- При выборе уровней варьирования для каждого фактора необходимо учитывать **два противоречивых момента**:

✓ с одной стороны, стремление учесть возможный диапазон изменения параметра $\boldsymbol{k_i}$ приводит к **увеличению интервала варьирования,** т.е.

$$\Delta k_i = k_{i\max} - k_{i\min}$$

✓ с другой стороны, чем **меньше интервал варьирования факторов**, тем **меньше степень полинома**, выражающего с требуемой точностью функцию отклика, и тем **проще процедура ее определения**.

- Поэтому назначать уровни варьирования факторов необходимо на основе тщательного анализа априорной информации о поведении функции

$$x = f\left(k_1, k_2, \ldots k_\alpha\right)$$

Классическим способом получения функции отклика является *метод наименьших квадратов*

- Результаты опытов используются для нахождения неизвестных коэффициентов полинома функции отклика.
- Заданный порядок ***m*** полинома функции отклика обычно меньше количества экспериментальных точек (узлов), поэтому интерполяция становится невозможной.
- Число опытов берется больше числа неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ($N \geq m$) или равным ему.

- Коэффициенты регрессии должны выбираться таким образом, чтобы величины

$$\xi_i = \left| x^{(i)} - \left(a_0 + a_1 k_1^{(i)} + a_2 k_2^{(i)} + a_3 k_3^{(i)} + \ldots + a_m k_m^{(i)} \right) \right|, \ i = \overline{1, N}$$

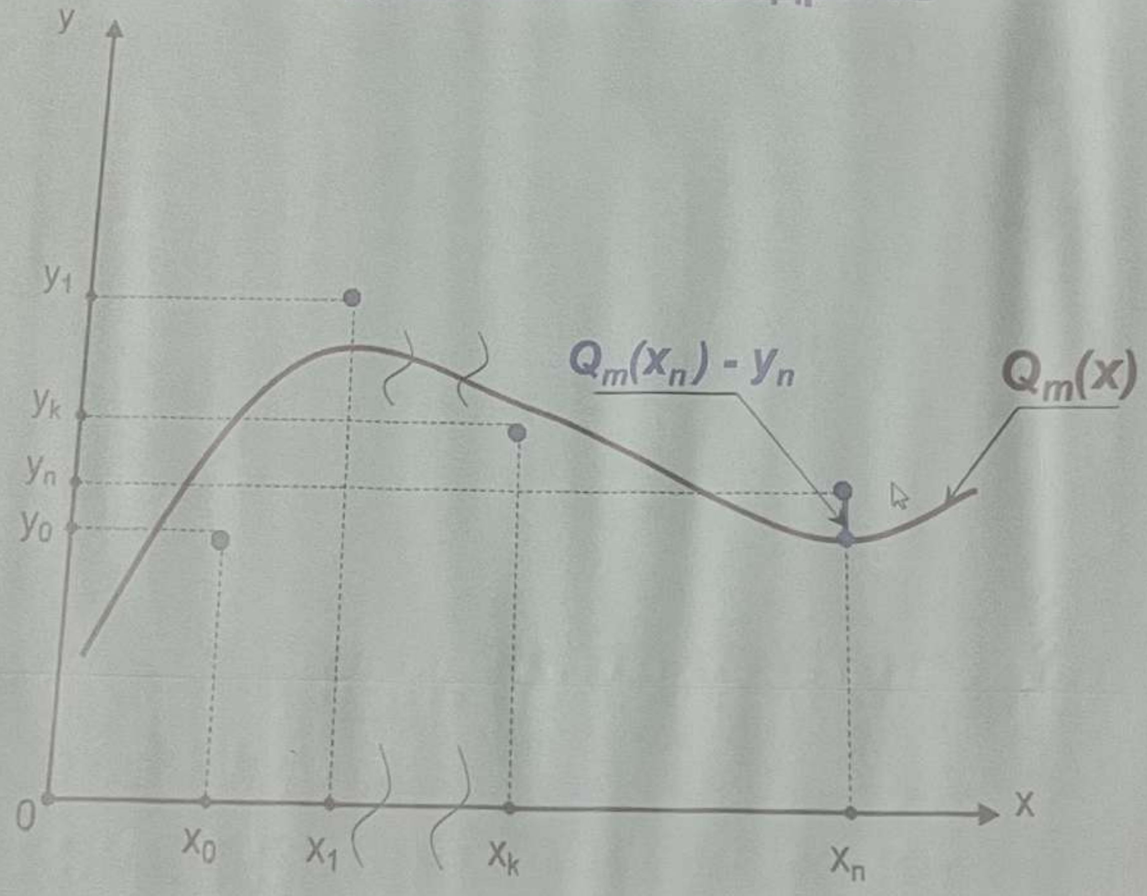
были как можно меньше.

Величина ξ_i, являющаяся разницей между экспериментальным значением показателя $x^{(i)}$, определенным на сложной имитационной модели в заданной точке,

$$k^{(i)} = \left(k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots k_\alpha^{(i)} \right)$$

и значением, вычисленным по уравнению регрессии, называется невязкой.

Метод наименьших квадратов



За меру отклонения полинома -

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

на множестве точек

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}; \quad m \le n$$

принимают величину:

$$S_m(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[Q_m(x_i) - f(x_i) \right]^2 \qquad (1)$$

Требуется:

подобрать коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$ так, чтобы величина S_m была минимальной.

$$S_m = f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m) \rightarrow min$$

$$S_m = \sum_{i=0}^{n} \left[a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^{\,m} - y_i \right]^2 =$$

$$= \left(a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^{\,2} + \ldots + a_m x_0^{\,m} - y_0 \right)^2 +$$

$$+ \ldots + \left(a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^{\,2} + \ldots + a_m x_n^{\,m} - y_n \right)^2$$

(2)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial S_m}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left[a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^{\,m} - y_i \right] \cdot 1 = 0 \\
\dfrac{\partial S_m}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left[a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^{\,m} - y_i \right] \cdot x_i = 0; \\
\dfrac{\partial S_m}{\partial a_2} = 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left[a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^{\,m} - y_i \right] \cdot x_i^{2} = 0; \\
\ldots \\
\dfrac{\partial S_m}{\partial a_m} = 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left[a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^{\,m} - y_i \right] \cdot x_i^{m} = 0
\end{cases} \qquad (3)
$$

$$
\begin{cases}
a_0 \cdot (n+1) + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 \ldots + a_m \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i ; \\
a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 \ldots + a_m \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i ; \\
\cdots \\
a_0 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m + a_1 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + a_2 \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+2} \ldots + a_m \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m \cdot y_i
\end{cases}
\qquad (4)
$$

Обозначим :

$$S_k = x_0^{\,k} + x_1^{\,k} + x_2^{\,k} + \ldots + x_n^{\,k} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,k}\ , \quad \textbf{(5)}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$S_0 = n + 1 \quad ;$$

$$t_k = x_0^{\,k} \cdot y_0 + x_1^{\,k} \cdot y_1 + x_2^{\,k} \cdot y_2 + \ldots + x_n^{\,k} \cdot y_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x_i^{\,k} \cdot y_i\ , \qquad \textbf{(6)}$$

$$\begin{cases} S_0 \cdot a_0 + S_1 \cdot a_1 + \ S_2 \cdot a_2 + \ \ldots + S_m \cdot a_m = \ t_0; \\ S_1 \cdot a_0 + S_2 \cdot a_1 + \ S_3 \cdot a_2 + \ \ldots + S_{m+1} \cdot a_m = t_1; \\ \qquad \cdots \\ S_m \cdot a_0 + S_{m+1} \cdot a_1 + S_{m+2} \cdot a_2 + \ldots + S_{2m} \cdot a_m = t_m \end{cases} \tag{7}$$

$$m \leq n$$

$$\begin{cases} a_0 = a_0^*; \\ a_1 = a_1^*; \\ \quad \dots \\ a_m = a_m^*; \end{cases} \qquad (8)$$

Если ***m = n***, то ***Smin = 0*** и $\boldsymbol{Q_m(x)}$ совпадает с $\boldsymbol{P_n(x)}$ на множестве точек

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Пример 1. При исследовании движения осколка с начальной скоростью $\boldsymbol{V_0 = 700}$ **м/с** при помощи замеров положений пробоин на мишени получена табличная зависимость понижения траектории движения осколка от пройденного им расстояния.

$$\Delta y = f\left(\Delta x\right)$$

Требуется:

Методом наименьших квадратов построить аналитическую зависимость понижения траектории осколка от пройденного расстояния.

i	x_i^0	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^0 \cdot y_i$	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2 \cdot y_i$
0	1	50	2500	$1.25 * 10^5$	$6.25 * 10^6$	-0.02	-1	-50
1	1	100	10000	10^6	10^8	-0.2	-20	-2000
2	1	150	22500	$3.375 * 10^6$	$5.0625 * 10^8$	-0.66	-99	-14850
3	1	200	40000	$8 * 10^6$	$1.6 * 10^9$	-1.7	-340	-68000
4	1	250	62500	$1.5625 * 10^7$	$3.9 * 10^9$	-2.51	-627.5	-156875
Σ	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	t_0	t_1	t_2
	5	750	137500	$2.8125 * 10^7$	$6.118 * 10^9$	-5.09	-1087.5	-241775

$$\begin{cases} 5 \cdot a_0 + 750 \cdot a_1 + 137500 \cdot a_2 = -5.09; \\ 750 \cdot a_0 + 137500 \cdot a_1 + 2.8125 \cdot 10^7 \cdot a_2 = -1087.5; \\ 137500 \cdot a_0 + 2.8125 \cdot 10^7 \cdot a_1 + 6.118 \cdot 10^9 \cdot a_2 = -241775 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 0.0059999; \\ a_1 = 0.0028114; \\ a_2 = -0.0000525; \end{cases}$$

$$y = -0.0000525 \cdot x^2 + 0.0028114 \cdot x + 0.006$$

- Анализ показывает, что если мы захотим **изменить вид функции отклика**, например, отбросить часть членов в полиноме, то придется все коэффициенты регрессии перед оставшимися членами пересчитывать заново, т.е. непосредственно **метод наименьших квадратов** не позволяет определять коэффициенты регрессии **независимо друг от друга**.
- Поэтому этот метод в основном используется в том случае, когда мы не сами выбираем экспериментальные точки , а они **представляют собой результаты пассивного наблюдения за объектом** (пассивного эксперимента).
- Если же исследователям можно самим выбирать экспериментальные точки, то делать это надо таким образом, чтобы коэффициенты регрессии вычислялись **независимо друг от друга.**

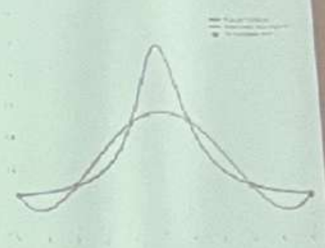
Феномен_Рунге-1.jpg - Средство просмотра фотографий Windows

Файл Печать Эл. почта Запись Открыть

Феномен Рунге

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Феномен (явление) Рунге — в численном анализе эффект нежелательных осцилляций, возникающий при интерполяции полиномами высоких степеней. Был открыт Карлом Рунге при изучении ошибок полиномиальной интерполяции для приближения некоторых функций[1].

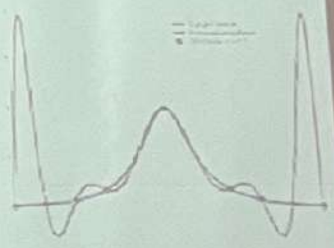


Функция Рунге (плотность вероятности распределения Коши) и интерполяционный полином 5-й степени

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. Если интерполировать её по равноотстоящим узлам x_i между -1 и 1 $x_i = -1 + (i-1)\frac{2}{n}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ полиномом $P_n(x)$ со степенью меньше или равной n, то полученный интерполянт будет осциллировать ближе к концам интервала. С возрастанием степени полинома погрешность интерполяции стремится к бесконечности $\lim_{n\to\infty}\left(\max_{-1\le x\le 1}|f(x) - P_n(x)|\right) = \infty.$

Тем не менее, согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса, для любой непрерывной функции на отрезке можно подобрать последовательность полиномов, равномерно сходящихся к этой функции на отрезке. Пример лишь показывает трудность интерполяции по равноотстоящим узлам полиномом высокой степени.

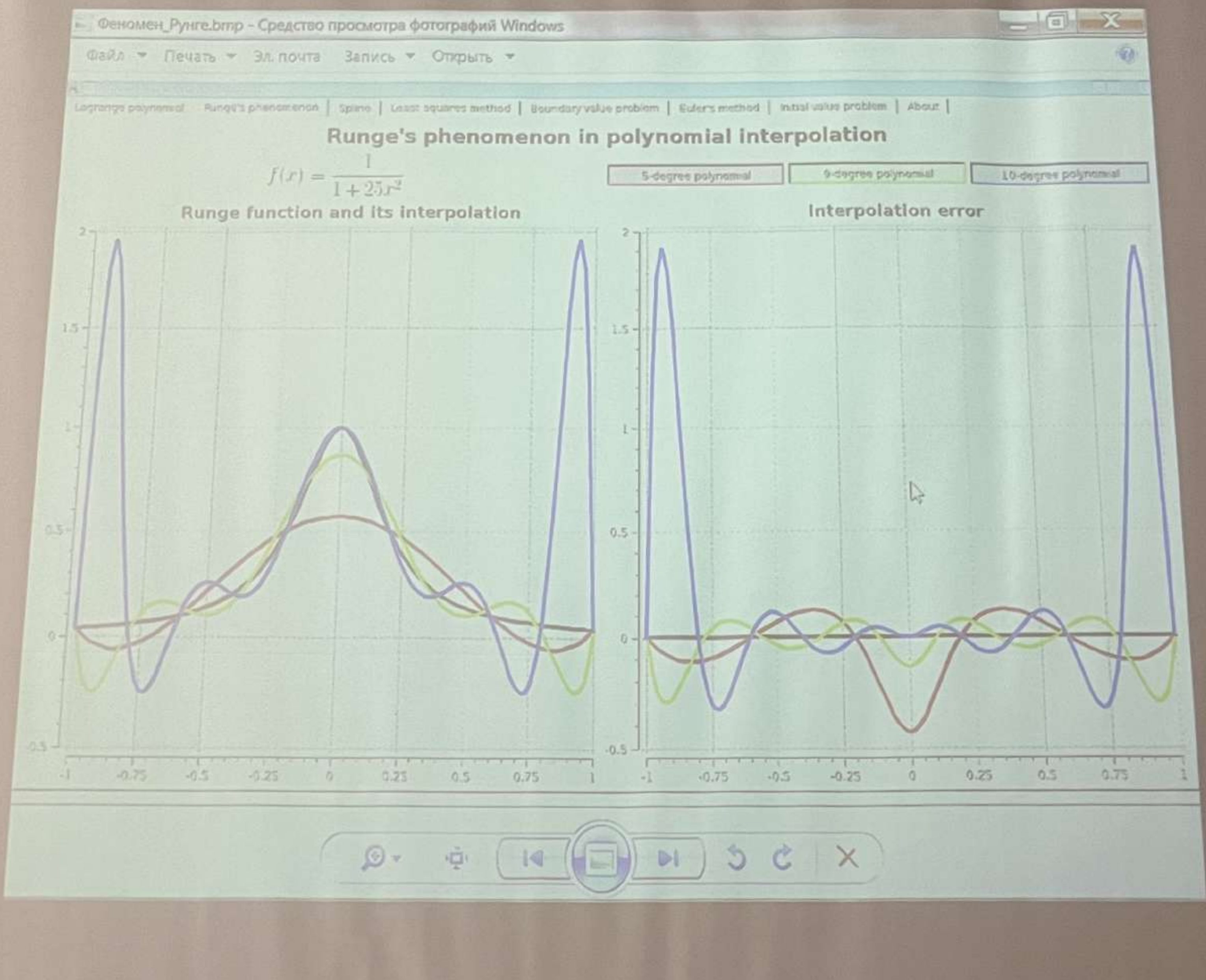
Погрешность интерполяции функции полиномом степени N ограничена N-ой производной функции: у такого полинома может быть $N-1$ точка экстремума.



Функция Рунге и интерполяционный полином 10-й степени

Примечания

1. ↑ *Рунге, Карл* Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten // *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* — 1901. — Т. 46. — С. 224—243.



Феномен_Рунге.bmp - Средство просмотра фотографий Windows
Файл
Печать
Эл. почта
Запись
Открыть
Lagrange polynomial
Runge's phenomenon
Spline
Least squares method
Boundary value problem
Euler's method
Initial value problem
About
Runge's phenomenon in polynomial interpolation
$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$
5-degree polynomial
9-degree polynomial
10-degree polynomial
Runge function and its interpolation
Interpolation error
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-0.75
-0.5
-0.25
0
0.25
0.5
0.75
1

- Увеличение или уменьшение числа членов в функции отклика не будет изменять значения уже вычисленных коэффициентов регрессии и их **не потребуется пересчитывать**.
- Это очень важно, поскольку вид функции отклика приходится изменять, когда она **не удовлетворяет условиям адекватности**.
- Такое планирование называется ***ортогональным*** и является основой факторного анализа.
- Основным путем получения ортогонального плана является **построение полного факторного эксперимента**.

- Для упрощения записи условий эксперимента значения факторов кодируются таким образом, чтобы верхний уровень соответствовал +1, а нижний -1. Кодирование производится по следующей формуле

$$\tilde{k}_i = \frac{2k_i - k_{i\max} - k_{i\min}}{k_{i\max} - k_{i\min}}$$

- (в дальнейшем знак "~" будем опускать).
- Количество экспериментальных точек $k^1, k^{(2)}, \ldots k^{(N)}$ выбирается таким образом, чтобы были просмотрены все возможные сочетания уровней факторов

Рассмотрим правило построения матрицы планирования при полном факторном эксперименте.

- При $\alpha = 2$ <u>необходимое число опытов</u> (число экспериментальных точек) составит $N = 2^2 = 4$ и матрица планирования K будет иметь следующий вид:

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_0 & k_1 & k_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{array} \right\| \end{array}$$

- **Число строк** в матрице равно **числу опытов**, а число столбцов равно **количеству факторов плюс один** (первый) столбец, соответствующий свободному члену $\boldsymbol{b_0}$ в функции отклика. Все элементы первого столбца **всегда равны +1**.
- Каждому столбцу в матрице присваивается буквенное значение соответствующего ему фактора. **Элемент какого-либо столбца** (за исключением первого), находящийся на пересечении данного столбца с $\boldsymbol{i}$-й строкой, обозначает **уровень**, на котором находится соответствующий данному столбцу фактор в $\boldsymbol{i}$-м опыте (в $\boldsymbol{i}$-й экспериментальной точке). Обычно для простоты записи единицы в матрице планирования **опускают**.

$$K = \begin{array}{c} \begin{matrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} + & - & - & - \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & + & + & - \\ + & - & - & + \\ + & + & - & + \\ + & - & + & + \\ + & + & + & + \end{matrix} \right\| \end{array}$$

- Нетрудно видеть, что матрицу планирования для **трех** факторов получают из матрицы **для двух факторов**, **повторив ее дважды**: один раз при значении $\boldsymbol{k_3}$, находящемся на **нижнем уровне**, второй раз – **на верхнем уровне**. Аналогичным образом могут быть построены матрицы планирования **для любого числа факторов**.

- Для сокращения записи вводят условные буквенные обозначения строк. Каждому фактору ставится в соответствие строчная буква латинского алфавита : $k_1 - a_j k_2 - b_j k_3 - c$
- Если теперь для строки матрицы планирования выписать латинские буквы только для тех факторов, которые находятся на верхних уровнях, а опыт со всеми факторами на нижних уровнях обозначить (1), то матрицу планирования можно представить одной строкой, например, при <u>**α = 3**</u> :

(1), *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*.

- Коэффициенты регрессии вычисляются по следующим формулам:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} k_j^{(i)} x^{(i)}}{N}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \alpha$$

- Например, при **α = 2**, **N = 4** и линейной функции отклика

$$x = b_0 + b_1 k_1 + b_2 k_2$$

- будем иметь:

$$b_1 = \frac{(-1)x^{(1)} + (+1)x^{(2)} + (-1)x^{(3)} + (+1)x^{(4)}}{4}$$

(использовался столбец для $\boldsymbol{k_1}$).

$$b_2 = \frac{(-1)x^{(1)} + (-1)x^{(2)} + (+1)x^{(3)} + (+1)x^{(4)}}{4}$$

(использовался столбец для $\boldsymbol{k_2}$).

Найденные коэффициенты b_1, b_2, …, b_α характеризуют силу влияния факторов на выходной параметр x.

Чем **больше величина b_j**, тем **большее влияние** на ***x*** оказывает фактор k_j. Если $b_j > 0$, то с увеличением k_j параметр ***x*** увеличивается, а если $b_j < 0$, то уменьшается.

Вклад фактора k_j в величину выходного параметра ***x*** при переходе фактора с нижнего уровня на верхний называется ***эффектом фактора*** и равен удвоенному коэффициенту регрессии **2** b_j.

- Планируя эксперимент, на первом этапе всегда стремятся получить **линейную функцию отклика** (ее ищут в виде **полинома первой степени**). Однако при этом нет гарантии, что в выбранных интервалах варьирования факторов линейная функция отклика **с требуемой точностью** <u>может заменить реальную зависимость</u> параметра ***x*** от исследуемых факторов $k_1, k_2, \ldots k_\alpha$

- Если линейная функция отклика неадекватна реальной зависимости, то надо переходить к нелинейной функции. Обычно нелинейность обусловлена тем, что эффект одного фактора **зависит от уровня**, на котором находится другой фактор.
- Учет эффекта взаимодействия ***μ***-го и ***ν***-го факторов заключается в том, что функцию отклика ищут в виде

$$x = b_0 + b_1 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + b_\alpha k_\alpha + b_{\mu\nu} k_\mu k_\nu$$

$$b_{\mu\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} k_\mu{}^{(i)} k_\nu{}^{(i)} x^{(i)}}{N}$$

- Искомый эффект взаимодействия определяется удвоенным коэффициентом $\boldsymbol{2b_{\mu v}}$, для нахождения которого в матрице планирования эксперимента добавляется еще один столбец, равный произведению столбцов для факторов $\boldsymbol{k_{\mu}}$ и $\boldsymbol{k_{v}}$.
- Фиктивный фактор x_0 вводят для удобства расчета свободного члена b_0 (для идентичности формул).

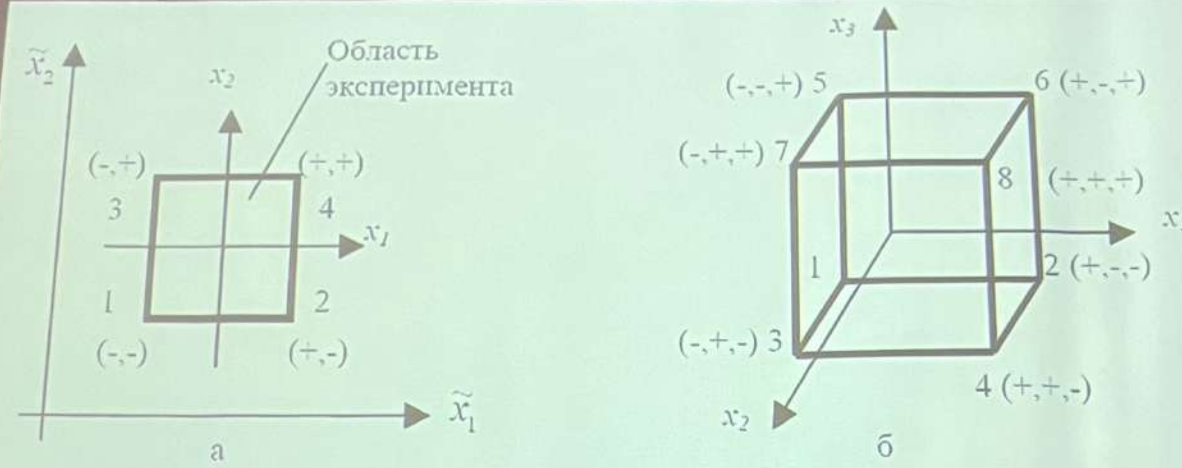


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация ПФЭ

Геометрической интерпретацией ПФЭ 2^2 является квадрат в факторной плоскости (рис. 2.1, а), ПФЭ 2^3 – куб (рис. 2.1, б).

Здесь нормированные координаты x_1 и x_2 проходят через точку пересечения основных уровней факторов, и масштаб их осей выбран так, чтобы интервал варьирования равнялся 1. Тогда условия проведения опытов в МП эксперимента будут соответствовать вершинам квадрата, центром которого является основной уровень. Если $n>3$, то фигуру, задающую в многомерном пространстве область эксперимента, называют *гиперкубом*.

Проверка значимости коэффициентов регрессии

- После нахождения коэффициентов регрессии линейной функции отклика необходимо проверить, насколько близко полученная функция $x = \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_\alpha)$ заменяет реальную зависимость

$$x = f(k_1, k_2, \ldots, k_\alpha)$$

- Эта процедура называется <u>проверкой адекватности</u>

Критерии адекватности

- Гипотезу о статистической значимости (отличии от нуля) коэффициентов регрессии проверяют по **критерию Стьюдента**:

$$t_p = \frac{|b_i|}{S_b} \quad \text{, где}$$

b_i – i-й коэффициент,

S_b – оценка СКО i-го коэффициента.

$$S_b = \frac{S_y}{N} \quad \text{, где}$$

S_y – оценка дисперсии воспроизводимости эксперимента.

Проверка адекватности математической модели (ММ)

- Для проверки гипотезы об **адекватности ММ** необходимо вычислить **две дисперсии:**
- а) **дисперсию адекватности**:

$$D_{\text{ад}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\tilde{x}_i - x_i\right)^2}{f_{\text{св}}},$$

где $f_{\text{св}}$ – число степеней свободы, равное разности между **числом опытов** и **числом коэффициентов регрессии** в функции отклика (для линейной функции $f_{\text{св}}$ **=*N* – (α+1)**);

- ***N*** – число опытов; $\tilde{x}_i$, x_i – значение параметра эффективности, вычисленное по найденной функции отклика для факторов в ***i***-м опыте и значение, найденное непосредственно из ***i***-го опыта соответственно ;

- б) **дисперсию воспроизводимости**, характеризующую **погрешности наблюдений:**

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\bar{x} - x_i \right)^2}{n-1},$$

где *n* – число **параллельных опытов** (повторенных в **одинаковых условиях**);

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$ – среднее значение выходного параметра.

Адекватность ММ проверяется по ***F*** **– критерию Фишера.**

$$F = \frac{D_{\text{ад}}}{D_{\text{в}}}, \quad \text{причем} \quad D_{\text{ад}} > D_{\text{в}}$$

- После нахождения дисперсии воспроизводимости и дисперсии адекватности вычисляют значение критерия F, а затем данное значение сравнивают с таблицей, у которой столбцы связаны с определенным числом степеней свободы для дисперсии адекватности $\boldsymbol{f_1 = N - (\alpha+1)}$, а строки – для дисперсии воспроизводимости $\boldsymbol{f_2 = N - 1}$ (или $\boldsymbol{n - 1}$).

- На пересечении соответствующих строки и столбца стоит критическое значение F- критерия. Если рассчитанное значение F не превышает табличного, то найденную функцию отклика можно считать **адекватной** реальной зависимости, в противном случае необходимо функцию отклика искать в виде полинома более высокого порядка

Дробный факторный эксперимент

- Число опытов ПФЭ 2^n быстро растет с увеличением числа факторов *n*, и при больших *n* этот вид эксперимента оказывается **практически неприемлемым**.
- Для уменьшения числа опытов из **множества точек факторного пространства** может быть отобрана их **некоторая часть**, содержащая **подходящее число опытов** и представляющая собой **дробный факторный план.**
- Если **число проводимых опытов** менее числа оцениваемых параметров, эксперимент называется ***ненасыщенным***, если **равно** – *насыщенным*, если **больше** – *сверхнасыщенным*.

- ***Дробным факторным экспериментом*** (ДФЭ) называется система опытов, представляющая собой **часть ПФЭ**, позволяющая рассчитать коэффициенты уравнения регрессии и сократить объем экспериментальных данных.
- Функцию отклика на первом этапе ищут в наиболее простом линейном виде :

$$x = b_0 + b_1 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + b_\alpha k_\alpha$$

что позволяет резко снизить необходимое для нахождения коэффициентов $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$, …, $\boldsymbol{b_\alpha}$ число опытов, используя при этом так называемые **дробные реплики** от ПФЭ.

- Пусть имеется три фактора **α = 3**. При **полном факторном эксперименте** число опытов было бы $N = 2^3 = 8$.
- Построим сначала матрицу планирования полного факторного эксперимента для двух факторов k_1 и k_2, а затем к данной матрице **добавим столбец**, соответствующий третьему фактору k_3.
- При этом добавляемый столбец строится таким образом, чтобы он был равен произведению столбцов для k_1 и k_2.

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k_0 & k_1 & k_2 & k_1 k_2 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} + & - & - & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & + & + & + \end{array} \right\| \end{array}$$

- Однако в отличие от ПФЭ такое планирование не позволяет найти истинных значений коэффициентов регрессии, т.к. они будут **смешаны** с некоторыми эффектами взаимодействия $b_{\mu\nu}$.
- Поэтому ДФЭ можно проводить лишь в том случае, когда **эффектами взаимодействия можно пренебречь** и принять функцию отклика в линейном виде.
- В рассмотренном примере имеем следующие смешанные оценки :

$$b_3 \to b_3 + b_{12}\ ; \quad b_2 \to b_2 + b_{13}\ ; \quad b_1 \to b_1 + b_{23}\ ;$$

$$b_0 \to b_0 + \sum_{i=1}^{3} b_{ii}\ .$$

- Полагая эффекты взаимодействия и квадратичные члены **близкими к нулю**, можно приближенно считать, что коэффициенты регрессии в ДФЭ совпадают с их истинными значениями :

$$b_3 \approx \beta_3\,;\quad b_2 \approx \beta_2\,;\quad b_1 \approx \beta_1\,;\quad b_0 \approx \beta_0$$

Поставив **4** опыта для оценки влияния **3**-х факторов, мы воспользовались половиной ПФЭ, или, так называемой ***полурепликой***. Если бы столбец для $\boldsymbol{k_3}$ строился равным $-\boldsymbol{k_1 k_2}$, то мы получили бы вторую половину матрицы планирования для ПФЭ – <u>вторую полуреплику</u>.

Смешанные оценки при этом были бы:

$$b_3 \to b_3 - b_{12}\,;\quad b_2 \to b_2 - b_{13}\,;\quad b_1 \to b_1 - b_{23}\,;\quad b_0 \to b_0 + \sum_{i=1}^{3} b_{ii}\,.$$

- Объединение этих двух полуреплик и есть **полный факторный эксперимент**.
- Кроме **полуреплик** для больших значений **α** пользуются дробными репликами высокой степени дробности.
- Дробную реплику, в которой **z** линейных эффектов **приравнены к эффектам взаимодействия**, обозначают числом проводимых в данной реплике опытов $2^{\alpha - z}$. Например, полуреплика от полного факторного эксперимента при
- **α** = 3 обозначается 2^{3-1}, а четверть-реплика при **α** = 5 обозначается 2^{5-2}.

- Для ДФЭ типа 2^{4-1} существует **8** полуреплик :

$$1)\ k_4 = k_1k_2\ ;\quad 2)\ k_4 = -k_1k_2\ ;\quad 3)\ k_4 = k_1k_3\ ;\quad 4)\ k_4 = -k_1k_3\ ;$$
$$5)\ k_4 = k_2k_3\ ;\quad 6)\ k_4 = -k_2k_3\ ;\quad 7)\ k_4 = k_1k_2k_3\ ;\ 8)\ k_4 = -k_1k_2k_3$$

Под **разрешающей способностью реплики** понимается **минимальный порядок** эффекта взаимодействия, смешанного с **линейным эффектом.**

Например, если в эксперименте типа 2^{4-1} одна **полуреплика** даст следующие смешанные оценки для коэффициентов:

$$b_1 \to b_1 + b_{234}\ ;\quad b_2 \to b_2 + b_{134}\ ;\quad b_3 \to b_3 + b_{124}\ ;\quad b_4 \to b_4 + b_{123}$$

- то **разрешающая способность** такой реплики равна **3**, так как линейные эффекты **смешаны с тройными взаимодействиями**.
- При выборе другой **полуреплики** могут присутствовать двойные взаимодействия:

$$b_1 \to b_1 + b_{24}\ ; \quad b_2 \to b_2 + b_{14}\ ; \quad b_3 \to b_3 + b_{1234}\ ; \quad b_4 \to b_4 + b_{12}$$

и разрешающая способность такой полуреплики будет равна **2**.

Таким образом, из всей совокупности реплик, присущих эксперименту данного типа, нужно выбрать те, которые обладают **максимальной разрешающей способностью**. Такие реплики называются ***главными***.

- Если функция отклика **не является адекватной** реальной зависимости,
- и эта функция искалась в **линейном виде** при помощи некоторой дробной реплики, то необходимо переходить к полному факторному эксперименту или уменьшать степень дробности реплики.
- Наконец, если после этого не удалось получить адекватную функцию отклика, то необходимо разбить область варьирования факторов на несколько подобластей и находить функции отклика отдельно для каждой из них.
- Это приводит к уменьшению длин интервалов варьирования факторов в каждой подобласти, а чем меньше интервал варьирования, тем проще обеспечить адекватность функции отклика