

При выборе оптимальных альтернатив u_A^* и u_B^* естественно предположить, что каждая сторона стремится добиться *наилучшего* для себя результата при *худших* действиях *другой* стороны. Например, если полагать, что сторона A стремится *максимизировать* свой «выигрыш», характеризуемый показателем $w_A(u_A, u_B)$, а сторона B — *минимизировать* $w_B(u_A, u_B)$, то математически их выборы записываются в виде соотношений:

$$\{u_A^*, \tilde{u}_B\} = \arg \max_{u_A \in U_A} \min_{u_B \in U_B} w(u_A, u_B), \text{ приводящего к получению}$$

$w_A(u_A^*, \tilde{u}_B)$ для стороны A ;

$$\{u_B^*, \tilde{u}_A\} = \arg \min_{u_B \in U_B} \max_{u_A \in U_A} w(u_B, u_A), \text{ приводящего к получению}$$

$w_B(u_B^*, \tilde{u}_A)$ для стороны B .

Эмпирические (регрессионные) модели
- пример: ускоренное восприятие или
решение задач синтеза (используется
как упрощение системы)

При построении эмпирических моделей
исходная модель системы
рассматривается как чёрный ящик. При
этом исследователь сам задаёт
структуру модели эмпирической и
стремится снизить сложность в
описании модели. При решении задач
синтеза - задать структуру
приближенной зависимости и
определить значение вектора наиболее
важных параметров для результатов
модели. Результат показателей
эффективности может содержать
ошибки.

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СТС МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Данный метод представляет собой сочетание имитационных моделей СТС с методом статистических испытаний (методом Монте-Карло).

Имитационная модель состоит из математического описания конкретных законов (стратегий поведения), геометрических моделей объектов, их технических характеристик, условий функционирования СТС, а также модели (параметров) внешней среды.

Модель объекта (ЛА) может, например, представлять собой **совокупность отсеков** с плоскими гранями **или** описываться поверхностями второго порядка.

Моделирование случайных событий и значений случайных величин методом Монте-Карло

Моделирование случайного события

1. Моделируется случайное событие A , имеющее известную вероятность p . Обозначим v - случайное число, подчиненное закону равномерной плотности в интервале $[0, 1]$, полученное с помощью датчика СЧ.

Факт появления или нет события A в единичной реализации определяется так:
если $p \geq v$ то принимается, что событие A **произошло** в данной реализации,
если $p < v$, то **не произошло**.

Получение случайного числа, **в точности равного** p , считается практически невозможным событием.

2. Моделируется полная группа несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n с известными вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n , $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Нужно определить, какое из этих событий произошло в единичной реализации

Попадание случайного числа v , распределенного равномерно в интервале $[0, 1]$, на участок с номером i означает, что произошло событие A_i .

Моделирование значений случайной величины

1. Пусть X - **дискретная случайная величина** с заданным рядом распределения, т. е. имеющая n возможных значений

x_1, x_2, \dots, x_n с известными вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n .

Тогда моделирование значения случайной величины (СВ) в единичной реализации сводится к предыдущей задаче.

2. Если случайная величина X непрерывна и распределена равномерно в интервале $[a, b]$, то ее значение в единичной реализации будет :

$$x = a + v \cdot (b - a),$$

где v – случайное число, равномерно распределенное в $[0, 1]$.

3. Моделирование значения непрерывной СВ X , подчиненной нормальн. закону с заданными характеристиками m_x, σ_x , выполняется по формуле:

$$x = m_x + \xi \cdot \sigma_x,$$

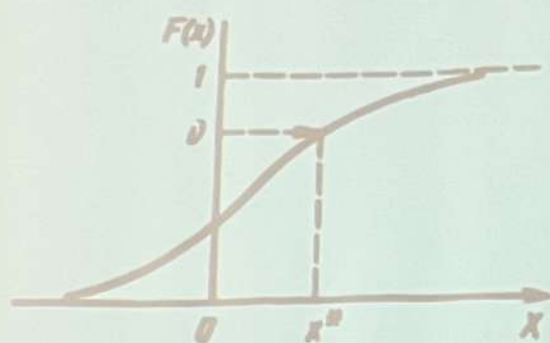
где ξ – центрированное и нормированное случайное число, значение которого в единичной реализации получается с помощью стандартной программы.

4. Если непрерывная СВ X характеризуется функцией распределения $F(x) = \text{Вер}(X < x)$, для которой нет стандартной программы получения случайных чисел, то моделирование значений X сводится к решению уравнения:

$$v = F(x^*),$$

где v – случайное число, равномерно распределенное в $[0, 1]$, получаемое с помощью датчика случайных чисел.

Корень этого уравнения x^* есть значение СВ X в единичной реализации



Данный прием основан на том, что для любой СВ X с функцией распределения $F(x)$ случайная величина $Y = F(x)$ распределена по закону равномерной плотности на интервале $[0, 1]$.

Задача

По цели производится стрельба залпом, состоящим из n АСП.

Заданы: проекция ζ на картинной плоскости S и характеристики АСП.

Требуется определить матожидание числа попаданий в цель $M_m = M[m]$.

Решение

Обозначим m - число попаданий в ζ (оно случайно) и будем вычислять его как

$$m = \sum_{i=1}^n k_i, \text{ где } k_i = \begin{cases} 1, & \text{если } (z_i, y_i) \in S; \\ 0, & \text{если } (z_i, y_i) \notin S. \end{cases} \quad (1)$$

В формуле (1) z_i, y_i – координаты точек попадания.

Метод **Монте-Карло** позволяет решить данную задачу в виде:

$$M[m] = (M_m)_{\text{ст}} \approx \frac{1}{N_p} \sum_{R=1}^{N_p} m_R, \quad (2)$$

где

m_R – случайное число попаданий в цель в единичной реализации с номером R ;

N_p – число реализаций.

В каждой реализации m_R определяется по формуле (1).

Генераторы случайных чисел

В генераторе каждое новое "случайное" число вычисляется при помощи рекуррентной формулы, аргументами которой являются "случайные" числа, вычисленные при предыдущих обращениях к данной подпрограмме, т.е.

$$\alpha^{i+1} = \varphi(\alpha^i, \alpha^{i-1}, \dots, \alpha^{i-k}).$$

Если задан некоторый определенный начальный ("стартовый") набор чисел, то последующие числа, вычисленные с помощью формулы, также будут определенными, функционально связанными с этим начальным набором.

Требования, которые налагаются на элементы последовательности, чтобы их можно было считать псевдослучайными числами:

1. Плотность распределения вероятностей $P(\alpha)$, оцененная путем построения гистограммы, соответствующей большому количеству чисел, близка к требуемой плотности.
2. Взаимный ковариационный момент $K_{i, i+1}$, характеризующий статистическую связь (корреляцию) пар последовательно вычисляемых чисел α^i и α^{i+1} , близок к нулю, т.е. вычисляемые числа можно рассматривать попарно ("**серийно**") **некоррелированными** друг с другом.

Чтобы избежать **повторения** вычисленных чисел, соответствующих заданному в программе генератора стартовому набору, можно поступить так:

- перед первым обращением к генератору в программе, где он используется, хотя бы одно из чисел, входящих в стартовый набор, заменяется произвольно заданным новым числом (можно задавать «затравку» принудительно);
- перед первым обращением к генератору реализуется обращение к вспомогательной программе "рандомизации" стартового набора. Рандомизация заключается в вычислении стартового набора чисел с использованием информации о текущем времени, непрерывно вычисляемого во встроенных часах компьютера (во многих версиях программных сред применяется обращение к ядру операционной системы).

- Обычно в качестве *базового* генератора псевдослучайных чисел используют генератор *равномерно* распределенных на интервале чисел $[0,1]$ – в ряде сред именуемый **random**.
- Числа, подчиняющиеся другим распределениям, как правило, вычисляют, применяя некоторый алгоритм *преобразования* чисел, получаемых с помощью **random**.
- Например, псевдослучайные числа, распределенные согласно нормальному закону, можно получать с помощью *алгоритма суммирования*. Теоретическим обоснованием этого алгоритма служит **центральная предельная теорема** математической статистики. Она гласит:
- Случайные числа, вычисляемые путем суммирования большого числа реализаций случайных чисел с произвольным распределением вероятностей, сами являются **случайными**, а их распределение вероятностей – **распределением Гаусса**, причем тем точнее, чем больше слагаемых включаются в суммы. На практике удовлетворительная точность получается с применением формулы:

$$\alpha_z^k = \sum_{i=1}^{12} \alpha_p^i - 6, \quad k = 1, 2, \dots$$

Случайные числа с **экспоненциальным** распределением вычисляют, в частности, с помощью нелинейной формулы

$$\alpha_{\text{exp}}^k = -\frac{1}{\lambda} \ln(\alpha_p^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Псевдослучайные числа с распределением **Релея** используются в теории прицеливания или радиолокации (промах случаен и имеет матожидание и дисперсию):

**Круговое рассеивание без смещения центра
рассеивания**

$$(m_x = m_y = 0, \sigma_x = \sigma_y = \sigma)$$

Это простейший случай, хорошо известный. Здесь

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}; \quad g(h, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{\sigma^2} e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}}.$$

Пролет подчиняется закону **Релея**: $g_1(h) = \frac{h}{\sigma^2} e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}},$

а фаза вектора пролета – **закону равномерной**

плотности:

$$g_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}.$$

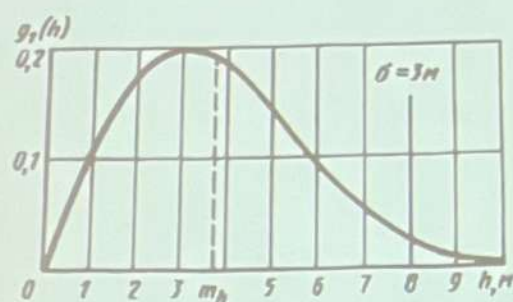


Рис. 1.

- Математическое ожидание m_h и среднее квадратическое отклонение (СКО) пролета σ_h имеют вид:

$$m_h = \frac{\sqrt{2 \cdot \pi}}{2} \cdot \sigma \approx 1.253 \cdot \sigma;$$

$$\sigma_h = \sqrt{2 - \pi/2} \cdot \sigma \approx 0.655 \cdot \sigma.$$

Имитация реализаций векторных случайных величин

- Имитация реализаций **векторной** гауссовской случайной величины затруднений не вызывает, если этот вектор **некоррелирован**. Реализации отдельных компонент такого вектора x с вектором математических ожиданий $m_x = [m_i]_n$ и диагональной ковариационной матрицей K_x вида

$$K_x = \begin{bmatrix} K_{11} = D_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K_{nn} = D_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

могут вычисляться **независимо** друг от друга при помощи генератора **нормально** распределенных псевдослучайных чисел α_d с $m_{\alpha_d} = 0$ и

$D_{\alpha_{\bar{a}}} = \sigma_{\alpha_{\bar{a}}}^2 = 1$ по формуле

$$x_i^k = m_i + \sigma_i \cdot \alpha_{\bar{a}}^k, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если же гауссовский вектор x - коррелированный размерности n с ковариационной матрицей K_x , то его реализации можно получить моделированием реализаций некоррелированного вектора α той же размерности с единичной ковариационной матрицей $K_{\alpha} = I_{(n)}$ с последующим линейным преобразованием

$$x^k = A \cdot \alpha^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Задача о нахождении матрицы линейного преобразования A , устанавливающей связь вида $x = A \cdot \alpha$ между двумя **центрированными**

случайными векторами x и α , ковариационные матрицы K_x и K_α которых заданы, является *обратной* задачей по отношению к *прямой* задаче расчета K_x при заданных K_α и A .

- Прямая задача имеет следующее решение:

$$K_x = M[x \cdot x^T] = M[A\alpha \cdot (A\alpha)^T] = A \cdot M[\alpha \cdot \alpha^T] \cdot A^T = A \cdot K_\alpha \cdot A^T.$$

Для решения обратной задачи будем предполагать, что векторы x и α имеют одинаковую размерность n и центрированы, т. е. векторы их математических ожиданий равны нулю. Ковариационные матрицы K_x и K_α этих векторов заданы, причем $K_\alpha = I_{(n)}$, где $I_{(n)}$ - единичная матрица размерности n . Это означает, что вектор α является некоррелированным вектором с единичными дисперсиями всех его компонент.

$$A \cdot A^T = K_x,$$

в котором матрица K_x задана, а матрицу A требуется найти. Уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Чтобы найти хотя бы одно решение, но по возможности простым способом, матрицу A удобно представить в виде *треугольной* матрицы вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{(n \times n)}.$$

Решение получается таким:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{K_{11}}, \quad a_{21} = K_{21} / a_{11}, \quad a_{22} = \sqrt{K_{22} - a_{21}^2}; \\ a_{31} &= K_{31} / a_{11}, \quad a_{32} = (K_{32} - a_{31}a_{21}) / a_{22}, \quad a_{33} = \sqrt{K_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \dots; \quad (5.7) \\ a_{n1} &= K_{n1} / a_{11}, \quad a_{n2} = (K_{n2} - a_{n1}a_{21}) / a_{22}, \dots, \quad a_{nn} = \sqrt{K_{nn} - a_{n1}^2 - a_{n2}^2 - \dots - a_{n,n-1}^2}, \end{aligned}$$

где $K_{i,j}$ - элементы заданной ковариационной матрицы K_x .

Пример. Пусть x – коррелированный двумерный вектор с ковариационной матрицей $K_x = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$. Найдем матрицу A , такую, что

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

где $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ – некоррелированный вектор с $K_\alpha = I_{(2)}$.

Решение:

С помощью приведенных выше соотношений найдем

$$a_{11} = \sqrt{K_{11}} = 2, \quad a_{21} = K_{12} / a_{11} = 1, \quad a_{22} = \sqrt{K_{22} - a_{21}^2} = 3,$$

$$x_1 = 2\alpha_1$$

$$x_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2.$$

Реализации случайных событий имитируются с помощью генератора **равномерно** распределенных чисел и логического алгоритма порогового типа.

Алгоритм записывается так:

если $\alpha_p^k \leq P_A$, то $A^k = 1$, иначе $A^k = 0$,

где $P_A = P(A=1)$ - заданная вероятность разыгрываемого случайного события A ;

α_p^k - случайное число, разыгрываемое с помощью генератора случайных чисел, распределенных равномерно в интервале $[0, 1]$.

Неметрические критерии альтернативного выбора

Это критерии, которые выражаются лишь в качественной форме.

Для введения такого критерия в целевую функцию (ЦФ) его надо представить в количественном виде.

В общем случае предлагается использовать экспертные оценки.

Обозначим через x балльную или процентную оценку частного неметрического критерия, а через $Q(x)$ – функцию, которая входит в виде множителя в аналитическое выражение для ЦФ.

Пусть известны значения для **2-х** величин аргумента:

- при идеальном неметрическом критерии (100% или 5 баллов) величина $Q(x) = 1$;
- при неудовлетворительном неметрическом критерии (0% или 0 баллов) $Q(x) = 0$, т.е. система становится бесполезной независимо от количественных оценок других частных критериев.

Экспертные оценки

В результате проведения экспертизы получают множество оценок $\{x_i\}$, подлежащих статистической обработке.

Среднюю оценку критерия \bar{x} получают по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i x_i}{\sum_{i=1}^k \mu_i} \quad (1)$$

где x_i – оценка мнения i -го эксперта;
 μ_i – коэффициент авторитета i -го эксперта;
 k – количество экспертов.

Средняя величина оценки \bar{x} выражает
коллективное мнение группы экспертов.

Степень единодушия мнений выражается так:

$$\sigma^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

Надежность экспертизы тем выше, чем **меньшую долю** от среднего значения составляет среднеквадратический разброс.

Поэтому в качестве меры надежности экспертизы принимают величину, называемую **вариацией**:

$$\beta = \frac{\sigma}{x} \cdot \bar{x} \quad (3)$$

На основании опыта применения экспертных оценок для решения неформализуемых задач установлено, что результаты экспертизы можно считать **приемлемыми** при значениях вариации **0.2 ... 0.3**.

Коэффициентом авторитета принято называть **число**, показывающее с каким весом включаются в стат. обработку количественные оценки указанного эксперта.

Обычно коэф-ты авторитета нормируют: $0 \leq \mu \leq 1$

Обычно коэффициент авторитета определяют по формуле

$$\mu_i = e^{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}} \cdot \bar{x} \quad (4)$$

Здесь μ_i - коэффициент авторитета i -го эксперта;

x_i - оценка неметрического критерия, данная i -м экспертом;

\bar{x} - средняя оценка критерия;

σ^2 - дисперсия оценки.

Перед началом экспертизы коэффициенты авторитета неизвестны, поэтому $\mu_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Полученные от экспертов оценки x_1, x_2, \dots, x_k используются для расчета по формулам (1) и (2) среднего значения оценки и ее дисперсии в первом приближении \bar{x}_1, σ_1^2 .

- Затем с использованием (4) вычисляются коэффициенты авторитета.
- Используя найденные коэффициенты авторитета, рассчитывают по ф. – лам (1), (2) уточненные значения среднего значения оценки и ее дисперсии \bar{x}_2, σ_2^2 . Их изменение, в свою очередь, приведет к уточнению коэффициентов авторитета (4).
- Таким образом, возникает итерационный процесс, который быстро сходится после (2-3)^х итераций и дает предельные значения оценок

$$\bar{x}, \sigma^2, \mu_i$$

**Применение методов
планирования
экспериментов в процессе
формирования облика СТС**

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

- Берётся некоторое ограниченное число вариантов облика объекта (несколько точек $k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}, \dots, k^{(N)}$ в многомерном пространстве конструктивных параметров) ;
- для каждого варианта (каждой точки) на имитационных моделях определяется его эффективность (вычисляются соответствующие точки $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(N)}$ в пространстве параметров эффективности).
- Эту процедуру можно представить как проведение на имитационных моделях ряда экспериментов.

Результаты экспериментов затем
обрабатываются для получения

функций отклика вида :

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(k_1, k_2, \dots, k_\alpha); \\ x_2 = \varphi_2(k_1, k_2, \dots, k_\alpha); \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(k_1, k_2, \dots, k_\alpha), \end{cases}$$

- где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор показателей эффективности объекта ;
- $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_\alpha)$ – вектор определяющих конструктивных параметров объекта, подлежащих оптимальному выбору в процессе формирования его облика.

Реальные зависимости показателей эффективности от конструктивных параметров имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(k_1, k_2, \dots, k_\alpha); \\ x_2 = f_2(k_1, k_2, \dots, k_\alpha); \\ \dots \\ x_n = f_n(k_1, k_2, \dots, k_\alpha) \end{cases},$$

и, как правило, носят **сложный характер**.

А функции отклика φ_i представляют собой **простые** аналитические выражения (например, **полиномы заданной степени**).

Простота функций отклика $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ позволяет использовать их в дальнейшем при выделении **доминирующих решений** по показателям x_1, x_2, \dots, x_n .

- Для правильного формирования функций отклика используется специальная методология, называемая планированием эксперимента.
- Она заключается в выборе **числа опытов** и **условий** их проведения, необходимых и достаточных для получения функций отклика с требуемой точностью.
- Под **количеством опытов** N в нашем случае понимается количество вариантов (точек), прогоняемых через сложные имитационные математические модели, а под **условиями проведения** – конкретные значения конструктивных параметров в этих точках.
- Значения конструктивных параметров в i -й точке будем обозначать

$$k^{(i)} = (k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \dots, k_\alpha^{(i)})$$
- и называть их факторами.

Достоинствами методологии планирования эксперимента являются:

- ✓ стремление к минимизации общего количества опытов;
- ✓ одновременное варьирование всех факторов СТС;
- ✓ использование формальных алгоритмов при проведении планирования эксперимента.

Различают **полный** и **дробный** факторный эксперименты

ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

- В полном факторном эксперименте (ПФЭ) исследуется **один параметр** и реализуются **все возможные сочетания уровней факторов**.
- **Главный принцип построения полного факторного эксперимента** состоит в том, что каждый фактор (каждый конструктивный параметр) k_i **варьируется на двух уровнях**, т.е. может принимать всего два значения:
- k_{imax} – **верхний уровень** или k_{imin} – **нижний уровень**.
- Очевидно, что необходимое число точек (**число опытов**) для реализации двухуровневого полного факторного эксперимента $N = 2^\alpha$, где α – число факторов.

- Половина разности между верхним и нижним уровнями называется *интервалом варьирования*.
- Интервал варьирования должен быть больше погрешности измерения уровня фактора (**ограничение снизу**), а верхний и нижний уровни фактора не должны выходить за область его определения (**ограничение сверху**).

ПФЭ позволяет получить математическую модель исследуемого объекта в виде уравнения множественной регрессии или :

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n b_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=k+1}^n b_{ikl} x_i x_k x_l + \dots, \quad (1)$$

где b_0 – свободный член; b_i , b_{ik} , b_{ikl} – коэффициенты уравнения множественной регрессии.

Так, например, при $n = 2$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2,$$

при $n = 3$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Модели (1) обычно называют регрессионными, а коэффициенты b_0 , b_i , b_{ik} , b_{ikl} , ... – коэффициентами уравнения регрессии.

Регрессия – понижение порядка полинома функции отклика путем использования не обязательно всех результатов эксперимента, а на основе знания физики поведения СТС.

- В зависимости от объема априорной информации в ММ включают не все, а лишь некоторые взаимодействия **первого порядка**, иногда – **взаимодействия второго порядка** и очень редко – **взаимодействия выше третьего порядка**.
- Связано это с тем, что учет всех взаимодействий приводит к громоздким расчетам.