
&= n^3 + n^3/9 + n^3/9^2 + 27\big((n/27)^3 + 3T(n/81)\big) \\
&= n^3 + n^3/9 + n^3/9^2 + n^3/27^2 + 81T(n/81) \\
&= n^3 + n^3/9 + n^3/9^2 + n^3/9^3 + 81T(n/81) && \text{dopo 4 passi} \\
&= \dots \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} n^3/9^i + 3^k T(n/3^k) \\
&= n^3 \sum_{i=0}^{k-1} (1/9)^i + 3^k T(n/3^k) && \text{dopo } k \text{ passi}
\end{aligned}$$

In questo caso ci fermiamo quando $n/3^k = 1$ e quindi quando $k = \log_3 n$

$$T(n) = n^3 \sum_{i=0}^{\log_3 n - 1} (\frac{1}{9})^i + n = n^3 \, \frac{1 - (\frac{1}{9})^{\log_3 n}}{1 - \frac{1}{9}} + n = n^3 \, \frac{1 - (\frac{1}{9})^{\log_3 n}}{\frac{8}{9}} + n$$

$$= \frac{8}{9} n^3 \Big(1 - \frac{1}{9^{\log_3 n}}\Big) + n$$

Poichè $9^{\log_3 n} = n^{\log_3 9} = n^2$ (poichè $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$):

$$T(n) = \frac{9}{8}n^3\Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big) + n = \frac{9}{8}n^3 - \frac{9}{8}n + n = \frac{9}{8}n^3 - \frac{1}{8}n = \Theta(n^3)$$

3.2 Metodo dell'albero di ricorsione

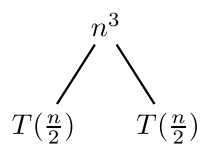
È una variante del metodo iterativo. Un albero di ricorsione permette di visualizzare lo sviluppo della ricorsione e dei costi; ogni suo nodo rappresenta il costo di un particolare sottoproblema appartenente all'insieme delle chiamate ricorsive della funzione. Il valore della ricorrenza viene calcolato sommando prima i costi dei nodi su ciascun livello, e poi determinando il costo totale di tutti i livelli dell'albero di ricorsione.

Exercise 3.2. Risolvere con il metodo dell'albero di ricorsione la seguente ricorrenza

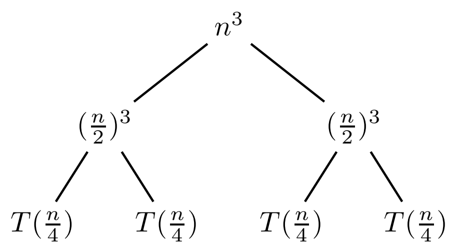
$$T(n) = \begin{cases} n^3 + 2T(n/2) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Soluzione. **Costruzione dell'albero di ricorsione**:

- inizialmente, l'albero ha un solo nodo – la radice – che rappresenta il costo complessivo della chiamata di $T(n)$
- la radice viene espansa secondo la definizione della ricorrenza. Nel nostro caso otteniamo il seguente albero



  ossia, una rappresentazione grafica del fatto che il costo di una chiamata di $T(n)$ è pari n^3 più il costo di due chiamate di $T(n/2)$
- in maniera simile, espandiamo i nodi relativi alle due chiamate di $T(n/2)$ ottendo



- a questo punto, ognuno di quattro nodi relativi ad una chiamata di $T(n/4)$ genererà un albero la cui radice – etichettata con $(n/4)^3$ – ha due figli che rappresentano il costo di una chiamata di $T(n/8)$.

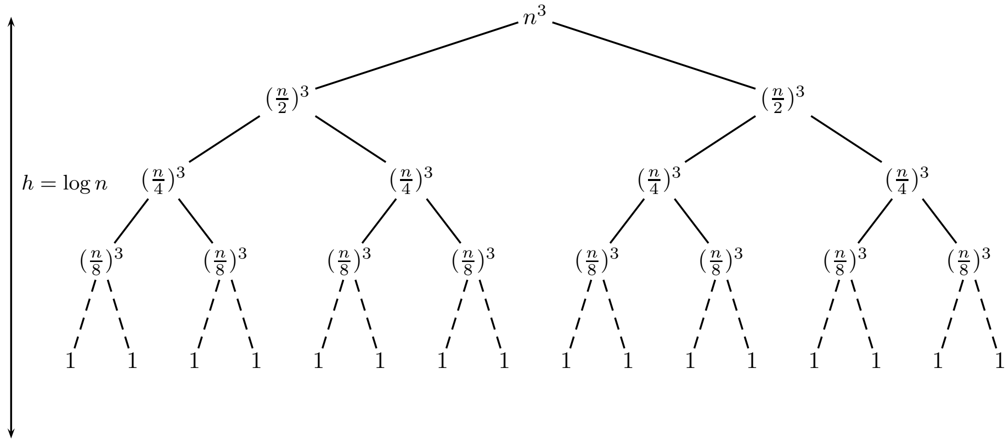


Fig. 3.1. Albero di ricorsione per $T(n) = 2T(n/2) + n^3$

- procediamo in questo modo fino a raggiungere la condizione di contorno, ossia quell particolare valore di n – tipicamente 1 – che non da luogo ad ulteriori chiamate ricorsive. Otteniamo l'albero descritto in Figura 3.1.

Calcolo dei costi associati all'albero

- ogni livello i ha 2^i nodi ognuno dei quali ha un costo di $(\frac{n}{2^i})^3$. Il costo di ciascun livello i è pari a:
$$c_i = 2^i \cdot (\frac{n}{2^i})^3 = \frac{n^3}{(2^i)^2} = \frac{n^3}{4^i}$$
- l'ultimo livello corrisponde ad una chiamata di $T(n/2^h)$ con $\frac{n}{2^h} = 1$ e quindi $h = \lg n$ (qui h è pari all'altezza h dell'albero).

$T(n)$ è pari alla somma della somma dei costi associati ai nodi dell'albero di ricorsione, in particolare

$$T(n) = \sum_{i=0}^{h} c_i = \sum_{i=0}^{\lg n} \frac{n^3}{4^i} = n^3 \cdot \sum_{i=0}^{\lg n} (\frac{1}{4})^i = n^3 \Big(\frac{1 - (\frac{1}{4})^{\lg n + 1}}{1 - \frac{1}{4}} \Big) =$$

$$n^3 \Big(\frac{1 - \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^{\lg n}}{\frac{3}{4}} \Big) = \frac{4}{3} n^3 \Big(1 - \frac{1}{4} \cdot \Big(\frac{1}{4}\Big)^{\lg n} \Big) =$$

$$\frac{4}{3} n^3 \Big(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{\lg n}} \Big) = \frac{4}{3} n^3 \Big(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{\lg 4}} \Big) =$$

$$\frac{4}{3} n^3 \Big(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^2} \Big) = \frac{4}{3} n^3 - \frac{1}{3} n = \Theta(n^3)$$

Exercise 3.3. Risolvere la seguente ricorrenza con il metodo dell'albero di ricorsione, assumendo che $T(1) = 1$

$$T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{n}{2}) + cn$$

Soluzione. L'albero di ricorsione per $T(n)$ è illustrato in Figura 3.2. Come per ogni altro albero di ricorsione, le dimensioni dei sottoproblemi diminuiscono via via che ci si allontana dalla radice, fino a raggiungere le condizioni di contorno (la condizione di contorno è il particolare valore di n – tipicamente 1 – che non da luogo ad ulteriori chiamate ricorsive). Il "problema" con questo tipo di ricorrenze è che le condizioni di contorno vengono raggiunte a diverse distanze dalla radice. Questo perchè il nodo più a sinistra e quello più a destra di un generico livello i corrispondono, rispettivamente, a sottoproblemi di dimensione $\frac{n}{4^i}$ e $\frac{n}{2^i}$, e $\frac{n}{4^i}$ decresce (e quindi arriverà ad assumere il valore 1) molto più rapidamente di $\frac{n}{2^i}$. In altri termini, la condizione di contorno viene raggiunta a sinistra ad una distanza h dalla radice con h tale che $\frac{n}{4^h} = 1$ (ossia $n = 4^h$ e quindi $h = \log_4 n$). A destra, invece, la condizione di contorno viene raggiunta ad una distanza k dalla radice con k tale che $\frac{n}{2^k} = 1$ (e quindi $k = \log n$).

Il costo di ogni livello i con $i = 0, \ldots, h$ è pari a $c_i = (\frac{3}{4})^i cn$. Infatti

- $c_0 = cn = (\frac{3}{4})^0 cn$
- $c_1 = \frac{cn}{4} + \frac{cn}{2} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{2})cn = \frac{3}{4}cn$
- $c_2 = \frac{cn}{16} + \frac{cn}{8} + \frac{cn}{8} + \frac{cn}{4} = (\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4})cn = \frac{1+2+2+4}{16}cn = \frac{9}{16}cn = (\frac{3}{4})^2 cn$
- $c_3 = (\frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8})cn = \frac{1+2+2+4+2+4+4+8}{64}cn = \frac{27}{64}cn = (\frac{3}{4})^3 cn$

Il costo di ciascun livello $i = h+1, ..., k$ è sicuramente minore o uguale di $(\frac{3}{4})^i cn$ (mancano alcuni nodi a sinistra e di conseguenza il contributo di questi nodi al costo complessivo del livello). Ricapitolando: l'albero è costituito da $\log n + 1$ livelli; inoltre, per ogni $i = 0 \ldots \log n$, il costo $c_i \le (\frac{3}{4})^i cn$. Quindi:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} c_i \le \sum_{i=0}^{\log n} \left(\frac{3}{4}\right)^i cn = cn \sum_{i=0}^{\log n} \left(\frac{3}{4}\right)^i = cn \, \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\log n + 1}}{1 - \frac{3}{4}} =$$

$$cn \, \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{\log n + 1}}{\frac{1}{4}} = 4cn \left(1 - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\log n}\right) = 4cn \left(1 - \frac{3}{4} n^{\log \frac{3}{4}}\right)$$

Ora, $\log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = -(\log 4 - \log 3) = -\log \frac{4}{3} = -\alpha$, con $\alpha = \log \frac{4}{3}$ e quindi (poichè $\frac{4}{3} > 1$) $\alpha > 0$. Allora $n^{\log \frac{3}{4}} = n^{-\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$ e $g(n) = 4cn \left(1 - \frac{3}{4} n^{\log \frac{3}{4}}\right) = 4cn \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n^\alpha}\right) = 4cn \left(1 - \frac{3}{4n^\alpha}\right) = \Theta(n)$. Infine, $T(n) \le g(n) = 4cn \left(1 - \frac{3}{4} n^{\log \frac{3}{4}}\right)$ e $g(n) = \Theta(n)$ implica $T(n) = O(n)$.

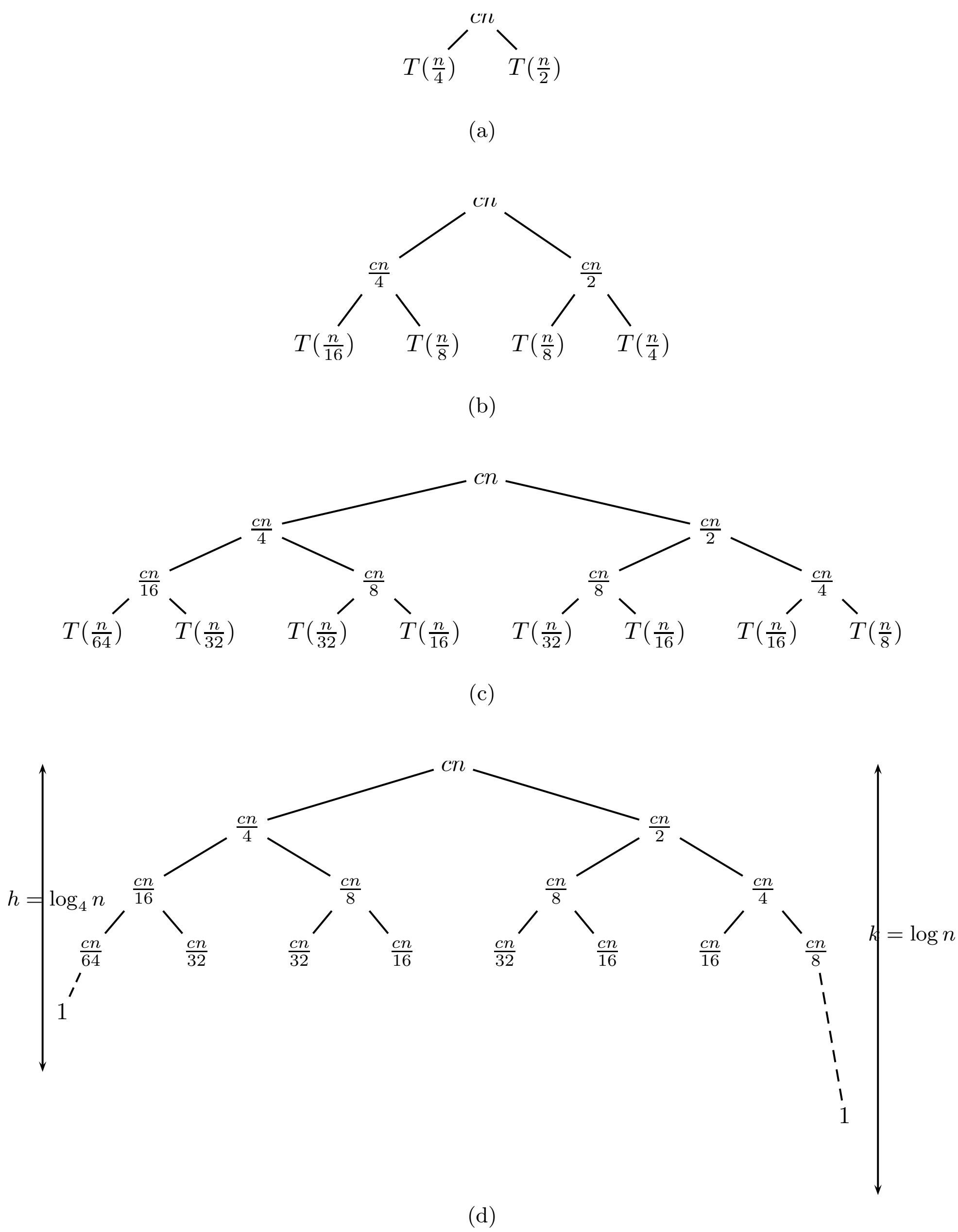


Fig. 3.2. Albero di ricorsione per $T(n) = T(n/4) + T(n/2) + cn$

Exercise 3.4. Risolvere con il metodo dell'albero di ricorsione la seguente ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} 3T(n/4) + \sqrt{n} & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Soluzione. [1]

- Ogni livello i dell'albero di ricorsione per $T(n)$ (vedi Figura 3.3) ha esattamente 3^i nodi ognuno dei quali ha un costo di $\frac{\sqrt{n}}{2^i}$. Il costo complessivo del livello i è: $c_i = 3^i \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^i} = (\frac{3}{2})^i \sqrt{n}$
- l'ultimo livello h contiene nodi (in realtà foglie) corrispondenti al costo di una chiamata di $T(\frac{n}{4^h})$ con $\frac{n}{4^h} = 1$ e quindi $h = \log_4 n$

  Allora

$$T(n) = \sum_{i=0}^{h} (\frac{3}{2})^i \sqrt{n} = \sqrt{n} \sum_{i=0}^{\log_4 n} (\frac{3}{2})^i = \sqrt{n} \ \cdot \ \frac{1 - (\frac{3}{2})^{\log_4 n + 1}}{1 - \frac{3}{2}} =$$

$$\sqrt{n} \ \cdot \ \frac{1 - (\frac{3}{2})^{\log_4 n + 1}}{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{n}\Big(\Big(\frac{3}{2}\Big)^{\log_4 n + 1} - 1\Big) = 2\sqrt{n}\Big(\frac{3}{2}\Big(\frac{3}{2}\Big)^{\log_4 n} - 1\Big) =$$

$$2\sqrt{n}\Big(\frac{3}{2} \cdot \frac{3^{\log_4 n}}{2^{\log_4 n}} - 1\Big) = 2\sqrt{n}\Big(\frac{3}{2} \cdot \frac{n^{\log_4 3}}{n^{\log_4 2}} - 1\Big) = 2\sqrt{n}\Big(\frac{3}{2} \cdot \frac{n^{\log_4 3}}{n^{\frac{1}{2}}} - 1\Big) =$$

$$2\sqrt{n}\Big(\frac{3}{2} \cdot \frac{n^{\log_4 3}}{\sqrt{n}} - 1\Big) = 3n^{\log_4 3} - 2\sqrt{n}$$

Infine $\frac{1}{2} = \log_4 2 < \log_4 3$, implica $T(n) = 3n^{\log_4 3} - 2\sqrt{n} = \Theta(n^{\log_4 3})$ poichè $n^{\log_4 3}$ è il termine di ordine superiore

3.3 Medoto della sostituzione

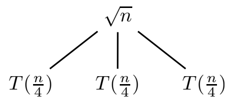
Il metodo della sostituzione prevede due passi. Nel primo passo si stima l'ordine di grandezza asintotico per $T(n)$. Nel secondo passo si dimostra, per induzione su n, la correttezza dell'ordine di grandezza stimato. Il metodo si rivela utile quando si ha già un'idea della soluzione alla ricorrenza studiata.

Exercise 3.5. Si consideri la seguente ricorrenza

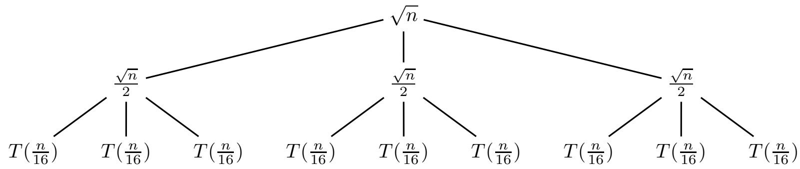
$$T(n) = \begin{cases} n^3 + 3T(n/3) & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Dimostrare, applicando il metodo della sostituzione che $T(n) = O(n^3)$

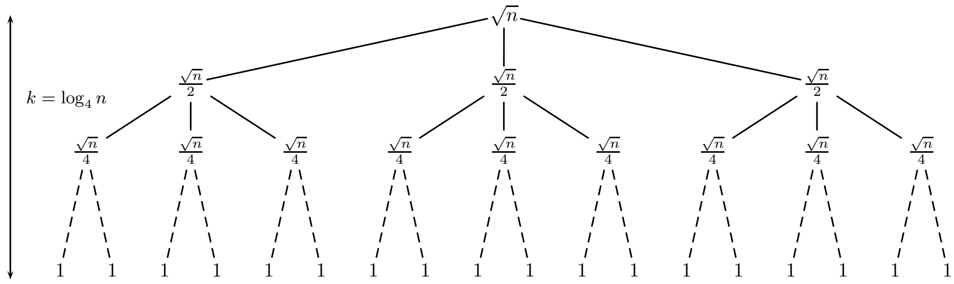
[1] per la risoluzione di questo esercizio occorre ricordarsi che $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$



(a)



(b)



(c)

Fig. 3.3. Albero di ricorsione per $T(n) = 3T(n/4) + \sqrt{n}$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che esistono delle costanti positive c ed n_0 tali che $T(n) \leq cn^3$ per ogni $n \geq n_0$. Procediamo per induzione su n.

- *Caso base* $n = 1$. Se scegliamo $c \geq 1$ allora $T(1) = 1 \leq c = c1^3$.
- *Passo induttivo* $n > 1$.

$$\begin{aligned} T(n) &= n^3 + 3T(\tfrac{n}{3}) \\ &\leq n^3 + 3c(\tfrac{n}{3})^3 \quad \text{per ip. induttiva } T(\tfrac{n}{3}) \leq c(\tfrac{n}{3})^3 \\ &= n^3 + \tfrac{1}{9}cn^3 \\ &= (1 + \tfrac{1}{9}c)n^3 \\ &\leq cn^3 \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza è vera solo se la costante c è scelta in maniera tale che $1 + \frac{1}{9}c \leq c$, ossia se $c - \frac{1}{9}c \geq 1$, il che implica $\frac{8}{9}c \geq 1$ e quindi $c \geq \frac{9}{8}$. Ricapitolando se scegliamo $c \geq \frac{9}{8}$ e $n_0 = 1$, allora $T(n) \leq cn^3$ per ogni $n \geq n_0$.

Exercise 3.6. Si consideri la seguente ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} T(n/2) + \log n \text{ se } n > 1 \\ \quad 1 \quad\quad\quad \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Dimostrare, applicando il metodo della sostituzione che $T(n) = O((\log n)^2)$

Soluzione. Dimostriamo che $T(n) \leq 2(\log n)^2$ per ogni $n \geq 2$ (qui abbiamo scelto $c = 2$ e $n_0 = 2$) Procediamo per induzione su n.

- *Caso base* $n = 2$. $T(2) = T(\frac{2}{2}) + \log 2 = T(1) + 1 = 2 = 2(\log 2)^2$.
- *Passo induttivo* $n > 2$.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\tfrac{n}{2}) + \log n && \text{per ip. induttiva } T(\tfrac{n}{2}) \leq 2(\log \tfrac{n}{2})^2 \\ &\leq 2(\log \tfrac{n}{2})^2 + \log n && \log \tfrac{n}{2} = \log n - \log 2 = \log n - 1 \\ &= 2(\log n - 1)^2 + \log n \\ &= 2(\log n)^2 - 4\log n + 2 + \log n \\ &= 2(\log n)^2 - (3\log n - 2) \\ &\leq 2(\log n)^2 \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza è vera poichè $n > 2$ implica $\log n > 1$ e $3\log n - 2 > 3 - 2 > 1$.

Exercise 3.7. Si consideri la seguente ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + n \text{ se } n > 1 \\ \quad\quad 1 \quad\quad\quad\quad \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Dimostrare, applicando il metodo della sostituzione che $T(n) = O(n)$

Soluzione. Dobbiamo dimostrare che esistono delle costanti positive c ed n_0 tali che $T(n) \leq cn$ per ogni $n \geq n_0$. Procediamo per induzione su n.

- *Caso base* $n = 1$. Se scegliamo $c \geq 1$ allora $T(1) = 1 \leq c = c1$.
- *Passo induttivo* $n > 1$.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\tfrac{n}{2}) + T(\tfrac{n}{4}) + n \text{ per ip. induttiva } T(\tfrac{n}{2}) \leq c\tfrac{n}{2} \text{ e } T(\tfrac{n}{4}) \leq c\tfrac{n}{4} \\ &= c\tfrac{n}{2} + c\tfrac{n}{4} + n \\ &= (\tfrac{c}{2} + \tfrac{c}{4} + 1)n \\ &= (\tfrac{3}{4}c + 1)n \\ &\leq cn \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza è vera se scegliamo c in maniera tale che $\frac{3}{4}c + 1 \leq c$, quindi $c - \frac{3}{4}c = \frac{1}{4}c \geq 1$. In definitiva basta scegliere $c \geq 4$.

Exercise 3.8. Fornire un limite asintotico stretto per la ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\frac{n-3}{2}) + n \text{ se } n > 3 \\ \quad\quad 1 \quad\quad\quad \text{se } 1 \leq n \leq 3 \end{cases}$$

Soluzione. La ricorrenza $T(n)$ è molto simile alla ricorrenza

$$T'(n) = \begin{cases} 2T'(\frac{n}{2}) + n & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

che ha il seguente limite asintotico stretto $T'(n) = \Theta(n \log n)$. Dimostriamo che $T(n) = \Theta(n \log n)$ usando il metodo della sostituzione. La prova consiste di due fasi: (1) dimostriamo che $T(n) = O(n \log n)$ e poi (2) dimostriamo che $T(n) = \Omega(n \log n)$.

(1) Per definizione $T(n) = O(n \log n)$ se esistono delle costanti positive c, n_0 tali che $T(n) \leq cn \log n$ per ogni $n \geq n_0$. Procediamo per induzione su n.

Casi base
- $n = 1$: $T(1) = 1 \not\leq c1 \log 1 = 0$ (per $n = 1$ la proprietà non è verificata, questo significa che n_0 deve essere maggiore di 1).
- $n = 2$: $T(2) = 1 \leq c2 \log 2 = 2c$ se scegliamo $c \geq \frac{1}{2}$.
- $n = 3$: $T(3) = 1 \leq c3 \log 3 = 3c \log 3$; vera se $c \geq \frac{1}{2}$. Infatti, se $c \geq \frac{1}{2}$ allora $3c \log 3 \geq 3c \log 2 = 3c \geq \frac{3}{2} \geq 1$.

Passo induttivo: $n > 3$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\tfrac{n-3}{2}) + n \\ &\leq 2(c\tfrac{n-3}{2} \log(\tfrac{n-3}{2})) + n \\ &\leq 2(c\tfrac{n}{2} \log(\tfrac{n}{2})) + n \\ &\leq cn(\log n - 1) + n \\ &= cn \log n - cn + n \\ &= cn \log n - n(c-1) \quad \text{poichè } c \geq 1 \\ &\leq cn \log n \end{aligned}$$

Ricapitolando, se scegliamo la costante $c \geq 1$, $T(n) \leq cn \log n$ per ogni $n \geq n_0 = 2$

(2) Per definizione $T(n) = \Omega(n \log n)$ se esistono delle costanti **positive** c, n_0 tali che $T(n) \geq cn \log n$ per ogni $n \geq n_0$. Procediamo per induzione su n.

Casi base
- $n = 1$: $T(1) = 1 \geq c1 \log 1 = 0$
- $n = 2$: $T(2) = 1 \geq c \cdot 2 \log 2 = 2c$ se scegliamo $c \leq \frac{1}{2}$.
- $n = 3$: $T(3) = 1 \geq c \cdot 3 \log 3 = 3c \log 3$. Poichè $3c \log 3 \leq 3c \log 4 = 6c$, $c \leq \frac{1}{6}$ implica $3c \log 3 \leq 6c \leq 1$. Possiamo sceglire $c \leq \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2}$

Passo induttivo: $n > 3$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(\tfrac{n-3}{2}) + n \\
&\geq 2(c\,\tfrac{n-3}{2}\log(\tfrac{n-3}{2})) + n \\
&= c(n-3)\log(\tfrac{n-3}{2}) + n && \text{poichè } n > 3 \text{ implica } \tfrac{n-3}{2} \geq \tfrac{n}{8} \\
&\geq c(n-3)\log(\tfrac{n}{8}) + n \\
&= c(n-3)(\log n - 3) + n \\
&= c[n\log n - 3n - 3\log n + 9] + n \\
&= cn\log n - 3cn - 3c\log n + 9c + n \\
&\geq cn\log n - 3cn - 3c\log n + n \\
&= cn\log n + (1-3c)n - 3c\log n && \text{se } c \leq \tfrac{1}{6}, 1-3c \geq 1 - 3\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2} \\
&\geq cn\log n + \tfrac{1}{2}n - 3c\log n && \text{se } c \leq \tfrac{1}{6}, -3c \geq -3\cdot\tfrac{1}{6} = -\tfrac{1}{2} \\
&\geq cn\log n + \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}\log n \\
&\geq cn\log n + \tfrac{1}{2}(n - \log n) \\
&\geq cn\log n
\end{aligned}
$$

Ricapitolando, se scegliamo la costante positiva $c \leq 1/6$, $T(n) \geq cn\log n$ per ogni $n \geq n_0 = 1$

3.4 Metodo dell'esperto

Exercise 3.9. Applicare il metodo dell'esperto per determinare i limiti asintotici stretti per le seguenti ricorrenze (assumete $T(n) = 1$ per $n = 1$)

1. $T(n) = 4T(n/2) + n$
2. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
3. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

Soluzione. In tutti e tre i casi abbiamo che $a = 4$ e $b = 2$. Cambia invece il "rapporto" tra $f(n)$ e $n^{\log_b a} = n^2$. Ognuna delle tre ricorrenze corrisponde ad un diverso con un caso del teorema del master.

1. $f(n) = n$ ed $f(n) = O(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ con $\varepsilon = 1 > 0$ (in altri termini, $n^{\log_b a}$ è un limite superiore per $f(n)$). Primo caso del teorema del master: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$
2. $f(n) = n^2$ ed $f(n) = \Theta(n^2) = \Theta(n^{\log_b a})$ (ossia, $n^{\log_b a}$ è un limite stretto per $f(n)$). Secondo caso del teorema del master: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n) = \Theta(n^2\log n)$
3. $f(n) = n^3$ ed $f(n) = \Omega(n^3) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ con $\varepsilon = 1 > 0$ (ossia, $n^{\log_b a}$ è un limite inferiore per $f(n)$). Inoltre, $af(\frac{n}{b}) = 4(\frac{n}{2})^3 = 4\frac{n^3}{8} = \frac{1}{2}n^3 \leq cn^3$ (se scegliamo $c \leq \frac{1}{2} < 1$). Terzo caso del teorema del master: $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$

Exercise 3.10. La ricorrenza $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n^2$ descrive il tempo di esecuzione di un algoritmo A. Un altro algoritmo A' ha un tempo di esecuzione $T'(n) = aT'(\frac{n}{4}) + n^2$. Quale è il più grande valore di a che rende A' asintoticamente più veloce di A.

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto la complessità asintotica di $T(n)$. Poichè $a = 8$ e $b = 2$, $f(n) = n^2$ ha $n^{\log_b a} = n^3$ come limite superiore (caso 1 del teorema del master). Allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$.

Analiziamo ora la seconda ricorrenza. Se scegliamo $a = 64$, allora $\log_b a = \log_4 64 = 3$. Esattamente come nel caso precedente, $T'(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$. Quindi, A e A' hanno lo stesso comportamento asintotico. Assumiamo, ora, $16 < a < 64$. Allora, $2 = \log_b 16 < \log_b a < \log_b 64 = 3$. In ognuno di questi casi, $f(n) = n^2 = O(n^2) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon > 0$ (di nuovo, caso 1 del teorema del master). Allora, $T'(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ con $\log_b a < 3$. Questo dimostra che il più grande valore di a che rende A' asintoticamente più veloce di A è 63.

Exercise 3.11. Il metodo dell'esperto può essere applicato alla ricorrenza La ricorrenza $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \log n$. Perchè o perchè no?

Soluzione. In questo caso $n^{\log_b a} = n^{\log 4} = n^2$ può solo essere un limite inferiore ne stretto per $f(n) = n^2 \log n$ (casi 1 e 2 del teorema del master). Quindi, l'unica speranza di poter risolvere questa ricorrenza con il teorema del master consiste nel cercare di ricondurla al terzo caso del suddetto teorema. Ricordo che il terzo caso del teorema del master richiede che (1) $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ per qualche $\varepsilon > 0$ e (2) che $af(n/b) \leq cf(n)$ per qualche $c < 1$. La seconda condizione nel nostro caso diventa:

$$4(\frac{n}{2})^2 \log(\frac{n}{2}) = n^2(\log n - 1) \leq cn^2 \log n$$

ossia

$$n^2(\log n - 1) - cn^2 \log n = n^2((1-c)\log n - 1) \leq 0$$

e, poichè $n^2 \geq 0$:

$$(1-c)\log n - 1 \leq 0$$

Il problema è che la disequazione $(1-c)\log n - 1 \leq 0$ non è sempre verificata. Infatti, per ogni $n > 2^{\frac{1}{1-c}}$, $\log n > \frac{1}{1-c}$ e $(1-c)\log n - 1 > (1-c) \cdot \frac{1}{1-c} - 1 = 1 - 1 = 0$. Questo significa che $T(n)$ non soddisfa la condizione (2) e quindi che il teorema del master non può essere usato per risolvere questa ricorrenza.

3.5 Misti

Exercise 3.12. Trovare un limite superiore ed inferiore per la seguente ricorrenza

$$T(n) = \sqrt{n} + 1$$

Assumete $T(n) = 1$ per $n \leq 2$.

Soluzione. Proviamo a risolvere la ricorrenza usando il metodo iterativo tenendo presente che $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$ e quindi che $T(n)$ può essere riscritta come $T(n) = n^{\frac{1}{2}} + 1$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^{\frac{1}{2}} + 1 \\
&= [(n^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + 1] + 1 = n^{\frac{1}{4}} + 2 \\
&= [(n^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} + 1] + 2 = n^{\frac{1}{8}} + 3 \\
&= [(n^{\frac{1}{8}})^{\frac{1}{2}} + 1] + 3 = n^{\frac{1}{16}} + 4 \\
&= \dots \\
&= n^{\frac{1}{2^k}} + k
\end{aligned}
$$

Ci fermiamo quando $n^{\frac{1}{2^k}} = 2$. Possiamo deteminare il valore di k come segue:

$$n^{\frac{1}{2^k}} = 2 \Rightarrow \log(n^{\frac{1}{2^k}})^2 = \log 2 \Rightarrow \frac{1}{2^k} \log n = 1 \Rightarrow 2^k = \log n$$

Quindi

$$\log(2^k) = \log(\log n) \Rightarrow k = \log\log n$$

Ricapitolando, $T(n) = 2 + \log\log n = \Theta(\log\log n)$

Exercise 3.13. Fornire un limite asintotico stretto per la ricorrenza $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \log n$.

Soluzione. La risolviamo con il metodo iterativo.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^2 \log n + 4T(\tfrac{n}{2}) \\
&= n^2 \log n + 4[(\tfrac{n}{2})^2 \log \tfrac{n}{2} + 4T(\tfrac{n}{4})] \\
&= n^2 \log n + n^2(\log n - 1) + 16T(\tfrac{n}{4}) && \text{dopo 2 passi} \\
&= n^2 \log n + n^2(\log n - 1) + 16[(\tfrac{n}{4})^2 \log \tfrac{n}{4} + 4T(\tfrac{n}{8})] \\
&= n^2 \log n + n^2(\log n - 1) + n^2(\log n - 2) + 64T(\tfrac{n}{8}) && \text{dopo 3 passi} \\
&= n^2 \log n + n^2(\log n - 1) + n^2(\log n - 2) + 64[(\tfrac{n}{8})^2 \log \tfrac{n}{8} + 4T(\tfrac{n}{16})] \\
&= n^2 \log n + n^2(\log n - 1) + n^2(\log n - 2) + n^2(\log n - 3) + 256T(\tfrac{n}{16}) && \text{dopo 4 passi} \\
&= \dots \\
&= n^2 \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} (\log n - i) + 4^k T(\tfrac{n}{2^k})
\end{aligned}
$$

Ci fermiamo quando $\frac{n}{2^k} = 1$ e quindi quando $k = \log n$. Allora

$$T(n) = n^2 \sum_{i=0}^{\log n - 1} (\log n - i) + 4^{\log n}$$

Ora:

- $4^{\log n} = n^{\log 4} = n^2$
- $\sum_{i=0}^{\log n-1} (\log n - i) =$ (ponendo $j = \log n - i$) $\sum_{j=1}^{\log n} j = \frac{\log n(\log n+1)}{2}$

Quindi:

$$T(n) = n^2 \sum_{i=0}^{\log n - 1} (\log n - i) + 4^{\log n} = n^2 \frac{\log n(\log n + 1)}{2} + n^2 = \Theta(n^2(\log n)^2)$$

[2] in generale, $\log n^a = a \log n$

Exercise 3.14. Fornire un limite asintotico stretto per la ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) + n & \text{se } n > 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Soluzione. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \frac{n-1}{2}$ implica $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \geq \frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$

Exercise 3.15. Posto $T(0) = T(1) = 1$, risolvere la seguente ricorrenza usando il metedo iterativo

$$T(n) = 2 \cdot T(n-2) + 3$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-2) + 3 \\ &= 2[2T(n-4) + 3] + 3 = 4T(n-4) + 2 \cdot 3 + 3 && \text{dopo 2 passi} \\ &= 4[2T(n-6) + 3] + 3 = 8T(n-6) + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 && \text{dopo 3 passi} \\ &= 8[2T(n-8) + 3] + 3 = 16T(n-8) + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 && \text{dopo 4 passi} \\ &= \dots \\ &= 2^k T(n-2k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \cdot 3 && \text{dopo } k \text{ passi} \end{aligned}$$

Se $n = 2m$ (è pari) ci fermiamo quando $n - 2k = 0$ e quindi quando $k = m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Se $n = 2m+1$ (è dispari) ci fermiamo quando $n-2k = 1$ e, di nuovo, quando $k = m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. In entrambi i casi:

$$T(n) = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 2^i \cdot 3 = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 3 \cdot \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 2^i = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 3 \cdot \frac{1 - 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1 - 2}$$

$$= 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 3 \cdot (2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1) = 4 \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 3$$

Ora: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2}$ implica $T(n) = 4 \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 3 \leq 4 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - 3 = O(2^{\frac{n}{2}})$

C

Altri esercizi sulle ricorrenze

L'obiettivo di questo capitolo è quello di fornire una serie di esercizi – molti dei quali già risolti – che vi consentirrano di acquisire le capacità necessarie per risolvere le ricorrenze.

C.1 Metodo Iterativo

Exercise C.1. risolvere le seguenti ricorrenze con il metodo iterativo

1. $T(1) = 1$, e per tutti gli $n \geq 2$, $T(n) = 3T(n-1) + 2$
2. $T(1) = 8$, e per tutti gli $n \geq 2$, $T(n) = 3T(n-1) - 15$
3. $T(1) = 3$, e per tutti gli $n \geq 2$, $T(n) = T(n-1) + 2n - 3$
4. $T(1) = 1$, e per tutti gli $n \geq 2$, $T(n) = 2T(n/2) + 6n - 1$

Soluzione. 1.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 + 3T(n-1) \\ &= 2 + 3\big(2 + 3T(n-2)\big) = 2 + 3 \cdot 2 + 9T(n-2) \\ &= 2 + 3 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 27T(n-3) \\ &= \cdots \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2 \cdot 3^i + 3^k T(n-k) \end{aligned}$$

In questo caso la ricorsione viene srotolata fin quando $n - k = 1$, ossia quando $k = n - 1$. Allora possiamo concludere che

$$\begin{aligned} T(n) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-2} 2 \cdot 3^i + 3^{n-1}T(1) = 2\sum_{i=0}^{n-2} 3^i + 3^{n-1} = \\ &= 2\tfrac{3^{n-1}-1}{2} + 3^{n-1} = (3^{n-1} - 1) + 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} T(n) &= -15 + 3T(n-1) \\ &= -15 + 3\big(-15 + 3T(n-2)\big) = -15 - 3 \cdot 15 + 9T(n-2) \\ &= -15 - 3 \cdot 15 - 9 \cdot 15 + 27T(n-3) \\ &= \cdots \\ &= -15\textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 3^i + 3^k T(n-k) \end{aligned}$$

Di nuovo, la ricorsione viene srotolata fin quando $n - k = 1$, ossia quando $k = n - 1$. Allora possiamo concludere che

$$\begin{aligned}T(n) &= -15\textstyle\sum_{i=0}^{n-2} 3^i + 3^{n-1}T(1) = -15\frac{1-3^{n-1}}{1-3} + 3^{n-1}\cdot 8\\ &= -\tfrac{15}{2}(3^{n-1}-1) + 3^{n-1}\cdot 8 = 3^{n-1}(8-\tfrac{15}{2}) + \tfrac{15}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 3^{n-1} + \tfrac{15}{2}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}T(n) &= (2n-3) + T(n-1)\\ &= (2n-3) + (2(n-1)-3) + T(n-2)\\ &= (2n-3) + (2(n-1)-3) + (2(n-2)-3) + T(n-3)\\ &= \cdots\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1}(2(n-i)-3) + T(n-k)\end{aligned}$$

Di nuovo, la ricorsione viene srotolata fin quando $n-k=1$, ossia quando $k=n-1$. Allora possiamo concludere che

$$\begin{aligned}T(n) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-2}(2(n-i)-3) + T(1)\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-2}(2(n-i)-3) + 1\ (\star)\end{aligned}$$

A questo punto, ponendo $j = 2(n-i)-3$ (**nota**: se $i=0$ allora $j=2n-3$, mentre $i=n-2$ implica $j = 2(n-(n-2))-3 == 2\cdot 2-3 = 1$) abbiamo che

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i=0}^{n-2}(2(n-i)-3) = \sum_{j=1}^{2n-3} j &= \tfrac{(2n-3)(2n-3+1)}{2}\\ &= \tfrac{(2n-3)(2n-2)}{2}\\ &= (2n-3)(n-1)\\ &= 2n^2-5n+3\end{aligned}$$

Sostituendo questo valore in $(\star)$ otteniamo infine:

$$T(n) = 2n^2-5n+3+1 = 2n^2-5n+4$$

4.

$$\begin{aligned}T(n) &= (6n-1) + 2T(\tfrac{n}{2})\\ &= (6n-1) + 2(6\tfrac{n}{2}-1) + 4T(\tfrac{n}{4})\\ &= (6n-1) + (6n-2) + 4T(\tfrac{n}{4})\\ &\quad \text{dopo due sostituzioni}\\ &= (6n-1) + (6n-2) + 4(6\tfrac{n}{4}-1) + 8T(\tfrac{n}{8})\\ &= (6n-1) + (6n-2) + (6n-4) + 8T(\tfrac{n}{8})\\ &\quad \text{dopo tre sostituzioni}\\ &= \cdots\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1}(6n-2^i) + 2^kT(\tfrac{n}{2^k})\end{aligned}$$

In questo caso ci fermiamo quando $\frac{n}{2^k}=1$ ossia quando $k=\log n$. Allora:

$$\begin{aligned}T(n) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\log n-1}(6n-2^i) + 2^{\log n}\cdot T(1)\\ &= 6n\textstyle\sum_{i=0}^{\log n-1}1 - \sum_{i=0}^{\log n-1}2^i + n\end{aligned}$$

Ora $\sum_{i=0}^{\log n-1}1 = \log n$, mentre $\sum_{i=0}^{\log n-1}2^i = \frac{1-2^{\log n}}{1-2} = 2^{\log n}-1 = n-1$. Quindi

$$T(n) = 6n\log n - (n-1) + n = 6n\log n + 1$$