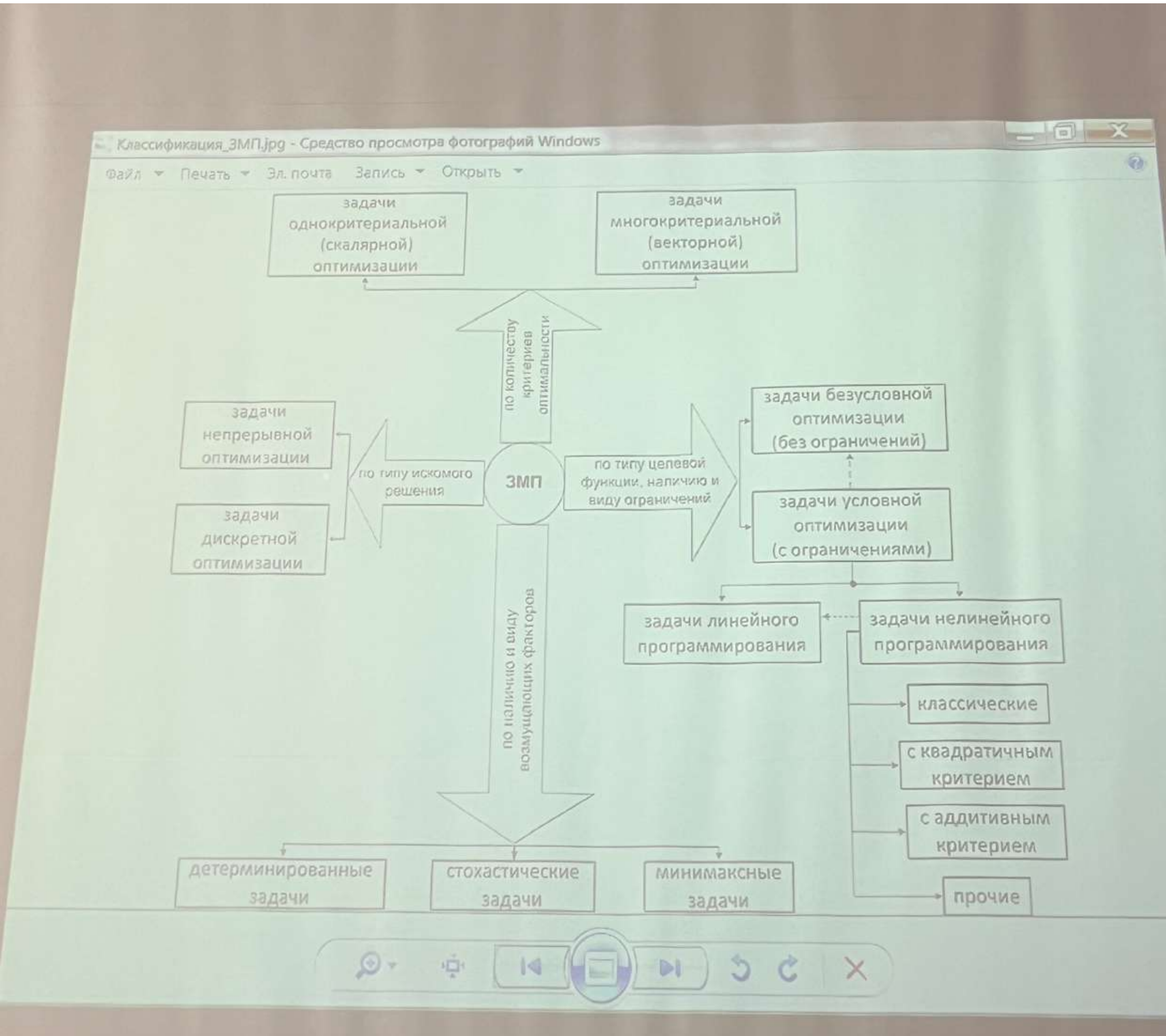
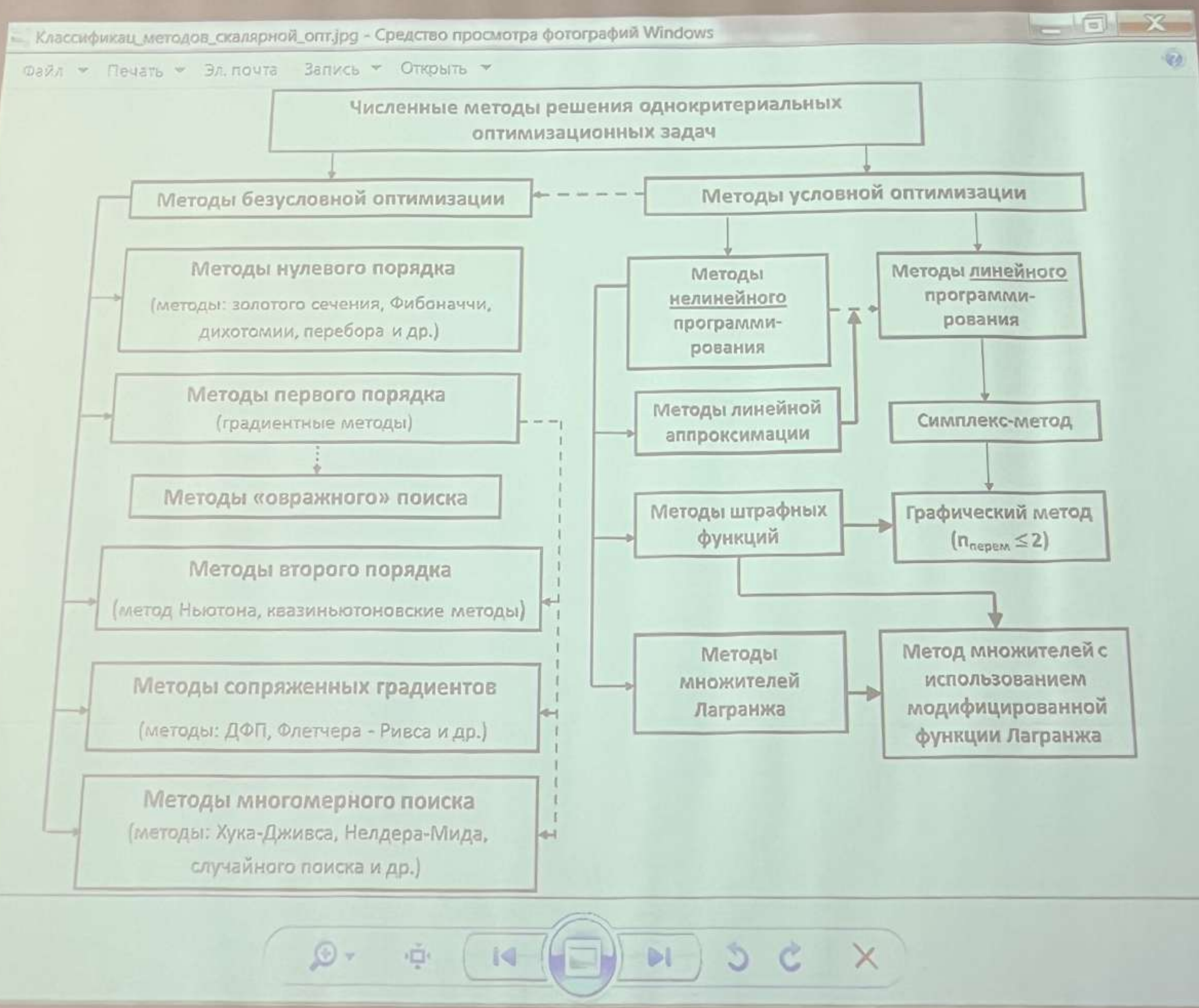
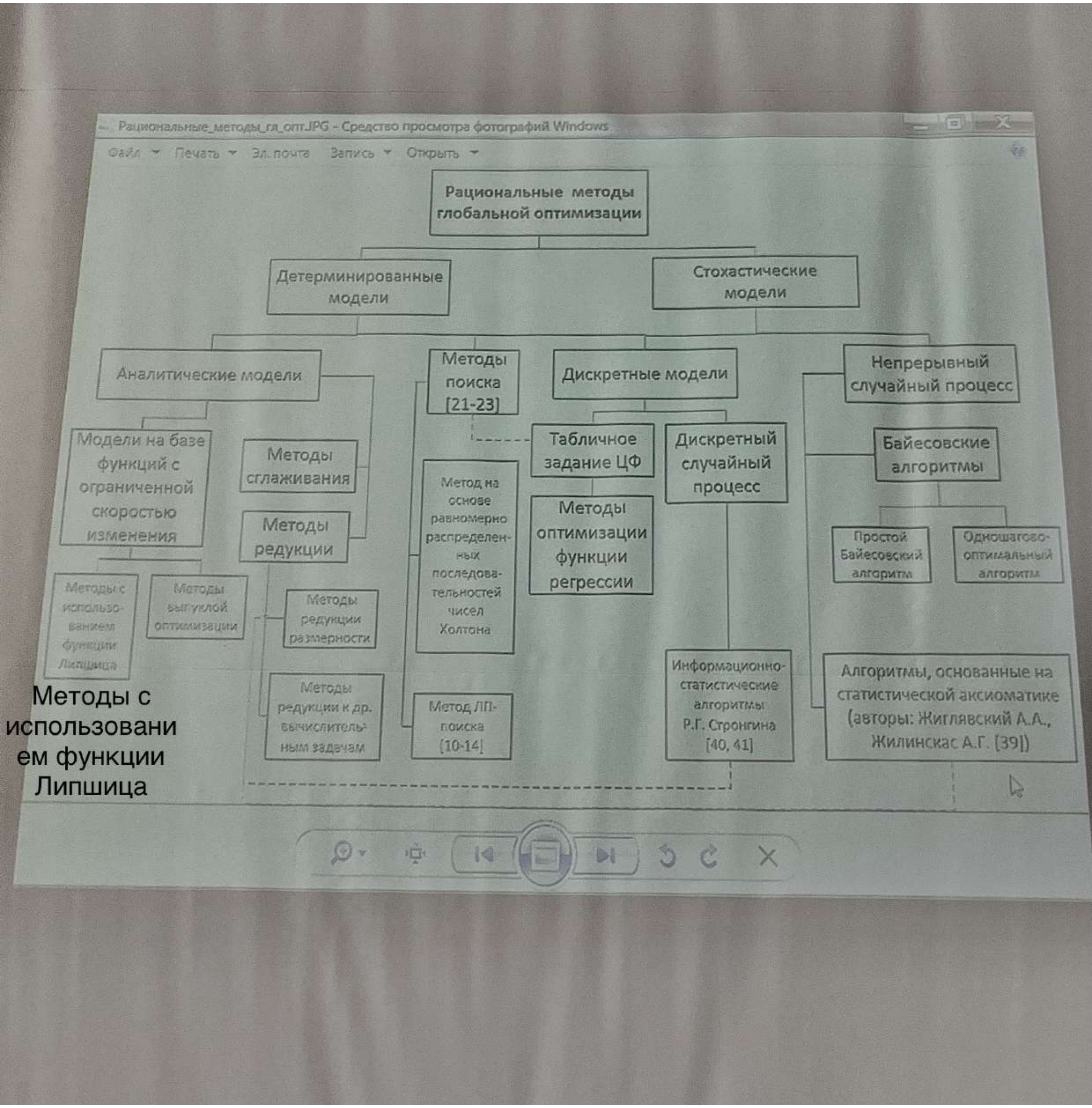
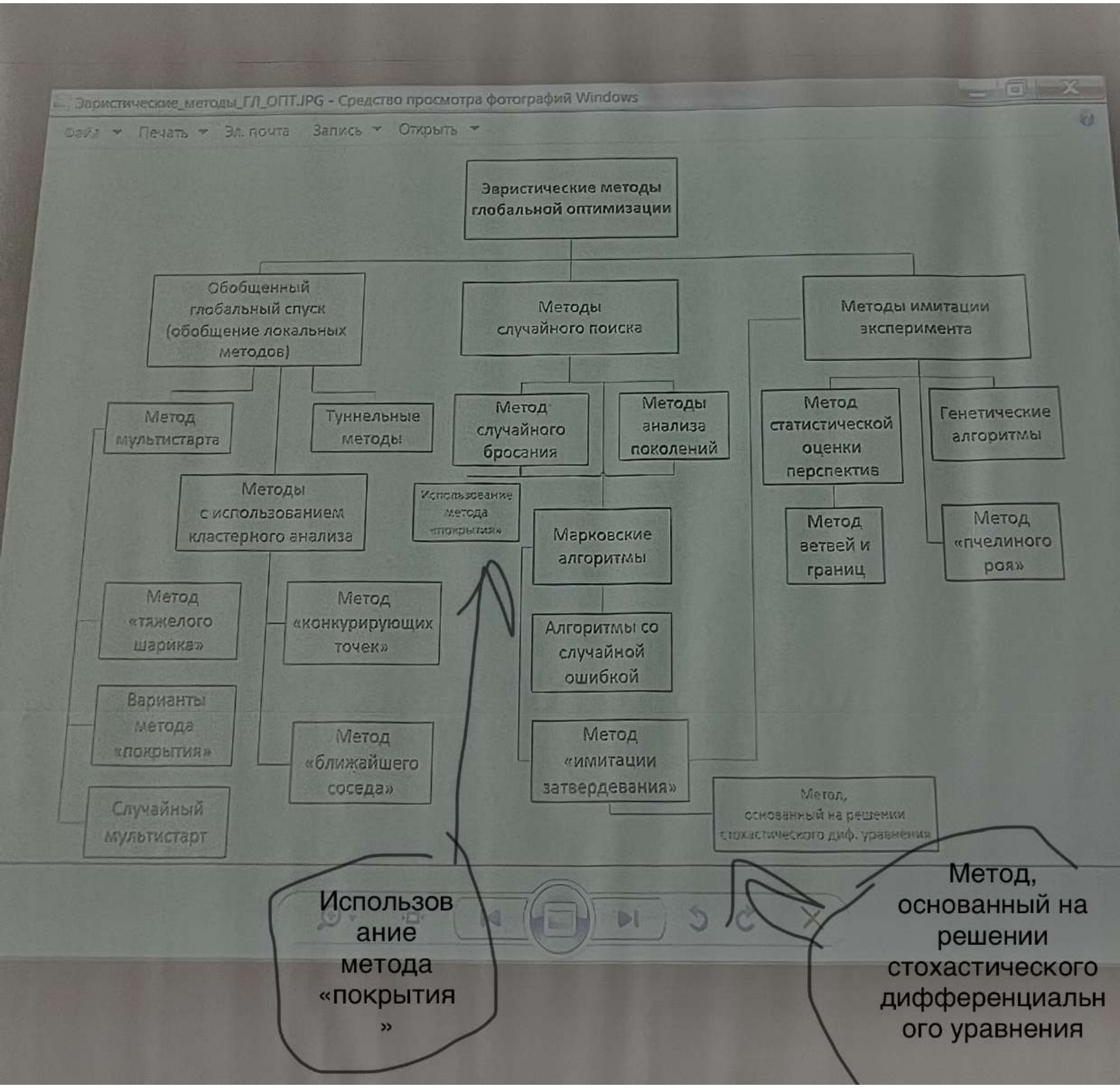


Змп- задачи математического программирования


Классификац_методов_скалярной_опт.jpg - Средство просмотра фотографий Windows
Файл
Печать
Эл. почта
Запись
Открыть
Численные методы решения однокритериальных оптимизационных задач
Методы безусловной оптимизации
Методы условной оптимизации
Методы нулевого порядка (методы: золотого сечения, Фибоначчи, дихотомии, перебора и др.)
Методы первого порядка (градиентные методы)
Методы «овражного» поиска
Методы второго порядка (метод Ньютона, квазиньютоновские методы)
Методы сопряженных градиентов (методы: ДФП, Флетчера - Ривса и др.)
Методы многомерного поиска (методы: Хука-Дживса, Нелдера-Мида, случайного поиска и др.)
Методы нелинейного программирования
Методы линейного программирования
Методы линейной аппроксимации
Симплекс-метод
Методы штрафных функций
Графический метод ($n_{перем} \leq 2$)
Методы множителей Лагранжа
Метод множителей с использованием модифицированной функции Лагранжа



Методы с использованием функции Липшица


Эвристические_методы_ГЛ_ОПТ.JPG - Средство просмотра фотографий Windows
Файл Печать Эл. почта Запись Открыть
Эвристические методы глобальной оптимизации
Обобщенный глобальный спуск (обобщение локальных методов)
Методы случайного поиска
Методы имитации эксперимента
Метод мультистарта
Туннельные методы
Метод случайного бросания
Методы анализа поколений
Метод статистической оценки перспектив
Генетические алгоритмы
Методы с использованием кластерного анализа
Использование метода «покрытия»
Марковские алгоритмы
Метод ветвей и границ
Метод «пчелиного роя»
Метод «тяжелого шарика»
Метод «конкурирующих точек»
Алгоритмы со случайной ошибкой
Варианты метода «покрытия»
Метод «ближайшего соседа»
Метод «имитации затвердевания»
Случайный мультистарт
Метод, основанный на решении стохастического диф. уравнения
Использование метода «покрытия»
Метод, основанный на решении стохастического дифференциального уравнения

Список_источников_глоб_опт.JPG - Средство просмотра фотографий Windows

Файл Печать Эл. почта Запись Открыть

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. [illegible] – А., Жилинскас – Г. Методы поиска глобального оптимума. – М.: Наука, [illegible] 247 с.

2. Жилинскас – Г. Глобальная оптимизация. Аксиоматика статистических моделей, алгоритмы, применение. – Вильнюс: Мокслас 1986. – 166 с.

3. Жилинскас – Г., Шалтянис В.Р. Поиск оптимума. Компьютер расширяет возможности. М.: Наука, 1989. 87 с.

4. Стронгин Р.Г. Поиск глобального минимума. М.: Знание, серия Математика, кибернетика, 1990, №2. – С. 23-34.

Методы многокритериальной (векторной) оптимизации

Основные понятия и определения

$$\overline{F} = \left[f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), f_3(\overline{x}), \ldots f_m(\overline{x}) \right]^T, \quad \overline{x} \in R^n$$

Решение задачи векторной оптимизации $\overline{x}^* \in G$ является ***эффективной точкой***, если

$$\nexists\, \overline{x}^i : \quad f_j\left(\overline{x}^i\right) \le f_j\left(\overline{x}^*\right), \quad i = \overline{1,m}$$

Задача векторной оптимизации (**ЗВО**) заключается в выделении из множества ***G*** подмножества **эффективных точек**

$$\left\{\overline{x}^{э}\right\}$$

Частные критерии могут находиться ***в следующих отношениях*** между собой:

✓ ***взаимно нейтральны***, тогда процесс оптимизации можно проводить по каждому частному критерию **независимо**;

✓ ***кооперируются***, тогда процесс оптимизации можно проводить по любому частному критерию, а оптимальное решение по всем остальным критериям будет достигнуто **автоматически**;

✓ ***конкурируют***, тогда **оптимума** по одной ***ЦФ*** можно достичь только за счет ущерба по какой-либо другой.

Эффективные точки называются

неулучшаемыми решениями,

а соответствующие им векторы эффекта -

множеством компромиссов.

В **пространстве критериев эффективности** множество точек области ***Парето*** образует ***оптимальную поверхность***,

которая характеризуется **важным свойством**:

ни одно из решений в этой области **не может быть улучшено** **ни по одному из частных критериев эффективности** **без ущерба** для других критериев.

Общий подход к поиску оптимального решения

Все известные методы **векторного синтеза** прямо или косвенно сводятся к **скалярному синтезу**.

$$\overline{F} = \left[f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), f_3(\overline{x}), \dots f_m(\overline{x}) \right]^T \rightarrow$$

$$\Phi(\overline{x}) = \Phi\left(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), f_3(\overline{x}), \dots f_m(\overline{x}) \right),$$

$$\overline{x} \in R^n$$

Процесс получения обобщенного критерия называют *свёртыванием*,

а полученный скалярный критерий – *свёрткой*.

Не существует единого типа свертки (мб разной)

Безусловный критерий предпочтения (**БКП**) означает,

что если **две системы** характеризуются **двумя показателями эффективности**

$$\left\{f_i^I\right\}, \left\{f_i^{II}\right\}, \quad i=\overline{1,m}$$

и выполняются условия -

$$f_i^I\left(\overline{x}\right) \leq f_i^{II}\left(\overline{x}\right), \qquad \textbf{(1)}$$

и хотя бы одно из них **строгое**,

то система I является **предпочтительнее** системы II.

Компромисс –

соглашение, полученное **путем взаимной уступки** при **столкновении противоположных интересов**

БКП в общем случае **не позволяет довести задачу оптимизации до конца**, а дает лишь **возможность найти область компромисса**, **внутри которой и лежит оптимальное решение**.

$$g_j(\bar{x}) = \varphi_j(\bar{x}) \le C_j, \quad j = \overline{1, k} \qquad (2)$$

$$F = \left\{ f_i(\bar{X}) \right\}, \quad i = \overline{1, m} \qquad (3)$$

Для решения задачи воспользуемся

методами множителей *Лагранжа*:

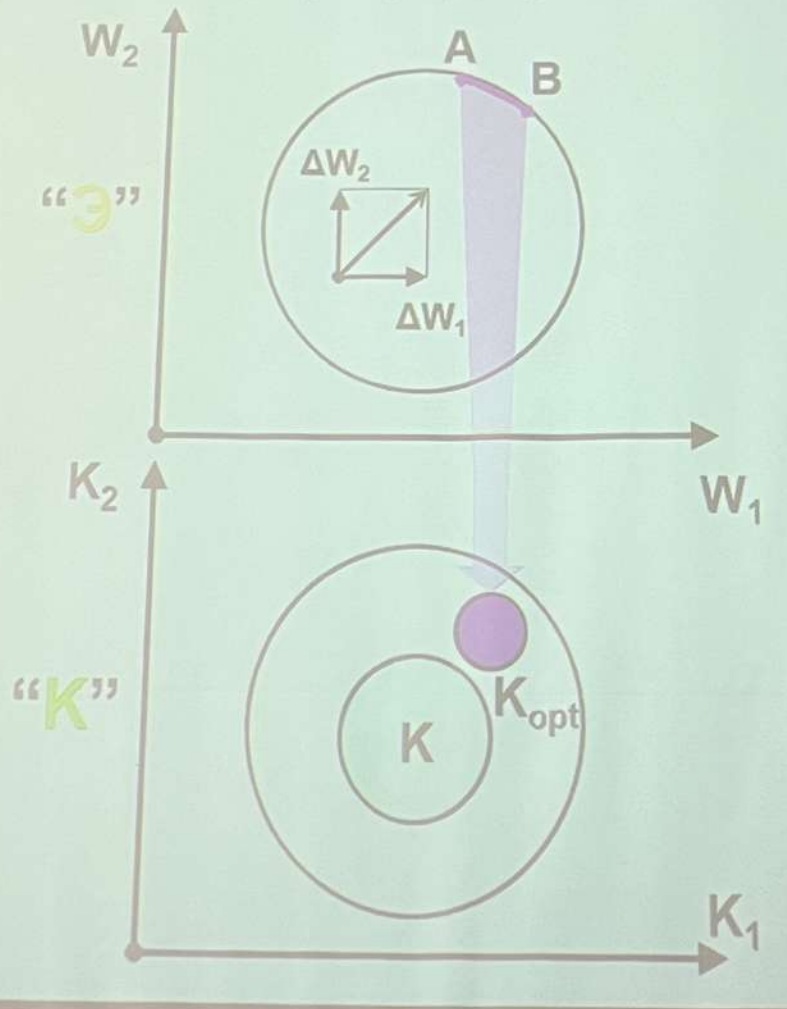
$$L(\overline{x}) = F(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \left(\varphi_j(\overline{x}) - C_j\right)$$

(4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\overline{x}, \overline{\lambda})}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F(\overline{x})}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \dfrac{\partial g_j(\overline{x})}{\partial x_i} = 0, \\ \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial L(\overline{x}, \overline{\lambda})}{\partial \lambda_j} = g_j(\overline{x}) = 0, \\ \quad j = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

(5)

Совместная работа проектировщика и специалиста по эффективности при формировании *ТЗ* и *ТП*



которого предстоит осуществить выбор, и набор частных критериев, при помощи которых данные альтернативы сравнивают между собой. Частные показатели эффективности образуют векторный критерий общего вида

$$\bar{F}(\bar{X})=\left[\phi_1(\bar{X}),\phi_2(\bar{X}),\phi_3(\bar{X}),\ldots\phi_m(\bar{X})\right]^{T}, \quad (7.1)$$

где $\phi_k(\bar{X}),\ k\in[1,m]$ – скалярные частные показатели эффективности.

Тогда задача многокритериальной (векторной) оптимизации записывается в следующем виде:

$$\text{найти} \quad \min_{\bar{X}\in\Omega_X}\bar{F}(\bar{X})=\bar{F}(\bar{X}^{*}), \quad (7.2)$$

где Ω_X – множество допустимых значений вектора варьируемых параметров $\bar{X}\in R^{n}$.

Принято считать, что решение задачи (7.2) $\bar{X}^{*}\in\Omega_X$ является эффективной точкой, если не существует другого альтернативного варианта

Основная сложность логического анализа многокритериальных задач

состоит в том, что в них, в отличие от однокритериальных задач, появляется *эффект несравнимости* вариантов (исходов).

Несравнимость исходов является формой неопределённости, которая связана со стремлением ЛПР "достичь противоречивых целей" и может быть названа *ценностной неопределённостью*.

Выбор между несравнимыми исходами является сложной концептуальной проблемой и составляет основное содержание теории векторной оптимизации

Например, если исходы оцениваются по двум критериям (ищется минимум)

- и есть два вектора оценок $F_1 = [f_1(X_1), f_2(X_1)] = [2, 5]$ и $F_2 = [f_1(X_2), f_2(X_2)] = [3, 2]$.
- Вариант X_1 лучше по первому критерию, а вариант X_2 лучше по второму критерию, т.е. варианты X_1 и X_2 несравнимы между собой

7.2. Методы скаляризации векторных критериев оптимальности

7.2.1. Метод взвешенных сумм

Большинство методов векторного синтеза прямо или косвенно сводятся к скалярному синтезу, то есть имеющиеся компоненты векторного критерия оптимальности каким-либо способом объединяются в обобщенный скалярный критерий. Если указанный критерий получен в результате комплексного учета физических зависимостей между частными показателями эффективности, то оптимальное решение будет являться *объективным*. Однако, поскольку учесть все взаимозависимости между частными показателями внутри обобщенного критерия весьма сложно, а иногда и невозможно, обобщенный скалярный критерий, образованный путем формальной свертки составляющих векторного критерия *объективным*. Однако, поскольку учесть все взаимозависимости между частными показателями внутри обобщенного критерия весьма сложно, а иногда и невозможно, обобщенный скалярный критерий, образованный путем формальной свертки составляющих векторного критерия оптимальности, будет *субъективным*.

Одним из способов скаляризации многокритериальной задачи оптимизации является метод *взвешенных сумм* (*скалярной свёртки*). Сущность данного метода состоит в том, что ищется минимум следующей взвешенной суммы:

$$f_в(\bar{X}) = \lambda_1 \cdot f_1(\bar{X}) + \lambda_2 \cdot f_2(\bar{X}) + \ldots + \lambda_m \cdot f_m(\bar{X}), \quad (7.4)$$

где числа $\lambda_i \geq 0$ назначаются ЛПР и характеризуют важность (вес) i-го показателя эффективности; обычно коэффициенты важностей нормируются, т.е. подчиняются условию $\sum_{i}^{m} \lambda_i = 1$.

Сущность данного метода состоит в том, что ищется минимум следующей взвешенной суммы:

$$f_в(\bar{X}) = \lambda_1 \cdot f_1(\bar{X}) + \lambda_2 \cdot f_2(\bar{X}) + \ldots + \lambda_m \cdot f_m(\bar{X}), \qquad (7.4)$$

где числа $\lambda_i \geq 0$ назначаются ЛПР и характеризуют важность (вес) i-го показателя эффективности; обычно коэффициенты важностей нормируются, т.е. подчиняются условию $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Очевидно, что вид свертки (7.4) и результат ее минимизации будет зависеть от заданных величин λ_i, т.е. имеет место параметрический закон $f_{i_в} = f_в\left(\lambda_1^i, \ldots, \lambda_m^i\right)$, который называют *весовой поверхностью*. Она содержит только точки оптимальной поверхности.

Таким образом, к недостаткам рассмотренного метода относятся:

1) субъективность решения, связанная с предпочтениями ЛПР (выражаемыми путем назначения частным критериям приоритетов – весовых коэффициентов λ_i);

2) компромиссное решение $f_{\text{в}}(\bar{X})$ и оптимальное решение по вышеуказанному обобщенному критерию могут оказаться неудовлетворительными по ряду частных показателей, величины которых будут скомпенсированы за счет других компонент векторного критерия эффективности;

3) при некотором сочетании коэффициентов важностей (весов) частных показателей в обобщенном критерии (7.4) возникает недостижимость оптимального решения, связанная с тем, что границы весовой

(выражаемыми путем назначения частным критериям приоритетов – весовых коэффициентов λ_i);

2) компромиссное решение $f_в(\bar{X})$ и оптимальное решение по вышеуказанному обобщенному критерию могут оказаться неудовлетворительными по ряду частных показателей, величины которых будут скомпенсированы за счет других компонент векторного критерия эффективности;

3) при некотором сочетании коэффициентов важностей (весов) частных показателей в обобщенном критерии (7.4) возникает недостижимость оптимального решения, связанная с тем, что границы весовой поверхности $f_{i_В} = f_в(\lambda_1^i \ldots \lambda_m^i)$ теряют выпуклость.

Как правило, для устранения второго недостатка вводят эффективности:

3) при некотором сочетании коэффициентов важностей (весов) частных показателей в обобщенном критерии (7.4) возникает недостижимость оптимального решения, связанная с тем, что границы весовой поверхности $f_{\ell_B} = f_B\left(\lambda_1^l, \ldots, \lambda_m^l\right)$ теряют выпуклость.

Как правило, для устранения второго недостатка вводят дополнительные ограничения $f_j\left(\bar{X}\right) \le f_j^*$ на признанные неудовлетворительными величины некоторых частных критериев, и тогда оптимизационная задача принимает следующий вид:

$$\text{Найти } \min_{\bar{X} \in \tilde{\Omega}} f_B\left(\bar{X}\right), \quad \tilde{\Omega} = \Omega \cap \Omega_f,$$
$$\text{где } \Omega_f = \left\{\bar{X} \mid f_j\left(\bar{X}\right) \le f_j^*, \ j = \overline{1, p}\right\} \qquad (7.5)$$

7.2.2. Метод ε - ограничений

Данный метод позволяет отчасти преодолеть упомянутую выше проблему метода взвешенных сумм, связанную с потерей выпуклости ОДР.

Согласно концепции метода ε-ограничений производится минимизация одного частного показателя эффективности f_s, назначенного приоритетным (главной цели), а все остальные компоненты векторного критерия представляются в виде ограничений типа *неравенств*, т.е.

$$
\begin{gathered}
\text{найти } \min_{\overline{X} \in \Omega} f_s(\overline{X}) \\
\text{при ограничениях } f_i(\overline{X}) \le \varepsilon_i, \\
(i = \overline{1, m}) \wedge (i \ne s).
\end{gathered}
\tag{7.6}
$$

При этом величины ε_i могут рассматриваться в качестве допустимых уровней частных показателей $f_i(\overline{X})$, $(i = \overline{1, m}) \wedge (i \ne s)$. Основное достоинство метода ε-ограничений – переход от многокритериальной задачи оптимального поиска к однокритериальной задаче условной оптимизации, способы решения которой широко известны. Недостатком метода является зависимость полученного решения от принятых значений указанных допустимых уровней, а также трудности задания величин последних.

Геометрическая интерпретация метода ε-ограничений для двумерного

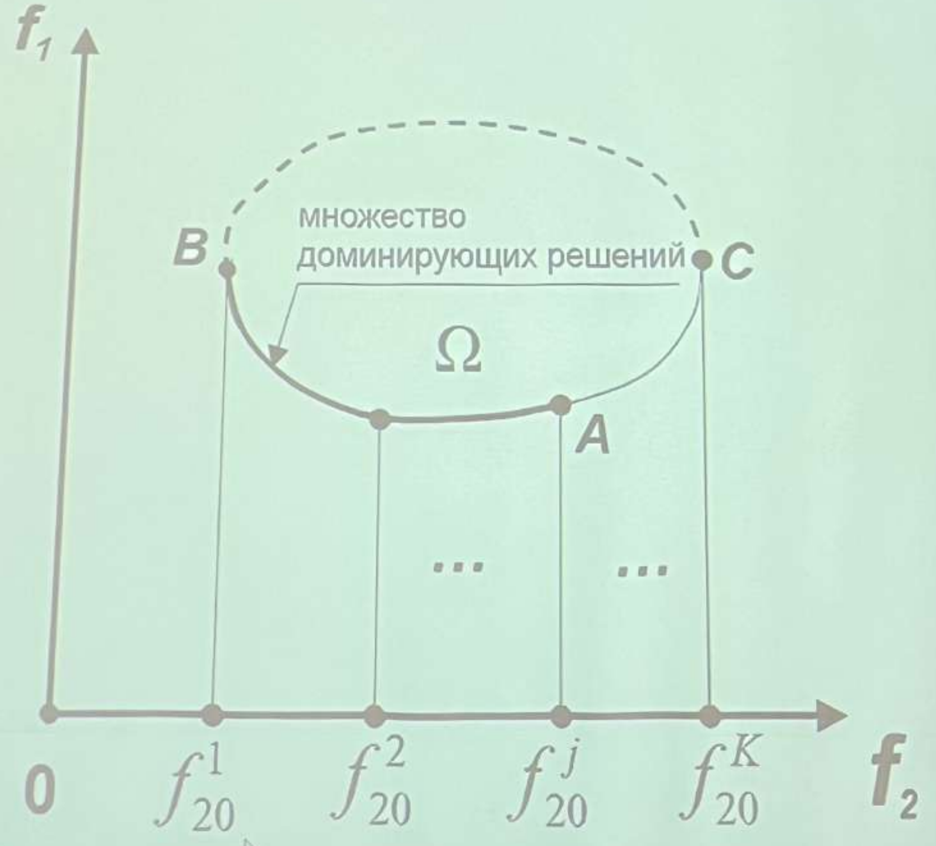
Методы скаляризации векторных критериев

Метод рабочих характеристик

Состоит в том, что ищется ***минимум*** **одного из частных критериев** (например, ***f_1***) при **всех остальных показателях** эффективности, переведенных **в разряд ограничений** **типа равенств**, т.е.:

$$\min_{\bar{x}\in\Omega} f_1(\bar{x}) \;\; при \;\; f_i(\bar{x}) = f_{i0},\, i=\overline{2,m}$$

$$f_{1\min} = \Phi_p(f_{20}, f_{30}, \ldots, f_{m0})$$



f_1
множество
доминирующих решений
B
C
Ω
A
...
...
0
f_{20}^1
f_{20}^2
f_{20}^j
f_{20}^K
f_2

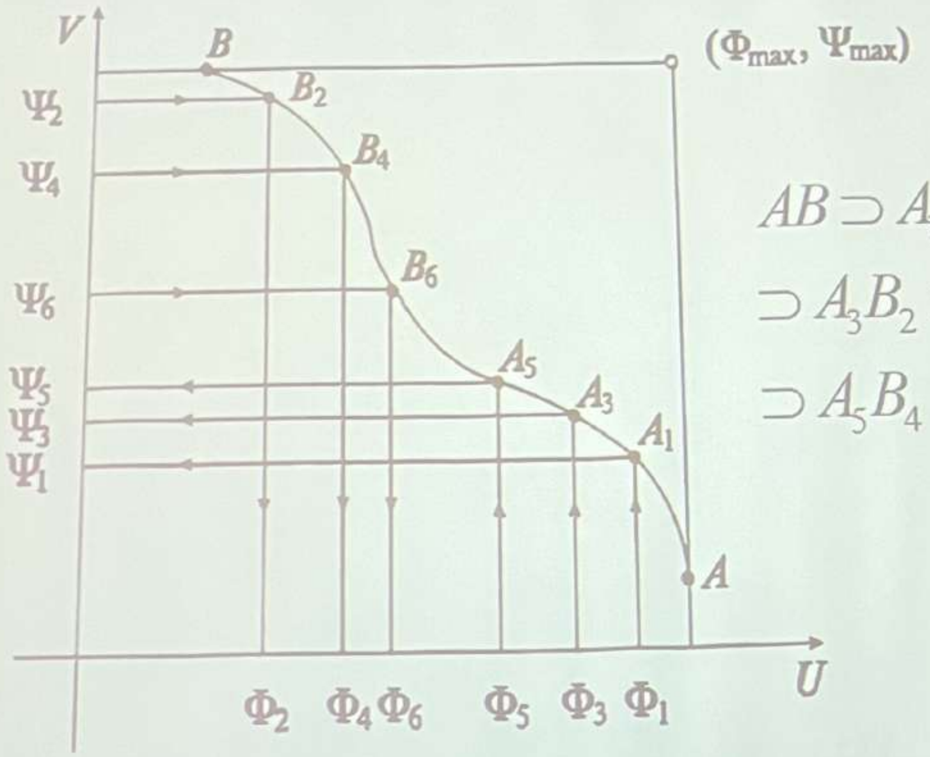
Принцип максимина

Метод последовательных уступок (МПУ)

МПУ является одним из наиболее простых и эффективных алгоритмов решения многокритериальных оптимизационных задач.

Он состоит в последовательном **«подтягивании»** тех **нормированных** частных критериев, численные значения которых **на этапе предварительного решения задачи** оказались **«наихудшими» (неудовлетворительными)**.

В основе данного метода лежит понятие **компромисса**.



$$AB \supset A_1B \supset A_1B_2 \supset$$
$$\supset A_3B_2 \supset A_3B_4 \supset$$
$$\supset A_5B_4 \supset \ldots$$

Рис. 1.

На рис. 1 показан процесс принятия компромиссного решения в задаче с двумя критериями $U = \Phi(x,y)$ и $V = \Psi(x,y)$

Лпр- лицо, принимающее решение

В ходе процесса решения **ЛПР**, постепенно, шаг за шагом уступая своему первоначальному выбору (Φ_{max}, Ψ_{max}) , приходит к приемлемому результату.

Дуга ***AB*** представляет собой границу области **неулучшаемых решений по Парето**.

Очевидно, что с каждой уступкой <u>длина просматриваемой части границы Парето</u> будет **<u>сокращаться</u>**, т.е.:

$$AB \supset A_1B \supset A_1B_2 \supset A_3B_2 \supset A_3B_4 \supset A_5B_4 \supset \ldots$$

Когда пара (Φ_n, Ψ_n), полученная на ***n***-м шаге итерационного алгоритма, станет для ЛПР *удовлетворительной* <u>по всем значениям частных критериев</u> (***U, V***), процесс поиска оптимального решения заканчивается.

Рассмотрим структуру алгоритма МПУ на конкретных примерах

<u>Пример 1.</u> Выбор и покупка ноутбука.

<u>Основные критерии выбора</u>:

1. Размер диагонали экрана, дюймы
2. Объем оперативной памяти, Гб
3. Объем жесткого диска, Гб
4. Объем видеопамяти (видеокарты), Гб
5. Максимальная тактовая частота процессора, ГГц
6. Вес, кг
7. Цена, руб.

Производитель модели	Значение критерия №						
	1	2	3	4	5	6	7
1. Acer Aspire	15.6	4	500	1	1.7	2.3	19900
2. Asus	17.3	4	750	2	до 2.58	2.8	22500
3. Dell Inspiron	15.6	4	500	2	1.8	3.2	21000

Какой ноутбук приобрести, чтобы он был легким, с наилучшим быстродействием, максимальным объемом памяти, удобным экраном и относительно недорогим ?

Первые 5 критериев должны принимать **максимальные**, а последние два – **минимальные** значения.

Приведем далее рассуждения потенциального покупателя

По критерию № 2 все модели **эквивалентны**, поэтому исключаем данный критерий из рассмотрения.

Все модели находятся примерно в одинаковой стоимостной категории.

Модель № 3 обладает наибольшим весом при не доминирующих значениях критериев № 1÷5.

Поэтому, если **главной целью** является минимальный вес ноутбука, данную модель можно сразу исключить из рассмотрения.

Модель № 1 является легкой и относительно недорогой, однако проигрывает по критериям № 4, 5 при прочих практически одинаковых значениях других показателей.

Модель № 2 превосходит конкурентов по критериям № 1, 3, 5, однако она является самой дорогой в приведенной категории

Применим принцип максимина.

Расставим показатели эффективности в порядке <u>уменьшения их приоритета</u> при покупке, например:

№ критериев: **5, 4, 3, 1, 6, 7** .

Пронормируем частные критерии, разделив на <u>максимальные значения</u> показателей в каждом столбце таблицы.

<u>Получим следующие векторы эффекта</u>:

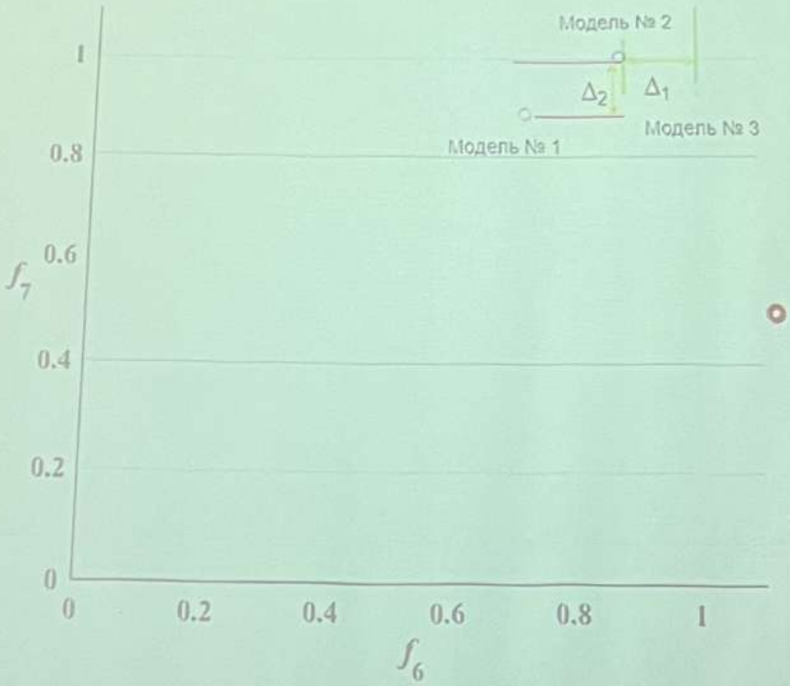
Модель № 1: [0.6589, 0.5, 0.6667, 0.9017, 0.7187, 0.8844]

Модель № 2: [1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 0.8750, 1.0]

Модель № 3: [0.6977, 1.0, 0.6667, 0.9017, 1.0, 0.9333]

Итак, согласно **безусловному критерию предпочтения**, наиболее выгодной (по заданному набору показателей) является <u>Модель № 2</u>

График в системе координат критериев № 6, 7



Пример 2. Проектируется авиационный комплекс (***АК***).

Критериями эффективности ***АК*** являются:

1. Время барражирования ЛА без дозаправки топливом - $t_б$
2. Дальность обнаружения воздушного объекта - ***R***
3. Количество каналов сопровождения цели РЛС - ***n*** (канальность РЛС)
4. Дальность полета управляемых средств оснащения - ***r***
5. Количество средств оснащения на борту ЛА - ***N***

Требуется, чтобы **все частные критерии** имели **максимально возможные значения**.

Решение

$$R\uparrow:\begin{cases} P_{передатчика}\uparrow \rightarrow P_{потребляемая}\uparrow \rightarrow m_{ЛА}\uparrow \\ \text{или} \\ D_{раскрыва\ антенны}\uparrow \rightarrow C_X\uparrow \rightarrow m_{топлива}\uparrow \rightarrow t_б\downarrow \end{cases}$$

I. **Первая проектная проработка**.

Критериям Φ_1 - Φ_4 придаются минимально приемлемые значения и выявляется максимальное значение критерия Φ_{5max} : $N = N_{max}$.

Затем при тех же значениях критериев Φ_2 - Φ_4 придается минимальное значение критерию Φ_5 и находится величина Φ_{1max} : $t_б = t_{б\ max}$.

Далее, сохраняя минимальные величины критериев Φ_1, Φ_3, Φ_4, Φ_5 , ищется максимальное значение критерия Φ_{2max} : $R = R_{max}$ и т.д.

Все критерии **нормируют**, т.е. вычисляют отношения:

$$f_i = \frac{\Phi_i}{\Phi_{i\max}}, \quad i = \overline{1,5}$$

II. **Проектирование**. В результате находятся численные значения всех нормированных частных критериев.

Частные критерии располагают в ряд. Допустим, оказалось, что

$$f_2^{(1)} > f_1^{(1)} > f_4^{(1)} > f_5^{(1)} > f_3^{(1)}$$

III. Корректировка проекта.

Задаваясь, например, условием:

$$f_3^{(2)} = f_5^{(2)} = f_4^{(1)},$$

получим новый набор численных величин критериев:

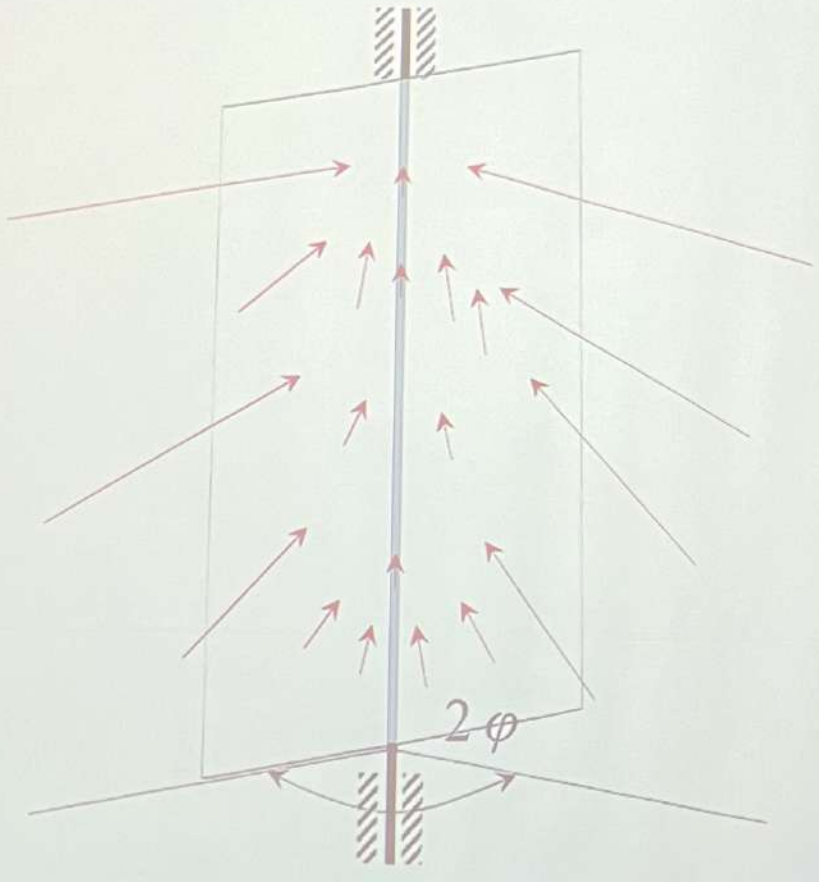
$$f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, f_4^{(2)}, f_5^{(2)}$$

Поскольку мы **увеличили** значения критериев $\boldsymbol{f_3}$ и $\boldsymbol{f_5}$, то значения каких-то или всех остальных критериев **уменьшились**.

Если при этом различие **между минимальным** и **остальными критериями** **невелико**, то найденное решение **близко к оптимальному**.

Иначе этап **III** следует повторить.

Пример 3. Проектируется устройство сканирования для обнаружения воздушных объектов.



Критериями эффективности являются:

1. Полный угловой сектор качания зеркала $\Phi_1 = 2\varphi$

2. Число полных циклов качания зеркала в секунду $\Phi_2 = F$

Мощность *P* электродвигателя привода сканера определяется соотношением :

$$P = \frac{\pi^2\, m\, l^2}{3\eta} \cdot \varphi^2 \cdot F^3,$$

где m – масса зеркала; l – размер зеркала в направлении, перпендикулярном оси качания; η – *КПД* привода.

Необходимо найти **максимальные значения критериев** Φ_1 и Φ_2, обеспечивающие **наибольший угловой сектор** осмотра сканера.

Техническими требованиями на проектирование предусмотрены такие величины ***m, l, η, P***, при которых

$$\varphi^2 \cdot F^3 = 1.8 \times 10^7 \Rightarrow$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{1.8 \times 10^7}{F^3}}; \quad F = \left(\frac{1.8 \times 10^7}{\varphi^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Минимально допустимыми величинами параметров являются:

$$2\,\varphi_{\min} = 10\left[\text{мрад}\right]; \quad F_{\min} = 10\left[\text{Гц}\right]$$

$$\varphi_{opt} = ? \qquad F_{opt} = ?$$

Решение

Прежде всего надо найти **область компромисса**, в которой следует искать оптимальное решение задачи

Подставляя в уравнение связи минимально допустимые значения критериев, получим:

$$\varphi_{\max} = \sqrt{\frac{1.8\times10^7}{10^3}} = 134.16\,[\text{мрад}];$$

$$F_{\max} = \left(\frac{1.8\times10^7}{5^2}\right)^{1/3} = 89.63\,[\text{Гц}]$$

Перейдем к **нормированным частным критериям** вместо **натуральных**:

$$f_1 = \frac{\varphi}{\varphi_{\max}} = \frac{\varphi}{134.16}, \quad f_2 = \frac{F}{F_{\max}} = \frac{F}{89.63}$$

$$(f_1 \cdot \varphi_{\max})^2 \cdot (f_2 \cdot F_{\max})^3 = 1.8 \times 10^7 \rightarrow f_1^2 \cdot f_2^3 = \frac{1.8 \times 10^7}{(134.16)^2 \cdot (89.63)^3} \rightarrow$$

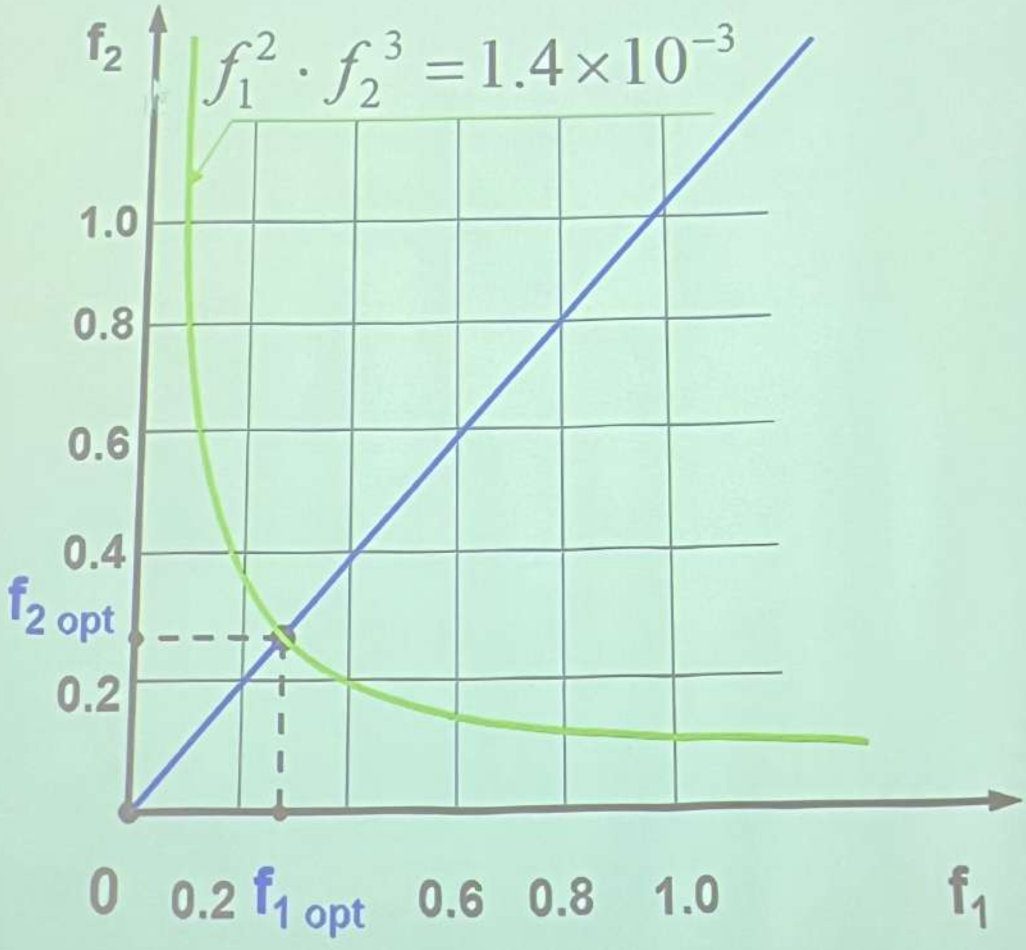
$$\rightarrow f_1^2 \cdot f_2^3 \approx 1.4 \times 10^{-3}$$

Минимально допустимыми величинами **нормированных критериев** будут:

$$f_{1\min} = 5/134.16 \approx 0.0373; \quad f_{2\min} = 10/89.63 \approx 0.1116$$

Применяя **принцип равенства**, полагая $f_{1\,opt} = f_{2\,opt}$, из уравнения связи нормированных критериев находим:

$$f_{1\,opt} = f_{2\,opt} = \left(1.4 \times 10^{-3}\right)^{1/5} \approx 0.2682$$



$f_1^2 \cdot f_2^3 = 1.4 \times 10^{-3}$
f_2
1.0
0.8
0.6
0.4
$f_{2\ opt}$
0.2
0
0.2
$f_{1\ opt}$
0.6
0.8
1.0
f_1

После возвращения от **нормированных** критериев к **натуральным** получаем:

$$\Phi_{1\,opt} = 2\cdot\varphi_{opt} = 2\cdot 134.12\cdot 0.2682 \approx 72\left[\text{мрад}\right];$$

$$\Phi_{2\,opt} = F_{opt} = 89.63\cdot 0.2682 \approx 24\left[\text{Гц}\right].$$

Полученная **эффективная точка** $\left[\Phi_{1\,opt}, \Phi_{2\,opt}\right]$ и будет являться решением исходной оптимизационной задачи.