

Regole generali per la risoluzione delle equazioni di ricorrenza

1) Se un'equazione di ricorrenza si presenta nella forma

$$T(n) = aT(n-b) + \alpha \quad (\text{dove 'a' e 'b' sono interi e '}\alpha\text{' può essere un intero o una qualunque funzione})$$

l'equazione ha soluzione $T(n) = a^{n/b} \times \alpha$

2) Se un'equazione di ricorrenza si presenta nella forma

$$T(n) = T(n-c) + f(n) \quad (\text{con 'c' costante})$$

si deve pensare ad un albero di ricorsione che si sviluppa in maniera lineare (quindi di altezza lineare) per cui si spende, ad ogni livello, la quantità data da $f(n)$.

In primo luogo si ottiene il valore di $f(n)$ calcolato in una variabile "i" secondo la seguente sommatoria: $\sum_{i=1}^n f(i)$

Dopodichè si può calcolare la soluzione dell'equazione di ricorrenza ragionando sulla questione dell'albero di ricorsione posta qualche riga sopra.

3) Se un'equazione si presenta nella forma

$$T(n) = T(n-a) + T(n-b) + c \quad (\text{con 'a', 'b' e 'c' costanti})$$

è conveniente effettuare uno “sdoppiamento” dell’equazione di ricorrenza, tramite una stima per eccesso e per difetto della stessa. Se ad esempio abbiamo un’equazione come

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

si effettua una “minorazione” al termine più piccolo tra i due

$$T(n) = 2T(n-2) + 1$$

e una “maggiorazione” al termine più grande tra i due

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

Queste due equazioni si presentano così nella forma proposta al punto 1, e sono facilmente risolvibili.

4) Se un’equazione si presenta nella forma

$$T(n) = aT(n/b) + T(n/b) + f(n) \text{ (con 'a' e 'b' costanti)}$$

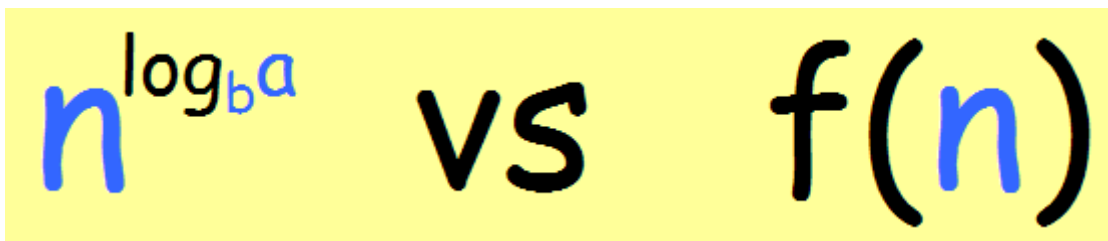
bisogna utilizzare la tecnica dell’albero di ricorsione, tenendo presente che solitamente la somma dei due termini (n/b) restituisce n : questo ci porta alla conclusione che, ad ogni livello dell’albero, la somma della dimensione dei nodi è n e che per risolvere un nodo grande x spendiamo esattamente x , quindi ogni livello ci costa n . Il numero di livelli dell’albero dipende da quanto velocemente una ramificazione produrrà dei nodi tendenti al valore 1; se ad esempio abbiamo delle ramificazioni che producono dei

nodi grandi $n/4$ e una ramificazione che produce nodi grandi $n/2$, i nodi grandi $n/4$ arriveranno prima degli altri a valere 1, quindi il numero di livelli dell'albero dipenderà appunto da questa ramificazione: per la precisione, avremmo $O(n \log_4 n)$ nodi. La soluzione finale, comunque, riducibile a $T(n) = O(n \log n)$.

5) Se un'equazione si presenta nella forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) \quad (\text{con 'a' e 'b' costanti})$$

bisogna utilizzare il Teorema Fondamentale delle Ricorrenze (noto anche come Teorema Master), sul quale bisogna effettuare innanzitutto il seguente confronto


$$n^{\log_b a} \quad \text{vs} \quad f(n)$$

Se entrambe le funzioni sono asintoticamente uguali, l'equazione ha soluzione $T(n) = f(n) \times \log n$, altrimenti l'equazione acquisisce l'ordine asintotico della funzione polinomialmente più veloce. Possiamo distinguere 3 casi:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$

2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

3. $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$ e
 $a f(n/b) \leq c f(n)$ per $c < 1$ e n sufficientemente
grande